# COLEÇÃO DE PESQUISAS DO PETMAT

Departamento de Matemática

Centro de Ciências Exatas

**Universidade Estadual de Londrina**

2021

Número 2

UEL

PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

PET

FNDE

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

# EXPEDIENTE



# EDITORES



# PERIODICIDADE

Anual

# NÚMERO ATUAL


n. 2 (2021): Coleção de Pesquisas do PETMAT
Acesse: http://www.uel.br/programas/petmat/pages/colecao-de-pesquisa/numero-2-2021.php


# RESPONSÁVEL PELA PUBLICAÇÃO


Grupo PET Matemática
Pró-Reitoria de Graduação
Universidade Estadual de Londrina
Rodovia Celso Garcia Cid | Pr 445 Km 380 | Campus Universitário
Cx. Postal 10.011 | CEP 86.057-970 | Londrina - PR


CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAD
Pró-Reitoria de Graduação

**Coleção de Pesquisas do PETMAT**
**Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho**
Universidade Estadual de Londrina
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Rodovia Celso Garcia Cid (Pr 445), Km 380
Campus Universitário
CP 10.011
CEP 86.057-970
Londrina, PR
Brasil

Publicação on-line
ISSN 2764-829X
http://www.uel.br/programas/petmat/pages/colecao-de-pesquisa.php

# PETIANOS

**TUTOR PROF. DR.**
**PAULO ANTONIO LIBONI FILHO**

**ARTHUR GRACIOLI ACHING**

**ALLYSSON ANTONUCCI DE CAMPOS**

**ANA CLARA DE PONTES MARTINS**

**BELLA ROCXANE MARTINS FIGLIAGGI**

**CATHARINA DE MOURA MOREIRA**

**FELIPE MANCINE RAMOS**

**GUSTAVO SYLVIO DE PAULA MENANI**

**KALEL BISPO GIMENEZ DE ARAUJO**

**LEONARDO DE ALMEIDA CARVALHO**

**LEONARDO GUSTAVO RONCHIN ALVES**

**LUANA AYUMI TAMURA**

**PEDRO SILVA BUFALO**

**VITOR PEREIRA MATIAS**

# Sumário

**TOPOLOGIA E TEOREMAS DE SEPARAÇÃO**

# Editorial

O Programa de Educação Tutorial (PET) é desenvolvido em grupo de estudantes de graduação sob a tutoria de um docente. As ações executadas pelo grupo são pautadas pelo princípio da indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão. Grande parte das atividades executadas pelos estudantes são coletivas e transversais, como organização de eventos, monitoria acadêmica, elaboração de material didático entre outras.

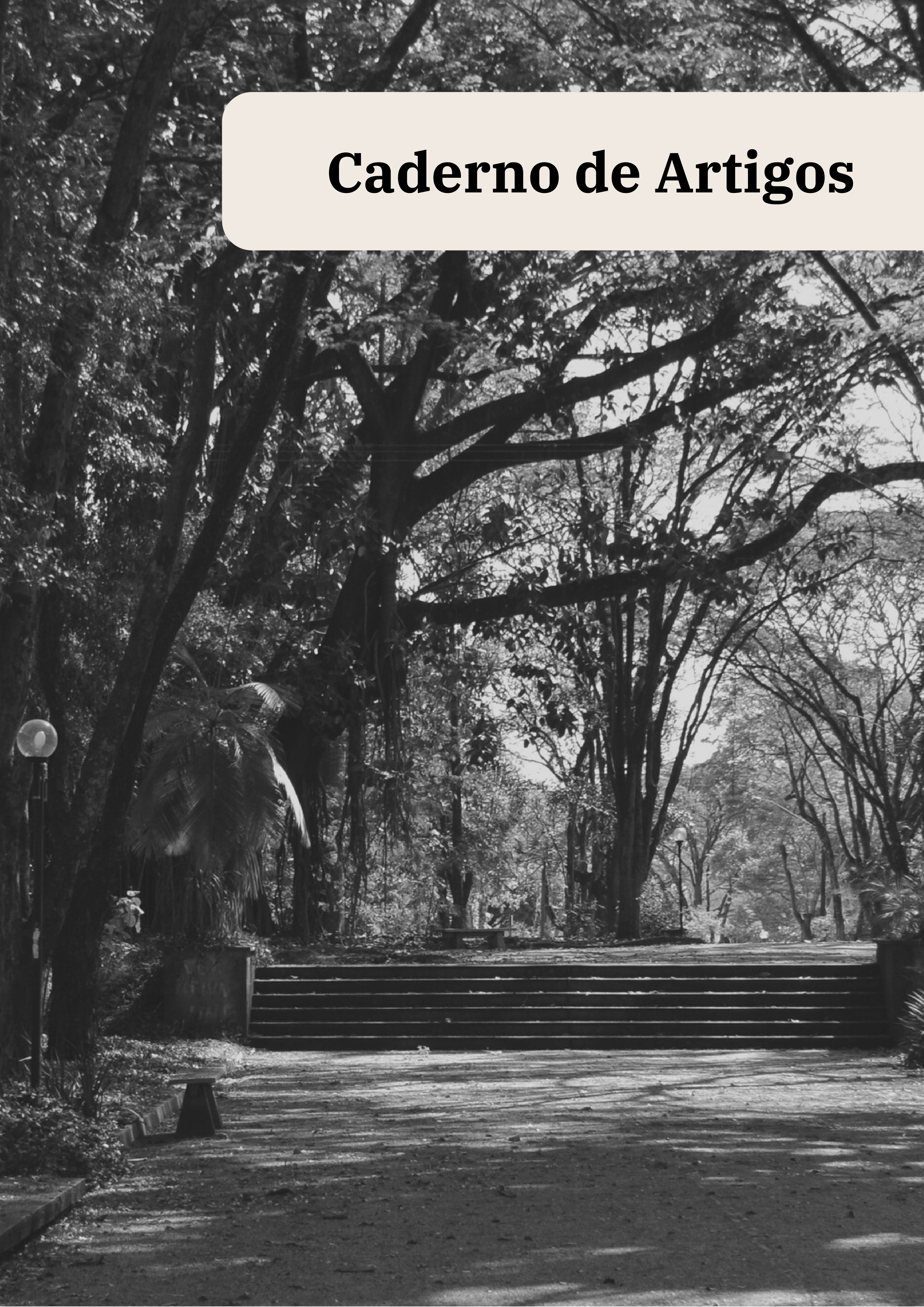
Ainda que grande parte das atividades sejam realizadas de modo coletivo, existem também as atividades individuais que devem ser realizadas por todos os estudantes do grupo. Neste âmbito, destacamos o nosso programa de iniciação científica (IC) e colaboração em projetos de pesquisa. Todos os estudantes petianos, bolsistas ou não, devem realizar uma IC ou, ao menos, efetivamente colaborar em projetos de pesquisa de docentes. Os petianos são livres e autônomos para escolherem temas de pesquisa e buscarem docentes de sua afinidade, sem interferência ou veto do tutor.

Como consequência da autonomia dos petianos, os temas de pesquisa resultam em um rica variação que reflete o próprio ecossistema heterogêneo do nosso Grupo PET, incluindo temas de Matemática Pura e Aplicada (Análise, Topologia Geral, Espaços Métricos, Geometria e Simulação Numérica) e também em Educação Matemática (Formação Continuada de Professores que Ensinam Matemática e Raciocínio Matemático). Os estudantes e seus respectivos orientadores, ao desenvolverem seus projetos, são convidados a publicarem seus trabalhos nesta Coleção de Pesquisas do Grupo PETMAT — de forma a registrar e documentar todo o esforço envolvido na execução dos projetos.

Por fim, o PETMAT gostaria de agradecer a todos os docentes envolvidos na orientação de nossos estudantes.

Prof. Dr. Paulo Liboni
*Tutor do PETMAT*

# Caderno de Artigos



# ESTRATIFICAÇÃO E COMPARAÇÃO RACIAL, DE GÊNERO E ESCOLAR DO GRUPO PET MATEMÁTICA E CURSO DE MATEMÁTICA DA UEL

Allysson Antonucci de Campos, Ana Clara de Pontes Martins, Arthur Gracioli Aching, Beatriz de Oliveira, Bella Rocxane Martins Figliaggi, Catharina de Moura Moreira, Gustavo Sylvio de Paula Menani, Henrique Kendi Tokura, Kalel Bispo Gimenez de Araujo, Leonardo de Almeida Carvalho, Leonardo Gustavo Ronchin Alves, Luana Ayumi Tamura, Paulo Fernando Mercadante Damazio, Pedro Silva Bufalo, Vitor Pereira Matias

*Estudantes*

Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho

*Orientador(a)*

## RESUMO

Este artigo tem o objetivo de descrever uma pesquisa a respeito do Perfil Socioeconômico, Racial e de Gênero dos estudantes do curso de matemática, e verificar a representatividade entre os integrantes do Programa de Educação Tutorial (PET) de matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) e os discentes dos cursos de matemática. A motivação desse trabalho se deve pela necessidade dos grupos PETs promoverem ações afirmativas em seu meio acadêmico. A pesquisa tem caráter qualitativa, assim, optamos por seguir as seguintes etapas: pesquisa bibliográfica, construção do formulário, coleta de dados dos discentes do curso, análise dos dados obtidos e organização dos resultados na composição do artigo. Na análise dos dados, comparamos as informações referentes ao gênero, etnia, trajetória acadêmica do Ensino Médio, tipo de curso pré-vestibular, modalidade de ingresso no Ensino Superior e habilitação dos alunos do curso com os dados dos petianos. O estudo evidenciou que em certas categorias o grupo PET e o curso possuem mesmas proporções, por exemplo gênero, enquanto em Habilitação essas proporções apresentam diferenças significativas.

**Palavras-chave:** Programa de Educação Tutorial, Ações afirmativas, Representatividade, Ensino Superior e Cotas.

## ABSTRACT

This article aims to describe a research on the Socioeconomic, Racial and Gender Profile of students in the mathematics course, and to verify the representativeness among the members of the Tutorial Education Program (PET) of mathematics at the State University of Londrina (UEL). ) and students of mathematics courses. The motivation of this work is due to the need for PETs groups to promote affirmative actions in their academic environment. The research has a qualitative character, so we chose to follow the following steps: bibliographic research, construction of the form, collection of data from the course students, analysis of the data obtained and organization of the results in the composition of the article. In the data analysis, we compared information regarding gender, ethnicity, academic trajectory of high school, type of pre-university course, type of admission to higher education and qualification of students in the course with data from petianos. The study showed that in certain categories the PET group and the course have the same proportions, for example gender, while in Qualification these proportions show significant differences.

**Keywords:** Tutorial Education Program, affirmative actions, representativeness, college and quotas.

# 1 Introdução

O Brasil é um dos países com maior diversidade cultural e, segundo o artigo quinto da Constituição de 1988, "Todos são iguais perante a lei, sem distinção de qualquer natureza, garantindo-se aos brasileiros e aos estrangeiros residentes no País a inviolabilidade do direito à vida, à liberdade, à igualdade, à segurança e à propriedade". Porém essa diversidade nem sempre é encontrada no Ensino Superior, como nos grupos do Programa de Ensino Tutorial (PET).

Para esses grupos, com a portaria nº 343 de 2013, segundo o artigo 2 inciso 8, o Ministério da Educação infere que os PETs devem contribuir com a política de diversidade na instituição de Ensino Superior-IES, por meio de ações afirmativas em defesa da equidade socioeconômica, étnico-racial e de gênero.

Analisando um cenário geral a representatividade na ciência temos que segundo dados do Ministério da Educação (2016, apud. OLIVEIRA, 2020), "em 1997 o percentual de jovens negros, entre 18 e 24 anos, que cursavam ou haviam concluído o ensino superior era de $1,8\%$, e o de pardos, $2,2\%$". Além disso em 2005, José Jorge (2005) infere que apenas $0,5\%$ dos docentes de universidades públicas eram negros. Como também, em 2010, segundo Andreia Barreto (2010), as mulheres representavam somente 31% dos participantes e 25% dos coordenadores de grupos de pesquisa de ciências exatas e da terra.

A inclusão de minorias raciais e estudantes de baixa renda, provenientes de escola pública, só veio a ser garantida em 2012, quando foi sancionada a Lei de Cotas (nº 12.711/12) pela presidente Dilma Rousseff, que assegurou a implementação de cotas no processo seletivo de ingresso em instituições federais. Além disso, as instituições estaduais e outros órgãos aderiram à ideia e implementaram cotas em suas seleções.

Nesse sentido, o grupo PET Matemática decidiu realizar uma pesquisa para analisar se os seus integrantes representam o corpo discente do curso de graduação em Matemática da UEL. Além disso, após caracterizar os alunos da graduação, pretende-se propor ações afirmativas visando o cumprimento da portaria e maior diversidade e representatividade no grupo PET.

# 2 Metodologia

O presente estudo foi realizado em cinco etapas: pesquisa bibliográfica, construção do formulário, coleta de dados dos discentes do curso, análise dos dados obtidos e organização dos resultados na composição do artigo.

Para a primeira etapa, os integrantes do grupo PET foram divididos em quatro equipes. Cada equipe deveria pesquisar e produzir um resumo sobre produções bibliográficas sobre um dos seguintes temas: cotas, critérios de cotas no ingresso de universidades, cotas nos processos seletivos de grupos PET e representatividade. Estes resumos foram discutidos e estão dispostos na seção de Resultados e Discussão.

Na segunda etapa, com base nos questionários socioeconômicos da Universidade Estadual de Londrina (UEL) e do ENEM, foi elaborado um formulário para estratificar o grupo de estudantes dos cursos de Matemática da UEL, as perguntas foram:

- Qual seu sexo?
- Como identificar a sua raça, cor ou etnia?
- Onde fez os seus estudos de Ensino Médio?
- Onde fez o curso pré-vestibular?
- Em que ano entrou no curso de Matemática na UEL?
- Por qual processo seletivo entrou em Matemática?
- Qual modalidade utilizou para ingressar na UEL?
- Qual a sua habilitação?

Para a coleta de dados, o formulário foi enviado aos alunos do curso via e-mail, com a autorização do colegiado de curso. Para a análise das informações, o grupo PET foi separado em quatro equipes de modo que cada grupo deveria propor um método para a análise de dados.

Para a comparação dos dados utilizamos a estatística em específico o Teste Qui-Quadrado de Pearson e o Teste Exato de Fisher, ao nível de significância de $\alpha = 0,10$ (10%). A escolhe destes dois métodos se deu devido a limitações do teste $\chi^2$ de Pearson quando os dados analisados estão são pequenos em relação a amostra, onde nestes casos o teste exato de Fisher nos permite analisar os dados de maneira mais adequada.

### Teste de Qui-Quadrado de Pearson

Esse teste serve para testar a hipóteses de que duas variáveis categorizadas são independentes

Para fazer o teste $\chi^2$ de Pearson, os seguintes passos devem ser seguidos.

1. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa

$$\begin{cases} H_0 : \text{Não existe associação} \\ H_1 : \text{Existe associação} \end{cases}$$

2. Fixar o nível de significância $\alpha$.

3. Apresentar os dados em uma tabela $2 \times 2$, calcular os totais marginais e o total geral como na Tabela 1

| Característica $A$ | Característica $B$ Não | Sim | Total |
|---|---|---|---|
| Não | $a$ | $b$ | $a+b$ |
| Sim | $c$ | $d$ | $c+d$ |
| Total | $a+c$ | $b+d$ | $a+b+c+d=n$ |

4. Calcular a estatística teste

$$\chi^2 = \frac{(ad-bc)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

5. Comparar o valor calculado de $\chi^2_{calc}$ com o valor tabelado $\chi^2_{calc}$ proveniente da tabela da distribuição qui-quadrado.

6. Conclusões.

**Teste Exato de Fisher**

O teste exato de Fisher tem o mesmo objetivo do teste $\chi^2$ de Pearson e ele será utilizado quando os dados analisados forem pequenos em relação a amostra.

Para aplicar este método, os seguintes passos devem ser seguidos:

1. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa

$$\begin{cases} H_0 : \text{Não existe associação} \\ H_1 : \text{Existe associação} \end{cases}$$

2. Fixar o nível de significância $\alpha$.

3. Organizar os dados em uma tabela $2 \times 2$

| Característica $A$ | Característica $B$ Não | Sim | Total |
|---|---|---|---|
| Não | $a$ | $b$ | $a+b$ |
| Sim | $c$ | $d$ | $c+d$ |
| Total | $a+c$ | $b+d$ | $a+b+c+d=n$ |

4. Em seguida, fixamos os totais e variamos as possibilidades dos valores possíveis, de modo que $x_1 + x_2 = a + b$, $x_1 + x_3 = a + c$, $x_3 + x_4 = c + d$, $x_4 + x_2 = b + d$ e $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$.

| Característica $A$ | Característica $B$ | | Total |
|---|---|---|---|
| | Não | Sim | |
| Não | $x_1$ | $x_2$ | $a + b$ |
| Sim | $x_3$ | $x_4$ | $c + d$ |
| Total | $a + c$ | $b + d$ | $a + b + c + d = n$ |

5. Calculamos a distribuição hipergeométrica de cada uma das possibilidades através das seguintes fórmula:

$$P_1 = \frac{\binom{a+b}{x_1}\binom{c+d}{x_3}}{\binom{n}{a+c}} = \frac{\binom{a+b}{x_2}\binom{c+d}{x_4}}{\binom{n}{b+d}}.$$

6. Selecionamos todas as $n$ cujas distribuições hipergeométricas resultaram em valores menores que a nossa possibilidade inicial com $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ e $x_4 = d$. A soma de todas a possibilidades selecionadas será o $p$-valor.

7. Comparação do $p$-valor com o nível de significância e conclusões.

# 3 Resultados e Discussão

## 3.1 Síntese da pesquisa bibliográfica

### Ações Afirmativas

A seguir será abordado um pouco sobre o histórico, a definição e as motivações das ações afirmativas no cenário brasileiro. Segundo o artigo Piovesan (2008), o lema "todos iguais perante a lei", carrega para os direitos o temor à diferença, originando algumas discriminações com grupos minoritários, os quais acabam por serem excluídos e esquecidos pelas leis. Com isso, surge ao lado do direito à igualdade, o direito à diferença. Desse modo, promover a igualdade é a solução para a inclusão, sendo que as ações afirmativas são um modo de cumprir esse ponto.

Pelo mesmo artigo entende-se ações afirmativas por medidas que aliviam a carga histórica de discriminação e fomentam a transformação social. Nesse sentido, enquanto as ações afirmativas são políticas benéficas à (membros) de grupos minoritários, as cotas seriam uma forma particular dessas ações, que consistem em estabelecer um determinado percentual a ser ocupado em uma área específica garantindo que minorias tenham acesso a oportunidades.

Piovesan (2008) afirma, ainda, que as reivindicações por cotas começaram a se tornar uma discussão recorrente, o principal argumento utilizado era que, em uma sociedade repleta de desigualdades sociais e raciais, o princípio do direito universal, não é suficiente para atender aos grupos sociais e étnicos excluídos e discriminados historicamente. Por pressão internacional, o Brasil foi inserido em um plano para criar políticas e mecanismos para prevenir, reparar e enfrentar a discriminação racial, xenofobia e intolerância. Políticas essas presentes em diversos processos seletivos da sociedade brasileira.

**Representatividade**

O artigo "A Cor que discrimina é a mesma que inspira: a representatividade das cotas raciais nas universidades públicas." de Ana Clara Borro Lopes (2018), apresenta, inicialmente, notável identificar as diferenças físicas existentes entre os brasileiros. No entanto, as diferenças por cor ou por raça aqui existentes não refletem apenas no campo visual, mas também no campo social.

Daí surgiu-se a necessidade de promover o grupo discriminado através da ação Estatal, capaz de provocar mudanças na mentalidade tradicional e histórica dos indivíduos acerca da diversidade e pluralidade social.

O artigo argumenta que no início das implementações das ações afirmativas no Brasil, surgiram muitos debates sobre o tema com diferentes posicionamentos. Se por um lado o movimento social negro propunha uma "discriminação positiva", do outro se deparava com aqueles que defendiam uma isonomia.

Em um segundo momento, o artigo argumenta ainda uma observação relevante sobre o sistema de implementação de cotas nas universidades públicas, pois todo esse cenário refletia um processo em que as universidades públicas, em um ritmo surpreendente, passaram a adotar multifacetados modelos de inclusão social e racial, cada qual implementando as cotas partindo de suas realidades locais, da demanda da sociedade civil ou da proposta política da própria universidade, estabelecendo os critérios através de intensos debates, dando voz às opiniões em especial dos próprios usuários do sistema.

Em um tom conclusivo, o artigo afirma que as cotas raciais tiveram uma importância que vai além da política de acesso à universidade, seus reflexos alcançaram a forma de pensar da sociedade acerca do racismo. As ações das instituições de ensino se deram de forma pragmática, a fim de gerar um avanço no pensamento social.

Segundo o artigo "Representação e representatividade nos espaços de participação cidadã." de Lizandra Serafim e Agnaldo dos Santos (2009) relação entre representantes e representação, implica que os representantes proferem em nome de uma organização, ou segmento de modo que influenciam em políticas públicas, as quais simbolizam usuários ou movimentos populares, sendo utilizados também em negociações menos solenes. Ser um representante significa defender os interesses de um movimento em que por alguma razão todas as pessoas não conseguirão se manifestar.

> A representação é, portanto, uma relação de confiança, controle, prestação de contas e autonomia entre representantes e representados e, por se dar no âmbito da política, vai depender de uma correlação de forças e vontades políticas que se colocam em discussão e negociação nos espaços de debate e deliberação como os conselhos, por exemplo.(SERAFIM; SANTOS, 2009, p.3)

Desempenhar a função de representante reclama um equilíbrio entre os interesses representados, a capacidade de negociação no espaço e o bem maior, portanto o reconhecimento de outros grupos, suas necessidades e legitimidade dos cidadãos reside na verdadeira democracia. A democracia é uma eterna construção, e seu aperfeiçoamento exige disposição contínua para avaliações.

Conforme o artigo "A função social do acesso ao ensino superior diante da sub-representatividade dos povos originários: uma análise acerca da política pública de cotas (lei Nº 12.711/2012) e da resistência indígena no Brasil" da Rocha Barcellos, Rosane Beatris Mariano, e Thomaz Delgado de David. (2016), observa-se também que a igualdade de condições, no seu aspecto tanto racial quanto étnico impacta diretamente na representatividade e na defesa de interesses da comunidade. Além disso, compreende-se que a representatividade não está necessariamente ligada ao caráter de integração à sociedade, mas sim na obtenção de influência e na interferência sobre a tomada de decisões que possam implicar em alterações benéficas para um determinado grupo.

### Ingressos nas Universidades

A partir dos anos 2000, a implementação de cotas raciais e sociais nas universidades do Brasil começam a ganhar notoriedade, visando uma igualdade social, isto é, superar as desigualdades etnico-raciais e socioeconômicas. Porém, em 2010, dados do IBGE (2010) mostram que a quantidade de negros e pardos com curso superior concluído eram menores que a de brancos.

> Entre os brasileiros de 25 anos ou mais de idade com ensino superior concluído, há 4,7% de negros e 5,3% de pardos contra 15,0% de brancos têm curso superior concluído. Ou seja, a porcentagem de negros e pardos com curso superior completo é hoje cerca de 1/3 da de brancos. Em 2009, a média de anos de estudo entre os brancos de 15 anos ou mais de idade era de 8,4, enquanto entre negros e pardos era de 6,7 anos. Os rendimentos-hora médios dos negros em 2009 era 43,7% menor do que o dos brancos. Apesar de em 2009 serem 6,9% da população, os negros eram 9,4% entre os 10% mais pobres e 1,8% entre os 10% mais ricos. (IBGE, 2010, p.228-229 apud FRIAS, 2012, p.141).

Contudo, de acordo com dados da Educafro (2012)[1], "[...] 180 instituições públicas

[1] É um projeto voltado à linha do movimento negro, que tem como principal objetivo, inserir e garantir

de ensino superior brasileiras (incluindo universidades, faculdades e institutos federais ou estaduais) ofereciam algum tipo de ação afirmativa a pobres, negros ou indígenas" (EDUCAFRO, 2012 apud FRIAS, 2012, p.130). Porém, não havia um consenso sobre o público que seria contemplado pelas cotas. Dessa forma, "[...] das 59 universidades federais, 32 ofereciam cotas para estudantes vindos de escolas públicas, 21 ofereciam cotas para negros e pardos, 19 ofereciam cotas para indígenas e 7 ofereciam cotas para portadores de deficiência." (PORTAL G1, 2012 apud FRIAS, 2012, p.130).

Pensando na qualidade de ensino dos estudantes brasileiros, aqueles que têm condição de pagar por uma educação mais qualificada, como, em geral, é o caso dos alunos de escolas particulares, os mesmos tem vantagem sobre a maior parte dos alunos de escolas públicas, porém ambos disputam pela mesma vaga no vestibular, o que caracteriza uma situação de igualdade, porém, não justa. Deste modo, o sistema de cotas nas universidades permite que uma maior diversidade de grupos tenham acesso ao ambiente universitário e sejam inseridos na sociedade, além de proporcionar para as universidades, um ambiente diversificado e com uma maior pluralidade cultural.

> Os dados do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) de 2012 confirmam tanto que o desempenho médio dos estudantes de escolas particulares é melhor do que o dos estudantes de escolas públicas quanto que o desempenho médio dos alunos brancos é melhor na comparação com o desempenho médio dos alunos negros. A nota média dos estudantes da rede privada é 17% maior do que a dos estudantes da rede pública – e os negros de escolas particulares obtiveram em média notas 15% superiores às dos negros da rede pública. Quando comparados apenas alunos das escolas públicas, a nota média entre os alunos brancos é 3% maior do que a dos negros. Quando acumulados os dois fatores, as notas tiradas pelos alunos brancos de escolas particulares são, em média, 21% superiores às dos alunos negros da rede pública (LORDELO et al., 2012 apud FRIAS, 2012, p. 147).

Em 2012 foi regulamentada a lei de cotas que estabelece a reserva de vagas nas Universidades Federais com o objetivo de diminuir a desigualdade.

---

a permanência de negros e pessoas da camada popular dentro das Universidades Públicas (Federais e Estaduais), quanto nas Universidades Particulares através das Bolsas de estudo que podem a chegar a 100%

> Em agosto, a presidente Dilma Rousseff sancionou a Lei de Cotas Sociais, 12.711, a qual determina que até agosto de 2016 todas as instituições de ensino federais deverão (1) reservar no mínimo 50% das vagas para estudantes que cursaram o ensino médio em escolas públicas, (2) que metade dessas vagas (ou 25% do total) devem ser reservadas para estudantes cujas famílias têm renda de até um salário mínimo e meio e que (3) as instituições deverão reservar nesses 50% das vagas um número de vagas para autodeclarados negros, pardos e índios no mínimo igual à proporção de negros, pardos e índios identificada pelo IBGE na unidade da federação em que estão situadas. Em resumo, 50% das vagas serão divididas entre estudantes de escolas públicas, pobres, negros, pardos ou índios e 50% será destinado à ampla concorrência. (FRIAS, 2012, p. 131).

Feres Júnior, Daflon e Campos (2012) destacam que, na Lei de Cotas, o critério do aluno ter cursado integralmente o ensino médio em escolas públicas não contempla candidatos que tenham feito, por exemplo, "[...] progressão rápida em escolas privadas, o que é comum em candidatos mais velhos que precisam trabalhar" (FERES JÚNIOR; DAFLON; CAMPOS, 2012, p. 409). Também ressaltam que:

> A lei é completamente silente a respeito da grande heterogeneidade da qualidade das escolas públicas em nosso país. Isso porque candidatos de algumas escolas de ensino médio federal e de colégios militares e de aplicação, que não raro adotam processos altamente seletivos de admissão, podem se beneficiar da reserva de vagas, constituindo assim uma competição altamente desigual para outros cotistas (FERES JÚNIOR; DAFLON; CAMPOS, 2012, p. 409).

Segundo Frias (2012) existe o argumento de que a implementação de cotas poderia diminuir a qualidade do ensino, entretanto o autor defende que não se deve levar em consideração a diminuição das notas para o ingresso e "[...] sim a capacidade acadêmica especialmente ao final do curso. O que interessa então saber é se o desempenho dos alunos cotistas durante o curso será menor do que o dos alunos não cotistas." (FRIAS, 2012, p. 148). Nesse sentido, vale ressaltar que "[...] estudos brasileiros têm apontado que o desempenho dos alunos cotistas é semelhante ou até mesmo superior ao dos não cotistas" (VILELA, 2009; IPEA, 2008 apud FRIAS, 2012, p. 148). Além disso, segundo Frias:

> [...] o objetivo primordial da universidade pública é a justiça social, cabendo a excelência acadêmica e o desenvolvimento científico funcionarem apenas como instrumentos para atingir esse objetivo. Aliás, se o objetivo primordial da educação pública não fosse a justiça social, seria muito mais difícil justificar a cobrança de impostos para garanti-la. Por isso, caso seja necessário e suficiente para estabelecer a igualdade equitativa de oportunidades, critérios meritocráticos devem ser combinados a critérios de necessidade na seleção de candidatos para universidades públicas. (FRIAS, 2012, p. 152).

A lei de cotas sancionada em 2012 descreve a quantidade de vagas reservadas para determinados estudantes, porém não apresenta os critérios que serão utilizados para a distribuição das vagas, nesse sentido:

> [...] é preciso identificar o critério mais adequado para distribuí-las, pois diferentes critérios gerarão distribuições diferentes, de maneira que o mesmo indivíduo pode entrar na universidade se o critério X for adotado, mas não entrar se o escolhido for o critério Y. A educação é um bem diferente dos outros porque ela molda a personalidade do indivíduo e determina profundamente quais oportunidades lhe estarão disponíveis. Isso faz com que a decisão sobre qual critério utilizar para distribuir as vagas em universidades públicas tenha influência fundamental sobre a vida das pessoas, principalmente porque as universidades públicas são gratuitas (logo, a melhor ou única opção para pessoas de baixa renda) e, em geral, são melhores do que as universidades privadas. (FRIAS, 2012, p. 150-151).

Embora ações afirmativas como cotas tenham acarretado um aumento significativo no número de alunos cotistas nas universidades, ainda são necessários certos ajustes para se ter uma sociedade mais justa, pois ainda que as cotas contribuam para um aumento na inclusão étnica e social, não são suficientes para extinguir a discriminação racial presente na sociedade.

> Neste contexto, acredita-se ser a política de cotas uma tentativa de minorar a realidade excludente da universidade brasileira, como também, colocar na pauta o debate sobre a democratização do acesso à universidade brasileira fazendo uma reflexão acerca do baixo número de jovens menos favorecidos que ascendem ao ensino superior brasileiro, discutindo a ampliação desse ingresso e de mecanismos mais equânimes nas políticas públicas, sem que haja perda de qualidade na formação. Esta é e tem sido a sua explicação e defesa original. (BEZERRA; GURGEL, 2012, p.2).

**Editais de processos seletivos PET's**

No cenário específico de ações afirmativas realizadas pelos grupos PETs, foram analisados 24 editais de ingresso de novos integrantes, afim de estudar a atuação dos grupos sobre o assunto. Desses processos, foi observado que os grupos realizam as ações afirmativas de duas formas: 5 grupos como critérios de desempate durante a seleção e outros 19 separam uma porcentagem das vagas cotas escolhidas pelos grupos.

Entre os que destinam vagas para as políticas de cotas, como o PET Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense, Edital (2021), os estudantes que se candidatarem as vagas precisam ter entrado na instituição através de vagas destinadas às ações afirmativas, enquanto outros grupos, como o PET Nutrição da Universidade Federal de Santa Catarina Edital (2020), apenas pediam os comprovantes para se certificar de que o candidato se enquadra na vaga.

São principalmente separados uma porcentagem de vagas para estudantes que tiveram o ensino médio em escolas públicas, estudantes que a renda familiar bruta era menor que 1,5 salários mínimos, e estudantes autodeclarados negros e pardos e ainda foi observado que alguns grupos utilizam algumas ações afirmativas mais específicas, como destinar vagas para alunos que são de zonas rurais.

Além disso, nos processos seletivos em que as ações aparecem como critério de desempate, por exemplo, PET Serviço Social Universidade Federal do Espírito Santo Edital (2019), era opcional o envio dos comprovantes.

Por fim, foram encontrados alguns editais que não tinham nenhuma menção à essas ações, é importante ressaltar o inciso VIII 7 do Artigo 2° da Portaria MEC 343/2013, que diz que os grupos PET têm que contribuir a política de diversidade por meio das ações afirmativas.

## 3.2 Análise dos dados obtidos

A coleta de dados foi realizada através de um formulário, respondido por 80 alunos do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, que não fazem parte do grupo PET Matemática UEL. Nesta pesquisa, buscou-se obter informações sobre o perfil dos estudantes do curso, as quais foram: sexo, etnia/cor/raça, percurso formativo e habilitação do curso. Além disso, os dados obtidos foram comparados aos dados dos integrantes do grupo PET Matemática da UEL, composto por 13 alunos do curso de matemática, que responderam o mesmo questionário com objetivo de saber se o grupo representa o curso.

Para a análise de dados, quantificamos as respostas dos estudantes através de tabelas e utilizamos o Teste Qui-Quadrado de Pearson e o Teste Exato de Fisher, ao nível de significância de $\alpha = 0,10(10\%)$. Inserimos os dados no software R [2] pela praticidade de comparar tantos valores e a familiaridade dos integrantes para utilizar o programa.

### Gênero

No quesito gênero, foram analisados o gênero feminino e masculino.

| Estudante | Gênero | | Total |
|---|---|---|---|
| | Masculino | Feminino | |
| Curso de Matemática | 42 | 38 | 80 |
| PET | 8 | 5 | 13 |
| Total | 50 | 43 | 93 |

A partir do teste Qui-Quadrado de Pearson, encontramos o $p$-valor $= 0,5444$, ou seja, $p$-valor $\geq \alpha$. Assim, não há associação entre alunos da matemática e sexo, isto é, as proporções de alunos do PET são iguais para sexo masculino e feminino em relação ao curso.

[2] R é um software livre para análise de dados com código aberto com uma linguagem acessível.

### Raça, cor ou etnia

Neste quesito, foram analisados cor/raça/etnia preta, parda, indígena, amarela e branca dos estudantes. Na inserção dos dados não incluímos os indígenas devido a não presença no curso e consequentemente no grupo PET. Realizamos três testes nessa categoria, comparando dois a dois: "Amarela", "Branca" e "Preta/parda"; para identificar melhor a necessidade de implementação de cotas.

- Comparação dos dados "Amarela" e "Branca"

| Estudante | Raça, Cor ou Etnia | | Total |
|---|---|---|---|
| | Amarela | Branca | |
| Curso de Matemática | 4 | 57 | 61 |
| PET | 1 | 12 | 13 |
| Total | 5 | 69 | 74 |

A partir do teste Qui-Quadrado de Pearson, encontramos o $p$-valor $= 0,8823$, ou seja, $p$-valor $\geq \alpha$. Assim, não há associação entre alunos da matemática e raça cor e etnia, isto é, as proporções de alunos do PET são iguais para as raças amarela e branca em relação ao curso.

- Comparação dos dados "Branca" e "Preta/Parda"

| Estudante | Raça, Cor ou Etnia | | Total |
|---|---|---|---|
| | Branca | Preta/Parda | |
| Curso de Matemática | 57 | 19 | 76 |
| PET | 12 | 0 | 12 |
| Total | 69 | 19 | 88 |

A partir do teste Exato de Fisher, encontramos o $p$-valor $= 0,0619$, ou seja, $p$-valor $< \alpha$. Assim, há associação entre alunos da matemática e raça cor e etnia, isto é, as proporções de alunos do PET não são iguais para as raças branca e preta/parda em relação ao curso.

- Comparação dos dados "Amarela" e "Preta/Parda"

| Estudante | Raça, Cor ou Etnia | | Total |
|---|---|---|---|
| | Amarela | Preta/Parda | |
| Curso de Matemática | 4 | 19 | 23 |
| PET | 1 | 0 | 1 |
| Total | 5 | 19 | 24 |

A partir do Teste Exato de Fisher, encontramos o $p$-valor $= 0,2083$, ou seja, $p$-valor $\geq \alpha$. Assim, não há associação entre alunos da matemática e raça cor e etnia, isto é, as proporções de alunos do PET são iguais para as raças amarela e preta/parda em relação ao curso.

**Percurso formativo**

Quanto ao percurso formativo, foram analisados onde os alunos da matemática fizeram o ensino médio e se ele foi inteiramente em escola pública ou não. Além disso, foram questionados quanto ao curso pré-vestibular e a forma de ingresso na universidade, neste caso pelo vestibular ou pelo SISU.

- Ensino Médio

No quesito onde fez o ensino médio, foram exploradas as seguintes trajetórias: integralmente em escola particular, integralmente em escola pública, maior parte em escola particular e maior parte em escola pública. Consideramos a maior parte em escola particular como sendo integralmente em escola particular e da mesma forma a maior parte em escola pública como sendo integralmente em escola pública.

| Estudante | Ensino Médio | | Total |
|---|---|---|---|
| | Particular | Pública | |
| Curso de Matemática | 31 | 49 | 80 |
| PET | 10 | 3 | 13 |
| Total | 41 | 52 | 93 |

A partir do Teste Qui-Quadrado de Pearson, encontramos o $p$-valor $= 0,01014$, ou seja, $p$-valor $< \alpha$. Assim, há associação entre alunos da matemática e onde fez o ensino médio, isto é, as proporções de alunos do PET não são iguais para o ensino médio particular e pública em relação ao curso.

**Percurso formativo**

Em relação à pré-vestibular foram analisadas as seguintes condições: particular, particular com bolsa, cursinhos populares e não fez.

- Curso Pré-Vestibular: Fez ou não fez.

| Estudante | Curso Pré-Vestibular | | Total |
|---|---|---|---|
| | Fez | Não fez | |
| Curso de Matemática | 29 | 51 | 80 |
| PET | 4 | 9 | 13 |
| Total | 33 | 60 | 93 |

A partir do Teste Qui-Quadrado de Pearson, encontramos o $p$-valor $= 0,7017$, ou seja, $p$-valor $\geq \alpha$. Assim, não há associação entre alunos da matemática e Pré-Vestibular, isto é, as proporções de alunos do PET são iguais para fazer e não fazer curso pré-vestibular em relação ao curso.

- Tipo de curso Pré-Vestibular: Particular ou Cursinho Popular.

| Estudante | Tipo de Curso Pré-Vestibular | | Total |
|---|---|---|---|
| | Particular | Cursinho Popular | |
| Curso de Matemática | 16 | 13 | 29 |
| PET | 3 | 1 | 4 |
| Total | 19 | 14 | 33 |

A partir do Teste Qui-Quadrado de Pearson, encontramos o $p$-valor $= 0,4519$, ou seja, $p$-valor $\geq \alpha$. Assim, não há associação entre alunos da matemática e categoria de curso Pré-Vestibular, isto é, as proporções de alunos do PET são iguais para particular e cursinho popular em relação ao curso.

**Processo Seletivo**

Para o processo seletivo, foram analisados o número de ingressantes pelo vestibular da UEL e o Sistema de Seleção Unificada (SISU), pois ambos oferecem semelhantes possibilidades de entrada no curso.

- Modalidade: Ampla Concorrência ou Cotas.

| Estudante | Modalidade vestibular | | Total |
|---|---|---|---|
| | Ampla Concorrência | Cotas | |
| Curso de Matemática | 42 | 38 | 80 |
| PET | 10 | 3 | 13 |
| Total | 52 | 41 | 93 |

A partir do Teste Qui-Quadrado de Pearson, encontramos o $p$-valor $= 0,479$, ou seja, $p$-valor $\geq \alpha$. Assim, não há associação entre alunos da matemática e processo seletivo, isto é, as proporções de alunos do PET são iguais para vestibular da UEL e SISU em relação ao curso.

- Ingresso na Universidade: Vestibular da UEL ou Sisu.

| Estudante | Ingresso na Universidade | | Total |
|---|---|---|---|
| | Vestibular da UEL | SISU | |
| Curso de Matemática | 57 | 23 | 80 |
| PET | 8 | 5 | 13 |
| Total | 65 | 28 | 93 |

A partir do Teste Qui-Quadrado de Pearson, encontramos o $p$-valor $= 0,4519$, ou seja, $p$-valor $\geq \alpha$. Assim, não há associação entre alunos da matemática e categoria de curso Pré-Vestibular, isto é, as proporções de alunos do PET são iguais para particular e cursinho popular em relação ao curso.

**Habilitação do curso**

Neste quesito foram analisadas às três habilitações do curso: licenciatura, bacharelado e empresarial. Embora as habilitações empresarial e concomitância tenham sido extintas no ano de 2019, quando foi realizada a pesquisa, nenhum integrante do grupo PET estava nestas modalidades. Consideramos o empresarial como parte do bacharelado e os três alunos da concomitância foram distribuídos às suas respectivas habilitações no ingresso do curso, dois do bacharelado e um da licenciatura.

| Estudante | Habilitação | | Total |
|---|---|---|---|
| | Bacharelado | Licenciatura | |
| Curso de Matemática | 38 | 42 | 80 |
| PET | 11 | 2 | 13 |
| Total | 49 | 44 | 93 |

A partir do Teste Qui-Quadrado de Pearson, encontramos o $p$-valor $= 0,01292\%$, ou seja, $p$-valor $< \alpha$. Assim, há associação entre alunos da matemática e habilitação, isto é, as proporções de alunos do PET não são iguais para bacharelado e licenciatura em relação ao curso.

# 4 Conclusão

Despertado pelo interesse de cumprir a portaria nº 343 de 2013, a qual infere a necessidade dos PETs de realizarem ações afirmativas, o trabalho inicialmente focou no estudo dos aspectos teóricos sobre ações afirmativas e representatividade. Em um segundo momento, buscamos investigar se os integrantes do grupo PET representam os discentes da graduação em Matemática. Para isso foram coletados os dados dos estudantes do curso, por meio de um formulário respondido pelos mesmo, e comparados com os dados dos petianos, através dos modelos estatísticos: Teste Qui-Quadrado de Pearson e Teste Exato de Fisher.

Com essa análise, podemos concluir que a respeito do Gênero, Raça/Cor/Etnia nas comparações "amarela com branca" e "amarela com preta/parda", Percurso formativo nas categorias "Realizado ou não o Curso Pré-vestibular" e "Tipo do Curso Pré-vestibular (particular ou público)" e Processo Seletivo o PET e o curso apresentam mesmas proporções de alunos, isto é, o programa está representando o curso o qual está inserido.

Contudo, a respeito da Raça, Cor e Etnia nas comparações "branca com preta/parda", Percurso formativo na categoria "Ensino Médio (particular ou público)" e Habilitação do curso (licenciatura ou bacharelado) o PET e o curso apresentam proporções distintas de estudantes, ou seja, nesses grupos o programa não representa o seu curso, sendo necessário então uma maior atenção para essas categorias.

Porém, os dados coletados não evidenciam os motivos que levam a essa falta de representatividade. Nesse sentido, pretendemos realizar ações as quais levam ao compreendimento de tais diferenças, como também a inserção desses grupos no Programa.

# Referências Bibliográficas

[1] BARRETO, Andréia: A mulher no ensino superior distribuição e representatividade, Cadernos do GEA,jul/dez 2014

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Portaria Nº 343, de 24 de abril de 2013. Dispõe sobre o Programa de Educação Tutorial-PET. Diário Oficial da União, Brasília (DF), 25 de abril de 2013.

[3] FRIAS, Lincoln, As cotas raciais nas universidades públicas são injustas?, Educafro (2012)

[4] LOPES, Ana Clara Borro. A Cor que discrimina é a mesma que inspira: a representatividade das cotas raciais nas universidades públicas. 2018. 33 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Direito) – Faculdade de Direito e Relações Internacionais, Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS, 2018.

[5] PIOVESAN, Flávia. Ações afirmativas no Brasil: desafios e perspectivas. Revista de Estudos Feministas, Florianópolis, v. 16, n. 3, p. 887-896, Dec. 2008 Santos Filho, Serafim & Barros, Maria & Gomes, Rafael. (2009). A Política Nacional de Humanização como política que se faz no processo de trabalho em saúde. Interface - Comunicação, Saúde, Educação. 13. 10.1590/S1414-32832009000500012.

[6] FERES JÚNIOR, João; DAFLON, Verônica Toste; CAMPOS, Luiz Augusto. Ação afirmativa, raça e racismo: uma análise das ações de inclusão racial nos mandatos de Lula e Dilma. Revista de Ciências Humanas, Viçosa, v. 2, n. 2, p. 399-414, jul./dez. 2012.

[7] BEZERRA, Teresa Olinda Caminha; GURGEL, Claudio Roberto Marques. A política pública de cotas em universidades, enquanto instrumento de inclusão social. Revista Pensamento & Realidade. UFF. Ano XV – v. 27 n° 2/2012.

[8] CARVALHO, José Jorge Inclusão Étnica e Racial no Brasil. A Questão das Cotas no Ensino Superior. São Paulo: Attar Editorial, 2005. CONFERIR.

[9] DA ROCHA BARCELLOS, Rosane Beatris Mariano, et al. A função social do acesso ao ensino superior diante da sub-representatividade dos povos originários: uma análise acerca da política pública de cotas (lei Nº 12.711/2012) e da resistência indígena no Brasil. Barbarói, 2016, 47: 107-124.

[10] SERAFIM, Lizandra; SANTOS, Agnaldo dos. Representação e representatividade nos espaços de participação cidadã. São Paulo, Instituto Pólis, 2009.

[11] PET Engenharia de Produção , Edital de seleção para novos ingressantes. Universidade Federal Fluminense. 14 de abril de 2021.

[12] PET Serviço Social, Edital de seleção para novos ingressantes. Universidade Federal do Espírito Santo. 22 de julho de 2019.

[13] PET Nutrição, Edital de seleção para novos ingressantes. Universidade Federal de Santa Catarina. 03 de junho de 2020.

# CARACTERIZAÇÃO DOS FUNCIONAIS LINEARES DEFINIDOS NO ESPAÇO DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

Allysson Antonucci de Campos
*Estudante*

Rodrigo Nunes Monteiro
*Orientador(a)*

## RESUMO

O principal objetivo do presente projeto é enunciar, demonstrar e apresentar uma aplicação do Teorema de Hanh-Banach. O Teorema de Hahn-Banach é um dos principais resultados da Análise Funcional e, de forma resumida, estabelece condições necessárias que permitem estender um funcional linear definido em um subespaço vetorial a todo o espaço vetorial. Sendo a aplicação um dos objetivos, o Teorema de Hahn-Banach será usado como ferramenta para determinar uma fórmula de representação para os funcionais lineares limitados, estes com domínio no espaço das funções contínuas definidas em intervalos compactos. Neste caso, a representação é definida em termos da integral de Riemann-Stieltjes.
**Palavras-chave:** Funcionais lineares; Funções contínuas; Teorema de Hahn-Banach.

## ABSTRACT

The main objective of this project is to demonstrate and present an application of the Hanh-Banach Theorem. The Hahn-Banach Theorem is one of the main results of Functional Analysis and, in short, the necessary conditions that allow to extend a linear defined functional in a vector subspace to the entire vector space. Since the application is one of the objectives, the Hahn-Banach Theorem will be used as a tool to determine a representation formula for the necessary linear results, these with domain in the space of the continuous functions defined in compact intervals. In this case, the representation is defined in terms of the Riemann-Stieltjes integral.
**Keywords:** Linear Functional; Continuous functions; Hahn-Banach Theorem.

# 1 Espaços métricos

Antes de definirmos um espaço métrico, vamos definir o que é uma métrica.

## 1.1 Métrica

**Definição 1.1. Métrica**

Uma métrica em um conjunto X nada mais é do que uma função $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}$, que associa cada par ordenado de elementos $(a, b) \in \mathrm{X}$ a um número real $d(a, b)$, de modo que para quaisquer $a, b, c \in \mathrm{X}$, sejam satisfeitas as seguintes condições:

(i) $d(a, b) \geq 0$;

(ii) Se $a \neq b$ então $d(a, b) > 0$;

(iii) $d(a, b) = d(b, a)$;

(iv) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

## Observações

- Os elementos de X são chamados de pontos;
- Uma métrica também é chamada de função distância;
- Note que é possível generalizar a condição (iv) para qualquer $n \in \mathbb{N} : n \geq 3$, isto é, dados $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathrm{X}$, vale que:

$$d(a_1, a_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d(a_j, a_{j+1}).$$

Com efeito, afim de aplicarmos o princípio de indução matemática, provaremos que a proposição

$$D(n) : d(a_1, a_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d(a_j, a_{j+1})$$

satisfaz as seguintes hipóteses:

(a) $D(3)$ é verdadeira;

(b) $\forall\ k \geq 3$, se $D(k)$ é verdadeira, então $D(k+1)$ também é verdadeira.

Prova (a): De fato, pela condição (iv) da definição de métrica,

$$d(a_1, a_3) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3).$$

Portanto, $D(3)$ é verdadeira.

Prova (b): Seja $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 3$ e suponha que $D(k)$ é verdadeira, ou seja:

$$D(k) : d(a_1, a_k) \leq \sum_{j=1}^{k-1} d(a_j, a_{j+1}).$$

Devemos provar que $D(k+1)$ também é verdadeira, isto é:

$$D(k+1) : d(a_1, a_{k+1}) \leq \sum_{j=1}^{k} d(a_j, a_{j+1}).$$

Vejamos,

$$\begin{aligned} d(a_1, a_k) &\leq \sum_{j=1}^{k-1} d(a_j, a_{j+1}) \\ \Rightarrow d(a_1, a_k) + d(a_k, a_{k+1}) &\leq \sum_{j=1}^{k} d(a_j, a_{j+1}). \end{aligned}$$

Aplicando a condição (iv) da definição de métrica, temos:

$$d(a_1, a_{k+1}) \leq \sum_{j=1}^{k} d(a_j, a_{j+1}).$$

Logo, $D(k+1)$ é verdadeira, e consequentemente, para todo natural $n \geq 3$,

$$d(a_1, a_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d(a_j, a_{j+1}).$$

## 1.2 Espaço métrico

**Definição 1.2. Espaço Métrico**
Um espaço métrico é um par $(\mathrm{X}, d)$, onde X e $d$ são respectivamente, um conjunto e uma métrica definida no mesmo.

## 1.3 Exemplos de espaços métricos

*Exemplo* 1.1 (A reta $\mathbb{R}$). Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e a métrica $d$ definida da seguinte maneira:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Nestas condições, $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

*Exemplo* 1.2 (O plano $\mathbb{R}^2$). O plano $\mathbb{R}^2$, também chamado de **espaço euclidiano** $\mathbb{R}^2$, dotado da **métrica euclidiana** definida da seguinte maneira:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j)^2}$$

é um espaço métrico. Para provarmos isso, basta mostrar que $d$ satisfaz as condições de (i) à (iv) da definição de Métrica. É fácil ver que as condições de (i) à (iii) são satisfeitas. Portanto, vamos mostrar somente a condição (iv):

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Antes de mostrarmos a validade dessa condição, vamos enunciar e mostrar a veracidade da **desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^n$**. Sejam $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ com $x_j$,$y_j$ $(1 \leq j \leq n)$, então:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right). \tag{2.1}$$

De fato, considere a função $f(t) = (x_1 t - y_1)^2 + (x_2 t - y_2)^2 + \cdots + (x_n t - y_n)^2$. Como $f$ é composta pela soma de quadrados, temos que $f \geq 0$. Expandindo e reagrupando os termos de $f$, obtemos:

$$f(t) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right) t + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right).$$

Observe que $f(t)$ é uma equação quadrática, ou seja, uma parábola. Como $f(t) \geq 0$, temos que o gráfico pode se comportar de duas maneiras, seja tocando o eixo $x$ (duas raízes iguais), ou ficando acima do eixo (raízes complexas). Em ambos os casos temos $\Delta \leq 0$, e consequentemente,

$$\begin{aligned}
\Delta = \left(-2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 - 4\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) &\leq 0 \\
= 4\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 - 4\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) &\leq 0 \\
\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)&.
\end{aligned}$$

Note que o caso onde vale a igualdade ocorre somente quando $f$ possui duas raízes reais iguais. Além disso, $f(t) = (x_1 t - y_1)^2 + (x_2 t - y_2)^2 + \cdots + (x_n t - y_n)^2 = 0$ ocorre somente quando

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j t - y_j)^2 = 0 \Rightarrow x_j t - y_j = 0 \Rightarrow t = \frac{y_j}{x_j},$$

isto é, quando $t = \dfrac{y_j}{x_j}$ é constante para todo $1 \leq j \leq n$.

Com a desigualdade de Cauchy-Schwarz agora em mãos, podemos mostrar que (iv) é verdadeira, ou seja:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{2}(x_j - z_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{2}(y_j - z_j)^2}.$$

Com efeito, observe que

$$\begin{aligned}
[d(x,z)]^2 &= \sum_{j=1}^{2}(x_j - z_j)^2 = \sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j + y_j - z_j)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j)^2 + 2\sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j)(y_j - z_j) + \sum_{j=1}^{2}(y_j - z_j)^2.
\end{aligned}$$

Aplicando (2.1), temos:

$$\begin{aligned}
[d(x,z)]^2 &= \sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j)^2 + 2\sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j)(y_j - z_j) + \sum_{j=1}^{2}(y_j - z_j)^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j)^2 + 2\sqrt{\sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j)^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{2}(y_j - z_j)^2} + \sum_{j=1}^{2}(y_j - z_j)^2 \\
&= [d(x,y) + d(y,z)]^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$[d(x,z)]^2 \leq [d(x,y) + d(y,z)]^2 \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Portanto, a condição (iv) é satisfeita.

*Exemplo* 1.3 (O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$). Seja o conjunto real de todos os pares ordenados da forma $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, dotado da **métrica euclidiana** definida por:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}.$$

Nestas condições, $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

*Exemplo* 1.4 (O Espaço unitário $\mathbb{C}^n$ e o Plano Complexo). Seja o conjunto complexo $\mathbb{C}^n$ de todos os pares ordenados da forma $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, dotado da seguinte métrica:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j - y_j|^2}.$$

Nestas condições, $(\mathbb{C}^n, d)$ é um espaço métrico e é chamado de **Espaço Unitário** $\mathbb{C}^n$.

Quando $n = 1$, nós temos o **Plano Complexo** $\mathbb{C}$ com a métrica usual definida como:

$$d(x, y) = |x_j - y_j|.$$

*Exemplo* 1.5 (O espaço sequência $l^\infty$). Seja o conjunto $X$ de todas as sequências limitadas de números complexos, com elementos da forma

$$x = (x_1, x_2, \cdots) = (x_k),$$

tal que para todo $k = 1, 2, \cdots$, temos que

$$|x_k| \leq c_x,$$

onde $c_x$ é um número real que não depende de $k$, mas pode depender de $x$. Além disso, considere a métrica definida por

$$d(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|,$$

onde $y = (y_k) \in$ X e sup denota o supremo (menor cota superior).

Vamos mostrar que $(X, d)$ é um espaço métrico, isto é, mostrar que $d$ satisfaz as condições de (i) à (iv) da definição de métrica:

(i) $d(x, y) \geq 0$;

Sejam $(x_k), (y_k) \in$ X, pela definição de módulo temos que $|x_k - y_k| \geq 0$, consequentemente,

$$d(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k| \geq 0.$$

Portanto, a condição (i) é satisfeita.

(ii) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

Sejam $(x_k), (y_k) \in$ X e suponha $x_k \neq y_k$, note que podemos ter dois casos, $x_k - y_k < 0$ ou $x_k - y_k > 0$, em ambos os casos, pela definição de módulo, segue que $|x_k - y_k| > 0$. Logo,

$$d(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k| > 0.$$

Portanto, a condição (ii) é satisfeita.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

Sejam $(x_k), (y_k) \in$ X, note que

$$|x_k - y_k| = |-(y_k - x_k)| = |-1| \cdot |y_k - x_k| = |y_k - x_k|.$$

Logo,

$$d(x,y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k - x_k| = d(y,x).$$

Portanto, a condição (iii) é satisfeita.

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Sejam $(x_k), (y_k), (z_k) \in$ X, note que

$$|x_k - z_k| = |x_k - y_k + y_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k|,$$

e, deste modo,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - z_k| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k| + \sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k - z_k| \Leftrightarrow d(x_k, z_k) \leq d(x_k, y_k) + d(y_k, z_k).$$

Portanto, a condição (iv) é satisfeita.

Por (i), (ii), (iii) e (iv), podemos concluir que $d$ é uma métrica, e consequentemente, $(X, d)$ é um espaço métrico. Além disso, este espaço métrico é geralmente denotado por $l^\infty$.

*Exemplo* 1.6 (O espaço métrico discreto). Seja qualquer conjunto X, dotado da chamada **métrica discreta** definida como:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Vamos mostrar que $(X, d)$ é um espaço métrico, isto é, mostrar que $d$ satisfaz todas as condições da definição de métrica. É fácil ver que as condições de (i) à (iii) são satisfeitas. Deste modo, mostraremos apenas a condição (iv):

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Sejam $x, y, z \in$ X, por definição, temos que:

$$d(x,z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = z \\ 1, & \text{se} \quad x \neq z, \end{cases}$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y, \end{cases}$$

$$d(y,z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad y = z \\ 1, & \text{se} \quad y \neq z. \end{cases}$$

Disso, seguem os seguintes casos:

1°: Suponha $x = z = y$, neste caso, temos

$d(x,z) = 0$, $d(x,y) = 0$ e $d(y,z) = 0$. Logo, $0 \leq 0 + 0 \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

2°: Suponha $x \neq z \neq y$, neste caso, temos

$d(x,z) = 1$, $d(x,y) = 1$ e $d(y,z) = 1$.

Logo, $1 \leq 1 + 1 \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

3°: Suponha $x = z \neq y$, neste caso, temos

$d(x,z) = 0$, $d(x,y) = 1$ e $d(y,z) = 1$.

Logo, $0 \leq 1 + 1 \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

4°: Suponha $x \neq z = y$, neste caso, temos

$d(x,z) = 1$, $d(x,y) = 1$ e $d(y,z) = 0$.

Logo, $1 \leq 1 + 0 \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Consequentemente, como a desigualdade triangular é válida para todos os casos, a condição (iv) é satisfeita. Portanto, $(X,d)$ é um espaço métrico.

*Exemplo* 1.7 (Espaço $\ell^p$). Seja $p \geq 1$ um número real fixado. Por definição, cada elemento no espaço $\ell^p$ é uma sequência $x = (x_1, x_2, \cdots) = (x_j)$ de números tal que $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots$ converge. Deste modo, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty. \tag{2.2}$$

Em $\ell^p$, podemos definir a seguinte métrica,

$$d(x,y) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

Se $p = 2$, então $\ell^2$ é denominado **Espaço das sequência de Hilbert**.

Nosso próximo objetivo é mostrar que $\ell^p$ é um espaço métrico, mas antes disso, precisamos mostrar que a série

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p} \tag{2.4}$$

converge, caso contrário, as condições necessárias para ser uma métrica não serão atendidas. Visando isso, mostraremos a validade das seguintes desigualdades:

*Proposição* 1.1 (Desigualdade de Young). *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *e* $p, q > 1$ *satisfazendo* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, então*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} \geq ab,$$

*ocorrendo a igualdade se, e somente se,* $a^p = b^q$*.*

*Demonstração.* Sejam $p, q \in \mathbb{R}$, com $p > 1$, tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.5}$$

Os números $p$ e $q$ são chamados de expoentes conjugados. Disso, podemos obter

$$\frac{p+q}{pq} = 1 \Rightarrow p + q = pq \Rightarrow pq - p - q = 0 \Leftrightarrow (p-1)(q-1) = 1$$

e assim,

$$\frac{1}{(p-1)} = q - 1.$$

Considere $y = x^{p-1}$ e note que,

$$y = x^{p-1} \Rightarrow y^{\frac{1}{p-1}} = (x^{p-1})^{\frac{1}{p-1}} = x \Leftrightarrow y^{q-1} = x.$$

Agora, sejam $a, b > 0$, de tal forma que o produto $a \cdot b$ seja a área do retângulo na Figura 2.1. A seguinte desigualdade segue ao calcularmos a área por integração:

$$a \cdot b \leq \int_0^a x^{p-1}\, dx + \int_0^b y^{q-1}\, dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.6}$$

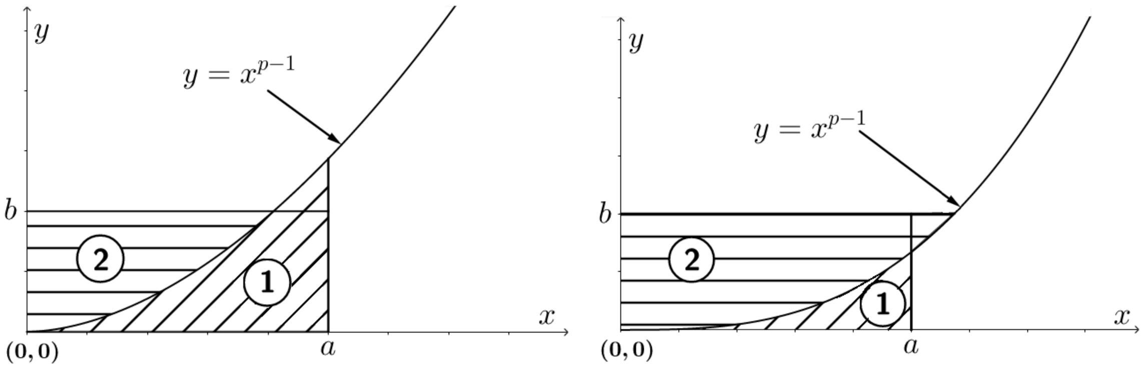



Figura 2.1: Desigualdade (2.6), onde 1 corresponde a primeira integral e 2 corresponde a segunda

Na figura à esquerda, temos que a curva está acima do ponto $(a, b)$, já na figura à direita, a mesma está abaixo. A primeira integral corresponde a área 1, e a segunda integral, a área 2. O que mostra a desigualdade de Young. Observe que a igualdade em (2.6) ocorre somente quando $b = f(a)$. □

*Proposição* 1.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}^n$ *e* $p, q > 1$*, satisfazendo* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, então*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{m=1}^{n} |y_m|^q \right)^{1/q}.$$

*A igualdade ocorre se, e somente se,* $(x_1^p, x_2^p, \cdots, x_n^p)$ *e* $(y_1^q, y_2^q, \cdots, y_n^q)$ *forem proporcionais.*

*Demonstração.* Considere $(\widetilde{x_j}), (\widetilde{y_j}) \in \mathrm{X}$, tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\widetilde{x_j}|^p = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\widetilde{y_j}|^q = 1. \tag{2.7}$$

Fixando $a = |\widetilde{x_j}|$ e $b = |\widetilde{y_j}|$, segue de (2.6) a seguinte desigualdade:

$$|\widetilde{x_j}\widetilde{y_j}| \leq \frac{1}{p}|\widetilde{x_j}|^p + \frac{1}{q}|\widetilde{y_j}|^q.$$

Se somarmos sobre $j$, usando (2.7) e (2.5), nós obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\widetilde{x_j}\widetilde{y_j}| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2.8}$$

Agora, considere $x = (x_j) \in l^p$ e $y = (y_j) \in l^q$, ambos não nulos e definamos

$$\widetilde{x_j} = \frac{x_j}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}} \quad \text{e} \quad \widetilde{y_j} = \frac{y_j}{\left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q\right)^{1/q}}. \tag{2.9}$$

Assim definido, (2.9) satisfaz (2.7), e, deste modo, aplicando (2.8), temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\widetilde{x_j}\widetilde{y_j}| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j y_j|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q\right)^{1/q}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q\right)^{1/q}.$$

O que mostra a validade da desigualdade de Hölder. Note que, se $p = 2$, então $q = 2$ e, consequentemente, tem-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^2}. \tag{2.10}$$

□

*Proposição* 1.3 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam* $(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}^n$ *e* $p > 1$, *então*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{n} |y_m|^p\right)^{1/p}.$$

*A igualdade ocorre se, e somente se,* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *e* $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *forem linearmente dependentes.*

*Demonstração.* Se $p = 1$, então a desigualdade segue imediatamente da desigualdade triangular. Se $p > 1$, então encontramos

$$\begin{aligned} |x_j + y_j|^p &= |x_j + y_j||x_j + y_j|^{p-1} \\ &\leq (|x_j| + |y_j|)|x_j + y_j|^{p-1}. \end{aligned}$$

Somando em $j$ de 1 até algum $n$ fixado, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j||x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |y_j||x_j + y_j|^{p-1}. \tag{2.11}$$

No primeiro termo da soma à direita, se aplicarmos a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j||x_j + y_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{n} (|x_m + y_m|^{p-1})^q\right)^{1/q}.$$

De (2.5), segue que $pq = p + q \Rightarrow q(p-1) = p$. Por consequência disso,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j||x_j + y_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{n} |x_m + y_m|^p\right)^{1/q}. \tag{2.12}$$

Procedendo de forma análoga para a segunda soma à direita em (2.11), obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j||x_j + y_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{n} |x_m + y_m|^p\right)^{1/q}. \tag{2.13}$$

Substituindo (2.12) e (2.13) em (2.11)

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{n} |x_m + y_m|^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{n} |x_m + y_m|^p\right)^{1/q},$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \leq \left\{\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}\right\} \left(\sum_{m=1}^{n} |x_m + y_m|^p\right)^{1/q}.$$

Dividindo ambos os lados da expressão pelo último termo à direita,

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p}{\left(\sum_{m=1}^{n} |x_m + y_m|^p\right)^{1/q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Note que $1 - 1/q = 1/p$, e deste modo,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

□

## Observação

Agora, ao fazermos $n \longrightarrow \infty$, isso acarreta na convergência das séries à direita, pois $x, y \in l^p$, e consequentemente, podemos afirmar que a série à esquerda também converge. Portanto, a série em (2.4) converge, o que prova

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^p\right)^{1/p}. \tag{2.14}$$

Conclusão: a função (2.3) é uma métrica. De fato, sejam $x, y, z \in l^p$, usando a desigualdade triangular e (2.14), iremos obter que:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - z_j|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j + y_j - z_j|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j - z_j|^p\right)^{1/p} \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Portanto, a condição (iv) da definição de métrica é satisfeita, além disso, é fácil ver que as condições de (i) à (iii) também são satisfeitas. Portanto, podemos afirmar que $\ell^p$ é um espaço métrico.

## 1.4 Conjuntos abertos, conjuntos fechados e vizinhança

Vamos definir três importantes subconjuntos do espaço métrico $(\mathrm{X}, d)$, sendo eles, a bola aberta, a bola fechada e a esfera.

**Definição 1.3** (Bolas e esferas)**.** Sejam $a_0 \in \mathrm{X}$ e $r$ um real positivo, então definimos

(a) Uma **bola aberta** como o conjunto $B(a_0, r) \equiv \{a \in \mathrm{X} \,|\, d(a, a_0) < r\}$;

(b) A **bola fechada** como o conjunto $\tilde{B}(a_0, r) \equiv \{a \in \mathrm{X} \,|\, d(a, a_0) \leq r\}$;

(c) A **esfera** como o conjunto $S(a_0, r) \equiv \{a \in \mathrm{X} \,|\, d(a, a_0) = r\}$.

Nos três casos acima, $r$ é chamado de **raio** e $a_0$ de **centro**.

## Observações

- Note que desta definição, segue imediatamente que:

- $S(a_0, r) = \tilde{B}(a_0, r) - B(a_0, r)$;
- $B(a_0, r) = \tilde{B}(a_0, r) - S(a_0, r)$;
- $\tilde{B}(a_0, r) = B(a_0, r) \cup S(a_0, r)$;

- Quando trabalhamos com espaços métricos, é vantajoso usar terminologias análogas às da geometria euclidiana. No entanto, é preciso ter cuidado ao assumir que bolas e esferas em um espaço métrico sempre irão desfrutar das mesmas propriedades que as bolas e esferas em $\mathbb{R}^3$. O que não é verdade, pois por exemplo, uma propriedade usual da esfera é a de que ela é vazia, porém, no espaço métrico discreto (1.6), temos que $S(a_0, r) = \emptyset$ se $r \neq 1$, mas no caso $r = 1$, temos $S(a_0, r) = 0$, portanto não é vazia.

**Definição 1.4** (Conjuntos abertos)**.** Um subconjunto $M$ de um espaço métrico $(X, d)$ é dito aberto se

$$\forall\ a \in M\ \exists\ \varepsilon > 0 \mid B(a, \varepsilon) \subset M.$$

Em outras palavras, $M$ será aberto se contiver uma bola aberta centrada em cada um de seus pontos.

**Definição 1.5** (Conjuntos fechados)**.** Um subconjunto $N$ de um espaço métrico $(X, d)$ é dito fechado se o seu complementar é aberto, isto é, $N^c = X - N$ é aberto.

**Definição 1.6** (Vizinhança)**.** Uma vizinhança de $a_0$ é qualquer subconjunto de X que contenha uma bola aberta $B(a_0, \varepsilon)$.

Diretamente desta definição, temos que qualquer vizinhança de $a_0$ irá conter $a_0$, além disso, se K é uma vizinhança de $a_0$ e K $\subset$ M, então M também é uma vizinhança de $a_0$.

**Definição 1.7** (Interior de um conjunto)**.** Seja K $\subset$ X, se $K$ é uma vizinhança de $a_0$, então $a_0$ é um **ponto interior** de K. O conjunto com todos os pontos interiores de K é chamado de **interior**, e é denotado por $\mathrm{K}^0$ ou $int(\mathrm{K})$. Além disso, o conjunto $int(\mathrm{K})$ é o maior conjunto aberto contido em K.

## 1.5 Continuidade

**Definição 1.8.** Sejam os espaços métricos $X = (X, d)$ e $Y = (Y, \widetilde{d})$. A aplicação $f : X \to Y$ é dita contínua em um ponto $x_0 \in X$ quando,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \widetilde{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Diremos que $f : X \to Y$ é contínua se ela for contínua em todos os pontos de $X$.

**Proposição 1.4.** *Sejam $X,Y$ espaços métricos. Se $f : X \to Y$ é contínua em um ponto $x_0 \in X$, então dada qualquer bola $B(f(x_0),\varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$.*

*Demonstração.* Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in X$. Pela continuidade de $f$ no ponto $x_0$, podemos obter $\delta > 0$, tal que

$$d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

Isto é, $f$ transforma os pontos do conjunto $d(x,x_0) < \delta$ em pontos do conjunto $\tilde{d}(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$. Segue da definição (1.3) que

$$B(x_0,\delta) \equiv d(x,x_0) < \delta \text{ e } B(f(x_0),\varepsilon) \equiv d(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

Portanto, $f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$. □

**Teorema 1.1** (Aplicação contínua)**.** *Sejam $X$,$Y$ espaços métricos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(B)$ é um conjunto aberto de* X*, para qualquer conjunto aberto $B \subset Y$.*

*Demonstração.* Suponha $f : X \to Y$ contínua e $B$ um conjunto aberto em $Y$. Se $x_0 \in f^{-1}(B)$, então $f(x_0) \in B$, além disso, como $B$ é aberto em $Y$, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0),\varepsilon) \subset B$. Ademais, como $f$ é contínua, segue que

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tal que } f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon) \subset B$$

Portanto, $B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B)$, e assim, $f^{-1}(B)$ é aberto em $X$.
Reciprocamente, se $x_0 \in f^{-1}(B)$, como $f^{-1}(B)$ é aberto em $X$, então $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon)) \subset f^{-1}(B)$, e deste modo,

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tal que } B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon)).$$

Consequentemente, $f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$. Portanto, $f$ é contínua em $x_0$, e uma vez que $x_0$ é um ponto arbitrário de $X$, temos que $f$ é contínua. □

## 1.6 Ponto de acumulação

**Definição 1.9** (Ponto de acumulação)**.** Sejam X um espaço métrico e K ⊂ X. Um ponto $x_0 \in$ X é dito **ponto de acumulação** de K se toda a vizinhança de $x_0$ contém pelo menos um ponto $y_0 \in K$ com $y_0 \neq x_0$.

### Observações

- O ponto $x_0 \in$ X pode ou não ser um elemento de K;
- Um ponto de acumulação de K também é chamado de ponto limite de K.

## 1.7 Fecho de um conjunto

**Definição 1.10** (Fecho de um conjunto)**.** O conjunto de todos os pontos de acumulação de K é chamado de **fecho** de K, e é denotado por $\overline{\mathrm{K}}$.

### Observações

- $\overline{\mathrm{K}}$ é o menor conjunto fechado que está contido em $K$.
- Quando estamos trabalhando no $\mathbb{R}^3$, o fecho de uma bola aberta $B(x_0, \varepsilon)$ é a bola fechada $\tilde{B}(x_0, \varepsilon)$, porém, quando estamos trabalhando com espaços métricos, essa propriedade nem sempre será verdadeira. Por exemplo, considere $X = (X, d)$ um espaço métrico, onde $X$ contém mais de um elemento e $d$ como sendo a métrica discreta, definida da seguinte maneira:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y. \end{cases}$$

  Seja $a \in X$ e considere a bola aberta centrada em $a$ de raio 1:

$$B(a,1) = \{x \in X : d(x,a) < 1\}.$$

  Note que o único ponto cuja distância de $a$ é menor do que 1, é o próprio $a$, logo,

$$B(a,1) = \{a\}.$$

  Além disso, o fecho de $B(a,1)$ é o conjunto de todos os pontos de acumulação do conjunto $B(a,1)$, ou seja,

$$\overline{B(a,1)} = \{a\}.$$

  Agora, vamos considerar a bola fechada centrada em $a$ com raio 1:

$$\tilde{B}(a,1) = \{x \in X : d(x,a) \leq 1\}.$$

  Observe que todo ponto de $X$ está a uma distância de 0 ou 1 de $a$, consequentemente,

$$\tilde{B}(a,1) = X.$$

  Portanto, o fecho que uma bola aberta nem sempre corresponderá a bola fechada.

## 1.8 Conjunto denso e conjunto separável

**Definição 1.11** (Conjunto denso e conjunto separável)**.** Seja X um espaço métrico e $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$. Diremos que K é **denso** em X, quando $\overline{\mathrm{K}} = \mathrm{X}$.

Quando X possuir pelo menos um subconjunto enumerável que é denso em X, diremos que X é **separável**.

## Observação

- Segue desta definição que se K é denso em X, então toda bola em X, por menor que seja, possuirá pontos de K.

### Exemplos de Espaços Separáveis

*Exemplo* 1.8 (A reta $\mathbb{R}$). A reta $\mathbb{R}$ é um conjunto separável.

Com efeito, o conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é enumerável e denso em $\mathbb{R}$. Portanto, a reta $\mathbb{R}$ é um conjunto separável.

*Exemplo* 1.9 (O espaço $l^\infty$). O espaço $l^\infty$ não é separável.

Com efeito, considere o conjunto $H \subset l^\infty$ formado por todas as sequências compostas por zeros e uns, isto é, $y = (y_k) \in H$ se, e somente se, $y_k \in \{0, 1\}$. Claramente, se $(x_k)$,$(y_k) \in H$ com $x_k \neq y_k$, então $d(x, y) = sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k| = 1$. Agora, suponha que cada um dos elementos dessas sequências estejam centrados em pequenas bolas de raio igual a $1/3$. Como o raio das bolas é menor que a distância entre os seus centros, elas não se intersectam, além disso, como $H \subset l^\infty$ possui infinitas sequências, temos que existem incontáveis bolas. Deste modo, se $M$ for um subconjunto denso em $l^\infty$, então todas essas bolas que não se intersectam devem conter elementos de $M$, e consequentemente, $M$ não pode ser enumerável. Como $M$ é um conjunto arbitrário, segue que $l^\infty$ não possui um subconjunto que é denso e enumerável. Portanto, $l^\infty$ não é separável.

*Exemplo* 1.10 (O espaço $\ell^p$). O espaço $\ell^p$ é separável.

Com efeito, seja $K \subset l^p$ o conjunto de todas as sequências da forma

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_j, 0, 0, \cdots),$$

onde $y_i \in \mathbb{Q}$, com $i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq j$. Vamos mostrar que $K$ é enumerável.

Seja o conjunto $\mathbb{Q}_i = \{(y_1, y_2, \cdots, y_j) : y_i \in \mathbb{Q} \text{ e } i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq j\}$. Considere a função:

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{Q}_i &\longrightarrow K \\ (y_1, y_2, \cdots, y_j) &\longmapsto (y_1, y_2, \cdots, y_j, 0, 0, \cdots). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{Q}$ é enumerável e as sequências de $\mathbb{Q}_i$ são formadas pelos elementos de $\mathbb{Q}$, segue que $\mathbb{Q}_i$ é enumerável. Para que $K$ seja enumerável, basta que a função $f : \mathbb{Q}_i \longrightarrow K$ seja sobrejetora, isto é,

$$\forall\, y \in K \;\exists\, x \in \mathbb{Q}_i : y = f(x).$$

De fato, se $x = (y_i) = (y_1, y_2, \cdots, y_j) \in \mathbb{Q}_i$, então

$$f((y_1, y_2, \cdots, y_j)) = (y_1, y_2, \cdots, y_j, 0, 0, \cdots) = y.$$

Portanto, $f$ é sobrejetora, e consequentemente, $K$ é enumerável. Agora, vamos mostrar que $K$ é denso em $\ell^p$. Com efeito, seja $x = (x_i) \in l^p$ arbitrário, como $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ converge, se pegarmos apenas os termos a partir de um certo $i$, a distância entre os termos se torna cada vez menor, de tal forma que para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um $n(\varepsilon)$ tal que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Além disso, como o conjunto dos racionais é denso em $\mathbb{R}$, para cada $x_i$ existe um racional $y_i$ próximo o suficiente para que possamos encontrar um $y \in K$ que satisfaça

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

E, consequentemente,

$$[d(x, y)]^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i| < \varepsilon^p \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon,$$

ou seja, a distância entre quaisquer elementos $x \in l^p$ e $y \in K \subset l^p$ é menor que $\varepsilon$. Logo, $K$ é denso em $\ell^p$, e portanto, $\ell^p$ é separável.

## 2 Convergência, Sequência de Cauchy e Completude

**Definição 2.1** (Sequência convergente)**.** Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)$ em $X$ é dita convergente se existe um $a \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0.$$

Neste caso, $a$ é chamado de **ponto limite** ou **ponto de acumulação** de $(x_n)$, e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

ou simplesmente,

$$x_n \longrightarrow a.$$

## Observações

- Uma sequência $(x_n)$ não convergente é dita divergente;
- A definição de convergência usando métrica é bem similar a definição de convergência em $\mathbb{R}$, isto é, $x_n \longrightarrow a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)$.

**Lema 2.1** (Fronteira e limite)**.** *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico, então:*

*(a) Toda sequência convergente em $X$ é limitada;*

*(b) Se uma sequência possui limite em $X$, esse limite é único. ;*

*(c) Se $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow b$ em $X$, então $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(a, b)$.*

*Demonstração.* (a) Seja $(x_n)$ uma sequência convergente em $X$ com $x_n \longrightarrow a$. Deste modo, tomando $\varepsilon = 1$, podemos encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, temos $d(x_n, a) < 1$. Além disso, considere $k = max\{d(x_1, a), \cdots, d(x_{n_0}, a)\}$. Deste modo, para todo $n$, podemos escrever $0 \leq d(x_n, a) < 1 + k$. Portanto, a sequência é limitada.

(b) Suponha $x_n \longrightarrow a$ e $x_n \longrightarrow b$ em $X$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Além disso, existe também $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, b) < \varepsilon$. Tomando $n > \max\{n_0, n_1\}$, podemos escrever $d(x_n, a) + d(x_n, b) < 2\varepsilon$. Como toda métrica é comutativa, segue que $d(x_n, a) = d(a, x_n)$, consequentemente, usando a desigualdade triangular, obtemos

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon.$$

Como $d(a, x_n) \longrightarrow 0$ e $d(x_n, b) \longrightarrow 0$, segue que

$$0 \leq d(a, b) \leq 0 + 0 < 2\varepsilon.$$

Portanto, $a = b$.

(c) Suponha que $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow b$ em $X$. Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, a) + d(a, b) + d(b, y_n) \Rightarrow d(x_n, y_n) - d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(b, y_n).$$

Além disso,

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,b) \Rightarrow d(a,b) - d(x_n,y_n) \leq d(a,x_n) + d(y_n,b)$$

Logo,

$$|d(x_n,y_n) - d(a,b)| \leq d(x_n,a) + d(y_n,b).$$

Como $d(x_n,a) \longrightarrow 0$ e $d(y_n,b) \longrightarrow 0$, segue que,

$$0 \leq |d(x_n,y_n) - d(a,b)| \leq 0 + 0.$$

Consequentemente, $d(x_n,y_n) - d(a,b) = 0$. Portanto, $d(x_n,y_n) \longrightarrow d(a,b)$.

□

**Definição 2.2** (Sequências de Cauchy e espaços métricos completos)**.** Seja $X = (X,d)$ um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)$ em $X$ será uma sequência de Cauchy se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N} : m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon.$$

Se toda sequência de Cauchy em $X$ convergir, então $X$ será um **espaço métrico completo**.

*Exemplo* 2.1 (A reta $\mathbb{R}$). A reta $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

*Demonstração.* Afim de demonstrar que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge, vamos considerar os seguintes resultados antes.

*Lema* 2.2. *Toda sequência convergente em $\mathbb{R}$ é de Cauchy.*

*Demonstração.* Seja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n_0 \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$m,n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. □

*Lema* 2.3. *Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é limitada.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$. Em particular, para $m = n_0 + 1$, se $n \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_0+1} - x_n| < 1$, ou seja, $x_n \in (x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1)$.

Sejam $\alpha$ o menor e $\beta$ o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1\}$. Temos que, $(x_n) \in [\alpha, \beta]$. Logo, $(x_n)$ é limitada. □

*Lema 2.4. Se uma sequência de Cauchy $(x_n)$ em $\mathbb{R}$ possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$, então $x_n \longrightarrow a$.*

*Demonstração.* Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Além disso, existe $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n1} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}\max\{n, n_1\} > n_0 \Rightarrow |x_n - a| = |x_n - x_{n1} + x_{n1} - a| &\leq |x_n - x_{n1}| + |x_{n1} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto, $x_n \longrightarrow a$. □

Agora, podemos concluir que $\mathbb{R}$ é completo. Com efeito, seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pelo Lema (2.3), ela é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass, a sequência possui uma subsequência convergente. Por fim, segue-se do Lema (2.4) que toda sequência de Cauchy $(x_n)$ em $\mathbb{R}$ converge.

Consequentemente, a reta $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

□

A seguir iremos ver um resultado que diz que toda sequência convergente será uma sequência de Cauchy. Neste ponto, um certo cuidado é necessário com este conceito, pois quando estamos trabalhando com números reais por exemplo, a recíproca deste teorema é válida, isto é, se uma sequência é de Cauchy, então ela será convergente, no entanto, quando trabalhamos com espaços métricos, isso nem sempre é verdade. Com efeito, considere o espaço métrico $X = (X, d)$, onde $X = (0, 1]$, com a métrica usual definida como $d(x, y) = |x - y|$ e a sequência $(x_n) \in X$ tal que $x_n = 1/n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Note que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy, porém, o ponto 0 para o qual a sequência está convergindo não pertence ao conjunto $X$, ou seja, a sequência não converge em $X$.

**Teorema 2.1** (Sequência convergente)**.** *Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* Se $x_n \longrightarrow a$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deste modo, para $m, n > n_0$, temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. $\square$

**Teorema 2.2** (Fecho de um conjunto)**.** *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico e $K \neq \emptyset$ tal que $K \subset X$, nestas condições,*

*(a) $a \in \overline{K}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n) \in K$ tal que $x_n \longrightarrow a$.*

*(b) $K$ é fechado $\Leftrightarrow x_n \in K$, $x_n \longrightarrow a \Rightarrow a \in K$.*

*Demonstração.* (a) Seja $a \in \overline{K}$. Se $a \in K$ então podemos considerar a sequência $(a, a, \cdots, a) \in K$, que converge para $a$. Por outro lado, se $a \notin K$, temos que $a$ é um ponto de acumulação de $K$, deste modo, $x_n \in B(a, 1/n)$, com $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, como $1/n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, tem-se que $x_n \longrightarrow a$.

Reciprocamente, se $(x_n) \in K$ e $x_n \longrightarrow a$, então $a \in K$ ou toda vizinhança de $a$ possui pontos $x_n \neq a$, isto é, $a$ é um ponto de acumulação de $K$, logo $a \in \overline{K}$.

(b) Segue da definição que $K$ é fechado se, e somente se, $K = \overline{K}$. Consequentemente, o resto da demonstração segue diretamente de $(2.2)(a)$. $\square$

**Teorema 2.3** (Subespaços completos)**.** *Um subespaço $K$ de um espaço métrico completo $X = (X, d)$ será completo se, e somente se, $K$ é fechado em $X$.*

*Demonstração.* Suponha que $K$ seja completo, segue de $(2.2)(a)$ que para todo $a \in \overline{K}$ existe uma sequência $(x_n) \in K$ tal que $x_n \longrightarrow a$. Do Teorema 2.1, temos que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy, e assim, diremos que $x_n \longrightarrow b$, para algum $b \in K$, de $(2.1)(b)$ temos que o limite é único, logo $a = b$. Consequentemente, como $a \in \overline{K}$ é arbitrário, segue que $K = \overline{K}$. Portanto, $K$ é fechado.

Reciprocamente, suponha que $K$ seja fechado e que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em $K$. Como $X$ é completo, temos que $x_n \longrightarrow a \in X$, ou seja, de $(2.2)(a)$ segue que $a \in \overline{K}$, e por hipótese $K = \overline{K}$, sendo assim, $a \in K$. Portanto, como a sequência $(x_n)$ foi escolhida arbitrariamente, toda sequência de Cauchy converge em $K$, logo $K$ é completo. $\square$

**Teorema 2.4** (Aplicação contínua)**.** *Uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ de um espaço métrico $X = (X, d)$ até um espaço métrico $Y = (Y, \tilde{d})$ é contínua no ponto $x_0 \in X$ se, e somente se*

$$x_n \longrightarrow x_0 \Rightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x_0).$$

*Demonstração.* Suponha que $T$ seja contínua em $x_0$, isto é, dado $\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que,

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(T(x), T(x_0)) < \varepsilon.$$

Assim, se $x_n \longrightarrow x_0$, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos,

$$d(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon.$$

Portanto, $T(x_n) \longrightarrow T(x_0)$.

Reciprocamente, Suponha que $T$ não seja contínua, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe um $x \neq x_0$ tal que $d(x, x_0) < \delta$, mas $\tilde{d}(T(x), T(x_0)) \geq \varepsilon$

Deste modo, tomando $\delta = 1/n$, existe $x_n$ tal que

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{mas} \quad \tilde{d}(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Note que $x_n \longrightarrow x_0$, mas $T(x_n)$ não converge para $T(x_0)$, um absurdo. □

# 3 Exemplos de Completude

*Exemplo* 3.1 (Completude de $\mathbb{R}^n$). O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.

Com efeito, seja o espaço $\mathbb{R}^n$, dotado da métrica

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

Considere qualquer sequência de Cauchy $(x_m)$ em $\mathbb{R}^n$ com $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$m, k > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_k) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(m)} - x_j^{(k)})^2} < \varepsilon. \tag{2.15}$$

Disso, segue que

$$[d(x_m, x_k)]^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(m)} - x_j^{(k)})^2 < \varepsilon^2,$$

e, consequentemente,

$$(x_j^{(m)} - x_j^{(k)})^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}| < \varepsilon.$$

Assim, para cada $1 \leq j \leq n$ fixado, $(x_j^{AAC:(1)}, x_j^{(2)}, \cdots)$ será uma sequência de Cauchy de números reais e, consequentemente, a sequência será convergente, pois $\mathbb{R}$ é um espaço completo. Deste modo, tomando $x_j^{(m)} \longrightarrow x_j$ quando $m \longrightarrow \infty$ e definindo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, tem-se que $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, fazendo $k \longrightarrow \infty$ em (2.15), para $m > n_0$ obtemos

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon,$$

ou seja, $x_m \longrightarrow x$. Como $(x_m)$ é uma sequência de Cauchy arbitrária, tem-se que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ converge. Portanto $\mathbb{R}^n$ é completo.

*Exemplo* 3.2 (Completude de $\mathbb{C}^n$). O espaço $\mathbb{C}^n$ é completo.

Analogamente ao exemplo anterior, para o espaço unitário $\mathbb{C}^n$, cuja métrica é

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}.$$

Considere qualquer sequência de Cauchy $(x_m)$ em $\mathbb{C}^n$ com
$x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, k > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_k) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^2} < \varepsilon. \tag{2.16}$$

Disso, segue que

$$[d(x_m, x_k)]^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^2 < \varepsilon^2.$$

Com isso,

$$|x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}| < \varepsilon.$$

Assim, para cada $1 \leq j \leq n$ fixado, $(x_j^{AAC:(1)}, x_j^{(2)}, \cdots)$ será uma sequência de Cauchy de números complexos, e consequentemente a sequência será convergente, pois $\mathbb{C}$ é um espaço completo. Deste modo, tomando $x_j^{(m)} \longrightarrow x_j$ quando $m \longrightarrow \infty$ e definindo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, tem-se que $x \in \mathbb{C}^n$. Logo, fazendo $k \longrightarrow \infty$ em (2.16), para $m > n_0$ obtemos

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon,$$

ou seja, $x_m \longrightarrow x$. Como $(x_m)$ é uma sequência de Cauchy arbitrária, tem-se que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{C}^n$ converge. Portanto $\mathbb{C}^n$ é completo.

*Exemplo* 3.3 (Completude de $l^\infty$). O espaço $l^\infty$ é completo.

Com efeito, seja $(x_m)$ uma sequência de Cauchy qualquer no espaço $l^\infty$, com $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, k > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_k) = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}| < \varepsilon.$$

Logo, para cada $1 \leq j \leq n$ fixado,

$$|x_j^{(m)} - x_j^{(k)}| < \varepsilon. \tag{2.17}$$

Consequentemente, $(x_j^{AAC:(1)}, x_j^{(2)}, \cdots)$ é uma sequência de Cauchy, ou seja, a sequência será convergente pois $\mathbb{C}$ é um espaço completo. Deste modo, tomando $x_j^{(m)} \longrightarrow x_j$ quando $m \longrightarrow \infty$ e definindo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ao fazer $k \longrightarrow \infty$ em (2.17), para $m > n_0$ obtemos

$$|x_j^{(m)} - x_j| \leq \varepsilon. \tag{2.18}$$

Como $x_m = (x_j^{(m)}) \in l^\infty$, então existe $c_m \in \mathbb{R}$ tal que para todo $j$, temos $|x_j^{(m)}| \leq c_m$. Deste modo, segue da desigualdade triangular que

$$|x_j| = |x_j - x_j^{(m)} + x_j^{(m)}| \leq |x_j - x_j^{(m)}| + |x_j^{(m)}| \leq \varepsilon + c_m.$$

Logo, $x = (x_j)$ é limitada e consequentemente, $x \in l^\infty$.

De (2.18), temos

$$d(x_m, x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j^{(m)} - x_j| < \varepsilon.$$

Logo, $x_m \longrightarrow x$. Como $(x_m)$ é uma sequência de Cauchy arbitrária, tem-se que toda sequência de Cauchy em $l^\infty$ converge. Portanto $l^\infty$ é completo.

*Exemplo* 3.4 (Completude de $\ell^p$). O espaço $\ell^p$, com $1 \leq p < +\infty$ é completo.

Com efeito, seja $(x_m)$ uma sequência de Cauchy qualquer em $\ell^p$, com $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, k > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_k) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{2.19}$$

Assim, para todo $j$, temos

$$|x_j^{(m)} - x_j^{(k)}| < \varepsilon. \tag{2.20}$$

Fixando $j$ em (2.20), como a sequência é de Cauchy e $\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ são ambos completos, então

$x_n$. Agora, considere $x_j^{(m)} \longrightarrow x_j$ quando $m \longrightarrow \infty$ e definindo $x = (x_1, x_2, \cdots)$. Em (2.19), para todo $m, k > n_0$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^p < \varepsilon^p. \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

Quando $k \to \infty$, tem-se que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j^{(m)} - x_j|^p \leq \varepsilon^p. \qquad (m > n_0)$$

Fazendo $n \to \infty$, temos

$$[d(x_m, x)]^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(m)} - x_j|^p \leq \varepsilon^p$$
$$\Rightarrow \; d(x_m, x) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(m)} - x_j|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon. \qquad (m > n_0)$$

Logo, $x_m \longrightarrow x$, e note que $x_m - x = (x_j^{(m)} - x_j) \in l^p$. Como $(x_m)$ é uma sequência de Cauchy arbitrária, tem-se que toda sequência de Cauchy em $\ell^p$ converge. Portanto $\ell^p$ é completo.

# 4 Espaços Normados e Espaços de Banach

**Definição 4.1** (Espaços normados e espaços de Banach)**.** Um **espaço normado** é um espaço vetorial dotado de norma. Se além de normado o espaço for completo na métrica definida pela norma, o mesmo será chamado de **espaço de Banach**. A norma de um espaço vetorial $X$ (real ou complexo) é uma função real em $X$, cujo valor $x \in X$ será denotado por

$$\|x\| \qquad \text{(lê-se "norma de x")}$$

e possui as seguintes propriedades:

(N1) $\|x\| \geq 0, \; \forall \; x \in X$;

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \; \forall \; x \in X$;

(N3) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \; \forall \; x \in X$ e algum escalar $\alpha$;

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \; \forall \; x, y \in X$.

Uma norma em $X$ define a seguinte métrica $d$ no mesmo, que é chamada de **métrica induzida pela norma**,

$$d(x,y) = \|x - y\|. \qquad (x, y \in X)$$

Denotaremos um espaço normado por $X = (X, \|\cdot\|)$. É fácil ver que dotados das propriedades de norma, os espaços normados e espaços de Banach são espaços métricos.

## 4.1 Exemplos

*Exemplo* 4.1 (O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e o espaço unitário $\mathbb{C}^n$). $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são ambos espaços de Banach pois em (3.1) e (3.2) já mostramos que são ambos completos, além disso possuem norma definida da seguinte maneira

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2}. \tag{2.21}$$

Deste modo, a métrica induzida pela norma nestes espaços será

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right)^{1/2}.$$

Note que para o caso particular do espaço $\mathbb{R}^3$, temos o comprimento de um vetor $x \in \mathbb{R}^3$

$$\|x\| = |x| = \left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{1/2}.$$

De fato, isso ocorre pois a norma é uma generalização da noção elementar do comprimento $|x|$ de um vetor.

*Exemplo* 4.2 (O espaço $\ell^p$). O espaço $\ell^p$ é um espaço de Banach, pois em (3.4) já mostramos que é um espaço completo, além disso possui norma definida como

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}.$$

Deste modo, a métrica induzida pela norma neste espaço será

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p}.$$

*Exemplo* 4.3 (O espaço $l^\infty$). O espaço $l^\infty$ é um espaço de Banach, pois em (3.3) já mostramos que é um espaço completo, além disso possui norma definida como

$$\|x\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|.$$

**Teorema 4.1** (Subespaço de um espaço de Banach)**.** *Um subespaço $K$ de um espaço de Banach $X$ é completo se, e somente se, $K$ é fechado em $X$.*

**Definição 4.2** (Convergência de espaços normados)**.** (a) Uma sequência $(x_n)$ em um espaço normado $X$ será convergente se existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0,$$

e escreveremos $x_n \longrightarrow x$.

(b) Uma sequência $(x_n)$ em um espaço normado $X$ será de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, k > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_k\| < \varepsilon$$

# 5 Compacidade e dimensão infinita

**Definição 5.1** (Compacidade e dimensão infinita)**.** Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Dizemos que é **compacto** se toda sequência em $X$ possui uma subsequência convergente. Seja um subconjunto $K \subset X$, considerando $K$ como um subespaço de $X$, dizemos que $K$ é compacto se toda sequência de $K$ possui uma subsequência convergente cujo limite é um elemento de $K$.

**Lema 2.5** (Compacidade)**.** *Um subconjunto compacto $K$ de um espaço métrico é fechado e limitado.*

*Demonstração.* Dado $x \in \overline{K}$, segue do Teorema (2.2)(a) que existe uma sequência $(x_n) \in K$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Por hipótese, $K$ é compacto, logo $x \in K$, e como $x$ é arbitrário, temos que $K$ é fechado, pois $K = \overline{K}$. Suponha agora que $K$ não seja limitado, desta forma, existe $(y_n) \in K$ que também é ilimitada, isto é, $d(y_n, b) > n$, sendo $b$ um elemento fixado. Pelo Lema 2.1(a), como $(y_n)$ não possui uma subsequência limitada, não existe uma subsequência de $(y_n)$ que converge, um absurdo, pois $K$ é um conjunto compacto. Logo $K$ é limitado. □

## Obervação

A recíproca deste lema é falsa.

*Demonstração.* Com efeito, considere a sequência $e_n \in l^2$, onde $e_n = (\delta_{nj})$ possui o n-ésimo termo como sendo 1 e os demais como sendo 0. Como $\|e_n\| = 1$, a sequência é limitada. Os termos dessa sequência constituem um conjunto que é fechado pois não possui ponto de acumulação, e sem ponto de acumulação esse conjunto não possui uma sequência que converge. Portanto não é compacto.

□

**Teorema 5.1** (Compacidade)**.** *Se $X$ é um espaço normado de dimensão finita, qualquer subconjunto $K \subset X$ será compacto se, e somente se, $K$ é fechado e limitado.*

*Demonstração.* Teorema [2.5-3] da referência [1]. □

**Lema 2.6** (Frigyes Riesz)**.** *Sejam $Y$ e $Z$ subespaços de um espaço normado $X$. Se $Y$ é fechado e $Y \subsetneq Z$, então, para todo número real $\theta \in (0,1)$ existe um $z \in Z$ tal que*

$$\|z\| = 1\,, \qquad \|z - y\| \geq \theta. \qquad (\forall\ y \in Y\ )$$

*Demonstração.* Seja $u \in Z - Y$ e considere a distância de $u$ até o conjunto $Y$ como sendo $a$, isto é,

$$\inf_{y \in Y} \|u - y\| = a. \tag{2.22}$$

Como $Y$ é fechado por hipótese, claramente $a > 0$. Tomando qualquer $\theta \in (0,1)$, pela definição de ínfimo existe $y_0 \in Y$, tal que

$$a \leq \|u - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}.$$

Considere agora, $z = c(u - y_0)$, onde $c = \dfrac{1}{\|u - y_0\|}$. Note que $\|z\| = 1$, e como $y \in Y$, encontramos

$$\|z - y\| = \|c(u - y_0) - y\| = c\|u - y_0 - c^{-1}y\| = c\|u - v\|. \qquad (v = y_0 + c^{-1}y)$$

Note que $v \in Y$, ou seja, $\|u - v\| \geq a$. De (2.22), segue que

$$\|z - y\| = c\|u - v\| \geq ca = \frac{a}{\|u - y_0\|} \geq \frac{a}{\frac{a}{\theta}} = \theta.$$

Como $y \in Y$ é arbitrário, isso prova o Lema.

□

**Lema 2.7** (Fechamento)**.** *Todo subespaço de dimensão finita $Y$ de um espaço normado $X$ é fechado em $X$.*

**Teorema 5.2** (Dimensão finita)**.** *Se um espaço normado $X$ tiver a propriedade de que a bola fechada unitária $M = \{x : \|x\| \leq 1\}$ é compacta, então $X$ possuirá dimensão finita.*

*Demonstração.* Suponha que $M$ seja compacto e $\dim M = \infty$. Considere $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$. Note que $x_1$ gera um subespaço unidimensional $X_1$ de $X$ que é fechado pelo Lema 2.7. Além disso, como $\dim X = \infty$, então $X_1 \subsetneqq X$. Pelo Lema de Frigyes Riesz 2.6, existe um $x_2 \in X$, com $\|x_2\| = 1$ tal que

$$\|x_1 - x_2\| \geq \theta = \frac{1}{2}.$$

Os elementos $x_1, x_2$ geram um subespaço bidimensional $X_2 \subsetneqq X$, que é fechado. Pelo Lema de Frigyes Riesz 2.6, existe um $x_3 \in X$, com $\|x_3\| = 1$, tal que, para todo $x \in X$, temos

$$\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2}.$$

Em particular,

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

E prosseguindo por indução, obtemos que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2} \qquad (m \neq n)$$

Consequentemente, $(x_n)$ não pode ter uma subsequência convergente. Um absurdo, pois $M$ é compacto. Portanto, $\dim M < \infty$. □

**Teorema 5.3** (Aplicação contínua)**.** *Sejam $X, Y$ espaços métricos e $T : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua, então a imagem de um subconjunto compacto $M \subset X$ sobre $T$ é compacta.*

*Demonstração.* Seja $y_n \in T(M)$, temos que $y_n = T(x_n)$ para algum $x_n \in M$. Como $M$ é compacto, então $(x_n)$ possui uma subsequência $(x_{nk})$ que converge em $M$. Além disso, como $T$ é contínua, segue do Teorema 2.4 que a imagem de $(x_{nk})$ será uma subsequência de $y_n$ que converge em $T(M)$. Portanto, $T(M)$ é compacto. □

**Corolário 5.1** (Máximo e mínimo)**.** *Sejam $X$ um espaço métrico, uma aplicação contínua $T : M \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $M$ um conjunto compacto. Então $T$ assume* max *e* min *em $M$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema (5.3), $T(M) \subset \mathbb{R}$ é compacto, além disso, segue do Lema 2.5 que $T(M)$ é fechado e limitado. Deste modo, $T(M)$ possui $\sup T(M)$ e $inf\, T(M)$, cujas imagens inversas serão pontos de $M$, onde a imagem deles é justamente o máximo e mínimo de $T(M)$, respectivamente. $\square$

# 6 Operadores lineares

**Definição 6.1** (Operador linear)**.** Sejam $D(T) \subset X$ e $Im(T) \subset Y$. Um operador linear $T : D(T) \longrightarrow Im(T)$ é um operador que satisfaz

(a) O domínio e a imagem de $T$ são espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$;

(b) Para todo $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \text{e} \quad T(\alpha x) = \alpha T(x). \tag{2.23}$$

## Observações

- Dado um espaço vetorial $X$, denotaremos por $0_X$ o vetor nulo de $X$;
- O **núcleo** de $T$ será denotado por $Ker(T)$, isto é,

$$Ker(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0_Y\}$$

- Somente no caso de $D(T) = X$ e $Im(T) = Y$ podemos escrever $T : X \longrightarrow Y$;
- Se um operador linear $T$ satisfizer (2.23), isto é, se $T$ preservar as duas operações de um espaço vetorial, então diremos que $T$ é um **homomorfismo**.

**Definição 6.2** (Operador linear inverso)**.** Uma aplicação $T : D(T) \longrightarrow Y$ é **injetiva** se, e somente se,

$$T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad (\forall\ x_1, x_2 \in D(T))$$

ou, equivalentemente,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1) \neq T(x_2) \qquad (\forall\ x_1, x_2 \in D(T))$$

Neste caso, existe uma aplicação chamada **inversa** definida como

$$\begin{aligned} T^{-1} : Im(T) &\longrightarrow D(T) \\ y &\longmapsto x \qquad (y = T(x)) \end{aligned}$$

de forma que, todo $y \in Im(T)$ possui um correspondente $x \in D(T)$.

Para operadores lineares, essa definição se mantém, isto é, o operador linear inverso $T^{-1}$ existe se, e somente se, $T$ for injetivo, ou seja, o núcleo de $T$ deve ser constituído apenas pelo vetor nulo.

**Teorema 6.1** (Operador inverso)**.** *Sejam $X, Y$ espaços vetoriais, ambos reais ou complexos. Considere o operador linear $T : D(T) \longrightarrow Y$ com domínio $D(T) \subset X$ e imagem $Im(T) \subset Y$, desta forma,*

*(a) O operador $T^{-1} : Im(T) \longrightarrow D(T)$ existe se, e somente se,*

$$T(x) = 0_Y \Rightarrow x = 0_X;$$

*(b) Se $T^{-1}$ existe, ele será um operador linear;*

*(c) Se $\dim D(T) = n < \infty$ e $T^{-1}$ existe, então $\dim Im(T) = \dim D(T)$.*

*Demonstração.* (a) Suponha que $T(y) = 0_X \Rightarrow y = 0_Y$ e que para quaisquer $x_1, x_2 \in D(T)$, $T(x_1) = T(x_2)$, sendo $T$ linear, segue que

$$T(x_1 - x_2) = T(x_1) - T(x_2) = 0_Y$$

Por hipótese, $x_1 - x_2 = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$. Logo, $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Deste modo, $T$ é um operador injetivo e, consequentemente, existe $T^{-1}$. Reciprocamente, se $T^{-1}$ existe, então $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, pois $T$ é injetivo, e desta forma, se $x_2 = 0_X$, então

$$T(x_1) = T(0_X) = 0_Y \Rightarrow x = 0_X$$

(b) Suponha que $T^{-1} : Im(T) \longrightarrow D(T)$ exista, de (6.1)($a$), segue que o domínio de $T^{-1}$, isto é, $Im(T)$, é um espaço vetorial. Considerando $x_1, x_2 \in D(T)$, temos que

$$T(x_1) = y_1 \Rightarrow x_1 = T^{-1}(y_1) \quad \text{e} \quad T(x_2) = y_2 \Rightarrow x_2 = T^{-1}(y_2)$$

como $T$ é linear, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, vale que

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

e como $x_j = T^{-1}(y_j)$, obtemos

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}(y_1) + \beta T^{-1}(y_2)$$

Portanto, $T^{-1}$ é linear.

(c) Suponha que $T^{-1}$ exista e que $\dim D(T) = n < \infty$. Pelo Teorema 6.1, temos $\dim Im(T) \leq \dim D(T)$. Usando este mesmo teorema para $T^{-1}$, segue que $\dim D(T) \leq \dim Im(T)$. Portanto $\dim Im(T) = \dim D(T)$. □

# 7 Operadores lineares limitados e contínuos

**Definição 7.1** (Operador limitado)**.** Sejam $X, Y$ espaços normados e $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador linear. O operador $T$ é dito limitado se existe $k \in \mathbb{R}$, tal que, para todo $x \in D(T) \subset X$,

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|. \tag{2.24}$$

## Observações

A desigualdade em (2.24) nos mostra que operadores lineares limitados relacionam conjuntos limitados em $D(T)$ com conjuntos limitados em $Y$.

Um certo cuidado com a palavra "limitado" nessa parte é necessário pois é diferente do contexto de cálculo, onde funções limitadas possuíam imagens que eram conjuntos limitados.

Afim de determinar qual é o menor $k$, tal que, a desigualdade em (2.24) ainda é válida, vamos supor $x \neq 0_X$, pois $T(0_X) = 0_Y$, dessa forma,

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq k$$

note que, $k$ deve ser pelo menos maior que o supremo da expressão à esquerda definida sobre o conjunto $D(T) - \{0_X\}$. Desmo modo, o menor $k$ possível que satisfaça o desejado é justamente o supremo, que será denotado por $\|T\|$, isto é, sendo $x \neq 0$,

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}, x \in D(T) - \{0_X\} \right\}. \tag{2.25}$$

- $\|T\|$ é chamado de **norma** do operador $T$;
- Se $D(T) = \{0_X\}$, definimos $\|T\| = 0$.

**Lema 2.8** (Norma)**.** *Se $T$ um operador linear limitado, então*

*(a) Uma fórmula alternativa para a norma de $T$ é*

$$\|T\| = \sup \{\|T(x)\|, x \in D(T), \|x\| = 1\}.$$

*(b) A norma definida em* (2.25) *satisfaz as propriedades de (N1) à (N4) da Definição 4.1*

*Demonstração.* (a) Considere $\|x\| = a$ e defina $y = (1/a)x$, com $x \neq 0_X$. Dessa forma,

$$\|y\| = \frac{\|x\|}{a} = 1$$

Como $T$ linear, segue de (2.25) que

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T)} \frac{1}{a}\|T(x)\| = \sup_{x \in D(T)} \left\|T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{y \in D(T)} \|T(y)\| \qquad (x \neq 0 \,\text{e}\, \|y\| = 1)$$

escrevendo $x$ ao invés de $y$ na direita, obtemos o desejado, o que mostra $(a)$.

(b) Claramente a propriedade (N1) é satisfeita, uma vez que $\|T\| > 0$ e $\|0\| = 0$.

Além disso, se $\|T\| = 0$, temos que $T(x) = 0$ para todo $x \in D(T)$. Logo, $T = 0$, satisfazendo a propriedade (N2).

Para a propriedade (N3), seja $x \in D(T)$ e $\alpha$ um escalar, veja que

$$\begin{aligned}\sup\{\|\alpha T(x)\|, x \in D(T), \|x\| = 1\} &= \sup\{|\alpha|\|T(x)\|, x \in D(T), \|x\| = 1\}\\ &= |\alpha| \sup\{\|T(x)\|, x \in D(T), \|x\| = 1\}.\end{aligned}$$

Por fim, para propriedade (N4), note que

$$\begin{aligned}\sup\{\|(T_1 + T_2)(x)\|, x \in D(T), \|x\| = 1\} &= \sup\{\|T_1(x) + T_2(x)\|, x \in D(T), \|x\| = 1\}\\ &\leq \sup\{\|T_1(x)\|, x \in D(T), \|x\| = 1\} + \sup\{\|T_2(x)\|, x \in D(T), \|x\| = 1\}.\end{aligned}$$

□

*Exemplo* 7.1 (Operador linear limitado integral). Considere o operador $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ definido por

$$T(x) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

onde $k$ é uma função chamada de núcleo de $T$ que é assumida contínua no quadrado fechado $G = [0,1] \times [0,1]$ no plano-$t\tau$. Nestas condições, temos que $T$ é linear limitado.

*Demonstração.* Com efeito, como $k$ é continua em $[0,1] \times [0,1]$, então $k$ é limitada, digamos

$|k(t,\tau)| \leq k_0$ para todo $(t,\tau) \in G$ e $k_0 \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$|x(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |x(t)| = \|x\|$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}\|y\| = \|T(x)\| &= \max_{t\,\in\,[0,1]}\left|\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\right| \\ &\leq \max_{t\,\in\,[0,1]}\int_0^1 |k(t,\tau)x(\tau)|\,d\tau \\ &\leq k_0\|x\|\end{aligned}$$

Obtemos assim que $\|T(x)\| \leq k_0\|x\|$. Logo, segue de (2.24) que $T$ é limitado. □

**Teorema 7.1** (Dimensão finita)**.** *Se um espaço normado $X$ possui dimensão finita, então todo operador linear em $X$ é limitado.*

*Antes de demonstrarmos o Teorema 7.1, considere o seguinte lema, cuja demonstração se encontra nas páginas 72 e 73 da referência [1].*

**Lema 2.9** (Combinação linear)**.** *Seja $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores em um espaço normado $X$ de qualquer dimensão. Sendo assim, existe um número $c > 0$ tal que para quaisquer escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, temos*

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|).$$

*Demonstração.* A demonstração se encontra nas páginas 72 e 73 da referência [1]. □

*Em posse do Lema 2.9, vamos demonstrar o Teorema* (7.1).

*Demonstração.* Suponha $\dim X = n$ e seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ a base de $X$. Sejam $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \subset X$ e $T$ um operador linear em $X$, então

$$\|T(x)\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j T(e_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|T(e_j)\| \leq \max_{1\leq k\leq n}\|T(e_k)\|\sum_{j=1}^n |x_j|.$$

Aplicando o Lema 2.9 na soma da direita, obtemos

$$\sum_{j=1}^n |x_j| \leq \frac{1}{c}\left\|\sum_{j=1}^n x_j e_j\right\| = \frac{1}{c}\|x\|$$

sendo assim,

$$\|T(x)\| = \frac{1}{c}\max_{1\leq k\leq n}\|T(e_k)\|\|x\|.$$

Logo, segue de (2.24) que $T$ é um operador limitado.

□

**Definição 7.2.** Seja $T : D(T) \longrightarrow Y$ uma aplicação não necessariamente linear, com $D(T) \subset X$ e $X, Y$ espaços normados. A aplicação $T$ será contínua em $x_0 \in D(T)$, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon.$$

Se $T$ for contínuo para todo $x \in D(T)$, então diremos que $T$ é contínuo.

**Teorema 7.2** (Continuidade e limitação)**.** *Seja $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador linear, com $D(T) \subset X$ e $X, Y$ espaços normados. Deste modo,*

*(a) $T$ é contínuo se, e somente se, $T$ é limitado.*

*(b) Se $T$ é contínuo em um único ponto, então $T$ é contínuo.*

*Demonstração.* (a) Se $T(x) = 0_Y$, então a demonstração é trivial. Se $T(x) \neq 0_Y$, então $\|T\| \neq 0$. Suponha que $T$ seja limitado e considere $x_0 \in D(T)$. Dado $\varepsilon > 0$, como $T$ é linear, segue que para todo $x \in D(T)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

obtemos,

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \varepsilon.$$

Como $x_0 \in D(T)$ é arbitrário, isso mostra que $T$ é contínuo. Reciprocamente, suponha que $T$ é contínuo em algum $x_0 \in D(T)$ arbitrário. Desta forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| \leq \varepsilon. \tag{2.26}$$

Considere $y \in D(T)$, com $y \neq 0_X$ e defina

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y \Leftrightarrow x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|}y.$$

Deste modo, $\|x - x_0\| = \delta$. Sendo $T$ linear, usando (2.26) iremos obter que

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|T(y)\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|T(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|,$$

ou seja, $\|T(y)\| \leq c\|y\|$, onde $c = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$. Portanto, $T$ é limitado.

(b) Se $T$ é contínuo em um único ponto, pela recíproca do Item $(a)$ temos que $T$ é limitado, e se $T$ é limitado, também pelo Item $(a)$, segue que $T$ é contínuo. Portanto, se $T$ é contínuo em um único ponto, então $T$ é contínuo. □

**Corolário 7.1** (Continuidade e núcleo)**.** *Se $T$ é um operador linear limitado, então:*

*(a) Se $x, x_n \in D(T)$, então $x_n \longrightarrow x \Rightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x)$.*

*(b) O núcleo de $T$ é fechado.*

*Demonstração.* (a) Como $T$ é limitado, segue do Teorema 7.2 que $T$ é contínuo. Além disso, de (2.4), obtemos

$$\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

(b) Do Teorema 2.2, temos que para todo $x \in \overline{Ker(T)}$ existe uma sequência $x_n \in Ker(T)$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Consequentemente, pelo item (a) deste Corolário, segue que $T(x_n) \longrightarrow T(x)$. Além disso, $T(x) = 0$ pois $T(x_n) = 0$ e, dessa forma, $x \in Ker(T)$. Como $x \in \overline{Ker(T)}$ foi escolhido arbitrariamente, temos que $Ker(T) = \overline{Ker(T)}$. Portanto, $Ker(T)$ é fechado.

□

## Observação

Veja que a imagem de um operador linear limitado pode não ser um conjunto fechado. Com efeito, considere o operador $T : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ definido por

$$T(x) = y \quad \text{onde} \quad x = (x_j) \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{x_j}{j}\right).$$

Note que este operador é limitado, pois $\|T\| = 1$, porém, se tomarmos a sequência $x_j = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{j}, 0, \cdots)$. A sua imagem será

$$T(x_j) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \cdots, \sqrt{j}, 0, \cdots\right)$$

que converge em $l^\infty$, no entanto, o limite não está em $l^\infty$ pois o mesmo não possui um correspondente em $D(T) \subset l^\infty$. Portanto, segue do Teorema (2.2)(b) que $Im(T)$ não é um conjunto fechado.

# 8 Funcionais Lineares

Um **funcional linear** é uma aplicação cuja imagem é um corpo, em decorrência da grande quantidade de aplicações que os funcionais lineares possibilitam, iremos usualmente denotá-los da mesma forma que denotamos funções. Vejamos agora duas definições sobre eles.

**Definição 8.1** (Funcional linear)**.** Sejam $X$ um espaço vetorial e $K$ um corpo. Um funcional linear $f$ é uma aplicação que leva os elementos de $X$ até o corpo $K$, isto é,

$$f : D(f) \longrightarrow K \qquad (D(f) \subset X)$$

onde $K = \mathbb{R}$ se $X$ for um espaço real e $K = \mathbb{C}$ se $X$ for um espaço complexo.

**Definição 8.2** (Funcional linear limitado)**.** Um funcional linear limitado é um operador linear limitado. Sendo assim, segue da Definição 7.1 que existe $k \in \mathbb{R}$, tal que, para todo $x \in D(f) \subset X$,

$$|f(x)| \leq k\|x\|.$$

De (2.25), obtemos

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|. \tag{2.27}$$

O resultado a seguir é consequência do Teorema 7.2.

**Teorema 8.1** (Continuidade e limitação)**.** *Seja $X$ um espaço normado, um funcional linear $f$ de domínio $D(f) \subset X$ é contínuo se, e somente se, $f$ é limitado.*

## 8.1 Exemplos de funcionais lineares

*Exemplo* 8.1 (Produto interno). O produto interno onde um dos termos é mantido fixo define o seguinte funcional linear, com $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, ambos vetores de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x \cdot \alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é fixado. Nestas condições, $f$ é linear e limitado.

Com efeito, note que

$$|f(x)| = |x \cdot \alpha| \leq \|x\|\|\alpha\|$$

Se tomarmos o supremo sobre todo $x$ que possui norma igual a 1, então $\|f\| \leq \|\alpha\|$.

Por outro lado, se considerarmos $x = \alpha$ e usando (2.25), obtemos

$$\|f\| \geq \frac{|f(\alpha)|}{\|\alpha\|} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|} = \|\alpha\|$$

consequentemente, $\|f\| = \|\alpha\|$.

*Exemplo* 8.2 (Integral definida)*.* A integral definida de todas as funções em $C[a,b]$

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dt \qquad (x \in C[a,b])$$

é um funcional linear. Vamos mostrar que $f$ é limitado e possui norma $\|f\| = b - a$.

Com efeito, a norma de $f$ em $C[a,b]$ será:

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leq (b-a)\max_{t\in[a,b]}|x(t)| = (b-a)\|x\|$$

Tomando o supremo sobre todo $x$ que possui norma igual a 1, obtemos $\|f\| \leq b - a$. Escolhendo agora o caso particular onde $x = x_0 = 1$, temos $\|x\| = \|x_0\| = 1$, e usando (2.25), segue que

$$\|f\| \geq \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = \|f(x_0)\| = \int_a^b dt = b - a$$

Portanto, $\|f\| = b - a$.

*Exemplo* 8.3 (O espaço $l^2$)*.* Do espaço de Hilbert $l^2$, podemos obter um funcional linear tomando $\alpha = (\alpha_j) \in l^2$ fixo e definindo

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \alpha_j \qquad (x = (x_j) \in l^2)$$

Essa série converge absolutamente e temos que $f$ é limitado, pois usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.1), obtemos

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\alpha_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty}|x_j\alpha_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|^2} = \|x\|\|\alpha\|$$

## 8.2 O espaço dual algébrico

**Definição 8.3** (O espaço dual algébrico)**.** O conjunto de todos os funcionais lineares definidos em um espaço vetorial $X$ sobre um corpo $K$, é chamado de **espaço algébrico dual** ou somente **espaço dual**, este espaço também é um espaço vetorial, e será denotado por $X^*$

Dessa forma, as operações válidas em um espaço vetorial continuam válidas para o espaço algébrico dual, ou seja, a soma de dois funcionais $f_1$ e $f_2$, é um funcional $g$, definido como

$$g(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x). \qquad (x \in X)$$

A multiplicação de um funcional $f$ por um escalar $\alpha$ resulta em um funcional $h$ definido como:

$$h(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x). \qquad (x \in X, \alpha \in K)$$

## 8.3 O espaço bidual algébrico

**Definição 8.4** (O espaço bidual algébrico)**.** Seja $X$ um espaço vetorial. O dual do espaço dual de $X$, isto é, $(X^*)^*$ é chamado de **espaço bidual**, e o denotaremos por $X^{**}$.

## 8.4 Aplicação canônica

**Definição 8.5** (Aplicação canônica)**.** Para cada $x \in X$ existe um correspondente $g_x \in X^{**}$ tal que a aplicação

$$\begin{aligned} C : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto g_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

é chamada de **aplicação canônica** de $X$ até $X^{**}$.

## Observação

Veja que a aplicação $C$ é linear, uma vez que seu domínio é um espaço vetorial e

$$\begin{aligned} (C(\alpha x + \beta y))(f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f) \\ &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\ &= \alpha (C(x))(f) + \beta (C(y))(f), \end{aligned}$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in X$ e $f \in X^*$.

## 8.5 Isomorfismo

**Definição 8.6** (Isomorfismo)**.** Sejam $X = (X, d)$ e $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$ espaços métricos. Uma aplicação bijetiva $T : X \longrightarrow \tilde{X}$ que preserva a distância, isto é,

$$\tilde{d}(T(x), T(y)) = d(x, y) \qquad (\forall\, x, y \in X)$$

é chamada de **isomorfismo**. Neste caso, diremos que o espaços $X$ e $\tilde{X}$ são isomorfos, e além disso, $T$ preserva as duas seguintes operações algébricas de espaços vetoriais

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y), \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x). \end{aligned} \qquad (\forall\, x, y \in X)$$

## 8.6 Espaços imersos

**Definição 8.7** (Espaços imersos)**.** Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais. Se $X$ for isomorfo a um subespaço de $Y$, então diremos que $X$ é **imerso** em $Y$. Consequentemente, $X$ é imerso em $Im(C) \subset X^{**}$, e neste caso, $C$ é chamada de imersão canônica de $X$ até $X^{**}$.

## 8.7 Aplicação algebricamente reflexiva

**Definição 8.8** (Aplicação algebricamente reflexiva)**.** Para o caso onde $C$ além de ser injetiva, for sobrejetiva, então teremos $Im(C) = X^{**}$ e $X$ será chamado de **algebricamente reflexivo**.

# 9 Espaços Normados de Operadores e Espaço Dual

Sejam $X$ e $Y$ quaisquer espaços normados, sendo ambos reais ou complexos. O conjunto $B(X, Y)$ denota o conjunto de todos os operadores lineares limitados de $X$ até $Y$. $B(X, Y)$ é um espaço vetorial.

Com efeito, veja que ao definirmos a soma de dois operadores $T_1, T_2 \in B(X, Y)$ como

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x),$$

e o produto por um escalar $\alpha$ da seguinte maneira,

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x).$$

Então do Lema 2.8(b), temos que $B(X, Y)$ é um espaço vetorial.

**Teorema 9.1** (Espaço $B(X,Y)$)**.** *Sejam $X, Y$ espaços normados, o espaço vetorial $B(X,Y)$ é um espaço normado e sua norma é*

$$\|T\| = \sup_{x\in X} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X} \|T(x)\|, \tag{2.28}$$

*onde $x \neq 0$ e $\|x\| = 1$.*

**Teorema 9.2** (Completamento)**.** *Se $Y$ for um espaço de Banach, então $B(X,Y)$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Considere uma sequência de Cauchy arbitrária $T_n \in B(X,Y)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon. \qquad \text{(se } m, n > n_0\text{)}$$

Além disso, segue de (2.24) que para todo $x \in X$ e $m, n > n_0$,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|. \tag{2.29}$$

Agora, para todo $x$ fixado e um $\tilde{\varepsilon}$ dado, escolhemos $\varepsilon = \varepsilon_x$ tal que $\varepsilon_x\|x\| < \tilde{\varepsilon}$, e dessa forma, segue de (2.29) que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \tilde{\varepsilon}.$$

Logo, $T_n(x)$ é uma sequência de Cauchy em $Y$. Como $Y$ é completo, existe $y \in Y$, tal que, $T_n(x) \longrightarrow y$. Claramente $y$ depende da escolha de $x \in X$, e isso define um operador $T : X \longrightarrow Y$, onde $y = T(x)$. Tal operador é linear, pois

$$\lim_{n\to\infty}(T_n(\alpha x + \beta z)) = \lim_{n\to\infty}(\alpha T_n(x) + \beta T_n(z)) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(z).$$

Vamos mostrar agora que $T$ é limitado e $T_n \longrightarrow T$. Com efeito, como (2.29) vale para todo $m > n_0$, temos que $T_m(x) \longrightarrow T(x)$, fazendo $m \longrightarrow \infty$ e usando a continuidade da norma, segue de (2.29) que para todo $n > n_0$ e $x \in X$,

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \|T_n(x) - \lim_{m\to\infty} T_m(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\| \tag{2.30}$$

Isso mostra que $(T_n - T)$ com $n > n_0$ é um operador linear limitado, e desde que $T_n$ é limitado, segue que $T = T_n - (T_n - T)$ é limitado, ou seja, $T \in B(X,Y)$. Ademais, se tomarmos o supremo sobre todo $x$ que possui norma igual a 1 em (2.30), obtemos para

$n > n_0$

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon.$$

Consequentemente, $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. Portanto, $T_n \longrightarrow T$. $\square$

## 9.1 O espaço dual $X'$

**Definição 9.1** (O espaço dual $X'$)**.** Seja $X$ um espaço normado. O conjunto de todos os funcionais lineares limitados em $X$ constituem um espaço normado que possui norma definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{2.31}$$

onde $x \neq 0$ e $\|x\| = 1$. Este espaço é chamado de espaço dual de $X$, e é denotado por $X'$.

Observe que, um funcional linear em $X$ que leva $X$ até $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, logo $X' = B(X, Y)$, onde $Y$ é o espaço completo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e consequentemente, pelo Teorema 9.2, segue o seguinte teorema.

**Teorema 9.3** (O espaço dual)**.** *O espaço dual $X'$ de um espaço normado $X$ é um espaço de Banach, mesmo se $X$ não for um espaço de Banach.*

## 9.2 Espaços normados isomorfos

**Definição 9.2** (Espaços normados isomorfos)**.** Sejam $X$ e $\tilde{X}$ espaços normados. Um isomorfismo $X$ até $\tilde{X}$ é um operador linear bijetivo $T : X \longrightarrow \tilde{X}$ que preserva a norma, isto é,

$$\|T(x)\| = \|x\|, \forall\, x \in X.$$

Neste caso, diremos que $X$ é isomorfo à $\tilde{X}$. Do ponto de vista abstrato, dizer que dois espaços são isomorfos significa dizer que eles são idênticos.

## 9.3 Base de Schauder

**Definição 9.3** (Base de Schauder)**.** Se um espaço normado $X$ possui uma sequência $(e_n)$ com a propriedade de que para todo $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $(\alpha_n)$ tais que

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

então diremos que $(e_n)$ é uma **base de Schauder** para $X$ e a seguinte série, onde a soma resulta em $x$, é chamada de expansão de $x$ em relação a $(e_n)$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

*Exemplo* 9.1 (A base de Schauder do espaço $\ell^p$). O espaço $\ell^p$ possui uma base de Schauder $(e_n)$, onde $e_n = (\delta_{nj})$, isto é, uma sequência onde o n-ésimo termo é 1 e os demais são todos nulos.

## 9.4 Exemplos de espaços normados isomorfos

*Exemplo* 9.2 (O espaço $\mathbb{R}^n$). O dual do espaço $\mathbb{R}^n$ é $\mathbb{R}^n$.

*Demonstração.* Do Teorema 7.1, temos que $\mathbb{R}^{n\prime} = \mathbb{R}^{n*}$, além disso, todo $f \in \mathbb{R}^{n*}$ possui a seguinte representação

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

onde $y_k = f(e_k)$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|f(x)| = \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2} = \|x\| \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}.$$

Tomando o supremo sobre todo $x$ que possui norma igual a 1, obtém-se

$$\|f\| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}.$$

Contudo, desde que $x = (y_1, \cdots, y_n)$, então na desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos a igualdade, e assim,

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}.$$

Isto mostra que a norma de $f$ é a norma Euclidiana e $\|f\| = \|c\|$, onde $c = (y_k) \in \mathbb{R}^n$ e $y_k = f(e_k)$. Consequentemente, a aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{n\prime} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto c = (y_k) = (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)) \end{aligned}$$

preserva a norma, e além disso, veja que,

$$\|T(f)\| = \|c\| = \|f\|.$$

Logo, $T$ é injetora. Agora, seja $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, tomando

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i,$$

onde $x = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$T(f) = c = (f(e_1), \cdots, f(e_n)) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) = y.$$

Assim, $T$ é sobrejetora e, consequentemente, $T$ é linear e bijetiva. Portanto, temos um isomorfismo.

$\square$

*Exemplo* 9.3 (O dual do espaço $l^1$ é o $l^\infty$). Com efeito, sabemos de (9.1) que uma base de Schauder para $l^1$ é $(e_k)$, onde $e_k = (\delta_{kj})$ é uma sequência em que o k-ésimo termo é 1 e os demais são todos zeros. Desta forma, todo $x \in l^1$ possui a seguinte representação única

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k. \tag{2.32}$$

Seja $f \in (l^1)'$ e assim $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{N} x_k f(e_k) \right\| = \left\| f(x) - f\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right) \right\| &= \left\| f\left(x - \sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right) \right\| \\ &\leq \|f\| \left\| x - \sum_{k=1}^{N} x_k e_k \right\| \\ &= \|f\| 0. \end{aligned}$$

Agora, se considerarmos qualquer $f \in (l^1)'$, onde $f(e_k) = y_k$, temos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{2.33}$$

Além disso, como $\|e_k\| = 1$, segue que

$$|y_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\|. \tag{2.34}$$

Assim, $\sup_{k\in\mathbb{N}}|y_k| \leq \|f\|$ e, consequentemente, $(y_k) \in l^\infty$. Por outro lado, para todo $b = (\beta_k) \in l^\infty$, podemos obter um funcional linear limitado correspondente $g \in l^1$. De fato, podemos definir $g \in l^1$ como sendo

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\beta_k$$

onde $x = (x_k) \in l^1$. Veja que $g$ é linear e limitado pois

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k\beta_k| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |\beta_j| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\| \sup_{j\in\mathbb{N}} |\beta_j|.$$

Logo, temos que $g \in l^{1\prime}$. Vamos mostrar agora que a norma de $f$ é a norma do espaço $l^\infty$. Observe que de (2.33), temos

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |y_j| \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \|x\| \sup_{j\in\mathbb{N}} |y_j|.$$

Tomando o supremo sobre todo $x$ que possui norma igual a 1, segue que

$$\|f\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |y_j|$$

e de (2.34), obtém-se

$$\|f\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |y_j|$$

que é justamente a norma de $l^\infty$. Consequentemente, podemos escrever $\|f\| = \|c\|_\infty$, onde $c = (y_j) \in l^\infty$, e assim, mostramos que a aplicação linear bijetiva definida por

$$\begin{aligned} l^1 &\longrightarrow l^\infty \\ f &\longmapsto c = (y_j) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

*Exemplo* 9.4 (O espaço $\ell^p$). O espaço dual de $\ell^p$ é o espaço $l^q$, onde $1 < p < +\infty$ e $q$ é o conjugado de $p$, isto é, $1/p + 1/q = 1$.

*Demonstração.* Assim como no exemplo anterior, sabemos que uma base de Schauder para $\ell^p$ é $(e_k)$, onde $e_k = (\delta_{kj})$ é uma sequência em que o k-ésimo termo é 1 e os demais são todos zeros. Desta forma, todo $x \in l^p$ possui a seguinte representação única

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k. \tag{2.35}$$

Seja $f \in (l^p)'$ e então $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k)$. De fato

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{N} x_k f(e_k) \right\| = \left\| f(x) - f\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right) \right\| &= \left\| f\left(x - \sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right) \right\| \\
&\leq \|f\| \cdot \left\| x - \sum_{k=1}^{N} x_k e_k \right\| \\
&= \|f\| \cdot 0.
\end{aligned}
$$

Agora, se considerarmos $f \in (l^p)'$, onde $f(e_k) = y_k$, então

$$
f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{2.36}
$$

Seja $q$ o conjugado de $p$ e $x_n = (x_k^{(n)})$ com

$$
x_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{|y_k|^q}{y_k} & \text{se } k \leq n \text{ e } y_k \neq 0, \\ 0 & \text{se } k > n \text{ ou } y_k = 0. \end{cases}
$$

substituindo (9.4) em (2.36), obtemos

$$
f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} y_k = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q.
$$

Usando (9.4) e que $(q-1)p = q$, encontramos

$$
\begin{aligned}
f(x_n) \leq \|f\| \|x_n\| = \|f\| \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k^{(n)}|^p \right)^{1/p} \\
&= \|f\| \left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \\
&= \|f\| \left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q} \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \leq \|f\| \left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/p}.
$$

Dividindo ambos os lados pelo fator da direita e usando que $1 - 1/p = 1/q$, obtém-se

$$
\left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1-1/p} = \left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|.
$$

Como $n$ é arbitrário, fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|. \tag{2.37}$$

Consequentemente, $(y_k) \in l^q$.

Reciprocamente, para todo $b = (\beta_k) \in l^q$, podemos obter um funcional linear limitado correspondente $g \in l^p$. De fato, podemos definir $g \in l^p$ como sendo

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \beta_k,$$

onde $x = (x_k) \in l^p$. Veja que $g$ é linear e limitado pela desigualdade de Holder, e assim, $g \in (l^p)'$. Vamos mostrar agora que a norma de $f$ é a norma do espaço $l^q$. Observe que de (2.36), usando a desigualdade de Holder, temos

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q} = \|x\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Tomando o supremo sobre todo $x$ que possui norma igual a 1, segue que

$$\|f\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

e de (2.37), obtém-se

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q} \tag{2.38}$$

que é justamente a norma de $l^q$. Consequentemente, podemos escrever $\|f\| = \|c\|_q$, onde $c = (y_j) \in l^q$ e $y_k = f(e_k)$, e assim, mostramos que a aplicação linear bijetiva definida por

$$\begin{aligned} l^{p\prime} &\longrightarrow l^q \\ f &\longmapsto c = (y_k) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. $\square$

# 10 Espaços de produto interno e espaços de Hilbert

**Definição 10.1** (Espaços com produto interno)**.** Um produto interno em $X$ é uma aplicação que vai de $X \times X$ até um corpo $K \subset X$, isto é, para cada par de vetores $x$ e

$y$, existe um escalar associado que será denotado por

$$\langle x, y \rangle$$

tal escalar é chamado de produto interno de $x$ e $y$, e para todos os vetores $x, y, z$ e algum escalar $\alpha$, temos

(P1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(P2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

(P3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(P4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

## Observações

Um espaço com produto interno é um espaço vetorial $X$ com produto interno definido em $X$.

Um produto interno em $X$ define uma norma em $X$ dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \tag{2.39}$$

neste caso, dizemos que a norma provém do produto interno em $X$, e é dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \tag{2.40}$$

Vamos mostrar que (2.39) satisfaz as condições $(N1), (N2) e (N3)$ da Definição de norma 4.1:

(N1) $\|x\| \leq 0$.

Segue diretamente da propriedade (10.1)(P4).

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Segue diretamente da propriedade (10.1)(P4).

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Veja que

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle.$$

Utilizando as propriedades (10.1)(P2) e (P3), obtemos

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle = |\alpha|^2\|x\|^2 \Leftrightarrow \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|.$$

Mostraremos mais a frente que (2.39) também satisfaz a propriedade N4 da definição (4.1).

**Definição 10.2** (Espaços de Hilbert)**.** Um espaço de Hilbert é um espaço métrico completo com a métrica que provém do produto interno.

Consequentemente, espaços com produto interno são espaços normados, e espaços de Hilbert são espaços de Banach.

## 10.1 Lei do paralelogramo

**Teorema 10.1** (Lei do paralelogramo)**.** *Uma norma em $X$ que provém de um produto interno satisfaz a seguinte igualdade*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in X. \tag{2.41}$$

*Demonstração.* Veja que,

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \tag{2.42}$$

e

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \tag{2.43}$$

somando (2.42) com (2.43), obtemos

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= 2(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

□

## Observações

(a) Se uma norma não satisfaz (2.41), então ela não provém de um produto interno. Veremos ainda neste capítulo alguns exemplos sobre isto.

(b) Nem todo espaço normado é um espaço com produto interno.

## 10.2 Ortogonalidade

**Definição 10.3** (Ortogonalidade)**.** Um elemento $x$ de um espaço com produto interno $X$ é dito ser **ortogonal** a $y \in X$ se

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Diremos, neste caso, que $x$ e $y$ são ortogonais, e denotaremos $x \perp y$. Para subconjuntos de $X$, a ideia é parecida, isto é, sejam $A, B \subset X$, denotaremos $x \perp A$ quando $x \perp a$, para todo $a \in A$, e $A \perp B$, se $a \perp b$, para todo $a \in A$ e $b \in B$.

## 10.3 Exemplos

*Exemplo* 10.1 (O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$). O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \tag{2.44}$$

onde $x = (x_k) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_k) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. De fato, de (2.44), obtemos

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

disso, segue a métrica euclidiana definida por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

que já mostramos sua completude em (3.1). Caso $n = 3$, a fórmula em (2.44) se torna o produto escalar usual, isto é,

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k,$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, e a ortogonalidade

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = 0$$

condiz com o conceito elementar de perpendicularidade.

*Exemplo* 10.2 (O espaço das sequências de Hilbert $l^2$). O espaço $l^2$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}. \tag{2.45}$$

*Exemplo* 10.3 (O espaço $\ell^p$). O espaço $\ell^p$ com $p \neq 2$ não é um espaço com produto interno, e consequentemente, não é um espaço de Hilbert.

*Demonstração.* Sejam $x = (1, 1, 0, 0, \cdots, ) \in l^p$ e $y = (1, -1, 0, 0, \cdots) \in l^p$. Note que

$$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p} \quad \text{e} \quad \|x + y\| = \|x - y\| = 2$$

Logo, se $p \neq 2$, a lei do paralelogramo em (2.41) não é satisfeita, ou seja, a norma neste caso não pode ser obtida a partir do produto interno, portanto $\ell^p$ não é um espaço com produto interno. Além disso, já vimos em (3.4) que $\ell^p$ é um espaço completo, sendo assim, $\ell^p$ com $p \neq 2$ é um espaço de Banach que não é um espaço de Hilbert. □

*Exemplo* 10.4 (O espaço $C[a, b]$ ). O espaço $C[a, b]$ não é um espaço com produto interno, e consequentemente, não é um espaço de Hilbert.

Vamos mostrar que a norma definida por

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \qquad (J = [a, b])$$

não pode ser obtida de um produto interno por não satisfazer a lei do paralelogramo em (2.41). Com efeito, tomando $x(t) = 1$ e $y(t) = (t - a)/(b - a)$, temos que $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ e

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t - a}{b - a},$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t - a}{b - a}.$$

Logo, $\|x + y\| = 2$, $\|x - y\| = 1$ e

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 5 \quad \text{mas} \quad 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4.$$

Como a lei do paralelogramo não foi satisfeita, a norma neste caso não pode ser obtida a partir do produto interno, portanto, $C[a, b]$ não é um espaço com produto interno, e consequentemente, não é um espaço de Hilbert.

## 11 Outras propriedades de espaços com produto interno

O seguinte resultado mostra que a igualdade (2.39) satisfaz a propriedade (N4) da Definição 4.1.

**Lema 2.10** (Desigualdades de Schwarz e triangular)**.** *Uma norma $\|\cdot\|$ que provém de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, satisfaz as desigualdades de Schwarz e triangular, isto é,*

*(a) Desigualdade triangular*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

*A igualdade ocorrerá se, e somente se, $y = 0$ ou $x = ky$, com $k \in \mathbb{R}^+$.*

*Demonstração.* Veja que,

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\| + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2.$$

Usando a desigualdade de Schwarz (2.46), obtemos

$$|\langle x,y\rangle| = |\langle y,x\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Usando a desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

*(b) Desigualdade de Schwarz*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|. \tag{2.46}$$

*A igualdade ocorrerá se, e somente se, $\{x,y\}$ for um conjunto linearmente dependente.*

*Demonstração.* Com efeito, se $y = 0$, então $|\langle x, 0\rangle| = 0$, logo (2.46) é verdadeira. Suponha $y \neq 0$, neste caso para todo escalar $\alpha$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \alpha y\|^2 &= |\langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle| \\ &= \langle x, x\rangle - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \overline{\alpha}\langle y, y\rangle]. \end{aligned}$$

Note que, se escolhermos $\overline{\alpha} = \langle y, x\rangle / \langle y, y\rangle$, encontramos

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle]$$

$$= \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \langle x, x\rangle\|y\|^2 - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle\|y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \langle x, x\rangle\|y\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle\|y\|^2 + |\langle x, y\rangle|^2 = \|x\|^2\|y\|^2.$$

□

**Lema 2.11** (Continuidade de um produto interno)**.** *Em um espaço com produto interno, se $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow$, então $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$*

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

uma vez que $y_n - y \longrightarrow 0$ e $x_n - x \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. □

# 12 Complementos ortogonais e somas diretas

**Definição 12.1** (Distância de um elemento até um subconjunto)**.** Em um espaço métrico $X$, a distância $\delta$ de um elemento $x \in X$ até um subconjunto não vazio $M \subset X$ é definida como sendo

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} d(x, \tilde{y}). \qquad (M \neq \emptyset)$$

Se $X$ é um espaço normado, então essa definição se torna equivalente à

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\|. \qquad (M \neq \emptyset)$$

A figura a seguir mostra um exemplo ilustrativo simples deste conceito.

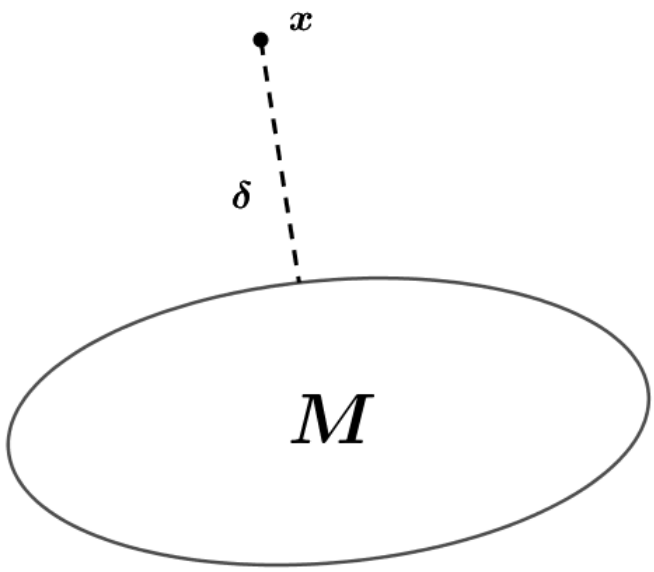



Figura 2.2: Distância $\delta$ de um elemento $x$ até um conjunto $M$.

**Definição 12.2** (Segmento)**.** Um **segmento** que une dois elementos $x$ e $y$, ambos pertencentes a um espaço vetorial $X$, é definido como sendo o conjunto de todos os $z \in X$ da forma

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad \alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1.$$

**Definição 12.3** (Conjunto convexo)**.** Seja $X$ um espaço vetorial. Um subconjunto $M \subset X$ é dito ser **convexo**, se para todo $x, y \in M$, o seguimento unindo $x$ e $y$ esta contido em $M$.

A figura a seguir mostra um exemplo ilustrativo simples de um segmento em um conjunto convexo.

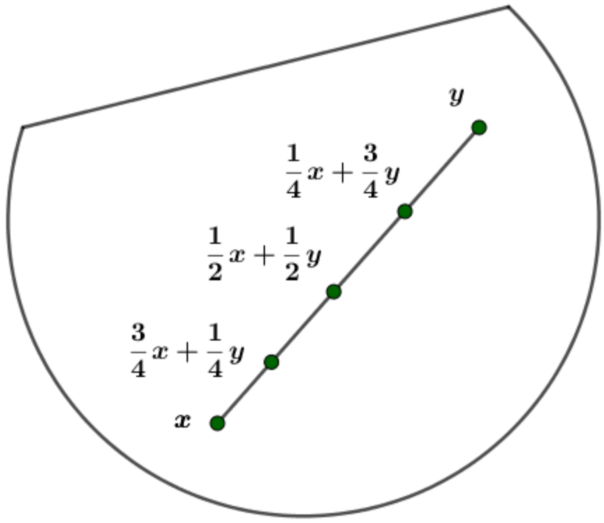



Figura 2.3: Segmento em um conjunto convexo.

**Teorema 12.1** (Vetor minimizante)**.** *Seja $X$ um espaço com produto interno e $M \neq \emptyset$ um subconjunto de $X$ que é convexo e completo (completo na métrica que provém do produto interno). Então para todo $x \in X$, existe um único $y \in M$, tal que*

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|. \tag{2.47}$$

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que nas supostas condições, existe $y \in M$ tal que $\delta = \|x - y\|$. Com efeito, da definição de ínfimo sabemos que

$$\delta_n \longrightarrow \delta \quad \text{onde} \quad \delta_n = \|x - y_n\|. \tag{2.48}$$

Afirmamos que $(y_n)$ é uma sequência de Cauchy. De fato, escrevendo $y_n - x = v_n$, temos que $\|v_n\| = \|y_n - x\| = \delta_n$ e

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geq 2\delta.$$

Além disso, como $M$ é convexo, então $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$. Ademais, $y_n - y_m = v_n - v_m$, e pela lei do paralelogramo, obtemos

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 = -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2)$$

$$\leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2).$$

Por consequência de (2.48) , segue que $\|y_n - y_m\| \longrightarrow 0$. Portanto $(y_n)$ é uma sequência de Cauchy e como $M$ é completo, $(y_n)$ converge, digamos que $y_n \longrightarrow y \in M$, sendo assim, $\|x-y\| \geq \delta$. Ademais, usando mais uma vez (2.48), obtém-se

$$\|x-y\| \leq \|x-y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \longrightarrow \delta.$$

Portanto, $\|x-y\| = \delta$.

Agora, vamos mostrar que este $y \in M$ é único. De fato, suponha que existam $y, y_0 \in M$, ambos satisfazendo

$$\|x-y\| = \delta \quad \text{e} \quad \|x-y_0\| = \delta.$$

Veja que, pela lei do paralelogramo (2.41), temos

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2 &= \|(y-x)-(y_0-x)\|^2 \\ &= 2\|y-x\|^2 + 2\|y_0-x\|^2 - \|(y-x)+(y_0-x)\|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2}(y+y_0) \in M$, então

$$\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2 \geq \delta.$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2 = 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \|y-y_0\| \leq 0.\end{aligned}$$

E isto é um absurdo, pois $\|y-y_0\| \geq 0$. Portanto, $y_0 = y$. □

**Lema 2.12** (Ortogonalidade)**.** *No teorema* (12.1)*, considere $M$ como sendo um subespaço completo $Y$ e $x \in X$ fixado. Nestas condições, $z = x - y$ é ortogonal a $Y$.*

*Demonstração.* Suponha que $z \perp Y$ seja falso, isto é, existe $y_1 \in Y$ tal que

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0. \tag{2.49}$$

Veja que $y_1 \neq 0$, caso contrário teriamos $\langle z, y_1 \rangle = 0$. Além disso, para todo escalar $\alpha$, temos que

$$\begin{aligned}\|z-\alpha y_1\|^2 &= \langle z-\alpha y_1, z-\alpha y_1\rangle \\ &= \langle z,z\rangle - \overline{\alpha}\langle z,y_1\rangle - \alpha[\langle y_1,z\rangle - \overline{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle] \\ &= \langle z,z\rangle - \overline{\alpha}\beta - \alpha[\overline{\beta} - \overline{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle].\end{aligned}$$

Se $\overline{\alpha} = \dfrac{\overline{\beta}}{\langle y_1,y_1\rangle}$, então encontramos

$$\begin{aligned}\|z-\alpha y_1\|^2 &= \langle z,z\rangle - \overline{\alpha}\beta - \alpha[\overline{\beta} - \overline{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle] \\ &= \langle z,z\rangle - \frac{\overline{\beta}}{\langle y_1,y_1\rangle}\beta - \alpha\left[\overline{\beta} - \frac{\overline{\beta}}{\langle y_1,y_1\rangle}\langle y_1,y_1\rangle\right] \\ &= \langle z,z\rangle - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1,y_1\rangle}.\end{aligned}$$

De (2.47), segue que $\|z\| = \|x-y\| = \delta$ e, com isso,

$$\|z-\alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1,y_1\rangle} = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\|y_1\|} < \delta^2.$$

Porém, isto não pode ocorrer, visto que

$$z-\alpha y_1 = x - y_2 \quad \text{onde} \quad y_2 = y+\alpha y_1 \in Y.$$

Logo, pela definição de $\delta$, temos $\|z-\alpha y_1\| \geq \delta$. Portando, (2.49) não pode ser verdade, e assim, conclui-se que $z \perp Y$. □

## 12.1 Soma direta

**Definição 12.4** (Soma direta)**.** Um espaço vetorial $X$ é dito ser a **soma direta** de dois subespaços $Y$ e $Z$ de $X$ se pode ser representado como

$$X = Y \oplus Z.$$

Cada $x \in X$ possui a seguinte representação única

$$x = y + z, \quad y \in X, z \in Z.$$

Neste caso, $Z$ é chamado de **complementar algébrico** de $Y \in X$ e vice versa. Além disso, $Y, Z$ é chamado de **par complementar** de subespaços em $X$.

## 12.2 Complemento ortogonal

**Definição 12.5** (Complemento ortogonal)**.** Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $Y \subset H$, o **complemento ortogonal** de $Y$ é o conjunto

$$Y^{\perp} = \{z \in H \mid z \perp Y\}.$$

**Teorema 12.2** (Soma direta)**.** *Seja $Y$ um subespaço fechado qualquer de um espaço de Hilbert $H$, então*

$$H = Y \oplus Z, \tag{2.50}$$

*onde $Z = Y^{\perp}$.*

*Demonstração.* Como $H$ é um espaço de Hilbert, por definição é completo, e sendo $Y$ um subespaço fechado, segue do Teorema 2.3 que $Y$ é completo. Veja que $Y$ por ser um subespaço de um espaço vetorial, é convexo, deste modo, pelo Teorema 12.1 e o Lema 2.12 temos que para todo $x \in H$ existe um $y \in Y$ tal que

$$x = y + z, \tag{2.51}$$

onde $z \in Z = Y^{\perp}$. Agora, para mostrar a unicidade, suponha que

$$x = y + z = y_1 + z_1,$$

onde $y, y_1 \in Y$ e $z, z_1 \in Z$, veja que $y - y_1 = z - z_1$, além disso, $y - y_1 \in Y$ e $z - z_1 \in Z = Y^{\perp}$, ou seja, como $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0_H\}$, segue que $y = y_1$ e, consequentemente, $z = z_1$.

□

## 12.3 Projeção ortogonal

**Definição 12.6** (Projeção ortogonal)**.** Em (2.51), $y$ é chamado de **projeção ortogonal** de $x$ em $Y$, ou simplesmente **projeção** de $x$ em $Y$. A rigor, a igualdade em (2.51) define a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} P : H &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = P(x) \end{aligned}$$

$P$ é chamado de **projeção** (ortogonal) ou **operador de projeção** de $H$ até $Y$. A figura a seguir ilustra essa situação.

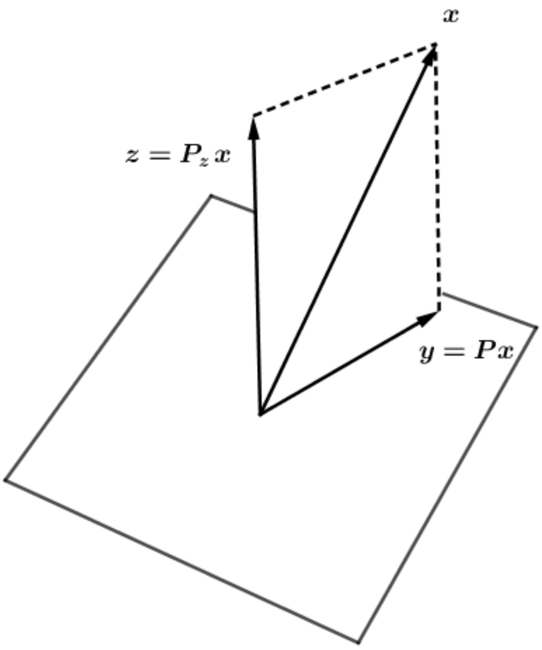



Figura 2.4: Projeção ortogonal de $H$ até $Y$.

## Observação

Claramente $P$ é um operador linear limitado. Além disso, $P$ é um operador **idempotente**, isto é,

$$P^2 = P.$$

Com efeito, para todo $x \in H$,

$$P^2(x) = P(P(x)) = P(x).$$

Consequentemente, $P|_Y$ é o operador identidade em $Y$. Para $Z = Y^\perp$ segue o seguinte lema.

**Lema 2.13** (Espaço nulo)**.** *O complemento ortogonal $Y^\perp$ de um subespaço fechado $Y$ de um espaço de Hilbert $H$ é o espaço nulo $N(P)$, proveniente da projeção ortogonal $P$ de $H$ até $Y$.*

*Um complemento ortogonal é um caso particular de anulador. Por definição, um anulador $M^\perp$ de um conjunto $M \neq \emptyset$ em um espaço com produto interno $X$, é o conjunto*

$$M^\perp = \{x \in X \mid x \perp M\}.$$

*Observe que, $x \in M^\perp$ se, e somente se, $\langle x, v\rangle = 0$ para todo $v \in M$. Note também* *que, $M^\perp$ é um espaço vetorial. Com efeito, se $x, y \in M^\perp$, então para todo $v \in M$ e escalares $\alpha, \beta$, temos*

$$\langle \alpha x + \beta y, v\rangle = \alpha\langle x, v\rangle + \overline{\beta}\langle y, v\rangle = 0.$$

*Consequentemente, $\alpha x + \beta y \in M^\perp$.*

*O conjunto $M^\perp$ é fechado. Com efeito, seja $M \subset H$ e $y \in M^\perp$. Para que $M^\perp$ seja fechado, devemos mostrar que se $(y_n)$ é uma sequência convergente em $M^\perp$, então o limite dessa sequência está em $M^\perp$. De fato, suponha que $y_n \longrightarrow y$, assim, dado qualquer $x \in M$, pela continuidade do produto interno, segue que*

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} y_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, y_n\rangle = 0.$$

*$\langle x, y_n\rangle = 0$ para todo $x \in M$ e $y_n \in M^\perp$. Portanto, $y \in M^\perp$.*

## Observações

*(a) A notação usual para $(M^\perp)^\perp$ é $M^{\perp\perp}$;*

*(b) Em geral, temos que*

$$M \subset M^{\perp\perp}. \tag{2.52}$$

**Lema 2.14** (Subespaço fechado)**.** *Se $Y$ é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert, então*

$$Y = Y^{\perp\perp}. \tag{2.53}$$

*Demonstração.* Temos que $Y \subset Y^{\perp\perp}$ por (2.52). Vamos mostrar que $Y \supset Y^{\perp\perp}$. Com efeito, seja $x \in Y^{\perp\perp}$, então $x = y + z$, onde $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$ por (2.52). Como $Y^{\perp\perp}$ é um espaço vetorial e $x \in Y^{\perp\perp}$, então $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$, consequentemente $z \perp Y^\perp$, mas $z \in Y^\perp$ por (12.2). Logo $z \perp z$, e assim, $z = 0$, ou seja, $x = y$ e com isso, $x \in Y$. Desde que $x \in Y^{\perp\perp}$ foi escolhido arbitrariamente, isso mostra que $Y \supset Y^{\perp\perp}$. □

**Lema 2.15** (Conjunto denso)**.** *Para todo subconjunto $M \neq \emptyset$ de um espaço de Hilbert $H$, o espaço gerado por $M$ (span$(M)$) é denso em $H$ se, e somente se, $M^\perp = \{0\}$.*

*Demonstração.* Com efeito, suponha que $V = span(M)$ seja denso em $H$, isto é, $x \in \overline{V} = H$. Pelo Teorema 2.2(a) existe uma sequência $(x_n) \in V$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Além disso, desde que $x \in M^\perp$ e $M^\perp \perp V$, temos que $\langle x_n, x\rangle = 0$. Segue do Lema 2.12 que

$\langle x_n, x\rangle \longrightarrow \langle x, x\rangle$, sendo assim, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$, ou seja, $x = 0$. Como $x \in M^\perp$ foi escolhido arbitrariamente, temos que $M^\perp = \{0\}$. Reciprocamente, suponha que $M^\perp = \{0\}$, deste modo, se $x \perp V$, então $x \perp M$ □

# 13 Representação de funcionais em espaços de Hilbert

**Teorema 13.1** (Teorema de Riesz)**.** *Todo funcional linear limitado $f$ definido em um espaço de Hilbert $H$, pode ser representado como um produto interno, digamos*

$$f(x) = \langle x, z\rangle, \tag{2.54}$$

*onde $z$ depende de $f$, é unicamente determinado por $f$ e possui norma*

$$\|z\| = \|f\|. \tag{2.55}$$

*Demonstração.* Devemos mostrar os seguintes itens:

(a) $f$ possui a representação (2.54),

(b) $z$ em (2.54) é único,

(c) A igualdade em (2.55) é verdadeira.

De fato, para o caso trivial onde $f = 0$, basta tomarmos $z = 0$ e temos que (2.54) e (2.55) são válidas. Suponha $f \neq 0$, neste caso, observe que devemos ter $z \neq 0$, caso contrário $f = 0$, além disso, $\langle x, z\rangle = 0$ para todo $x$ tal que $f(x) = 0$, isto é, para todo $x$ no espaço nulo $N(f)$ de $f$. Consequentemente, $z \perp N(f)$. Veja que $f \neq 0$ implica em $N(f) \neq H$, assim, pelo Teorema 12.2 $N(f)^\perp \neq \{0\}$. Seja qualquer elemento não nulo $\varphi' \in N(f)^\perp$ e vamos definir

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|}.$$

Veja que $\varphi \in N(f)$ e $\|\varphi\| = 1$, além disso, como $\varphi' \in N(f)^\perp$, temos $f(\varphi) \neq 0$. Considere $z = \overline{f(\varphi)}\varphi \in N(f)^\perp$, então para todo $x \in H$,

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(\varphi)}\varphi\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(\varphi)}f(\varphi) = 0,$$

ou seja, para todo $x \in H$, $\left(x - \dfrac{f(x)}{f(\varphi)}\varphi\right) \in N(f)$. Como $z \in N(f)^{\perp}$, então para todo $x \in H$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\langle z, x - \frac{f(x)}{f(\varphi)}\varphi \right\rangle = 0\\
&\Leftrightarrow \langle z, x\rangle - \left\langle z, \frac{f(x)}{f(\varphi)}\varphi \right\rangle = 0\\
&\Leftrightarrow \langle z, x\rangle = \left\langle z, \frac{f(x)}{f(\varphi)}\varphi \right\rangle\\
&\Leftrightarrow \langle z, x\rangle = \left\langle \overline{f(\varphi)}\varphi, \frac{f(x)}{f(\varphi)}\varphi \right\rangle\\
&\Leftrightarrow \langle z, x\rangle = \overline{f(x)}\langle \varphi, \varphi\rangle\\
&\Leftrightarrow \langle z, x\rangle = \overline{f(x)}\|\varphi\|^2\\
&\Leftrightarrow \langle z, x\rangle = \overline{f(x)}.
\end{aligned}$$

Note que, $\langle z, x\rangle = \overline{\langle x, z\rangle}$. Portanto, como $\overline{\langle x, z\rangle} = \overline{f(x)}$, podemos afirmar que $f(x) = \langle x, z\rangle$.

Para mostrarmos o item $(b)$, vamos supor que para todo $x \in H$,

$$f(x) = \langle x, z_1\rangle = \langle x, z_2\rangle.$$

Sendo assim, $\langle x, z_1 - z_2\rangle = 0$ para todo $x$. Tomando em particular $x = z_1 - z_2$, segue que

$$\langle x, z_1 - z_2\rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2\rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

Consequentemente, $z_1 - z_2 = 0$, o que implica $z_1 = z_2$.

Agora o item $(c)$: Se $f = 0$, então $z = 0$, logo (2.55) é verdadeira. Vamos supor $f \neq 0$, de (2.54), utilizando $x = z$ e (2.27), obtemos

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = f(z) \leq \|f\|\|z\|,$$

e dividindo ambos os lados por $\|z\|$,

$$\|z\| \leq \|f\|.$$

Agora, em (2.54), utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.1), temos

$$|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq \|x\|\|z\|.$$

O que implica

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z\rangle| \leq \|z\|.$$

Portanto, podemos afirmar que $\|z\| = \|f\|$.

$\square$

Um destaque para a prova do item $(b)$ deste teorema, cuja a ideia da unicidade será usada futuramente.

**Lema 2.16.** *Se $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle$ para todo $w$ em um espaço com produto interno $X$, então $v_1 = v_2$. Em particular, $\langle v_1, w\rangle = 0$ para todo $w \in X$ implica $v_1 = 0$.*

*Demonstração.* Por hipótese, $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle$, disto segue que

$$\langle v_1 - v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle - \langle v_2, w\rangle = 0.$$

Para $w = v_2 - v_1$, temos que

$$\|v_1 - v_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow v_1 - v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2.$$

Em particular, $\langle v_1, w\rangle = 0$, com $w = v_1$, obtemos $\|v_1\|^2 = 0$ e disto, $v_1 = 0$. $\square$

**Definição 13.1** (Forma sesquilinear)**.** Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $K$ (real ou complexo). A chamada **forma sesquilinear** ou **funcional sesquilinear** $h$ sobre $X \times Y$ é a aplicação

$$h : X \times Y \longrightarrow K,$$

tal que, para todos $x, x_1, x_2 \in X$ e $y, y_1, y_2 \in Y$ e escalares $\alpha, \beta$, temos que

(a) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$,

(b) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$,

(c) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$,

(d) $h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)$.

Veja que, do item $(a)$, temos que $h$ é linear, e do item $(b)$ segue que o conjugado de $h$ também é linear. Consequentemente, $h$ é chamado de **bilinear** e, além disso, se $X$ e $Y$ são ambos espaços vetoriais sobre o corpo dos reais, então o item $(d)$ pode ser simplificado como

$$h(x, \beta y) = \beta h(x, y).$$

**Definição 13.2** (Forma sesquilinear limitada)**.** Se $X$ e $Y$ são espaços normados se existe um $c > 0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y$,

$$|h(x,y)| \leq c\|x\|\|y\|, \tag{2.56}$$

então diremos que $h$ é **limitado**, e o seguinte número

$$\|h\| = \sup_{X} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{X} |h(x,y)| \tag{2.57}$$

é dito ser a **norma** de $h$.

Além disso, utilizando (2.56) e (2.57), obtemos

$$|h(x,y)| \leq \|h\|\|x\|\|y\|.$$

Como um exemplo de forma sesquilinear limitada, podemos citar o próprio produto interno.

O seguinte teorema nos mostra uma forma de obter uma representação geral das formas sesquilineares em espaços de Hilbert.

**Teorema 13.2** (Representação de Riesz)**.** *Sejam $H_1, H_2$ espaços de Hilbert e*

$$h : H_1 \times H_2 \longrightarrow K$$

*uma forma sesquilinear limitada, então $h$ possui a seguinte representação*

$$h(x,y) = \langle Sx, y \rangle \tag{2.58}$$

*onde $S : H_1 \longrightarrow H_2$ é um operador linear limitado que é unicamente determinado por $h$ e possui norma igual à*

$$\|S\| = \|h\|. \tag{2.59}$$

*Demonstração.* Seja $x \in H_1$ um elemento fixo e considere $\overline{h(x,y)} = \langle y, z \rangle$, que é um operador linear pelos itens (b) e (d) da Definição (13.1). Sendo assim, pelo Teorema 13.1, podemos obter a seguinte representação

$$\overline{h(x,y)} = \langle y, z \rangle, x \in H_1 fixo.$$

Consequentemente, do Teorema da representação de Riesz 13.2,

$$h(x,y) = \langle z, y \rangle, \tag{2.60}$$

onde $z \in H_2$ depende unicamente de $x \in H_1$. Em (2.60), com a variável $x$, podemos definir o operador

$$\begin{aligned} S : H_1 &\longrightarrow H_2 \\ z &\longmapsto Sx. \end{aligned}$$

Veja que, substituindo $z = Sx$ em (2.60), obtemos (2.58). Agora, vamos mostrar que $S$ é linear, de fato, segue de (2.58) e da linearidade da forma sesquilinear, que

$$\begin{aligned} \langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) \\ &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y) \\ &= \alpha\langle Sx_1, y\rangle + \beta\langle Sx_2, y\rangle \\ &= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y\rangle, \quad \forall\, y \in H_2. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.16, temos

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2.$$

Vamos mostrar que $S$ é limitado. Com efeito, deixando de lado o caso trivial onde $S = 0$, segue de (2.57) e (2.58) que

$$\|h\| = \sup_X \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \geq \sup_X \frac{|\langle Sx, Sx\rangle|}{\|x\|\|Sx\|} = \sup_X \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|S\|,$$

o que mostra que $S$ é limitado, e além disso, $\|h\| \geq \|S\|$. Afim de mostrarmos (2.59), podemos aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, isto é,

$$\|h\| = \sup_X \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq \sup_X \frac{\|Sx\|\|y\|}{\|x\|\|y\|} = \|S\|.$$

Portanto, $\|h\| = \|S\|$. Ademais, temos que $S$ é único. De fato seja $T : H_1 \longrightarrow H_2$ um operador linear tal que para todo $x \in H_1$ e $y \in H_2$,

$$h(x, y) = \langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle.$$

Pelo Lema 2.16, $Sx = Tx$. Portanto, $S = T$. □

# 14 Operadores adjuntos

**Definição 14.1** (O operador adjunto $T^*$)**.** Sejam $H_1, H_2$ espaços de Hilbert e $T : H_1 \longrightarrow H_2$ um operador linear limitado. O operador adjunto $T^*$ de $T$ é o operador

$$T^* : H_2 \longrightarrow H_1,$$

tal que para todo $x \in H_1$ e $y \in H_2$, vale

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle. \tag{2.61}$$

O seguinte resultado tem por objetivo mostrar que a Definição 14.1 tem coerência, isto é, que de fato podemos encontrar um operador adjunto $T^*$.

**Teorema 14.1** (Existência)**.** *Seja $T : H_1 \longrightarrow H_2$ como na Definição 14.1. O operador adjunto $T^*$ de $T$ existe, é único e é um operador linear limitado que possui a norma*

$$\|T^*\| = \|T\|. \tag{2.62}$$

*Demonstração.* De fato, como o produto interno é sesquilinear e $T$ é linear, podemos definir a seguinte forma sesquilinear em $H_2 \times H_1$

$$h(y, x) = \langle y, T(x)\rangle. \tag{2.63}$$

Observe que $h$ é linear na variável $y$ e vamos mostrar que $h$ é conjugado linear na variável $x$. De fato,

$$\begin{aligned} h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle y, T(\alpha x_1 + \beta x_2)\rangle \\ &= \langle y, \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle y, T(x_1)\rangle + \overline{\beta}\langle y, T(x_2)\rangle \\ &= \overline{\alpha} h(y, x_1) + \overline{\beta} h(y, x_2). \end{aligned}$$

Além disso, $h$ é limitado, visto que da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|h(y, x)| = |\langle y, T(x)\rangle| \leq \|y\|\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|.$$

O que implica em $\|h\| \leq \|T\|$. Ademais,

$$\|h\| = \sup_X \frac{|\langle y, Tx\rangle|}{\|y\|\|x\|} \geq \sup_X \frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|Tx\|\|x\|} = \|T\|.$$

Logo, $\|h\| \geq \|T\|$, e consequentemente,

$$\|h\| = \|T\|. \tag{2.64}$$

Pelo Teorema 13.2, podemos representar $h$ da seguinte maneira

$$h(y, x) = \langle T^* y, x\rangle, \tag{2.65}$$

onde $T^*$ em $H_2 \longrightarrow H_1$ é um operador linear limitado único que possui norma

$$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|.$$

O que mostra a validade de (2.64). Além disso, comparando (2.63) com (2.65), obtemos

$$\langle y, Tx\rangle = \langle T^* y, x\rangle$$

$$\Leftrightarrow \overline{\langle Tx, y\rangle} = \overline{\langle x, T^* y\rangle}$$

$$\Leftrightarrow \langle T(x), y\rangle_{H_2} = \langle x, T^* y\rangle_{H_1}$$

O que mostra a validade de (14.1).

□

**Lema 2.17** (Operador nulo)**.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços com produto interno e $Q : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. Nestas condições, vale que*

*(a) $Q = 0$ se, e somente se, $\langle Qx, y\rangle = 0$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$.*

*(b) Se $Q : X \longrightarrow Y$, onde $X$ é um espaço complexo, e $\langle Q(x), x\rangle = 0$ para todo $x$, então $Q = 0$.*

*Demonstração.* (a) Supondo $Q = 0$, temos que para todo $x$, $Q(x) = 0$. Logo,

$$\langle Q(x), y\rangle = \langle 0, y\rangle = \langle 0w, y\rangle = 0\langle w, y\rangle = 0.$$

Reciprocamente, se $\langle Q(x), y\rangle = 0$ para todo $x$ e $y$, pelo Lema 2.16 temos que $Q(x) = 0$, logo $Q = 0$.

(b) Seja qualquer $v = \alpha x + y \in X$, por hipótese, temos que $\langle Q(v), v\rangle = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle \\
&= \langle \alpha Q(x) + Q(y), \alpha x + y\rangle \\
&= \langle \alpha Q(x), \alpha x + y\rangle + \langle Q(y), \alpha x + y\rangle \\
&= \overline{\langle \alpha x + y, \alpha Q(x)\rangle} + \overline{\langle \alpha x + y, Q(y)\rangle} \\
&= \overline{\langle \alpha x, \alpha Q(x)\rangle} + \overline{\langle y, \alpha Q(x)\rangle} + \overline{\langle \alpha x, Q(y)\rangle} + \overline{\langle y, Q(y)\rangle} \\
&= \langle \alpha Q(x), \alpha x\rangle + \langle \alpha Q(x), y\rangle + \langle Q(y), \alpha x\rangle + \langle Q(y), y\rangle \\
&= |\alpha|^2\langle Q(x), x\rangle + \langle Q(y), y\rangle + \alpha\langle Q(x), y\rangle + \overline{\alpha}\langle Q(y), x\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\langle Q(x), x\rangle$ e $\langle Q(y), y\rangle$ são ambos nulos por hipótese, segue que

$$0 = \alpha\langle Q(x), y\rangle + \overline{\alpha}\langle Q(y), x\rangle.$$

Tomando $\alpha = 1$, obtemos

$$\langle Q(x), y\rangle + \langle Q(y), x\rangle = 0. \tag{2.66}$$

Tomando $\alpha = i$, consequentemente $\overline{\alpha} = -i$, e assim

$$i\langle Q(x), y\rangle - i\langle Q(y), x\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle Q(x), y\rangle - \langle Q(y), x\rangle = 0. \tag{2.67}$$

Logo, somando (2.66) com (2.67), podemos concluir que $\langle Q(x), x\rangle = 0$, e por consequência do item (a) deste lema, segue que $Q = 0$. □

## Observação

Veja que no item (b) do Lema 2.17, é essencial que $X$ seja um espaço complexo, caso contrário o resultado não é válido. Com efeito, considere o operador linear limitado $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $Q(x, y) = (y, -x)$, e nestas condições, temos que

$$\langle Q(x, y), (x, y)\rangle = \langle (y, -x), (x, y)\rangle = yx - xy = 0$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, mas $Q \neq 0$.

**Teorema 14.2** (Propriedades de operadores adjuntos)**.** *Sejam $H_1$ e $H_2$ espaços de Hilbert, $S : H_1 \longrightarrow H_2$ e $T : H_1 \longrightarrow H_2$ operadores lineares limitados e $\alpha$ um escalar. Nestas condições, vale que*

*(a)* $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$, *onde* $x \in H_1$ *e* $y \in H_2$;

*(b)* $(S+T)^* = S^* + T^*$*;*

*(c)* $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$*;*

*(d)* $(T^*)^* = T$*;*

*(e)* $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$*;*

*(f)* $T^*T = 0 \Leftrightarrow T = 0$*;*

*(g) Se* $H_2 = H_1$*, então* $(ST)^* = T^*S^*$*.*

*Demonstração.* (a) Sejam $x \in H_1$ e $y \in H_2$. Usando (2.61), temos que

$$\langle T^*y, x\rangle = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle.$$

Logo, o item (a) é verdadeiro.

(b) Note que, $(S+T)^*$ existe pelo Teorema 14.1. Deste modo, sejam $x \in H_1$ e $y \in H_2$. Usando (2.61), segue que

$$\begin{aligned}\langle x, (S+T)^*y\rangle &= \langle (S+T)x, y\rangle \\ &= \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle \\ &= \langle x, S^*y\rangle + \langle x, T^*y\rangle \\ &= \langle x, (S^* + T^*)y\rangle.\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 2.16, segue que $(S+T)^*y = (S^*+T^*)y$ para todo $y$. Portanto, o item (b) é verdadeiro.

(c) Note que, $(\alpha T)^*$ existe pelo Teorema 14.1. Deste modo,

$$\begin{aligned}\langle (\alpha T)^*y, x\rangle &= \langle y, (\alpha T)x\rangle \\ &= \langle y, \alpha(Tx)\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle y, Tx\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle T^*y, x\rangle \\ &= \langle \overline{\alpha}T^*y, x\rangle.\end{aligned}$$

Disto, obtemos

$$\langle (\alpha T^*y, x)\rangle - \langle \overline{\alpha}T^*y, x\rangle = \langle ((\alpha T)^* - \overline{\alpha}T^*)y, x\rangle = 0.$$

Aplicando o Lema 2.17(a) com $Q = (\alpha T)^* - \overline{\alpha}T^*$, chegamos em $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$. Portanto, o item (c) é verdadeiro.

(d) Como $T$ é linear e limitado, segue do Teorema 14.1 que $(T^*)$ existe, é linear e limitado. Deste modo, sejam $x \in H_1$ e $y \in H_2$, segue do item (a) deste teorema e de (2.66), que

$$\langle (T^*)^* x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = \langle Tx, y \rangle.$$

Logo,

$$\langle (T^*)^* x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle.$$

Aplicando o Lema 2.17(a) com $Q = (T^*)^* - T$, obtemos $(T^*)^* = T$. Portanto, o item (d) é verdadeiro.

(e) Sabemos que $T^*T : H_1 \longrightarrow H_1$ e $TT^* : H_2 \longrightarrow H_2$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2.$$

Agora, tomando o supremo sobre todo $x$ que possui norma igual a 1, obtemos

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^*T\|.$$

Ao aplicarmos (7) da seção 2.7 da referência [1] e (2.62), chegamos em

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

Consequentemente, $\|T^*T\| = \|T^2\|$. Substituindo $T$ por $T^*$ e usando novamente (2.62),

$$\|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2,$$

onde $T^{**} = T$. Portanto, o item (e) é verdadeiro.

(f) Do item anterior, imediatamente obtemos que o item (f) é verdadeiro.

(g) Note que, $(ST)$ é limitado, pois como $S$ e $T$ são limitados, temos

$$\|T\|^2 \leq \|ST\| \leq \|S\| \|T\| = \|T\|^2.$$

Assim, como $ST$ é linear e limitado, segue do Teorema 14.1 que $(ST)^*$ existe. Deste modo, sejam $x \in H_1$ e $y \in H_2$, onde por hipótese $H_1 = H_2$, então

$$\langle x, (ST)^* y \rangle = \langle (ST)x, y \rangle = \langle Tx, S^* y \rangle = \langle x, T^* S^* y \rangle.$$

Pelo Lema 2.16, temos $(ST)^* y = T^* S^* y$ para todo $y$. Portanto, o item (g) é verdadeiro.

□

# 15 Operadores autoadjuntos, unitários e normais

**Definição 15.1** (Operadores autoadjuntos, unitários e normais)**.** Seja um operador linear limitado $T : H \longrightarrow H$, onde $H$ é um espaço de Hilbert, então, diremos que $T$ é **autoadjunto** (ou Hermitiano), se

$$T^* = T.$$

$T$ é **unitário**, se for bijetivo e

$$T^* = T^{-1}.$$

$T$ é **normal**, se

$$TT^* = T^*T.$$

## Observações

(a) Veja que, considerando o operador adjunto $T^*$ de $T$ definido em (2.61), isto é,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

(b) Se $T$ é autoadjunto, então a fórmula acima se torna

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

(c) Se $T$ é autoadjunto ou unitário, pela definição, $T$ é normal.

(d) Um operador normal não necessáriamente precisa ser autoadjunto ou unitário. Com efeito, considere o operador identidade $I : H \longrightarrow H$, sendo $H$ um espaço de Hilbert. Neste caso, $T = 2iI$ é normal, pois

$$T^* = (2iI)^* = -2iI.$$

**Teorema 15.1** (Autoadjunto)**.** *Seja $T : H \longrightarrow H$ um operador linear limitado, sendo $H$ é um espaço de Hilbert, então*

*(a) Se $T$ é autoadjunto, então $\langle Tx, x\rangle$ é real, para todo $x \in H$.*

*(b) Se $H$ é um espaço de Hilbert complexo e $\langle Tx, x\rangle$ é real para todo $x \in H$, então o operador $T$ é autoadjunto.*

*Demonstração.* (a) Se $T$ é autoadjunto, então para todo $x \in H$, temos que

$$\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle,$$

ou seja, $\langle Tx, x\rangle$ é igual ao seu conjugado complexo, sendo assim, podemos concluir que $\langle Tx, x\rangle$ é real.

(b) Sendo $\langle Tx, x\rangle$ real para todo $x$, temos que

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\langle x, T^*x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle.$$

Disto, segue que

$$\langle Tx, x\rangle - \langle T^*x, x\rangle = 0.$$

Consequentemente, usando o Lema 2.17(b), segue que $T = T^*$. □

**Teorema 15.2** (Produto de operadores autoadjuntos). *O produto de dois operadores lineares limitados autoadjuntos $S$ e $T$ em um espaço de Hilbert $H$ é autoadjunto se, e somente se,*

$$ST = TS.$$

*Demonstração.* Supondo que $T^*S^* = TS$ e utilizando o item (g) do Teorema 14.2, temos que

$$(ST)^* = T^*S^* = TS.$$

Logo,

$$ST = (ST)^* \Leftrightarrow ST = TS.$$

□

**Teorema 15.3** (Sequências de operadores autoadjuntos). *Seja $(T_n)$ uma sequência de operadores lineares limitados autoadjuntos, onde $T_n : H \longrightarrow H$ e $H$ é um espaço de Hilbert. Supondo que $T_n$ converge para algum $T$, isto é,*

$$T_n \longrightarrow T \quad \Leftrightarrow \quad \|T_n - T\| \longrightarrow 0,$$

*onde $\|\cdot\|$ é a norma no espaço $B(H,H)$. Nestas condições, o operador limite $T$ é um operador linear limitado autoadjunto em $H$.*

*Demonstração.* Como $T_n$ é autoadjunto, segue que

$$\|T_n - T\| = \|(T_n - T)^*\|.$$

Utilizando o Teorema 14.2(b),

$$\|T_n - T\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n^* - T^*\|.$$

Além disso, pela desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}\|T - T^*\| &\leq \|T - T_n\| + \|T_n - T_n^*\| + \|T_n^* - T^*\| \\ &= \|T - T_n\| + 0 + \|T_n - T\| \\ &= 2\|T_n - T\|.\end{aligned}$$

Quando $n \longrightarrow \infty$, temos $2\|T_n - T\| \longrightarrow 0$, e consequentemente, $\|T - T^*\| = 0$ e $T^* = T$. □

**Teorema 15.4** (Operador unitário)**.** *Sejam $U : H \longrightarrow H$ e $V : H \longrightarrow H$ operadores unitários, onde $H$ é um espaço de Hilbert. Então*

*(a) Se $U$ é isométrico, então $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in H$;*

*(b) Se $H \neq \{0\}$, então $\|U\| = 1$;*

*(c) $U^{-1} = U^*$ é unitário;*

*(d) $UV$ é unitário;*

*(e) $U$ é normal.*

*(f) Um operador linear $T$ em um espaço de Hilbert complexo $H$ é unitário se, e somente se, $T$ é isométrico e sobrejetiva.*

*Demonstração.* (a) Seja $x \in H$, veja que,

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, Ix\rangle = \|x\|^2.$$

Consequentemente, $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

(b) Se $H \neq 0$, seja $x \in H$, segue do item (a) deste teorema que

$$\left\| U\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1.$$

(c) Como $U$ é bijetivo, temos $U = U^{-1}$. Deste modo, pelo Teorema 14.2(d), segue que

$$(U^{-1})^{-1} = (U^*)^{-1} = (U^{-1})^* = U.$$

(d) Como $UV$ é bijetivo, temos que $UV^{-1} = U^{-1}U^{-1}$. Deste modo, pelo Teorema 14.2(d)

$$(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}.$$

(e) Como $U$ é unitário, $U^{-1} = U^*$, e sendo também bijetivo, temos $UU^{-1} = U^{-1}U = I$. Deste modo,

$$UU^{-1} = U^{-1}U \Leftarrow UU^* = U^*U.$$

Portanto, $U$ é normal.

(f) Se $T$ é isométrico e sobrejetivo, pelo fato de ser isométrico, temos que $T$ é injetivo. Logo, $T$ é bijetivo. Além disso,

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle.$$

Consequentemente,

$$\langle T^*Tx, x\rangle - \langle Ix, x\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0.$$

Pelo Lema 2.17(b), temos $T^*T = I$. Deste modo,

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = T(T^*T)T^{-1} = TIT^{-1} = I.$$

Obtemos então que $T^*T = TT^* = I$. Consequentemente, $T^* = T^{-1}$. Portanto $T$ é unitário. Reciprocamente, se $T$ é unitário, então $T$ é bijetivo e vale que $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$. Logo, pelo item (a) deste teorema, temos que $T$ é isométrico. E pela definição é sobrejetivo.

□

# 16 Teoremas fundamentais

## 16.1 Conjunto parcialmente ordenado

**Definição 16.1** (Conjunto parcialmente ordenado)**.** Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto $M$ onde esta definido uma ordenação parcial entre seus elementos, isto é, uma relação binária que é denotada por $\leq$ e satisfaz as seguintes condições:

(a) $a \leq a$ para todo $a \in M$; (reflexiva)

(b) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$; (antissimétrica)

(c) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$. (transitiva)

Note que a palavra "parcialmente" enfatiza a ideia de que podem existir elementos em $M$, digamos $a$ e $b$, para os quais não é válido $a \leq b$ e nem $b \leq a$. Neste caso, diremos que $a$ e $b$ são **elementos incomparáveis**. Caso contrário, isto é, se $a$ e $b$ satisfizerem $a \leq b$ ou $b \leq a$, ou ambas as propriedades juntas, então diremos que estes são **elementos comparáveis**.

## 16.2 Conjunto totalmente ordenado

**Definição 16.2** (Conjunto totalmente ordenado)**.** Um conjunto é dito ser **totalmente ordenado**, ou também chamado de **cadeia**, é um conjunto parcialmente ordenado, onde todo par de elementos desse conjunto é comparável. Em outras palavras, uma cadeia é um conjunto parcialmente ordenado que não possui elementos incomparáveis.

## 16.3 Cota superior e elemento maximal de um conjunto parcialmente ordenado

**Definição 16.3** (Cota superior)**.** Uma **cota superior** de um subconjunto $W \subset M$, sendo $M$ parcialmente ordenado, é um elemento $u \in M$, tal que

$$x \leq u. \qquad (\forall\, x \in W)$$

Dependendo de quem são os conjuntos $M$ e $W$, o elemento $u$ pode, ou não, existir.

**Definição 16.4** (Elemento maximal)**.** Nas hipóteses da definição anterior, um **elemento maximal** de $M$ é um elemento $m \in M$, tal que

$$m \leq x \Rightarrow m = x.$$

Novamente, $M$ pode, ou não, possuir elementos maximais. Além disso, um elemento maximal não necessariamente precisa ser uma cota superior.

## 16.4 Exemplos

*Exemplo* 16.1 (Números reais). Seja $M$ o conjunto de todos os números reais com a relação $x \leq y$, onde $x, y \in M$. Nestas condições, temos que $M$ é totalmente ordenado e não possui elementos maximais.

*Exemplo* 16.2 (Conjunto das partes). Seja $P(X)$ o conjunto das partes de um dado conjunto $X$ e dados $A, B \in P(X)$, definindo $A \leq B$ como sendo $A \subset B$, isto é, $A$ é subconjunto de $B$. Nestas condições, temos que $P(X)$ é parcialmente ordenado e o único elemento maximal de $P(X)$ é o próprio $X$.

*Exemplo* 16.3 (Conjunto das n-uplas reais). Seja $M$ o conjunto de todas as n-uplas ordenadas de números reais $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Considere a relação $x \leq y$ definida como signifique dizer que $x_j \leq y_j$, para todo $j = 1, \cdots, n$. Nestas condições, $M$ é parcialmente ordenado.

*Exemplo* 16.4 (Inteiros positivos). Seja $M = \mathbb{N}$ com a relação $m \leq n$ significando que $m$ divide $n$. Nestas condições, temos que $M$ é parcialmente ordenado.

## 16.5 O lema de Zorn

**Lema 2.18** (Zorn)**.** *Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado e suponha que toda cadeia $C \subset M$ possui uma cota superior. Nestas condições, $M$ possui pelo menos um elemento maximal.*

## 16.6 Funcional sublinear

**Definição 16.5** (Funcional sublinear)**.** Seja $X$ um espaço vetorial, diremos que $p \in X$ é um **funcional sublinear** em $X$, se $p$ é um funcional com valor real que é **subaditivo**, isto é,

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall\ x, y \in X \tag{2.68}$$

e se $p$ é **homogênio-positivo**, isto é,

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall\ x \in X \text{e } \alpha \in \mathbb{R}^+. \tag{2.69}$$

## 16.7 Teorema de Hahn-Banach

**Teorema 16.1** (Hahn-Banach)**.** *Seja $X$ um espaço vetorial real e $p$ um funcional sublinear em $X$. Além disso, seja $f$ um funcional linear que é definido um subespaço $Z$ de*

*$X$, satisfazendo*

$$f(x) \leq p(x), \forall\, x \in Z. \tag{2.70}$$

*Então, $f$ possui uma extensão $\tilde{f}$ de $Z$ em $X$, satisfazendo*

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \tag{2.71}$$

*para todo $x \in X$, isto é, $\tilde{f}$ é um funcional linear em $X$, satisfazendo* (2.71) *em $X$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in Z$.*

*Demonstração.* Para demonstrarmos este resultado, procederemos mostrando os seguintes itens:

(a) O conjunto $E$ composto de todas as extensões lineares $g$ de $f$, satisfazendo $g(x) \leq p(x)$ em seu domínio $D(g)$, é parcialmente ordenado, e além disso, pelo Lema 2.18, o conjunto $E$ possui um elemento maximal $\tilde{f}$ em $E$.

De fato, temos que

$$E = \left\{ \begin{array}{c} g : D(g) \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R} : g \text{ é linear, } D(g) \text{ é subespaço de } X, Z \subseteq D(g) \\ g(x) \leq p(x), \forall x \in D(g) \\ g(x) = f(x), x \in Z \end{array} \right\}.$$

Note que $E \neq \emptyset$, pois $f \in E$, visto que

$$f : Z \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Em $E$, podemos definir uma relação de ordem da seguinte maneira,

$$g \leq h \Longleftrightarrow h \text{ é uma extensão de } g.$$

Por definição, $D(h) \supset D(g)$ e $h(x) = g(x)$ para todo $x \in D(g)$. Agora, para toda cadeia $C \subset E$, definimos $\hat{g}$ por

$$\hat{g}(x) = g(x), \text{ se } x \in D(g), \tag{$g \in C$}$$

cujo domínio de $\hat{g}$ é

$$D(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} D(g).$$

Veja que $\tilde{g}$ é bem definido, uma vez que $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$. Além disso, $D(\hat{g})$ é espaço vetorial, pois tomando $x, y \in D(\hat{g})$, digamos que $x \in D(g_1)$ e $y \in D(g_2)$. Por hipótese, temos que C é uma cadeia, ou seja, quaisquer dois elementos em $C$ são comparáveis, e devido a isto, $g_1 \leq g_2$ ou $g_2 \leq g_1$. Deste modo, sem perda de generalidade podemos supor que $g_1 \leq g_2$, isto é, $g_2$ extende $g_1$. Logo, $D(g_1) \subset D(g_2) \Rightarrow g_1(x) = g_2(x)$. Como $D(g_2)$ é espaço vetorial e contém $D(g_1)$, então a soma $x + y$ está em $D(g_2)$, onde $D(g_2) \subset \bigcup_{g \in C} D(g) = D(\hat{g})$.

Agora, pela definição de $\hat{g}$, vale que $g \leq \hat{g}$ para todo $g \in C$. Logo, $\hat{g}$ é uma cota superior de $C$, e pelo Lema 2.18, segue que $E$ possui um elemento maximal $\tilde{f} : D(\tilde{f}) \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$, que pela definição do conjunto $E$, é uma extensão linear de $f$ que para todo $x \in D(\tilde{f})$, satisfaz

$$\tilde{f}(x) \leq p(x). \tag{2.72}$$

(b) $\tilde{f}$ está definido em todo $X$, ou seja, $D(\tilde{f}) = X$;

Com efeito, se $D(\tilde{f}) \neq X$, então existe $y_1 \in X - D(\tilde{f})$. Considere o subespaço $Y_1 = D(\tilde{f}) + [y_1]$ de $X$, isto é, $Y_1$ é gerado por $D(\tilde{f})$ e $[y_1] = \{\alpha y_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Veja que, como $0 \in D(\tilde{f})$, temos que $y_1 \neq 0$. Ademais, todo $x \in Y_1$ possui a seguinte representação

$$x = y + \alpha y_1. \qquad (y \in D(\tilde{f}))$$

Tal representação é única. Com efeito, supondo $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$, com $\tilde{y} \in D(\tilde{f})$, segue que

$$y - \tilde{y} = (\beta - \alpha) y_1,$$

onde $y - \tilde{y} \in D(\tilde{f})$. Como $y_1 \notin D(\tilde{f})$ por hipótese, a única solução possível para que $(\beta - \alpha) y_1 \in D(\tilde{f})$ é $y - \tilde{y} = 0$ e $(\beta - \alpha) = 0$, o que implica em $y = \tilde{y}$ e $\alpha = \beta$. Portanto a representação é única. Agora, tomando um funcional $g_1 : Y_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, definido como

$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c, \tag{2.73}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Temos que $g_1$ é linear, pois dados $x, z \in Y_1$, onde $x = y + \alpha y_1$ e

$z = y_2 + \beta y_1$,

$$\begin{aligned} g_1(\lambda x + z) &= g_1(\lambda(y + \alpha y_1) + (y_2 + \beta y_1)) \\ &= g_1((\lambda y + \lambda\alpha y_1) + (y_2 + \beta y_1)) \\ &= g_1((\lambda y + y_2) + (\lambda\alpha y_1 + \beta y_1)) \\ &= \tilde{f}(\lambda y + y_2) + (\lambda\alpha + \beta)c \\ &= \lambda\tilde{f}(y) + \tilde{f}(y_2) + \lambda\alpha c + \beta c \\ &= \lambda g_1(x) + g_1(z). \end{aligned}$$

Além disso, para $\alpha = 0$, $g_1(y) = \tilde{f}(y)$. Consequentemente, $g_1$ é uma extensão própria de $\tilde{f}$, isto é, uma extensão, tal que, $D(\tilde{f})$ é um subconjunto próprio de $D(g_1) = Y_1$, isto é, $D(\tilde{f}) \subsetneq D(g_1) = Y_1$, pois $D(\tilde{f}) = D(\tilde{f}) + [0]$. Por fim, vamos mostrar que $g_1 \in E$, pois dessa forma chegaremos em um absurdo. Vejamos, como definido em (2.73), temos que

$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c.$$

Se tomarmos qualquer $y, z \in D(\tilde{f})$, utilizando (2.72) e (2.68), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y - z) &\leq p(y - z) \\ &= p(y + y_1 - y_1 - z) \\ &\leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y), \tag{2.74}$$

onde $y_1$ é fixado. Agora, observe que como do lado esquerdo da inequação não temos $y$ e do lado direito da inequação não temos o $z$, então se tomarmos o supremo sobre $z \in D(\tilde{f})$ do lado esquerdo, digamos $m_0$, e o ínfimo sobre $y \in D(\tilde{f})$ do lado direito, digamos $m_1$, consequentemente, $m_0 \leq m_1$. Além disso, tomando $c$ tal que $m_0 \leq c \leq m_1$, temos que para todo $y, z \in D(\tilde{f})$,

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y). \tag{2.75}$$

Vamos analisar os possíveis valores de $\alpha$ quando substituirmos $z$ por $\alpha^{-1}y$. Com efeito, para $\alpha < 0$, considerando o lado esquerdo da inequação (2.75), encontramos

$$-p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leq c.$$

Multiplicando ambos os lados da inequação por $-\alpha > 0$,

$$\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c.$$

Usando (2.73) com $x = y + \alpha y_1$, segue que

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) = p(\alpha y_1 + y) = p(x).$$

Para o caso onde $\alpha > 0$, considerando o lado direito da inequação (2.75), ao substituirmos $z$ por $\alpha^{-1}y$, chegamos em

$$c \leq p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right).$$

Multiplicando ambos os lados da inequação por $\alpha > 0$, segue que

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y).$$

Usando (2.73) com $x = y + \alpha y_1$, obtemos

$$g_1(x) = \tilde{f}(x) + \alpha c \leq p(x).$$

Por fim, para o caso onde $\alpha = 0$, segue de (2.72) que $x \in D(\tilde{f})$ e nada há de se mostrar. Consequentemente, para todo $x \in D(g_1)$, mostramos que $g_1(x) \leq p(x)$, o que contradiz a maximidade de $\tilde{f}$. Portanto, $D(\tilde{f}) = X$.

$\square$

# 17 Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais complexos e espaços normados

**Teorema 17.1** (Teorema de Hahn-Banach generalizado)**.** *Seja $X$ um espaço vetorial real ou complexo e $p$ um funcional de valor real em $X$ que é subaditivo, isto é, para todo $x, y \in X$, temos que*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \tag{2.76}$$

*e, para todo escalar $\alpha$, satisfaz*

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x). \tag{2.77}$$

*Além disso, seja $f$ um funcional linear que é definido um subespaço $Z$ de $X$, satisfazendo*

$$|f(x)| \leq p(x) \tag{2.78}$$

*para todo $x \in Z$. Então, $f$ possui uma extensão $\tilde{f}$ de $Z$ em $X$, satisfazendo*

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \tag{2.79}$$

*Demonstração.* (a) Se $X$ é um espaço vetorial real, então (2.78) implica em $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Z$, e consequentemente, pelo Teorema 16.1, temos que existe uma extensão linear $\tilde{f}$ de $Z$ em $X$, tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \tag{2.80}$$

para todo $x \in X$. Ademais, utilizando (2.77) e (2.80), segue que

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = |-1| p(x) = p(x).$$

Logo, $\tilde{f}(x) \geq -p(x)$ e consequentemente por (2.80), obtemos

$$-p(x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x) \Leftrightarrow |\tilde{f}(x)| \leq p(x),$$

o que mostra (2.79).

(b) Se $X$ é um espaço vetorial complexo, como $Z$ é um subespaço de $X$, então $Z$ é um espaço vetorial complexo. Consequentemente, $f$ tem valor complexo e podemos representá-lo como

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

onde $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são funcionais com valores reais. Se considerarmos $X$ e $Z$ como espaços vetoriais reais, sendo denotados respectivamente por $X_r$ e $Z_r$. Na prática o que estamos fazendo é restringir a multiplicação por escalares para números reais, ao invés de números complexos. Deste modo, como $f$ é linear em $Z$ e $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são funcionais com valores reais e lineares em $Z_r$. Além disso, $f_1(x) \leq |f(x)|$, pois a parte real de um número complexo não excede seu valor absoluto. Consequentemente, usando (2.78), temos que para todo $x \in Z_r$,

$$f_1(x) \leq p(x).$$

Pelo teorema 16.1, existe uma extensão linear $\tilde{f}_1$ que extende $f_1$ de $X_r$ até $Z_r$, tal que

$$\tilde{f}_1(x) \leq p(x) \tag{2.81}$$

para todo $x \in X_r$. Agora vejamos $f_2$. Novamente em $Z$, usando que $f = f_1 + if_2$, então para todo $x \in X_r$,

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

Pela igualdade, as partes reais de ambos os lados devem ser iguais, sendo assim,

$$f_2(x) = -f_1(x), \tag{2.82}$$

onde $x \in Z$. Consequentemente, para todo $x \in X$,

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix). \tag{2.83}$$

Logo, segue de (2.82) que $\tilde{f}(x) = f(x)$ em $Z$, ou seja, $\tilde{f}$ extende $f$ de $Z$ até $X$.

Mostraremos agora que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\tilde{f}$ é um funcional linear no espaço vetorial complexo $X$,

(ii) $\tilde{f}$ satisfaz (2.79)

Para o item (i), veja que da linearidade de $\tilde{f}_1$ no espaço complexo $X_r$ e de (2.83), segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}((a+ib)x) &= \tilde{f}_1(ax+ibx) - i\tilde{f}_1(iax - bx)\\
&= a\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - i[a\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)]\\
&= (a+ib)[\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)]\\
&= (a+ib)\tilde{f}(x).
\end{aligned}$$

Agora, para o item (ii), se $\tilde{f}_1(x) = 0$ segue de (2.76) e (2.77) que é válido. Agora para o caso onde $\tilde{f}(x) \neq 0$, utilizando a forma polar, podemos representar $\tilde{f}$ como

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|e^{i\theta},$$

e, consequentemente,

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}(e^{-i\theta}x). \tag{2.84}$$

Como $|\tilde{f}(x)|$ é um número real, a expressão da direita em (2.84) também é um número real. Deste modo, usando (2.77), encontramos

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x)$$

o que mostra o desejado.

□

**Teorema 17.2** (Teorema de Hahn-Banach para espaços normados)**.** *Seja $f$ um funcional linear limitado em um subespaço $Z$ de um espaço normado $X$. Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ em $X$ que extende $f$ e possui a mesma norma,*

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z \tag{2.85}$$

*onde*

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x\in X} |\tilde{f}(x)| \quad e \quad \|f\|_Z = \sup_{x\in Z} |f(x)|,$$

*com $\|x\| = 1$. Além disso, para o caso trivial onde $Z = \{0\}$, temos $\|f\|_Z = 0$.*

*Demonstração.* Se $Z = \{0\}$, então $f = 0$ e a extensão é $\tilde{f} = 0$. Suponha que $Z \neq \{0\}$, deste modo, para todo $x \in Z$, temos

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z\|x\|.$$

Tomando $p(x)$ como

$$p(x) = \|f\|_Z\|x\|.$$

Então, da desigualdade acima segue que (2.70) é verdadeiro, e além disso, veja que como $f \in Z \subset X$, temos que $p$ está definido para todo $x \in X$. Note também que $p$ satisfaz (2.76), visto que da desigualdade triângular, obtemos

$$p(x+y) = \|f\|_Z\|x+y\| \leq \|f\|_Z(\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y).$$

Além disso, (2.77) também é satisfeita em $X$, pois dado $\alpha \in \mathbb{C}$, segue que

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x).$$

Consequentemente, $p$ é subaditivo e homogênio-positivo. Logo, podemos aplicar o Teorema 17.1 e concluir que existe um funcional linear $\tilde{f}$ em $X$ que é uma extensão de $f$ e para todo $x \in X$, satisfaz

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\|.$$

Tomando o supremo sobre sobre todo $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$, temos

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x \in X} |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_Z.$$

Note também que a norma de $\tilde{f}$ em $X$ é $\sup_{x \in X} |\tilde{f}(x)|$, e

$$\|\tilde{f}\|_X \geq \|f\|_Z,$$

onde $\|x\| = 1$. Consequentemente, $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$. □

**Teorema 17.3** (Funcionais lineares limitados)**.** *Seja $X$ um espaço normado e $x_0 \neq 0$ um elemento de $X$. Então, existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ em $X$ tal que*

$$\|\tilde{f}\| = 1, \quad e \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

*Demonstração.* Seja $Z$ um subespaço de $X$ consistindo no conjunto de todos os elementos da forma $x = \alpha x_0$, onde $\alpha$ é um escalar. Em $Z$, definimos um funcional $f$ como

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|. \tag{2.86}$$

Veja que $f$ é linear, pois dado $x_0 \in X$ e escalares $\alpha, \beta$, temos

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(\alpha x_0 + \beta x_0) \\ &= f((\alpha+\beta)x_0) \\ &= (\alpha+\beta)\|x_0\| \\ &= \alpha\|x_0\| + \beta\|x_0\|. \end{aligned}$$

Além disso, $f$ é limitado e possui norma $\|f\| = 1$, pois

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|.$$

Pelo Teorema 17.2, $f$ possui uma extensão $\tilde{f}$ de $Z$ até $X$, de norma $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$. E segue de (2.86) que $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$.

□

**Corolário 17.1.** *Para todo $x$ em um espaço normado $X$, temos*

$$\|x\| = \sup_{f \in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|}, \tag{2.87}$$

*onde $f \neq 0$, e consequentemente, se $x_0$ é tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X'$, então $x_0 = 0$.*

*Demonstração.* Se $x = 0$, temos

$$\|x\| = \sup_{f \in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = 0,$$

pois $f(0) = 0$, visto que $f$ é um funcional linear. Já para o caso onde $x \neq 0 \in X$. Pelo Teorema 17.3, existe um funcional $\tilde{f}$ definido em $X$ tal que

$$\sup_{f \in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|, \tag{2.88}$$

e, como $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, obtemos

$$\sup_{f \in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|. \qquad (f \neq 0)$$

Portanto, $\|x\| = \sup_{f \in X'} \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$, com $f \neq 0$. □

# 18 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

**Definição 18.1** (Função de variação limitada)**.** Uma função $w$ definida em um intervalo $[a, b]$ é dita ser de **variação limitada** em $[a, b]$, quando

$$Var(w) = \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| < \infty. \tag{2.89}$$

Este supremo é tomado sob todas as partições

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \tag{2.90}$$

do intervalo $[a, b]$, tais que, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, a escolha dos valores de $t_1, \cdots, t_{n-1} \in [a, b]$ é tal que deve satisfazer (2.90).

Vejamos um exemplo sobre como calcular a variação de uma função $f$, sendo está crescente ou decrescente.

*Exemplo* 18.1. Seja $w : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função considere a todas as partições em $[a, b]$ da forma

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

(a) Se $w$ é uma função crescente, então $Var(w) = b - a$.

*Demonstração.* Neste caso, temos que

$$Var(w) = \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})|,$$

e como $w(t_j) > w(t_{j-1})$ visto que $w$ é crescente, segue que

$$\begin{aligned} Var(w) &= \sup \sum_{j=1}^{n} w(t_j) - w(t_{j-1}) \\ &= \sup \{(w(t_1) - w(t_0)) + (w(t_2) - w(t_1)) + \cdots + (w(t_n) - w(t_{n-1}))\} \\ &= \sup\{-w(t_0) + w(t_n)\} = b - a. \end{aligned}$$

□

(b) Se $w$ é uma função decrescente, então $Var(w) = -(b - a)$.

*Demonstração.* Neste caso, temos que $w(t_j) < w(t_{j-1})$, então obtemos

$$\begin{aligned} Var(w) &= \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| \\ &= \sup \{-(w(t_1) - w(t_0)) - (w(t_2) - w(t_1)) - \cdots - (w(t_n) - w(t_{n-1}))\} \\ &= \sup\{-(-w(t_0) + w(t_n))\} = -(b - a). \end{aligned}$$

□

**Teorema 18.1.** *O espaço das funções de variação limitada definidas no intervalo* $[a, b]$*, denotado por* $BV[a, b]$*, forma um subespaço normado que possui norma como sendo*

$$\|w\| = |w(a)| + Var(w).$$

*Demonstração.* Primeiramente note que o espaço $BV[a, b]$ é fechado para soma e multiplicação, isto é, sejam $w, y \in BV[a, b]$ e $\alpha$ um escalar, temos que

$$Var(\alpha w + y) = \sup \sum_{j=1}^{n} |(\alpha w(t_j) + y(t_j)) - (\alpha w(t_{j-1}) + y(t_{j-1}))|.$$

Usando que $\sup(X + Y) \leq \sup(X) + \sup(Y)$ e que $\sup(|\alpha|X) = |\alpha| \sup(X)$, sejam quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} Var(\alpha w + y) &= \sup \sum_{j=1}^{n} |(\alpha w(t_j) + y(t_j)) - (\alpha w(t_{j-1}) + y(t_{j-1}))| \\ &\leq |\alpha| \sup \sum_{j=1}^{n} |(w(t_j) - w(t_{j-1})| + \sup \sum_{j=1}^{n} |y(t_j) - y(t_{j-1})| \\ &= |\alpha| Var(w) + Var(y). \end{aligned}$$

Além disso, note que $BV[a, b]$ é um espaço normado pois sua norma satisfaz as condições da Definição 4.1, isto é, primeiramente, é claro ver que que $\|w\| = |w(a)| + Var(w) \geq 0, \forall\, w$, como primeira condição. Como segunda condição, temos que

$$\|w\| = 0 \Leftrightarrow w = 0.$$

De fato, para o caso trivial onde $w(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$, segue que $\|w\| = 0$. Agora, supondo que $\|w\| = 0$,

$$\|w\| = |w(a)| + Var(w) = |w(a)| + \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| = 0$$

onde $t_j$ é uma partição qualquer do intervalo $[a, b]$. Disto, obtemos

$$|w(a)| = 0 \Leftrightarrow w(a) = 0.$$

Sabendo que para um conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, sabemos que $\sup A = 0$ implica em $x = 0$, pois $0 \leq x \leq \sup A$, então podemos dizer que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| = 0 \\
&\Rightarrow |w(t_j) - w(t_{j-1})| = 0 \; \forall \, j = 1, 2, \cdots n.
\end{aligned}$$

ou seja, $w(t_j) = w(t_{j-1})$. Agora, note que se $j = 1$,

$$0 = w(a) = w(t_0) = w(t_1).$$

Logo, $w(t_1) = 0$, e veja que podemos prosseguir com esta ideia para os demais casos, obtendo por indução que $w(t_j) = 0$, $\forall \, t_j \in [a, b]$. Portanto, se $\|w\| = 0$ então $w = 0$ e a segunda condição é satisfeita. Para a terceira condição, devemos mostrar que $\|\alpha w\| = |\alpha|\|w\|$, para algum escalar $\alpha$. De fato, tomando $\alpha$ escalar, veja que

$$\begin{aligned}
\|\alpha w\| = |\alpha w(a)| + Var(\alpha w) &= |\alpha||w(a)| + \sup \sum_{j=1}^{n} |\alpha w(t_j) - \alpha w(t_{j-1})| \\
&= |\alpha||w(a)| + |\alpha| \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| \\
&= |\alpha| \left( |w(a)| + \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| \right) \\
&= |\alpha|\|w\|.
\end{aligned}$$

Portanto, a terceira condição é satisfeita. Para a quarta e última condição, devemos mostrar que dados $w, y \in BV[a, b]$, vale que $\|w + y\| \leq \|w\| + \|y\|$. E de fato, isto é verdade pois,

$$\begin{aligned}
\|w + y\| &= |w(a) + y(a)| + Var(w + y) \\
&= |w(a) + y(a)| + \sup \sum_{j=1}^{n} |(w(t_j) + y(t_j)) - (w(t_{j-1}) + y(t_{j-1}))|.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular e usando que $\sup(W + Y) \leq \sup(W) + \sup(Y)$, sejam quaisquer $W, Y \subset \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}
\|w+y\| &= |w(a)+y(a)| + Var(w+y) \\
&= |w(a)+y(a)| + \sup \sum_{j=1}^{n} |(w(t_j)+y(t_j)) - (w(t_{j-1})+y(t_{j-1}))| \\
&\leq |w(a)| + |y(a)| + \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| + \sup \sum_{j=1}^{n} |y(t_j) - y(t_{j-1})| \\
&= |w(a)| + Var(w) + |y(a)| + Var(y) \\
&= \|w\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

Consequentemente, como $BV[a,b]$ é fechado para soma e multiplicação e a função definida como $\|w\| = |w(a)| + Var(w)$ satisfaz todas as condições da definição de norma, podemos concluir que $BV[a,b]$ é um subespaço normado. $\square$

**Definição 18.2** (Integral de Stieltjes)**.** Sejam $x, \alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in BV[a,b]$. Considere $P_n$ uma partição qualquer definida como (2.90) sob o intervalo $[a,b]$ e denotaremos por $\eta(P_n)$ o comprimento do maior intervalo $[t_{j-1}, t_j]$, isto é,

$$\eta(P_n) = \max\,[t_1 - t_0, t_2 - t_1, \cdots, t_n - t_{n-1}].$$

Para cada partição $P_n$ de $[a,b]$, considere a soma

$$s(P_n) = \sum_{j=1}^{n} x(t_j)[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})]. \tag{2.91}$$

Se existe um número $\gamma$, tal que, para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$ para que

$$\eta(P_n) < \delta \Rightarrow |\gamma - s(P_n)| < \varepsilon.$$

Então o número $\gamma$ será chamado de integral de Stieltjes de $x$ sobre $[a,b]$ com respeito a $\alpha$ e será denotado como

$$\gamma = \int_a^b x(t)\, d\alpha(t). \tag{2.92}$$

Consequentemente, (2.92) pode ser obtida como o limite da soma em (2.91) para uma sequência de partições $(P_n)$ do intervalo $[a,b]$ tais que quando $n \longrightarrow \infty$, temos $\eta(P_n) \longrightarrow 0$.

As demonstrações dos Teoremas 18.2 e 18.3, a seguir se encontram no Capítulo $IV$ da referência [2].

**Teorema 18.2.** *Sejam $f, \alpha$ nas condições da Definição 18.2. Se $f$ é contínua e $\alpha$ tem variação limitada, então existe $\int_a^b f(t)\,d\alpha$.*

*Exemplo* 18.2. Calcular $\int_0^1 x\,dx$, onde $\alpha(x) = x^2$.

De acordo com o Teorema 18.2, temos que a integral existe. Considerando a partição

$$P_N = \left\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, 1\right\} \quad \text{do intervalo} \quad [0,1],$$

temos que $|\eta(P_N)| = \max\,[t_j - t_{j-1}] = \dfrac{1}{N}$. Devido a isto,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \Leftrightarrow |\eta(P_N)| \longrightarrow 0.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\,dx &= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} x(t_j)[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)\left(\left(\frac{j}{N}\right)^2 - \left(\frac{j-1}{N}\right)^2\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)\left(\frac{1}{N^2}\right)\left(\left(\frac{j}{N}\right)^2 - \left(\frac{j-1}{N}\right)^2\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)\left(\frac{1}{N^2}\right)\left(j^2 - j^2 + 2j - 1\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N^3}\right)(2j-1) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{2j^2}{N^3} - \sum_{j=1}^{N} \frac{j}{N^3}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2}{N^3}\sum_{j=1}^{N} j^2 - \frac{1}{N^3}\sum_{j=1}^{N} j\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2}{N^3}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{1}{N^3}\frac{N(N+1)}{2}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2}{N^2}\frac{2N^2+3N+1}{6}\right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

**Teorema 18.3.** *Sejam $f, \alpha$ nas condições da Definição 18.2. Se $f$ é contínua e $\alpha$ é de classe $C^1$ em $[a,b]$, então $\int_a^b f(t)\,d\alpha = \int_a^b f(t)\alpha'(t)\,dt$.*

## Observação

Em posse deste resultado, vamos novamente resolver o Exemplo 18.2. Com efeito, sabendo que $\alpha(x) = x^2$ é de classe $C^1$ em $[0,1]$ e $f(x) = x$ é contínua, então

$$\int_0^1 f(x)\,d\alpha = \int_0^1 f(x)\alpha'(x)\,dx,$$

sendo assim, segue que

$$\int_0^1 f(x)\,dx^2 = \int_0^1 x(2x)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

**Teorema 18.4.** *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada, então*

$$\left|\int_a^b f(t)\,d(\alpha)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]}\{|f(t)|\}Var(\alpha).$$

*Demonstração.* Seja uma partição $P^* = (P,\xi)$ de $[a,b]$, onde $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ e $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{k}(P^*)\right| = \sum_{i=1}^{k}|f(\xi_i)||\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| &\leq \sup_{t\in[a,b]}\{|f(t)|\}\sum_{i=1}^{k}|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]}\{|f(t)|\}\cdot Var(\alpha).\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\int_a^b f(t)\,d(\alpha)\right| = \lim_{|P|\longrightarrow 0}\left|\sum_{i=1}^{k}(P^*)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]}\{|f(t)|\}Var(\alpha).$$

□

A seguir, vamos usar o Teorema de Hahn-Banach para caracterizar os funcionais definidos em $C[a,b]$.

**Teorema 18.5** (Riesz's)**.** *Todo funcional linear limitado $f$ em $C[a,b]$ pode ser representado como uma integral de Stieltjes, isto é,*

$$\begin{aligned} f : C[a,b] &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto f(x) = \int_a^b x(t)\,dw(t), \end{aligned} \tag{2.93}$$

*onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ e $w$ é uma função de variação limitada em $[a,b]$ e possui variação* *total sendo*

$$Var(w) = \|f\|. \tag{2.94}$$

*Demonstração.* Como $C[a,b] \subset B[a,b]$, segue do Teorema 17.2, que $f$ possui uma extensão $\tilde{f} : B[a,b] \longrightarrow K$, onde $B[a,b]$ é o espaço de todas as funções limitadas em $[a,b]$ que possuem norma da forma

$$\|x\| = \sup_{t\,\in\,[a,b]} |x(t)|.$$

Além disso, temos que o funcional $\tilde{f}$ é limitado e que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Para cada $t \in [a,b]$, considere a função $x_t : [a,b] \longrightarrow \{0,1\}$, definida como

$$x_t(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \alpha \in [a,t] \\ 0, & \text{se} \quad \alpha \notin [a,t]. \end{cases}$$

Pela definição de $x_t$, temos que a função é limitada e está definida em $[a,b]$, ou seja, $x_t \in B[a,b]$. Agora, usando $x_t$ e o funcional $\tilde{f}$ podemos definir uma função $w : [a,b] \longrightarrow K$, sendo $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, como

$$w(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \alpha = a \\ \tilde{f}(x_t), & \text{se} \quad \alpha \in (a,t]. \end{cases}$$

Vamos mostrar que $w$ possui variação limitada e que $Var(w) \leq \|f\|$. Com efeito, para o caso onde trabalhamos com um valor complexo, usando a forma polar dos números complexos podemos definir $\theta = arg\,\zeta$, $\zeta \in \mathbb{C}$ e escrever

$$e(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |\zeta| = 0 \\ e^{i\theta}, & \text{se} \quad |\zeta| \neq 0. \end{cases}$$

Veja que, se $|\zeta| \neq 0$, então

$$\zeta = |\zeta| e^{i\theta} \Rightarrow |\zeta| = \frac{\zeta}{e^{i\theta}} = \zeta e^{-i\theta},$$

e consequentemente, sendo $\zeta \neq 0$ podemos escrever

$$\zeta = \zeta\overline{e(\zeta)}, \tag{2.95}$$

onde, $\overline{e(\zeta)}$ é o conjugado do número complexo $\zeta$. Seja $P_n = \{a = t_0, t_1, \cdots, t_n = b\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma partição do intervalo $[a,b]$. Considerando $\varepsilon_j = \overline{e(w(t_j) - w(t_{j-1}))}$ e $x_{t_j} = x_j$.

Usando (2.95), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|w(t_j)-w(t_{j-1})| &= |\tilde{f}(x_1)|+\sum_{j=2}^{n}|\tilde{f}(x_j)-\tilde{f}(x_{j-1})| \\ &= \varepsilon_1\tilde{f}(x_1)+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j[\tilde{f}(x_j)-\tilde{f}(x_{j-1})].\end{aligned}$$

Como $\tilde{f}$ é um funcional linear limitado, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|w(t_j)-w(t_{j-1})| &= \tilde{f}\left(\varepsilon_1 x_1+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j[\tilde{f}(x_j)-\tilde{f}(x_{j-1})]\right) \\ &\leq \|\tilde{f}\|\left\|\varepsilon_1 x_1+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j[x_j-x_{j-1}]\right\|.\end{aligned}$$

Uma vez que $\|\tilde{f}\|=\|f\|$, $|\varepsilon_1|=1$ e da definição de cada $x_j=x_{t_j}$, para cada $t\in[a,b]$, temos que, $x_1(t)=0$ ou o somatório composto pelos termos $x_2(t)-x_1(t), x_3(t)-x_2(t),\cdots$ é zero, pois somente um termo é não nulo. Além disso, esse termo não nulo possui norma igual a 1, assim,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|w(t_j)-w(t_{j-1})| &\leq \|f\|\left\|\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j[x_j-x_{j-1}]\right\| \\ &\leq \|f\|.\end{aligned}$$

Agora, tomando o supremo sobre todas as partições em $[a,b]$ no termo da esquerda, obtemos que

$$Var(w)\leq\|f\|. \tag{2.96}$$

Logo, $w$ possui variação limitada em $[a,b]$. Mostraremos agora que dado $x\in C[a,b]$, vale (2.93). De fato, para toda partição $P_n=\{a=t_0,t_1,\cdots,t_n=b\}$, definimos a seguinte função

$$z_{P_n}(t)=x(t_0)x_1(t)+\sum_{j=2}^{n}x(t_{j-1})[x_j(t)-x_{j-1}(t)], t\in[a,b]. \tag{2.97}$$

Temos que $z_{P_n} \in B[a,b]$. Além disso, pela definição de $w$, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z_{P_n}) &= x(t_0)\tilde{f}(x_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[\tilde{f}(x_j) - \tilde{f}(x_{j-1})] \\ &= x(t_0)w(t_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})]\end{aligned}$$

e como $w(t_0) = w(a) = 0$, podemos escrever a expressão acima como

$$\tilde{f}(z_{P_n}) = \sum_{j=1}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})]. \tag{2.98}$$

Tomando qualquer sequência $(P_n)$ de partições de $[a,b]$ tal que $\eta(P_n) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$ teremos que o somatório em (2.98) converge para a integral em (2.93). Para obter a igualdade em (2.93), basta mostrar que $\tilde{f}(z_{P_n}) \longrightarrow \tilde{f}(x)$, já que $\tilde{f}(x) = f(x)$, desde que $x \in C[a,b]$. De fato, veja que pela definição de $x_t$, calculando $z_{P_n}(a)$ em (2.97), obtêm-se que $z_{P_n}(a) = x(a) \cdot 1$. Logo, $z_{P_n}(a) - x(a) = 0$ e novamente usando (2.98), vemos que se $t_{j-1} < t \leq t_j$, então $z_{P_n}(t) = x(t_{j-1}) \cdot 1$ e consequentemente,

$$|z_{P_n}(t) - x(t)| = |x(t_{j-1}) - x(t)|. \tag{2.99}$$

Note que como $x \in C[a,b]$, então $x$ é contínua no compacto $[a,b]$ e portanto, uniformemente contínua. Deste modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|t - t_{j-1}| < \delta$, então

$$|x(t) - x(t_{j-1})| < \varepsilon. \tag{2.100}$$

Disto, se $\eta(P_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow 0$ para este $\delta > 0$, temos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$, então

$$\eta(P_n) = \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \cdots\} < \delta.$$

Assim, se $n > N_0$, então para qualquer $t \in [a,b]$, temos que $t_{j-1} < t < t_j$ para algum $j$, ou seja, $0 \leq t - t_{j-1} \leq t_j - t_{j-1} < \delta$, e com isso, usando (2.99) e (2.100), segue que

$$|z_{P_n}(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Em particular, se $n > N_0$,

$$\sup_{t \in [a,b]} |z_{P_n} - x| < \varepsilon.$$

Portanto, $z_{P_n} \longrightarrow x$ em $C[a,b]$. Agora, como $\tilde{f}$ é continua, então vale que $\tilde{f}(z_{P_n}) \longrightarrow \tilde{f}(x) = f(x)$. Logo, (2.93) é válido.

Mostraremos agora que vale (2.94). Com efeito, usando (2.93) e o Teorema 18.4, temos que

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)\, d(w) \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |x(t)| Var(w) = \|x\| Var(w),$$

e tomando o supremo sobre todo $x \in C[a,b]$ que possui norma igual a 1, obtemos $\|f\| \leq Var(w)$. Portanto, podemos concluir que $Var(w) = \|f\|$. $\square$

# 19 Agradecimentos

Agradeço à minha família por me apoiar em todas as situações, ao meu orientador Dr. Rodrigo Nunes Monteiro por todo o conhecimento transmitido, ao grupo PET-Matemática pela experiência adquirida e pelo companheirismo dos integrantes e à Secretaria de Educação Superior (SESu) do Ministério da Educação (MEC) e o Fundo Nacional de Desenvolvimento Estudantil (FNDE), pela Bolsa-PET, que financiaram o projeto.

# Referências Bibliográficas

[1] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 17. John Wiley & Sons, 1991.

[2] Elon Lages Lima. Curso de análise, vol. 2, projeto euclides. *Rio de Janeiro: IMPA*, 2008.

[3] Haim Brezis and Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.

[4] César R De Oliveira. *Introdução à análise funcional.* Impa, 2001.

[5] Elon Lages Lima. *Espaços métricos*, volume 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983.

# UM MODELO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA COM APLICAÇÕES AO CRESCIMENTO DE TUMORES

Ana Clara de Pontes Martins
*Estudante*

Adeval Lino Ferreira
*Orientador(a)*

## RESUMO

Este relatório objetiva descrever os conteúdos estudados pela aluna durante o período de 2021. O projeto tem como objeto o estudo de Equação Diferenciais Ordinárias (EDO) que modelam crescimento de tumores. Para isso, o conhecimento prévio de teoremas de existência e unicidade de soluções de EDO's se fará necessário para o entendimento total do modelo a ser estudado. Tais modelos são utilizados nas Ciências Biológicas para predizerem, com certo nível de aproximação, a evolução de um tumor maligno.
**Palavras-chave:** Equações Diferenciais, tumor, crescimento.

## ABSTRACT

This report aims to describe the contents studied by the student during the period 2021. The project aims to study the Ordinary Differential Equation (ODE) that model tumor growth. For this, prior knowledge of the existence and uniqueness theorems of ODE solutions will be necessary for the full understanding of the model to be studied. Such models are used in Biological Sciences to predict, with a certain level of approximation, the evolution of a malignant tumor.
**Keywords:** Differential Equations, tumor, growth.

# 1 Introdução

O estudo de Equação Diferenciais Ordinárias (EDO) deve-se à sua importância na trajetória de um graduando em matemática, uma vez que através delas é possível modelar muitos problemas do mundo real. Nesse projeto, estamos interessados em estudar um modelo de crescimento de tumores, os quais são considerados problemas de fronteira livre, onde reside a maior dificuldade em modelar tais estruturas, portanto, adotaremos um modelo esférico. Primeiramente, consideremos um tumor sem núcleo necrótico (ou morto) e com base na teoria de EDO's clássicas, daremos existência e unicidade de solução para tal problema.

# 2 Noções elementares

Intuitivamente, podemos descrever uma Equação Diferencial (ED) como uma equação que envolve derivadas. A seguir veremos sua definição formal:

**Definição 2.1.** Equação Diferencial é uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes.

## 2.1 Classificações das equações diferenciais

Essas equações são classificadas de acordo com o *tipo*, *ordem* e *linearidade*.

Uma equação diferencial que possui derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a só uma variável independente é considerada uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Já uma equação diferencial contendo derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é denominada Equação Diferencial Parcial (EDP).

Além disso, a ordem de uma equação diferencial é a ordem da maior derivada da equação. Sendo assim, podemos expressar a forma geral de uma EDO de ordem $n$ da seguinte forma:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{3.1}$$

em que $F$ representa uma função de valores reais de $n+2$ variáveis, $x, y, y', ..., y^{(n)}$. Assumiremos que sempre é possível resolver uma EDO da forma (3.1) para $y^{(n)}$ em função das demais $n+1$ variáveis:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{3.2}$$

em que $f$ é uma função real contínua. A equação (3.2) é a *forma normal* de (3.1).

*Observação* 2.1. A *forma diferencial* de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, a qual é equivalente a forma normal.

Por fim, uma equação diferencial ordinária de ordem $n$ na forma (3.1) é dita linear se $F$ for linear em $y, y', ..., y^{(n-1)}$ e pode ser escrita da forma a seguir:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

As equações que não possuírem tais características serão ditas equações diferenciais ordinárias não-lineares.

*Observação* 2.2. Uma equação diferencial linear é **homogênea** quando $g(x) = 0$. Ademais, caso $g(x)$ não seja identicamente nulo, a denominaremos de equação linear **não-homogênea**.

## 2.2 Soluções de equações diferenciais ordinárias

Na sequência, veremos o conceito de solução de uma Equação Diferencial Ordinária:

**Definição 2.2.** Toda função $\phi$, definida em um intervalo $I$ que tem pelo menos $n$ derivadas contínuas em $I$, as quais quando substituídas em uma EDO de ordem $n$ reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma de solução da equação no intervalo.

Ao pensarmos em solução de uma EDO, simultaneamente, pensamos em seu intervalo de definição e este pode ser classificado como aberto, fechado, infinito e assim por diante. No entanto, é importante ressaltar que uma equação diferencial não possui necessariamente uma solução.

*Observação* 2.3. Uma solução identicamente nula no intervalo $I$ é dita *trivial*.

O gráfico de uma solução $\phi$ de uma equação diferencial ordinária é chamado de *curva integral*. Além disso, caso exista solução para a equação diferencial ordinária, podemos classificá-la da seguinte maneira:

i. **Solução explícita:** a variável dependente é expressa somente em termos da variável independente e das constantes.

ii. **Solução implícita:** quando existe pelo menos uma função $\phi$ que satisfaça tanto a relação $G(x,y) = 0$, em um intervalo $I$, quanto a equação diferencial em $I$.

Ao resolver uma EDO de ordem $n$ da forma geral (3.1), buscaremos determinar uma família de soluções a $n$ parâmetros da forma $G(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$.

Uma família é a chamada *solução geral* da equação diferencial, se toda solução de uma EDO de ordem $n$ em um intervalo $I$ puder ser obtida de uma família a $n$ parâmetros $G(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$ por meio de uma escolha apropriada dos parâmetros.

*Observação* 2.4. Uma solução de uma equação diferencial livre de parâmetros arbitrários é chamada de *particular*. Além disso, uma solução que não é membro de uma família de soluções da equação é denominada *singular*.

Por fim, teremos um sistema de EDO's, quando duas ou mais equações envolverem as derivadas de duas ou mais funções desconhecidas de uma variável independente.

## 2.3 Problema do valor inicial

Regularmente surgem problemas em que é necessário encontrar uma solução de uma equação diferencial que satisfaça algumas condições impostas. A seguir veremos como esses problemas são definidos:

**Definição 2.3.** Em algum intervalo $I$ contendo o ponto $x_0$, resolver uma equação diferencial de $n$-ésima ordem $y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sujeita a $n$ condições iniciais: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ é denominado Problema de Valor Inicial (PVI).

Geralmente para resolver esses problemas utilizamos uma família a $n$ parâmetros de soluções da equação diferencial dada e através das $n$ condições iniciais de $x_0$ determinamos as constantes da família.

*Exemplo* 2.1. Sabendo que $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ é uma família a dois parâmetros de soluções da equação diferencial de segunda ordem $y'' - y = 0$, encontre uma solução para o problema de valor inicial dadas as seguintes condições: $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.
*Solução:* Primeiramente, vamos aplicar $y(0) = 1$ à família dada de soluções: $c_1e^0 + c_2e^0 = 1$, sendo assim, $c_1 + c_2 = 1$ (I). Em seguida, derivando temos que $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$ e aplicando $y'(0) = 2$ temos que $c_1 - c_2 = 2$ (II). Desse modo, isolando $c_1$ em (I) e substituindo em (II), segue que $(1 - c_2) - c_2 = 2$, ou seja, $c_2 = -\dfrac{1}{2}$. Por fim, voltando em (I) obtemos que $c_1 = \dfrac{3}{2}$. Logo, $y = \dfrac{3}{2}e^x - \dfrac{1}{2}e^{-x}$ é uma solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

**Teorema 2.1.** *(Existência de uma única solução) Seja $R$ uma região retangular no plano $xy$ definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contém o ponto $(x_0, y_0)$. Se $f(x, y)$ e $\dfrac{df}{dy}$ são contínuas em $R$, então existe algum intervalo $I_0 : x_0 - h < x < x_0 + h$, $h > 0$, contido* *em $a \leq x \leq b$, e uma única função $y(x)$, definida em $I_0$, que é uma solução do problema do valor inicial.*

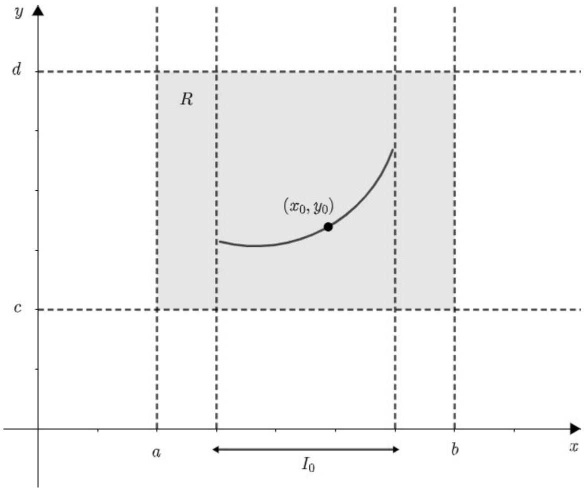



Figura 3.1: *
Região R

A demonstração desse teorema utiliza o método das aproximações sucessivas, também conhecido como método iterativo de Picard. Ela também está baseada na formulação da equação diferencial ordinária em termos da equação integral equivalente $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$, ou seja, $y$ é solução do problema do valor inicial.

É importante atentar-se que o intervalo $I$ de definição não precisa ser tão grande quanto a região $R$ e o intervalo $I_0$ de existência e unicidade pode não ser tão grande quanto $I$.

## 2.4 Equações diferenciais de primeira ordem

Uma equação diferencial de primeira ordem é dita **autônoma** quando a variável independente $x$ não aparece de forma explícita e podemos expressá-la da seguinte maneira:

$$F(y, y') = 0, \text{ ou ainda, } \frac{dy}{dx} = f(y)$$

onde $x$ representa a variável independente. Ademais, um número real será um *ponto crítico* ou de *equilíbrio* da equação diferencial autônoma se for um zero de $f$. Por fim, uma solução constante da equação autônoma é denominada *solução de equilíbrio*.

A partir desse tipo de equações diferenciais, podemos falar algumas coisas sobre suas curvas integrais, uma vez que que elas não dependem da variável independente $x$. Por exemplo, com base no Teorema (2.1) temos que por qualquer ponto $(x_0, y_0)$ em $R$ passa uma só curva integral da equação diferencial autônoma.

### Variáveis separáveis

Veremos a seguir uma forma de obter soluções de equações diferenciais de primeira ordem com variáveis separáveis. Primeiramente, atente-se à seguinte definição:

**Definição 2.4.** Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{3.3}$$

é denominada **separável** ou de **variáveis separáveis**.

Atribuímos esse nome pois a expressão no lado direito pode ser "separável", ou seja, pode ser escrita como produto de duas funções em que uma delas depende da variável independente $x$ e a outra da variável dependente $y$.

Note que ao dividir ambos os lados da equação separável (3.3) por $h(y)$, podemos reescrevê-la como

$$\frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = g(x). \tag{3.4}$$

Sendo assim, se $y = \phi(x)$ for uma solução de (3.4), obrigatoriamente teremos que $\frac{1}{h(\phi(x))}\phi'(x) = g(x)$. Logo, aplicando a integração direta tem-se

$$\int \frac{1}{h(\phi(x))}\phi'(x)dx = \int g(x)dx. \tag{3.5}$$

Como $y = \phi(x)$ temos que $dy = \phi'(x)dx$ e substituindo em (3.5) obtemos:

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx. \tag{3.6}$$

A equação (3.6) indica o método de resolução de uma equação diferencial de primeira ordem por separação de variáveis.

*Observação* 2.5. É importante atentar-se ao separar variáveis, pois os divisores podem se anular em algum ponto e, dessa forma, podemos perder uma solução.

*Exemplo* 2.2. Resolva $x\frac{dy}{dx} = 4y$.
*Solução:* Primeiramente, vamos separar as variáveis:

$$\begin{aligned} xdy &= 4ydx \\ \frac{dy}{y} &= \frac{4}{x}dx \end{aligned}$$

Agora, integrando ambos os lados, temos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{4}{x}dx \\
\ln|y| &= 4\ln|x| + k \\
e^{\ln|y|} &= e^{4\ln|x|+k} \\
y &= e^{\ln|x|^4} \cdot e^k \\
y &= x^4 \cdot e^k
\end{aligned}$$

Logo, renomeando $e^k$ como $c$, obtemos $y = cx^4$.

**Soluções por substituição**

É muito comum precisarmos transformar uma equação diferencial ordinária em um formato já conhecido para que possamos resolvê-la. Desse modo, suponha que desejamos transformar a EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.7}$$

por meio da substituição $y = g(x,u)$, em que $u$ é entendida como uma função da variável $x$. Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dx} = g_x(x,u) + g_u(x,u)\frac{du}{dx}.$$

Logo, a equação (3.7) se torna

$$g_x(x,u) + g_u(x,u)\frac{du}{dx} = f(x, g(x,u)). \tag{3.8}$$

Portanto, se pudermos resolver essa última equação para a função $u$, então a solução da EDO de primeira ordem (3.7) será $y = g(x,u)$.

*Observação* 2.6. Uma EDO da forma $\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + c)$ pode ser transformada em uma EDO separável fazendo $u = Ax + By + c$, com $B \neq 0$.

*Exemplo* 2.3. Resolva $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$.

*Solução:* Primeiramente, fazendo $u = y - x + 5$, ou seja, $y = g(x,u) = u + x - 5$, onde $g_x(x,u) = 1$ e $g_u(x,u) = 1$, podemos transformar a EDO $\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + c)$ em uma equação separável. Vejamos, por (3.8) segue que

$$
\begin{aligned}
g_x(x,u) + g_u(x,u)\frac{du}{dx} &= f(u)\\
1 + 1 \cdot \frac{du}{dx} &= 1 + e^u\\
\frac{du}{dx} &= (1+e^u) - 1
\end{aligned}
$$

que é separável, então resolvendo-a, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= e^u\\
e^{-u}du &= dx\\
-e^{-u} &= x - c\\
e^{-u} &= c - x\\
-u &= \ln(c-x)\\
u &= -\ln(c-x).
\end{aligned}
$$

Logo, $y = x - 5 - \ln(c - x)$, com $x < c$.

## 2.5 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um método para transformar uma Equação Diferencial Ordinária em uma equação algébrica. Essa transformada é importante pois possui algumas propriedades muito úteis para a resolução de PVI's.

Lembre que se $f(x,y)$ for uma função de duas variáveis, então a integral de $f$ em relação a uma das variáveis define uma função de outra variável. Desse modo, uma integral $\int_a^b K(s,t)f(t)dt$ transforma uma função $f$ da variável $t$ na função $F$ da variável $s$. Logo, se $f(t)$ estiver definida para $t \geq 0$, segue que

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b K(s,t)f(t)dt \tag{3.9}$$

A função $K(s,t)$ em (3.9) é denominada **núcleo** da transformação. Caso o núcleo seja $K(s,t) = e^{-st}$ teremos uma transformada integral muito importante: a transformada de Laplace. Vejamos a seguir sua definição formal:

**Definição 2.5.** Seja $f$ uma função definida para $t \geq 0$. A integral

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{3.10}$$

será chamada transformada de Laplace de $f$, desde que a integral convirja.

Quando a integral (3.10) convergir, o resultado será uma função de $s$. Sendo assim, para representar a transformada de Laplace da função $f$, é comum utilizarmos a notação $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$.

*Observação* 2.7. O domínio da função $F(s)$ depende da função $f(t)$.

*Exemplo* 2.4. Considere a função degrau unitário definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

*Solução:* Se $t \geq 0$, então utilizando a transformada de Laplace, temos que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s} - \frac{e^{-sb}}{s} \\ &= \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

desde que $s > 0$, pois se $s < 0$ a integral diverge. Nesse caso, o expoente $-sb$ é negativo, então quando $b \to \infty$, temos que $e^{-bt} \to 0$.

*Exemplo* 2.5. Calcule $\mathscr{L}\{e^{as}\}$, com $s > a$.
*Solução:* Utilizando a transformada de Laplace, temos que

$$\mathscr{L}\{e^{as}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{as} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \lim_{b\to\infty} \left[ -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s-a} - \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}$$

Logo, como $s > a$, segue que $\mathscr{L}\{e^{as}\} = \dfrac{1}{s-a}$.

Note que para uma combinação linear de funções, desde que ambas as integrais convirjam para $s > c$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \\ &= \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \mathscr{L}\{g(t)\} \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s) \end{aligned}$$

Por isso, $\mathscr{L}$ é dita uma transformada linear.

*Exemplo* 2.6. Calcule $\mathscr{L}\{\cosh(kt)\}$.

*Solução:* Primeiramente, lembre que $\cosh(kt) = \dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$. Desse modo, pela linearidade, segue que

$$\mathscr{L}\{\cosh(kt)\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{kt}\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{-kt}\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+k} = \frac{s}{s^2 - k^2}.$$

**Teorema 2.2** (Transformada de algumas funções)**.** *Considerando $s, a \in \mathbb{R}$, temos*

- $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, *com $s > 0$;*
- $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, *com $n = 1, 2, 3, \ldots$;*
- $\mathscr{L}\{e^{as}\} = \dfrac{1}{s-a}$, *com $s > a$;*
- $\mathscr{L}\{\operatorname{sen}(kt)\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$;
- $\mathscr{L}\{\cos(kt)\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$;
- $\mathscr{L}\{\operatorname{senh}(kt)\} = \dfrac{k}{s^2 - k^2}$;
- $\mathscr{L}\{\cosh(kt)\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$.

**Teorema 2.3.** *Para garantir a existência da transformada de Laplace é suficiente que $f$ seja contínua por partes em todo intervalo finito de $[0, \infty)$ e de ordem exponencial* [1] *c quando $t \to \infty$.*

### Transformada inversa

Em uma equação, quando não é possível determinar diretamente a função desconhecida $f(t)$, mas é possível resolver para a transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$, utilizamos a *transformada inversa de Laplace.*

Se $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$, então dizemos que $f(t)$ é a transformada inversa de Laplace da função $F(s)$, a qual é denotada por $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

[1] Uma função $f$ é de ordem exponencial $c$ sobre $[0, \infty)$, se existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ $\forall\, t > 0$, o que é equivalente a $\lim\limits_{t\to\infty} |e^{-ct}f(t)| = 0$.

*Observação* 2.8. Ao desenvolver as transformadas inversas, é comum ajustarmos a função $s$ multiplicando-a ou dividindo-a por uma constante apropriada.

Ademais, considere $\alpha, \beta$ contantes e $F, G$ as transformadas das funções $f, g$, respectivamente. Desse modo, temos que

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\{G(t)\},$$

ou seja, a transformada inversa de Laplace também é uma transformação linear.

**Teorema 2.4** (Transformada inversa de algumas funções)**.** *Considere $s, a \in \mathbb{R}$:*

- $1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$, *com* $s > 0$*;*
- $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}$, *com* $n = 1, 2, 3, \ldots$*;*
- $e^{as} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$, *com* $s > a$*;*
- $\operatorname{sen}(kt) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$*;*
- $\cos(kt) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$*;*
- $\operatorname{senh}(kt) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\}$*;*
- $\cosh(kt) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}$.

### Transformada das derivadas

A fim de resolver equações diferenciais, é necessário obter resultados como $\mathscr{L}\{f'(t)\}$, $\mathscr{L}\{f''(t)\}$, ... Vejamos, por exemplo, se $f'$ for contínua em $[0, \infty)$, então da integração por partes segue que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\right]_0^b + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\
&= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\} \\
&= sF(s) - f(0).
\end{aligned}$$

Então $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$. Agora, se $f''$ for contínua em $[0, \infty)$, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^b + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\
&= -f'(0) + s\mathscr{L}\{f'(t)\} \\
&= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \\
&= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(o) - f'(0)$. De forma análoga, é possível determinar a transformada de Laplace da n-ésima derivada de $f$, a qual é expressa de forma geral no teorema a seguir:

**Teorema 2.5.** *Se $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ forem contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial e, se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0, \infty)$, então temos que*

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

*em que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.*

O Teorema 2.5 evidencia que $\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}$ depende de $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ e das $n-1$ derivadas de $f(t)$ calculadas em $t = 0$ e, isso torna a transformada de Laplace ideal para a resolução de PVI's em que a equação diferencial possui coeficientes *constantes*.

O procedimento para resolver um PVI pela transformada de Laplace é composto de algumas etapas. Primeiramente, é necessário determinar a incógnita $f(t)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais, em seguida, aplicar a transformada de Laplace $\mathscr{L}$ e, dessa forma, a equação transformada se tornará uma equação algébrica em $F(s)$, a qual podemos resolver para encontrar $F(s)$, por fim, basta aplicar a transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}$ para determinar a solução $f(t)$ do problema de valor inicial original.

*Exemplo* 2.7. Use a transformada de Laplace para resolver o seguinte PVI:

$$f' - f = 1, \; f(0) = 0.$$

*Solução:* Primeiramente, aplicaremos a transformada de Laplace em cada membro da equação diferencial. Desse modo,

$$\mathscr{L}\{f'\} - \mathscr{L}\{f\} = \mathscr{L}\{1\} \tag{3.11}$$

Vimos anteriormente que $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, então como $f(0) = 0$, segue que $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s)$. Ademais, do Teorema 2.2 temos que $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$. Logo, a Equação (3.11) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} sF(s) - F(s) &= \frac{1}{s} \\ F(s)(s-1) &= \frac{1}{s} \\ F(s) &= \frac{1}{s(s-1)} \end{aligned}$$

Por frações parciais, obtemos

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1}$$

Colocando o lado direito da igualdade sobre um denominador comum e igualando os numeradores, temos que $1 = A(s-1) + Bs$, ou ainda, $1 = As - A + Bs$. Agora, fazendo $s = 0$, encontramos imediatamente que $A = -1$. Utilizando isso e fazendo $s = 1$, achamos que $B = 1$. Sendo assim,

$$F(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}$$

Por fim, vamos aplicar a transformada inversa para determinar a solução $f(t)$ do problema de valor inicial:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right\} = -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = -1+e^t$$

Portanto, a solução é $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = -1+e^t$.

Para reduzir a dificuldade e o trabalho na resolução, existem algumas propriedades operacionais da transformada de Laplace que nos permitem resolvê-la sem recorrer à definição formal. Dentre elas, veremos alguns resultados que serão importantes para que possamos desenvolver nossos estudos:

**Teorema 2.6** (Translação sobre o eixo $s$)**.** *Se $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $a$ for um número real qualquer, então $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$.*

*Demonstração.* Através da Definição 2.5, obtemos imediatamente que

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a).$$

□

Se $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ e $a$ for um número real qualquer, então a forma inversa do Teorema 2.6 é dada por $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$.

A **função degrau unitário** ou **função de Heaviside** é muito utilizada, pois em alguns sistemas é conveniente definir uma função que seja nula até determinado tempo $t$ e após esse tempo assuma valor 1, como faremos para modelar a inserção de uma fator de tratamento ao crescimento de tumores na Seção 4.

**Definição 2.6.** A função degrau unitário $\mathcal{U}(t-a)$ é definida por

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t < a \\ 1, & \text{se } t \ge a \end{cases}$$

O gráfico de $\mathcal{U}(t-a)$ é apresentado a seguir, o qual é definido somente no eixo $t$ não negativo. Vejamos,

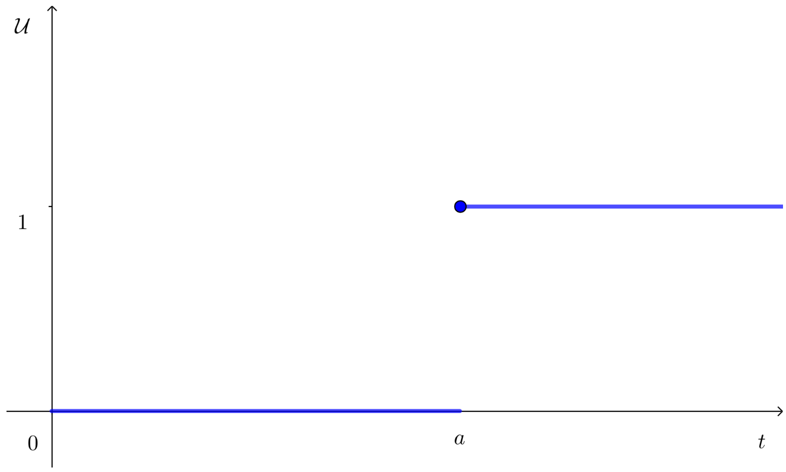



Figura 3.2: *
Gráfico da função degrau unitário

A seguir veremos que quando $F(s)$ for multiplicado por uma função exponencial $e^{-as}$, com $a > 0$, a transformada inversa de $e^{-as}F(s)$ será uma função $f$ deslocada ao longo do eixo $t$, como mostra o Teorema a seguir:

**Teorema 2.7** (Translação sobre o eixo $t$)**.** *Se* $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ *e* $a > 0$*, então* $\mathscr{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$.

*Demonstração.* Da Definição 2.5, obtemos que

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt,$$

utilizando a propriedade aditiva das integrais, segue que

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^a e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt.$$

Como $\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < a \\ 1, & \text{se } t \geq a \end{cases}$, então

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

Usando a substituição $u = t - a$, temos $du = dt$. Logo,

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du = e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du = e^{-as}F(s).$$

□

Se $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ e $a > 0$, então a forma inversa do Teorema 2.7 é expressa por

$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$.

Ademais, observe que podemos determinar a transformada de Laplace de uma função degrau unitário através da Definição 2.5 ou pelo Teorema 2.7. Através do Teorema, se identificarmos $f(t) = 1$, então $f(t-a) = 1$ e $F(s) = \mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$. Sendo assim,

$$\mathscr{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

# 3 Modelos matemáticos

Modelos matemáticos são uma descrição matemática de um sistema ou fenômeno construída levando em consideração determinadas metas, esses modelos podem ser uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais. Nesse projeto de pesquisa, focaremos na dinâmica populacional.

## 3.1 Contexto histórico

Uma das primeiras tentativas de modelagem do crescimento populacional iniciou no ano de 1798 com o inglês Thomas Robert Malthus, o qual propôs que a taxa de crescimento de uma pequena população fosse proporcional ao seu tamanho:

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

em que $k$ é uma constante de proporcionalidade e $P$ representa o tamanho da população. Entretanto, essa equação não é um modelo apropriado para crescimento populacional quando esta é muito grande.

Com o objetivo de corrigir o modelo criado por Malthus e criar um modelo que descrevesse o crescimento populacional de diversos países, em 1838 o belga Pierre François Verhulst realizou uma mudança no modelo apresentado por Malthus e, então, propôs o seguinte modelo que ficou conhecido como equação logística:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP),$$

onde $a$ e $b$ são constantes positivas. O belga argumentou que a população não pode crescer indefinidamente, pois em algum momento não haveria mais espaço e alimento. Assim, seria necessário existir um freio a este crescimento, o qual poderia ser modelado através da diminuição da taxa de crescimento, à medida que a população aumentasse.

Também no ano de 1838, o matemático Benjamim Gompertz criou um modelo em que a correção à taxa de crescimento é proporcional ao logaritmo do tamanho da população, o qual é expresso como

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b \ln P),$$

em que $a$ e $b$ são constantes positivas. Esse modelo é uma variação do modelo logístico e é conhecido como equação diferencial de Gompertz.

## 3.2 Análise do Modelo de Malthus

O Modelo de Malthus buscou associar a matemática à dinâmica populacional. Nesse modelo, a taxa com que a população cresce em um determinado instante é proporcional à população total naquele instante. Matematicamente, se P(t) é a população total no instante t, então o modelo malthusiano é dado por

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{3.12}$$

em que $k$ é uma constante de proporcionalidade. Esse modelo é utilizado no crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo, como o crescimento bacteriano, pois este não considera muitos fatores que podem influenciar a população tanto em seu crescimento quanto em seu declínio.

Para determinar uma solução para o Modelo de Malthus, primeiramente, reescreveremos a equação (3.12) separando as variáveis:

$$\frac{dP}{P} = k\ dt. \tag{3.13}$$

Agora, integrando (3.13) obtemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{dP}{P} &= \int k\ dt\\ \ln|P| &= kt + c\\ e^{\ln|P|} &= e^{kt+c}\\ P &= e^{kt} \cdot e^{c}\end{aligned}$$

Se $P(0) = P_0$ é a população inicial, segue que a solução desta equação é $P(t) = P_0 e^{kt}$. Note que se $k > 0$, então trata-se do crescimento de uma determinada população. Por outro lado, se $k < 0$, teríamos o decaimento de uma certa população.

Observe os gráficos a seguir que representam os comportamentos das soluções em cada condição de $k$:

*Observação* 3.1. Por se tratar de uma população, devemos adotar valores positivos para a população no instante inicial $P_0 > 0$.

No entanto, esse modelo não leva em consideração diferenças de crescimento para cada indivíduo e desconsidera fatores externos que podem afetar a população. Por isso, os próximos modelos a serem apresentados possuem grande importância.

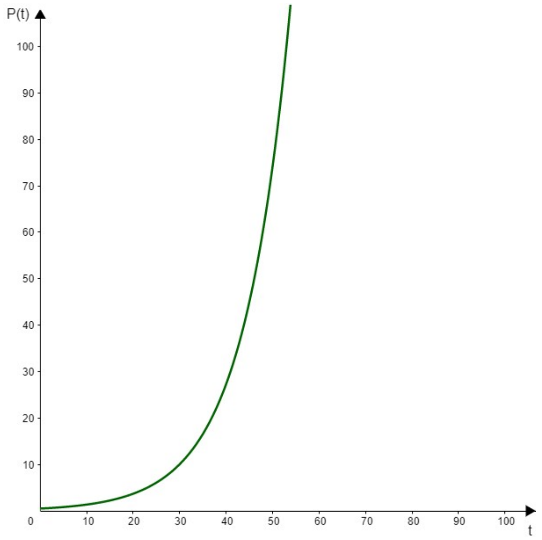



Figura 3.3: *
Crescimento: $k > 0$

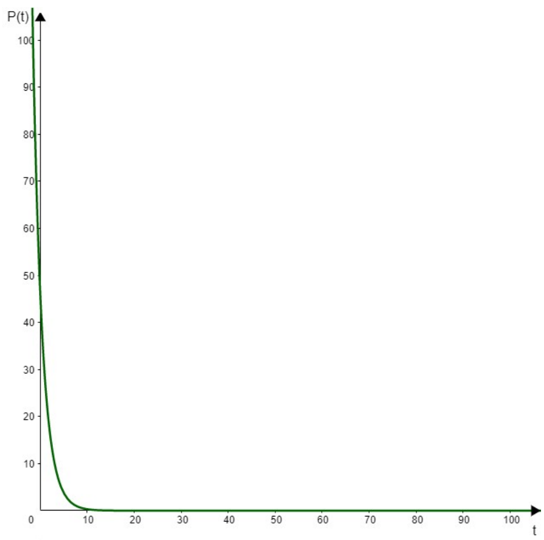



Figura 3.4: *
Decaimento: $k < 0$

## 3.3 Análise do Modelo Logístico

O Modelo Logístico consiste em um aperfeiçoamento do modelo malthusiano, considerando que a taxa de crescimento diminui com o aumento populacional. Matematicamente, esta diminuição pode ser obtida subtraindo da constante de proporcionalidade um termo que aumenta à medida que a população cresce, então este modelo é dado por

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \tag{3.14}$$

em que a constante $a$ representa a taxa média de crescimento de uma população e $bP$ representa a taxa de inibição de crescimento desta população considerando os fatores externos. Esse modelo demonstra-se muito eficaz em previsões dos padrões de crescimento, em um espaço limitado.

Para determinar uma solução para o Modelo Logístico, primeiramente, vamos reescrever a equação (3.14) separando as variáveis:

$$\frac{1}{P(a - bP)} dP = dt.$$

Note que decompondo em frações parciais o lado esquerdo da equação temos $\dfrac{1}{P(a - bP)} = \dfrac{\frac{1}{a}}{P} + \dfrac{\frac{b}{a}}{a - bP}$. Sendo assim,

$$\left( \frac{\frac{1}{a}}{P} + \frac{\frac{b}{a}}{a - bP} \right) dP = dt.$$

Agora, integrando-a obtemos que

$$
\begin{aligned}
\int \left( \frac{\frac{1}{a}}{P} + \frac{\frac{b}{a}}{a - bP} \right) dP &= \int dt \\
\int \frac{\frac{1}{a}}{P} + \int \frac{\frac{b}{a}}{a - bP} dP &= \int dt \\
\frac{1}{a} \ln |P| - \frac{1}{a} \ln |a - bP| &= t + c \\
\ln |\frac{P}{a - bP}| &= at + ac \\
\frac{P}{a - bP} &= e^{at} e^{ac}, \text{onde } e^{ac} = c_1 \\
\frac{P}{a - bP} &= e^{at} c_1
\end{aligned}
$$

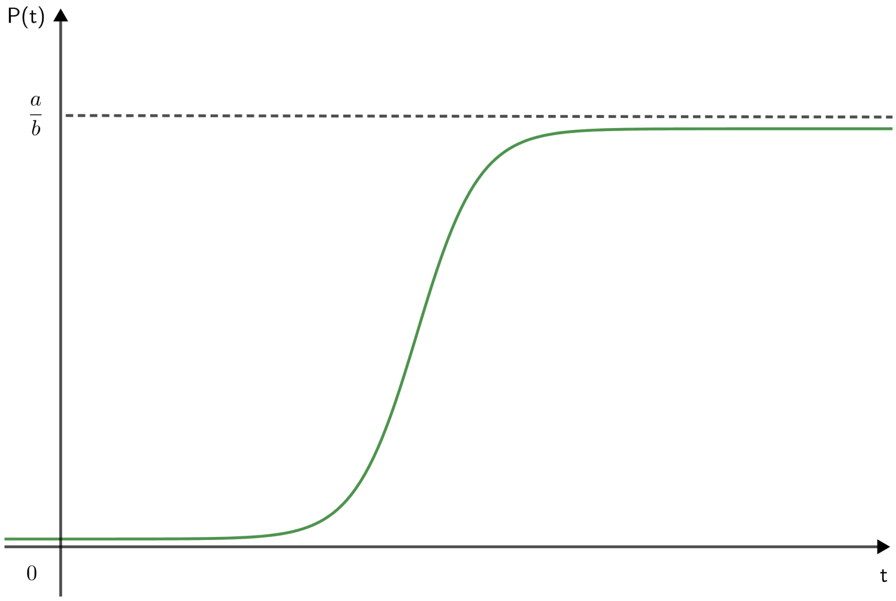
Por fim, isolando $P(t)$:

$$
\begin{aligned}
P &= e^{at} c_1 (a - bP) \\
P &= a e^{at} c_1 - bP e^{at} c_1 \\
P + bP e^{at} c_1 &= a e^{at} c_1 \\
P(1 + b e^{at} c_1) &= a e^{at} c_1 \\
P(t) &= \frac{a e^{at} c_1}{1 + b e^{at} c_1} = \frac{a c_1}{b c_1 + e^{-at}}.
\end{aligned}
$$

Se $P(0) = P_0$, $P_0 \neq \dfrac{a}{b}$, obtemos que $c_1 = \dfrac{P_0}{a - bP_0}$. Sendo assim, a solução do Modelo Logístico é dada por

$$
P(t) = \frac{a P_0}{b P_0 + (a - bP_0) e^{-at}}.
$$

Note que se $t \to \infty$ então temos que $P(t) \to \dfrac{aP_0}{bP_0} = \dfrac{a}{b}$ (constante). Por outro lado, quando $t \to -\infty$ temos que $P(t) \to 0$.




*Observação* 3.2. A taxa pode chegar a zero quando atingir uma população máxima ou um limite máximo sustentável.

## 3.4 Análise do Modelo de Gompertz

O Modelo de Gompertz é uma variação do modelo logístico, nele a correção à taxa de crescimento é proporcional ao logaritmo do tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b\ln P), \tag{3.15}$$

em que $a$ e $b$ são constantes positivas. Por algumas razões, o modelo de Gompertz é muito aplicado à modelagem e, atualmente, é considerado o mais adequado para situações em que a população final é grande, como o crescimento de tumores. A fim de facilitar a dedução da solução analítica de (3.15), igualaremos à zero para determinar o valor de $a$. Vejamos,

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b\ln P) = 0.$$

Nesse caso, $P = 0$ ou $a - b\ln P = 0$. Como a solução $P = 0$ não envolve a constante $a$, utilizaremos $a - b\ln P = 0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} a - b\ln P &= 0 \\ a &= b\ln P \\ \ln P &= \frac{a}{b} \\ P = K &= e^{\frac{a}{b}}, \end{aligned}$$

em que $K = e^{\frac{a}{b}}$ representa a capacidade de suporte do meio. Logo, têm-se que $a = b\ln K$. Por fim, substituindo em (3.15) obtemos

$$\frac{dP}{dt} = P(b\ln K - b\ln P) = -bP(\ln P - \ln K) = -bP\ln\left(\frac{P}{K}\right).$$

Assim, consideramos o modelo de Gompertz da forma descrita a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = -bP\ln\left(\frac{P}{K}\right). \tag{3.16}$$

Para determinar uma solução para esse modelo, primeiramente, vamos fazer uma mudança de variável. Se $u = \ln\left(\dfrac{P}{K}\right)$, ou seja, $P = Ke^u$, então $\dfrac{dP}{dt} = Ke^u\dfrac{du}{dt}$. Desse modo, substituindo em (3.16) obtemos que

$$Ke^u\frac{du}{dt} = -buKe^u, \text{ isto é, } \frac{du}{dt} = -bu.$$

Separando as varáveis, tem-se: $\dfrac{du}{u} = -bdt$. Por fim, integrando-a temos

$$\begin{aligned}
\int\frac{du}{u} &= -\int bdt\\
\ln|u| &= -bt + c\\
e^{\ln|u|} &= e^{-bt+c}\\
u &= e^{-bt}\cdot e^c
\end{aligned}$$

Como $u = \ln\left(\dfrac{P}{K}\right)$ segue que

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{P}{K}\right) &= e^{-bt}\cdot e^c\\
e^{\ln\left(\frac{P}{K}\right)} &= e^{e^{-bt}\cdot e^c}\\
\frac{P}{K} &= e^{e^{-bt}\cdot e^c}\\
P &= Ke^{e^{-bt}\cdot e^c}
\end{aligned}$$

Se $P(0) = P_0$, então a solução do Modelo de Gompertz é dada por

$$P(t) = Ke^{e^{-bt}\ln\left(\frac{P_0}{K}\right)} = K\left(\frac{P_0}{K}\right)^{e^{-bt}}. \tag{3.17}$$

Note que se $t \to \infty$, então $P(t) \to K$, ou seja, para grandes intervalos de tempo a população tende a capacidade do meio, independentemente da população inicial. Por outro lado, quando $t \to 0$ temos que $P(t) \to P_0$, isto é, no início do tempo, a população é igual a população inicial, de acordo com a condição inicial. Além disso, vamos analisar os pontos críticos, para isso, igualaremos a derivada do Modelo de Gompertz a zero. Vejamos,

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -b\ln\left(\frac{P}{K}\right)\frac{dP}{dt} - \frac{bPK}{\frac{PK^2}{K}}\frac{dP}{dt} = -b\ln\left(\frac{P}{K}\right)\frac{dP}{dt} - b\frac{dP}{dt} = -b\frac{dP}{dt}\left[\ln\left(\frac{P}{K}\right)+1\right]$$

Logo, $\dfrac{d^2P}{dt^2} = -b\dfrac{dP}{dt}\left[\ln\left(\dfrac{P}{K}\right)+1\right] = 0$, então $b = 0$ ou $\ln\left(\dfrac{P}{K}\right)+1 = 0$. Note que o caso em que $b = 0$ ocorre quando o crescimento é nulo, assim, o ponto de crítico de (3.16) acontece quando $P = \dfrac{K}{e}$. Graficamente, temos que

- Quando $0 < P(t) < \dfrac{K}{e}$ tem-se $P'' > 0$ e a concavidade de $P(t)$ é para cima;
- Quando $\dfrac{K}{e} < P(t) < K$ tem-se $P'' < 0$ e a concavidade de $P(t)$ é para baixo.

# 4 Aplicações ao crescimento de tumores

Segundo o Instituto Nacional de Câncer (INCA), o tumor é causado por um desequilíbrio no sistema de divisão celular, isto é, o crescimento excessivo de células anormais que causam um aumento de tamanho em algum tecido do corpo e acabam assim atingindo algum órgão. Os tumores podem ser classificados em dois tipos: benigno e maligno. O tumor benigno não é cancerígeno, nele as células aumentam em quantidade, mas de forma mais lenta. O crescimento é relativamente organizado e possui limites nítidos. Além disso, as células afetadas são bem semelhantes às presentes no tecido normal em que se originou o tumor. Nesse tipo, não há a invasão de tecidos próximos, entretanto, seu aumento exagerado pode levar à compressão de tecidos e órgãos adjacentes. Já o maligno difere-se do benigno pela formação de células relativamente diferentes das encontradas no tecido original, seu crescimento é mais rápido, com divisões celulares numerosas e anormais. Além disso, esse tumor tem massa pouco delimitada e, esse tipo de tumor pode invadir os tecidos vizinhos provocando metástases.

Utilizaremos os métodos desenvolvidos para tratamos da dinâmica populacional de células cancerígenas no corpo humano, mais especificamente o crescimento populacional de um tumor. De acordo com os principais trabalhos relacionados ao desenvolvimento de tumores que utilizamos nesse projeto de pesquisa, obtemos os seguintes valores para os parâmetros:

| $r$ | $K$ | $N(0)$ |
|---|---|---|
| $0,0060$ | $10^{13}$ | $10^{9}$ |

Tabela 3.1: Parâmetros

Apesar da capacidade de suporte de um tumor $(K)$ ser intimamente ligada à quantidade de células tumorais no instante $t$, vamos considerar que um tumor tem um limite para essa quantidade que não pode ser ultrapassado.

**Modelo de Malthus**

Primeiramente, vamos considerar o Modelo de Malthus levando em consideração algumas modificações em relação à notação de parâmetros:

$$\frac{dN}{dt} = rN \tag{3.18}$$

em que $r$ é a constante positiva de crescimento interno da célula, $t$ é o instante considerado para cada quantidade de população de células e $N(t)$ é a população de células tumorais no instante $t$.

Além disso, vimos anteriormente que quando submetida a condição inicial $N(0) = N_0$, a solução desse modelo é dada por $N(t) = N_0 e^{rt}$. Utilizando os parâmetros, segue que $N(t) = 10^{13} e^{0{,}0060t}$. Vejamos,

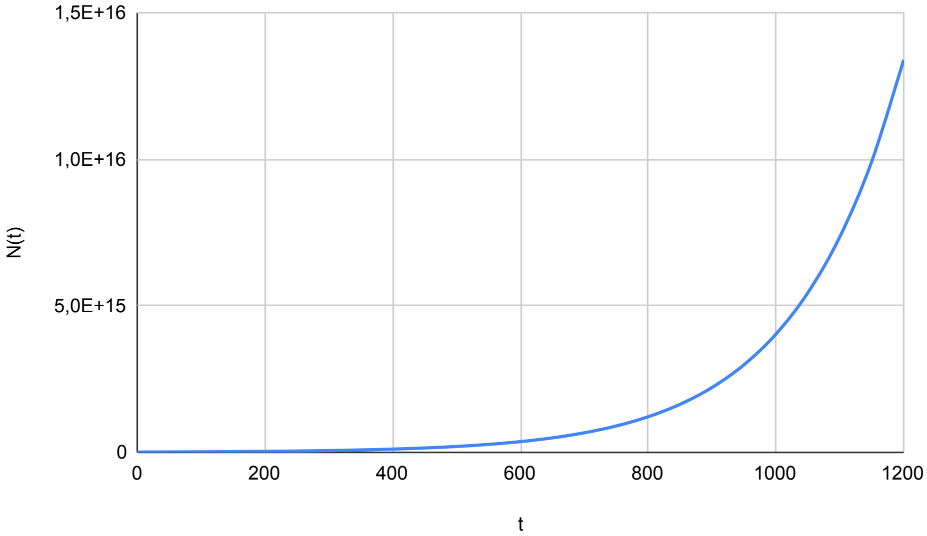



Figura 3.5: *

Gráfico $N(t)$ x $t$ que descreve a variação da população tumoral com o passar do tempo segundo o Modelo de Malthus.

Podemos observar que quando $t \to \infty$, temos que $N(t) \to \infty$. Entretanto, esse crescimento tumoral não é realístico para tempos indefinidamente grandes, pois não leva em consideração os fatores externos que influenciam o crescimento da população tumoral.

### Modelo Logístico

Agora, consideraremos o Modelo Logístico com algumas modificações em relação à notação de parâmetros:

$$\frac{dN}{dt} = N\left(r - \frac{r}{K}N\right) \tag{3.19}$$

em que $r$ é a constante positiva de crescimento interno da célula, $t$ é o instante considerado para cada quantidade de população de células, $N(t)$ é a população de células tumorais no instante $t$ e $K$ é o tamanho máximo que o tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis.

Ademais, vimos que quando $N(0) = N_0$, a solução desse modelo é dada por $N(t) = \dfrac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$, então segue que $N(t) = \dfrac{10^{22}}{10^9 + (10^{13} - 10^9)e^{-0,0060t}}$. Vejamos,

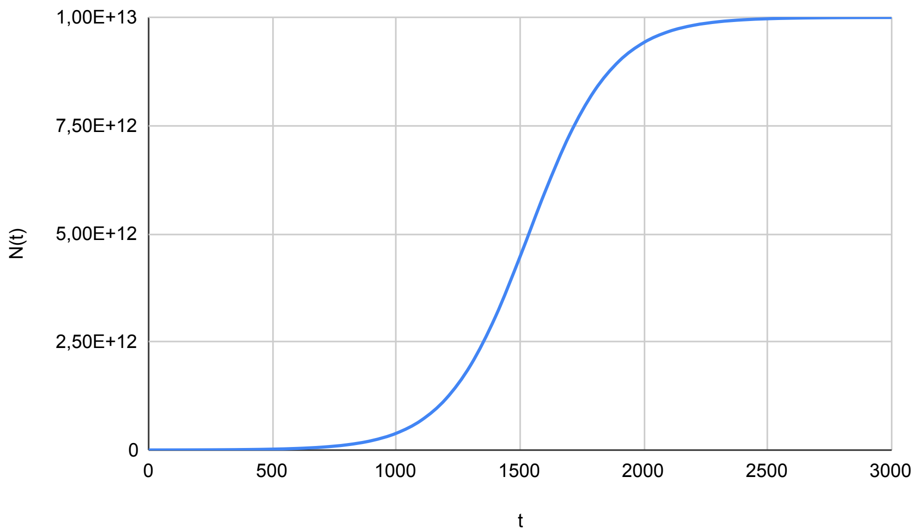



Figura 3.6: *

Gráfico $N(t)$ x $t$ que descreve a variação da população tumoral com o passar do tempo segundo o Modelo Logístico.

Agora, vamos analisar o comportamento se alterarmos condição inicial:

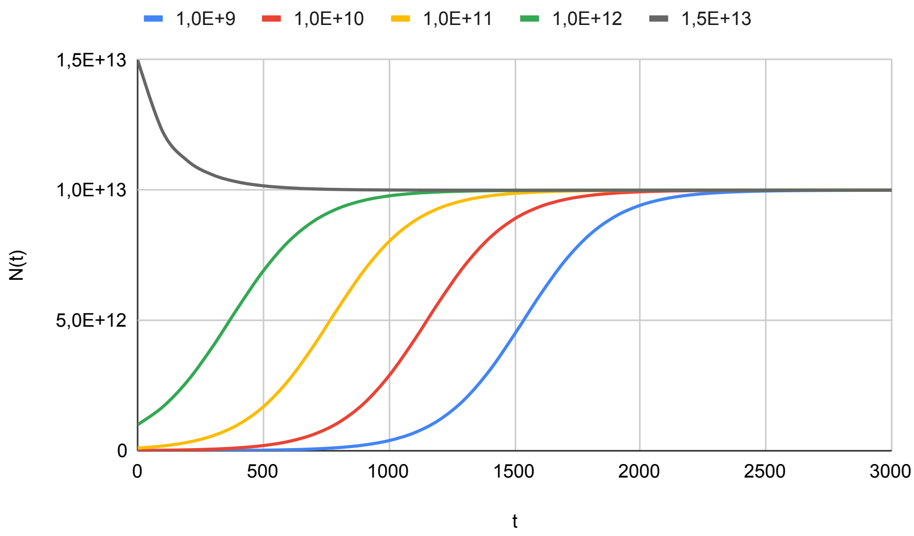



Figura 3.7: *

Comportamento gráfico quando variamos a condição inicial no Modelo Logístico.

Podemos observar que, diferente do modelo de crescimento exponencial, quando $t \to \infty$ temos que $N(t) \to 10^{13}$, ou seja, para um tempo suficientemente grande, tanto se a população de células tumorais estiver abaixo quanto se estiver acima, a população de células tumorais tende para a capacidade de suporte $K$.

### Modelo de Gompertz

Finalmente, vamos analisar o Modelo de Gompertz, que é considerado o mais adequado para esse tipo de situação, levando em conta algumas modificações em relação à notação de parâmetros:

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln\left(\frac{K}{N}\right) \tag{3.20}$$

em que $r$ é a constante positiva de crescimento interno da célula, $t$ é o instante considerado para cada quantidade de população de células, $N(t)$ é a população de células tumorais no instante $t$ e $K$ é o tamanho máximo que o tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis.

Além disso, é possível explorar a solução desse modelo, pois de posse desses dados podemos representar e analisar graficamente esta solução. Vimos anteriormente que quando submetida a condição inicial $N(0) = N_0$, a solução desse modelo é $N(t) = Ke^{e^{-rt}\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)}$. Logo, utilizando os parâmetros, temos que $N(t) = 10^{13}e^{e^{-0,0060t}\ln\left(\frac{10^9}{10^{13}}\right)}$.

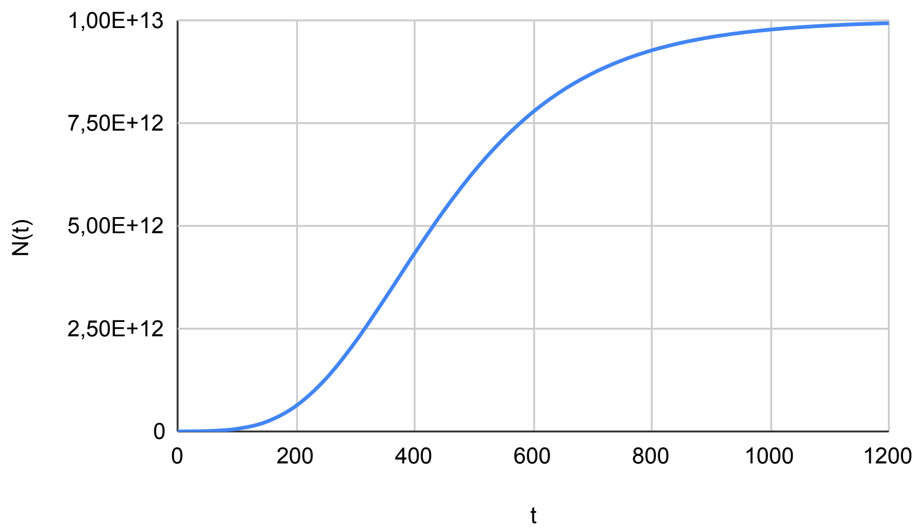



Figura 3.8: *

Gráfico $N(t)$ x $t$ que descreve a variação da população tumoral com o passar do tempo segundo o Modelo de Gompertz.

Se a condição inicial sofrer alteração, obtemos o seguinte comportamento das populações celulares tumorais com o passar do tempo:

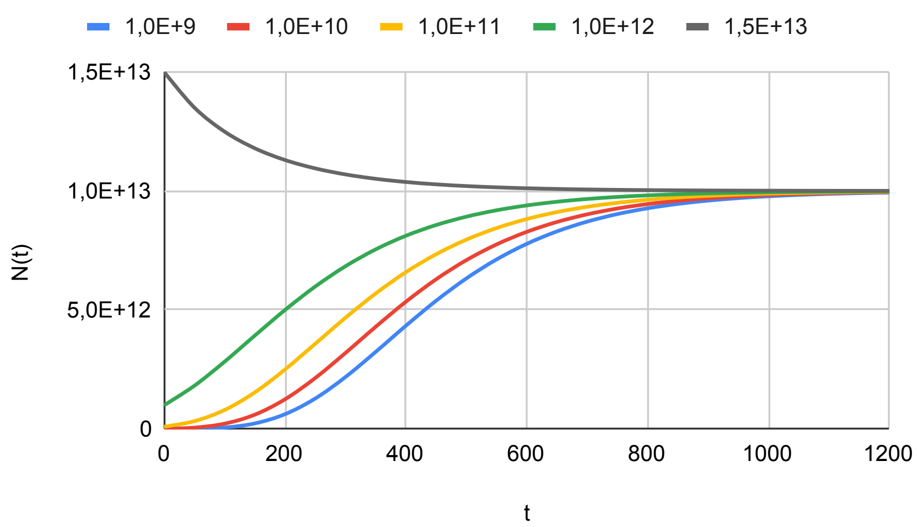



Figura 3.9: *

Comportamento gráfico quando variamos a condição inicial no Modelo de Gompertz.

Sendo assim, através do comportamento gráfico notamos que as populações tendem a capacidade de suporte do meio $K$ com o passar do tempo, ou seja, tanto se a população de células tumorais estiver abaixo quanto se estiver acima, ela tende em direção a $K$.

Portanto, podemos admitir que $K$ é a solução de equilíbrio estável da equação (3.20), isto é, o tamanho máximo que o tumor pode atingir.

### Comparação entre os modelos

Após analisarmos o Modelo de Malthus, vimos que ele não leva em consideração os fatores externos que influenciam o crescimento dos tumores. Logo, não é o mais apropriado para modelar esse tipo de crescimento.

Ademais, notamos algumas semelhanças entre o Modelo Logístico e o de Gompertz, a fim de analisar graficamente a diferença entre eles que até então era expressa apenas de forma algébrica, o gráfico abaixo apresenta ambos plotados no mesmo plano. Vejamos,

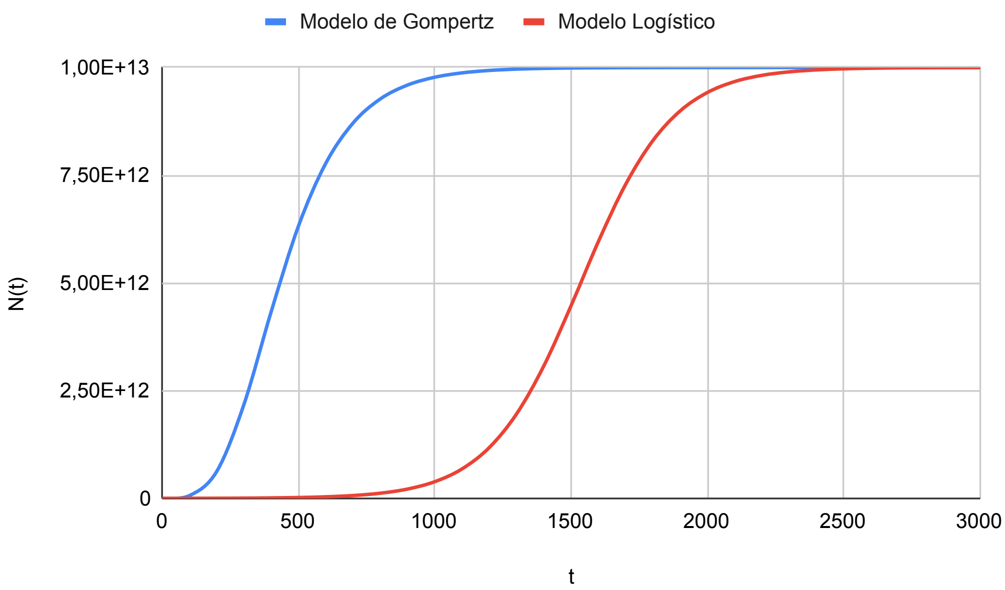



Figura 3.10: *

Comparação entre os modelos.

Em ambos os modelos, para um tempo suficientemente grande, a população de células tende a capacidade de suporte $(K)$, ou seja, quando $t \to \infty$ temos que $N(t) \to 10^{13}$. Porém, existem diferenças na evolução das células tumorais com o tempo nesses modelos analisados.

Inicialmente, o modelo de Gompertz apresenta um crescimento rápido, já o modelo logístico tem um comportamento sigmoidal, onde para tempos iniciais o crescimento ocorre de forma mais lenta. Além disso, analisando graficamente o modelo logístico demora, praticamente, duas vezes mais que o modelo de Gompertz para atingir à capacidade suporte. Por fim, mesmo não contendo um fator de tratamento que impede o crescimento acelerado das células, ambos se estabilizam em um tempo suficientemente grande.

No entanto, vale ressaltar que estamos analisando o crescimento do tecido tumoral sem considerarmos o efeito de um fator de tratamento contra esse tumor. Sendo assim, é de se esperar que ao considerarmos técnicas de tratamento o equilíbrio populacional das células tumorais seja alcançado bem antes da capacidade de carga do tumor, ou ainda, que a taxa de crescimento dessa população diminua drasticamente devido às ações do tratamento e, é isso que analisaremos a seguir.

**Inserção de um fator de tratamento**

Como o modelo de Gompertz (3.20) é considerado o mais adequado atualmente para modelar o crescimento de tumores, vamos inserir nessa equação um fator que representa a ação de um determinado tratamento que tem por finalidade estabilizar o crescimento ou diminuir o volume da massa tumoral. Então, baseando-se em nossas referências, consideraremos a seguinte equação:

$$\frac{dN}{dt} = rN\ln\left(\frac{K}{N}\right) - \gamma c(t)N. \tag{3.21}$$

em que $r$ é a constante positiva de crescimento interno da célula, $K$ é a capacidade de suporte do tumor e, a inibição do crescimento das células tumorais depende da "força" de atuação do medicamento ($\gamma$), da sua concentração no organismo no instante $t$ ($c(t)$) e da quantidade de células tumorais a cada instante ($N(t)$). Ademais, a concentração do medicamente a cada instante é dada por

$$c(t) = c_0 \cdot S \cdot t \cdot e^{-rt},$$

onde $S$ é a função degrau definida como

$$S = \begin{cases} 1, & \text{com o tratamento} \\ 0, & \text{sem o tratamento} \end{cases}$$

Vamos explorar a solução desse modelo, a fim de representar e analisar graficamente esta solução. Primeiramente, notamos que a Equação (3.21) é não linear, então vamos verificar se é possível convertê-la em linear para que possamos obter uma solução. Quando $N \neq 0$ para todo instante $t$, podemos dividir a Equação (3.21) por $N$:

$$\begin{aligned} \frac{N'}{N} &= r\ln\left(\frac{K}{N}\right) - \gamma c(t) \\ (\ln N)' &= r(\ln K - \ln N) - \gamma c(t) \\ (\ln N)' &= r(\ln K) - r(\ln N) - \gamma c(t) \end{aligned}$$

Como $K$ e $r$ são constantes, então $r(\ln K) = C$, onde $C$ é contante. Assim, considerando $y = \ln N$, temos que

$$y' + ry = -\gamma c(t) + C, \tag{3.22}$$

a qual é uma equação diferencial ordinária linear e tem solução da seguinte forma: $y = y_c + y_p$, em que $y_c$ é a solução complementar e $y_p$ é a solução particular. Podemos obter a solução complementar através da equação homogênea associada

$$y' + ry = 0$$

que possui solução da forma $y = k_1 e^{mt}$, onde $m$ é raiz de $m + r = 0$, isto é, $m = -r$. Desse modo, $y_c = k_1 e^{-rt}$. Agora, para encontrar a solução particular existem diversas maneiras, uma delas é usando o fator de integração, então multiplicando a Equação (3.22) por $\mu(t) = e^{rt}$, obtemos

$$\begin{aligned}
y'e^{rt} + yre^{rt} &= -\gamma c(t)e^{rt} + Ce^{rt} \\
(ye^{rt})' &= -\gamma c(t)e^{rt} + Ce^{rt} \\
ye^{rt} &= -\gamma \int c(t)e^{rt}dt + C\int e^{rt}dt + \dot{K} \\
ye^{rt} &= -\gamma \int c_0 \cdot S \cdot t \cdot e^{-rt} \cdot e^{rt}dt + \frac{C}{r}e^{rt} + \dot{K} \\
ye^{rt} &= -\gamma c_0 \int S \cdot tdt + \frac{C}{r}e^{rt} + \dot{K} \\
y &= -\gamma c_0 e^{-rt} \int S \cdot tdt + \frac{C}{r} + \dot{K}e^{-rt}
\end{aligned}$$

Lembre-se que $r(\ln K) = C$ e $S$ é a função degrau definida por

$$S = \begin{cases} 1, & \text{com o tratamento} \\ 0, & \text{sem o tratamento} \end{cases}$$

Sendo assim,

$$y(t) = \begin{cases} e^{-rt}\left(\dot{K} - \gamma c_0 \dfrac{t^2}{2}\right) + \ln K, & \text{com o tratamento} \\ \ln K + \dot{K}e^{-rt}, & \text{sem o tratamento} \end{cases}$$

No instante $t = 0$, temos que $y(0) = \ln N_0 = \ln K + \dot{K}$, ou seja, $\dot{K} = \ln\left(\frac{N_0}{K}\right)$. Além disso, como $y = \ln N$, segue que $N(t) = e^{y(t)}$. Portanto, quando submetida a condição inicial $N(0) = N_0$, a solução é dada por

$$N(t) = \begin{cases} e^{e^{-rt}\left[\ln\left(\frac{N_0}{K}\right) - \gamma c_0 \dfrac{t^2}{2}\right] + \ln K}, & \text{com o tratamento} \\ e^{\ln K + \ln\left(\frac{N_0}{K}\right)e^{-rt}}, & \text{sem o tratamento} \end{cases}$$

Agora, utilizaremos parâmetros reais de técnicas de tratamento desse fenômeno biológico, dados reais referentes ao tratamento de tumores com a aplicação de uma droga denominada *endostatina*[2], pois estudos recentes indicam que ela é capaz de interromper o crescimento de tumores em ratos e, em função dos ótimos resultados nesses experimentos, iniciaram os testes com seres humanos. No caso do câncer, por exemplo, a endostatina interrompe a irrigação do tumor bloqueando o fornecimento de nutrientes e acaba destruindo as células tumorais. No entanto, vale ressaltar que sua eficácia ainda não está comprovada.

Na bibliografia, encontramos diferentes valores para os parâmetros e, por isso, foi escolhido aleatoriamente os valores que seguem na tabela abaixo:

| $r$ | $K$ | $N(0)$ | $c_0$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| $0,006$ | $10^{13}$ | $10^9$ | $0,04$ | $0,04$ |

Tabela 3.2: Parâmetros para a construção do modelo com a inserção do tratamento

Com base equações e nos parâmetros, podemos representar e analisar graficamente o comportamento dos resultados com e sem o fator de tratamento em relação à variação das células tumorais com o passar do tempo.

[2]A endostatina é uma proteína natural que bloqueia a formação de vasos sanguíneos.

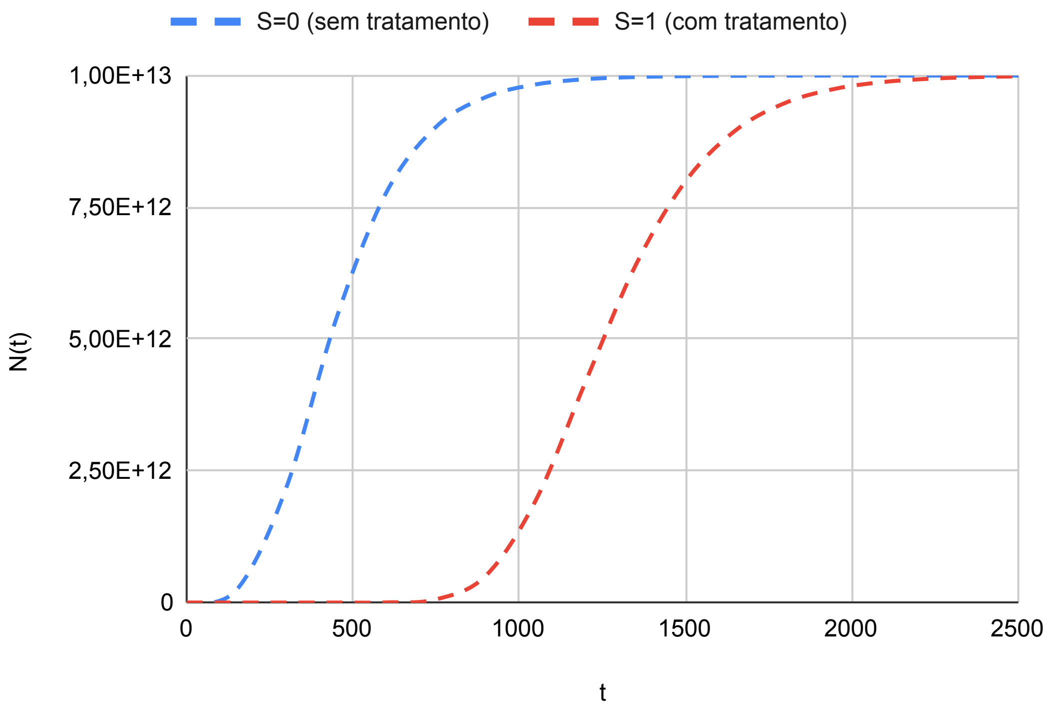



Figura 3.11: *

Comparação entre as curvas que representam a população de células tumorais com o passar do tempo, com e sem a consideração do tratamento.

Podemos observar que no caso em que se considera a inserção do tratamento a população de células tumorais cresce bem mais lentamente do que o caso em que esse tratamento não é considerado. Esse comportamento de mantém até aproximadamente o ciclo de evolução temporal $t = 1000$, depois disso as inclinações se aproximam cada vez mais, indicando que essas populações tendem a se encontrar na capacidade de suporte do tumor $(K)$, o que de fato ocorre com o passar do tempo.

Esse resultado nos indica que com a inserção de um tratamento, o crescimento da população de células tumorais seria retardado em comparação ao seu crescimento sem o tratamento, o que nos permite intuir que, considerando o tratamento, mesmo que nos dois casos as populações tumorais finais sejam as mesmas, com a administração do medicamento, essa população demorará muito mais a atingir esse limiar. Em outras palavras, com a medicação administrada, espera-se que o paciente tenha crescimento elevado da massa tumoral depois de um tempo bem maior do que se não estivesse sendo medicado.

Analisando do ponto de vista médico, nota-se que um tratamento com esses moldes poderiam representar um ganho de tempo e de qualidade de vida ao paciente, já que foi possível observar que o tratamento impede o crescimento acelerado da população de células do tumor por quase metade do tempo que levaria até alcançar a capacidade de suporte sem ele, o que é muito importante para que se possa chegar a um tratamento ótimo, dentro das limitações médicas que ainda restringem o tratamento de tumores.

## 5 Conclusão

Através desse estudo, pudemos entender um pouco melhor algumas Equações Diferenciais Ordinárias que modelam a dinâmica de populações, mais especificamente, o crescimento de populações tumorais. Ao longo desse trabalho, o Modelo de Malthus, o Modelo Logístico e o Modelo de Gompertz foram abordados. A partir de suas equações, obtemos as soluções e representamos graficamente o comportamento dos resultados para fazer uma análise matemática atrelada à visão biológica.

Por fim, comparamos os dados e notamos que a inserção de um fator de tratamento no Modelo de Gompertz representa um ganho de tempo e a qualidade de vida ao paciente, o que torna-o uma opção viável para que se possa alcançar o almejado tratamento ótimo à essa doença, dentro das limitações médicas que ainda restringem o tratamento.

# Referências Bibliográficas

[1] Coddington, E.; Levinson, L. *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mac Graw-Hill, New York, 1955.

[2] Doering, C.I.; Lopes, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias.* 2d, RJ: IMPA, 2007.

[3] Friedman, A.; Reitich, J. *Analysis of a mathematical model for the growth of tumors,* J. Math. Biol. 38 (1999), pp. 262–284.

[4] Zill, D.G. *Equações Diferenciais: Com Aplicações em Modelagem.* Cengage Learning, 2016.

[5] Spencer, S. L., Berrymanb, M. J., Garcia, J. A., e Abbott, D. *An ordinary diferential equation model for the multistep transformation to cancer*, Journal of Theoretical Biology, 231:515-524 (2004).

[6] Boyce, W. E. e DePrima, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* LTC, Rio de Janeiro/RJ (2002).

[7] Domingues, J. S. *Modelo matemático e computacional do surgimento da angiogênese em tumores e sua conexão com as células-tronco,* in Dissertação de Mestrado - CEFET MG, Belo Horizonte (2010).

[8] Domingues, J. S. *Análise do modelo de gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento,* Biomatemática IMECC - Unicamp, Campinas, n. 21, p. 103–112, 2011.

# SPLINE UMA FERRAMENTA MATEMÁTICA.

Bella Rocxane Martins Figliaggi
*Estudante*

Eliandro Cirilo Rodrigues
*Orientador(a)*

## RESUMO

O trabalho se concentra no estudo das funções Splines, definidas como polinômios por partes de um certo grau pré estabelecido. Essas funções são ferramentas matemáticas, visto que são capazes de estimar fenômenos conhecidos apenas em alguns pontos, como também, aproximar os resultados de funções antes muito trabalhosas. No estudo, foi abordado as principais tipo de Splines: Linear e Cúbica. As Splines Lineares são aquelas definidas por polinômios de primeiro grau, enquanto a Cúbica por polinômios de terceiro grau. Ainda mais, utilizando parametrizações foi possível interpolar curvas. Durante todos os momentos do trabalho foram apresentados exemplos afim melhorar o entendimento dos assuntos.
**Palavras-chave:** Spline; Funções; Parametrização

## ABSTRACT

The article focuses on study of Spline functions, defined as piecewise polynomial function of a certain pre-established degree. These functions are mathematical tools, since they are capable of estimating known phenomena cided only in some points, as well as to approximate the results of previously very laborious functions. In the study, the main types of of Splines: Linear and Cubic. Linear Splines are those defined by first-degree polynomials, while Cubic by third-degree polynomials degree. Even more, using parameterizations it was possible to interpolate curves. During all the moments of the work, examples were presented improve understanding of subjects.
**Keywords:** Spline; Functions; Parameterization

# 1 Introdução

Muitas vezes em problemas matemáticos é conhecido valores numéricos de uma situação e não a lei que descreve, ou ainda, quando essa lei é conhecida trabalhar com sua expressão é muito difícil para operações como diferenciação ou integração [5]. Desse modo, surge a necessidade de interpolar esses fenômenos, ou seja, considerar uma função aproximada, com uma certa classe e propriedades pré-definidas, que represente adequadamente o fenômeno estudado [5].

Existem diversos modos de interpolar um fenômeno, geralmente as funções polinomiais são as mais escolhidas, visto que suas características permitem melhores representações de situações, como também, um fácil trabalho com elas. Um dos métodos mais conhecidos é a interpolação polinomial de Lagrange, a qual interpola uma função em pontos conhecidos dela, que chamados de nós [8].

Contudo, essas formas de interpolação, a qual uma única função polinomial é escolhida para todo os intervalos de nós, podem ocasionar altas oscilações quando o conjunto de nós é consideravelmente grande. Uma alternativa para resolver esse problema é considerar diferentes polinômios para cada subintervalo de nós e construir uma função interpoladora polinomial por partes [1]. Vale ressaltar, assim como no Lagrange, é necessário estipular condições iniciais para construção dessa função.

Um método de interpolação que realiza esse processo de considerar um polinômio para cada subintervalo é a Spline. Esse método herdou o nome da régua elástica usada em desenhos da engenharia, que ao considerar certas hipóteses, os traços desenhados por essa régua podem ser descritas como uma função por partes interpoladora de uma curva ou uma função tabelada [5].

Na interpolação por Spline o entendimento das imposições inciais feitas é de grande importância, visto que a construção de uma curva por esse processo podem mudar de acordo com as essas imposições [5]. Com isso, o presente trabalho concentrou-se no processo de definição e determinação de uma Spline, perpassando por diferentes condições pré-estabelecidas para a mesma, sendo todos os métodos implementados computacionalmente, através do *software* livre *Octave* [4].

# 2 Spline

Alguns métodos de interpolação, por exemplo os métodos tradicionais Lagrange e Newton, para uma grande quantidade de nós podem ser insatisfatórias. Visto que podem ocorrer oscilações nos extremos afetando o contorno das curvas estudadas. Essa situação ocorre devido ao uso de polinômios interpoladores de ordem elevada causando o Fenômeno de Runge [5].

Com isso, uma forma de evitar esse problema é dividir os intervalos dessa função e construir polinômios de menor grau para cada subintervalo, impondo para eles condições pré determinadas. Um desses métodos é conhecido como Spline, sendo que do ponto de vista de cálculo matemáticos é simples e muito eficiente para interpolações de um grande números de nós [2].

A Spline é uma forma de interpolar uma função tabelada $f$ em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}], i = 1, \cdots n$ por um polinômio de grau $p$, considerando algumas imposições sobre essa função, conforme veremos na definição.

**Definição 2.1** (Spline)**.** Considere a função $f$, tabelada nos pontos $x_1 < ... < x_{n+1}$, a seguir

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ | $y_{n+1}$ |

Uma função $S_p(x)$ é chamada de função Spline de grau $p$ com nós nos pontos $x_i$, $i = 1, ..., n+1$, se satisfazer:

1. $s_i$ é um polinômio de grau $p$ em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, ..., n+1$.
2. $S_p(x)$ é contínua e tem derivada até a ordem $(p-1)$ em $[x_1, x_{n+1}]$.
   As primeiras condições definem uma função Spline, se além disso tivermos:
3. $S_p(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, ..., n+1$, então teremos uma Spline interpoladora de $f$.

Notemos que a Spline é um função seccionalmente polinomial, sendo assim o aumento de nós não ocasiona o aumento do grau do polinômio de interpolação, ao invés disso o grau é determinado antes da interpolação. Veremos as imposições mais utilizadas para Splines: Linear e Cúbica.

## 2.1 Spline Linear

A Spline Linear é aquela o qual interpola cada subintervalo entre os nós por polinômios lineares, ou seja, de grau igual a um. Esse é um dos casos mais simples para o cálculo de uma função interpoladora, em que dada uma função $f$ tabelada a seguir

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ | $y_{n+1}$ |

uma Spline Linear interpolante de $f(x)$ em $x_1 < ... < x_{n+1}$ é definida por:

$$SLI(x) = \begin{cases} s_2(x) = f(x_2)\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} + f(x_1)\dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \ \ \forall x \in [x_1, x_2]. \\ \vdots \\ s_{n+1}(x) = f(x_{n+1})\dfrac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} + f(x_n)\dfrac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n}, \ \ \forall x \in [x_n, x_{n+1}]. \end{cases}$$

Vejamos que a função $SLI$ satisfaz as condições da definição de Spline.

1. Primeiramente, vamos mostrar que a função definida é interpoladora de $f$. Assim, consideremos
$$s_{i+1}(x) = f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + f(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i},$$
com $i = 1, \cdots, n$. Com isso,
$$s_{i+1}(x_i) = f(x_{i+1})\frac{x_i - x_i}{x_{i+1} - x_i} + f(x_i)\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i),$$
$$s_{i+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1})\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_i} + f(x_i)\frac{x_{i+1} - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} = f(x_{i+1}).$$

2. $SLI(x)$ é um polinômio de grau 1, visto que é composto apenas por polinômios de primeiro grau em cada um dos seus subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, ..., n$.

3. Evidentemente $SLI$ é contínua em cada $(x_i, x_{i+1})$, $i = 1, ..., n$. Além disso,
$$s_i(x_i) = f(x_i) \ e \ s_{i+1}(x_i) = f(x_i) \Rightarrow s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i),$$
para $i = 2, \cdots, n$. Sendo assim, $SLI$ é contínua nos nós e, então, $SLI$ é contínua em $[x_1, x_{n+1}]$.

Logo, $SLI$ é uma Spline Linear interpolante de $f$.

*Exemplo* 2.1. Dada a função $f$ tabelada

| $x$ | 5 | 10 | 17 | 21 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 5 | 9 | 7 | 0 |

A Spline Linear que interpola essa função é

$$SLI(x) = \begin{cases} f(x_2)\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} + f(x_1)\dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = x - 5, \quad x \in [5, 10] \\[2ex] f(x_3)\dfrac{x - x_2}{x_3 - x_2} + f(x_2)\dfrac{x_3 - x}{x_3 - x_2} = \dfrac{4x - 5}{7}, \quad x \in [10, 17] \\[2ex] f(x_4)\dfrac{x - x_3}{x_4 - x_3} + f(x_3)\dfrac{x_4 - x}{x_4 - x_3} = \dfrac{-2x + 70}{4}, \quad x \in [17, 21] \\[2ex] f(x_5)\dfrac{x - x_4}{x_5 - x_4} + f(x_4)\dfrac{x_5 - x}{x_5 - x_4} = \dfrac{-7x + 175}{4}, \quad x \in [21, 25]. \end{cases}$$

Com isso, temos o seguinte gráfico para a Spline

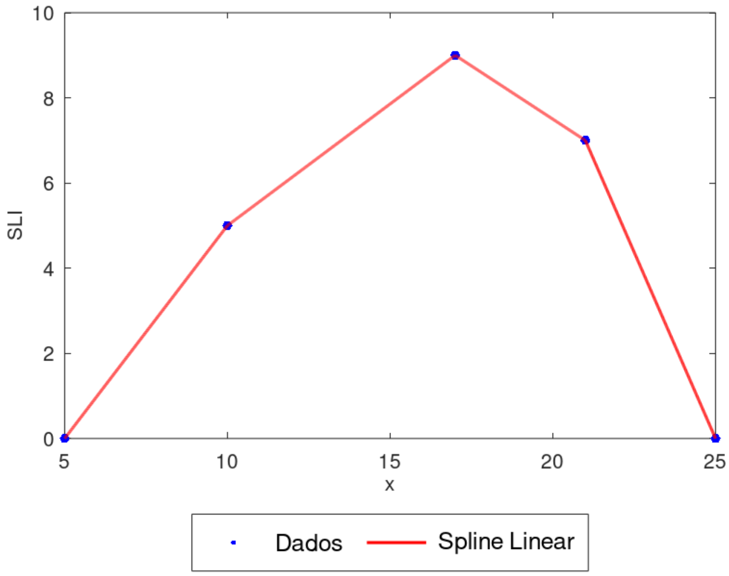



Figura 4.1: Spline Linear do Exemplo 2.1

Inicialmente, tínhamos uma função a qual conhecíamos seus valores apenas em um número limitado de pontos. Após a interpolação, construímos um outra função, sendo ela contínua e que passa por todos os pontos da função inicial. Desse modo, com essa nova função podemos estimar como o fenômeno se comporta entre os nós.

*Exemplo* 2.2. Dada a função $f$ tabelada

| $x$ | 1 | 2 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 2 | 3 | 2,5 |

A Spline Linear que interpola essa função é dada por

$$SLI(x) = \begin{cases} f(x_2)\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} + f(x_1)\dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = x, \quad x \in [1, 2] \\[2em] f(x_3)\dfrac{x - x_2}{x_3 - x_2} + f(x_2)\dfrac{x_3 - x}{x_3 - x_2} = \dfrac{x + 4}{3}, \quad x \in [2, 5] \\[2em] f(x_4)\dfrac{x - x_3}{x_4 - x_3} + f(x_3)\dfrac{x_4 - x}{x_4 - x_3} = \dfrac{-0,5x + 8,5}{2}, \quad x \in [5, 7]. \end{cases}$$

Com gráfico:

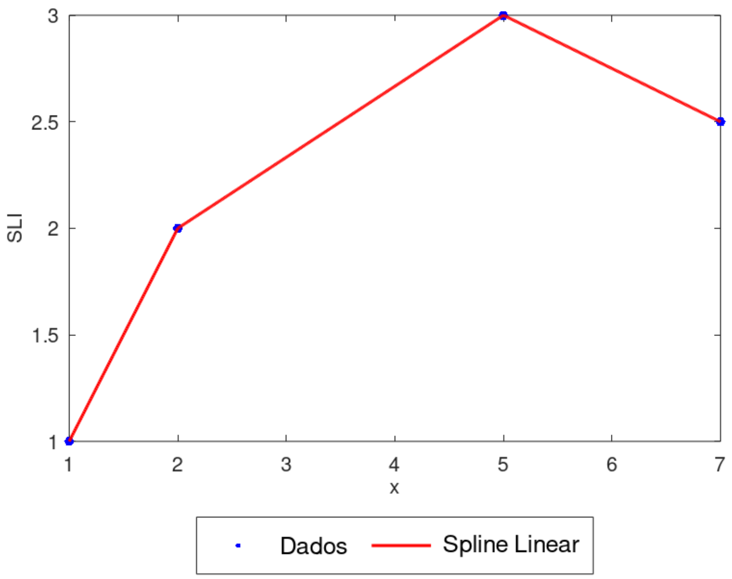



Figura 4.2: Spline Linear do Exemplo 2.2

*Exemplo* 2.3. Nesse exemplo, modificado do Exercício 5 do livro [5] da página 270, queremos explorar o potencial de estimativa por meio de Spline. Dessa forma, queremos encontrar o valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(g(x)) = 0.6$, sendo $f$ e $g$ duas funções tabeladas abaixo:

| $x$ | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.905 | 0.819 | 0.67 | 0.549 | 0.449 | 0.407 |

| $x$ | 1 | 1.2 | 1.4 | 1.7 | 1.8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0.210 | 0.320 | 0.480 | 0.560 | 0.780 |

Como queremos um valor de $x$ tal que $f(g(x)) = 0.6$, precisamos inicialmente estipular um $y$ tal que $f(y) = 0.6$. Vejamos que a função $f$ é apresentada apenas em alguns valores, sendo necessário fazer uma estimativa dessa função em valores os quais não estão tabelados, mas sim pertencentes ao intervalo $[0.1, 0.9]$ tabelado. Desse modo, vamos determinar a Spline Linear interpolante de $f$:

$$SLI_f(x) = \begin{cases} -0.860x + 0.991, \; x \in [0.1, 0.2] \\ -0.745x + 0.968, \; x \in (0.2, 0.4] \\ -0.605x + 0.912, \; x \in (0.4, 0.6] \\ -0.500x + 0.849, \; x \in (0.6, 0.8] \\ -0.4200x + 0.785, \; x \in (0.8, 0.9] \end{cases}$$

Com gráfico dado por:

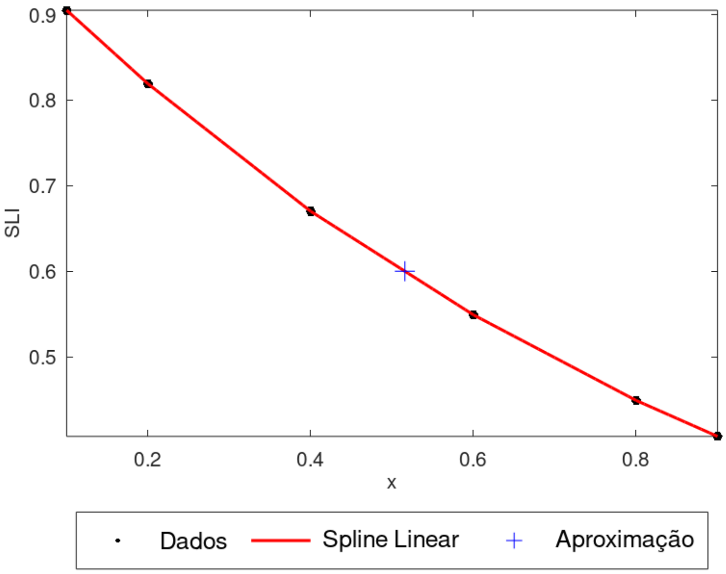



Figura 4.3: Spline Linear interpoladora de $f$.

O valor 0.6 está no intervalo $[0.67, 0.549]$, e consequentemente o $y$ procurado está em $(0.4, 0.6]$, sendo assim:

$$-0.605 \cdot y + 0.912 = 0.6 \Rightarrow y + 0.912 = \frac{0.6 - 0.912}{-0.605} = 0.5157$$

Agora precisamos de $x$ tal que $g(x) = y = 0.5157$. Para isso, interpolando $g$ por uma

Spline Linear, temos

$$SLI_g(x) = \begin{cases} 0.550x - 0.340, \ x \in [11.2] \\ \\ 0.800x - 0.640, \ x \in (1.2, 1.4] \\ \\ 0.266667x + 0.106667, \ x \in (1.4, 1.6] \\ \\ 2.200x - 3.180, \ x \in (1.61.8] \end{cases}$$

Com gráfico igual à

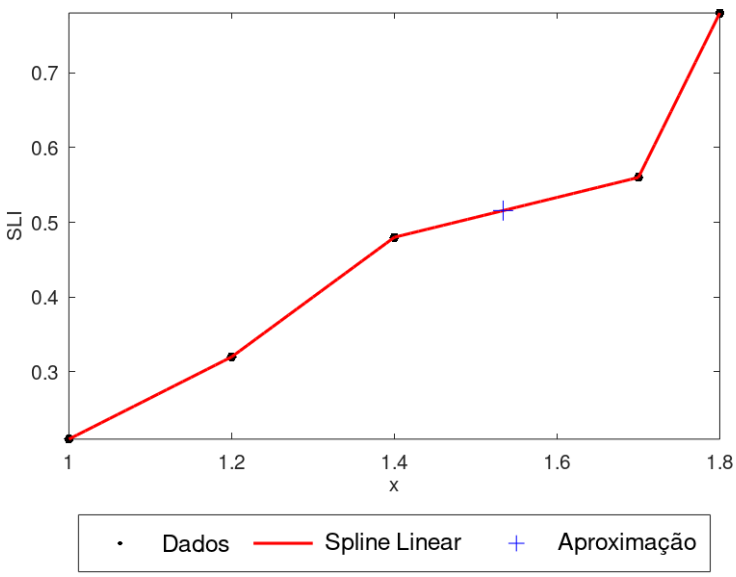



Figura 4.4: Spline Linear interpoladora de $f$.

O valor 0.5157 pertence ao intervalo $[0.480, 0.560]$, sendo assim, queremos $x \in [1.4, 1.6]$ tal que

$$0.266667x + 0.106667 = 0.5157$$
$$x = \frac{0.5157 - 0.106667}{0.266667} = 1.5337.$$

Portanto, conseguimos obter um valor para $x$ tal que $f(g(x)) = 0.6$.

## 2.2 Spline Linear Parametrizada

Muitas vezes precisamos interpolar curvas as quais não podem ser representadas por funções, por exemplo, a imagem a seguir

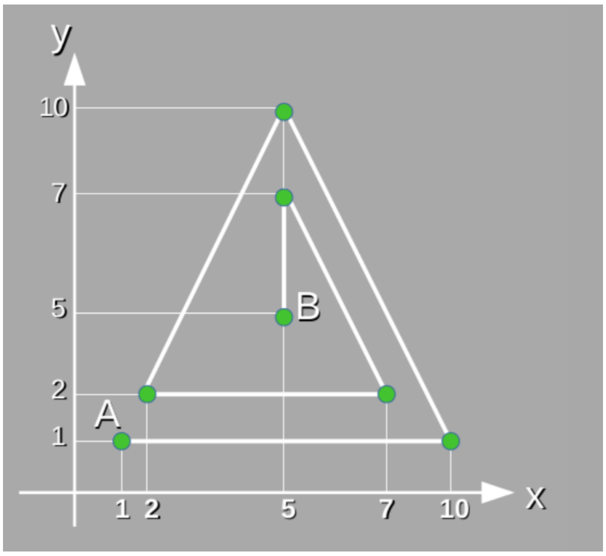



Figura 4.5: Representação de uma curva.

Notemos que na Figura 4.5 a coordenada $x = 5$ está relacionada com $y = 5$, $y = 7$ e $y = 10$, ou seja, essa curva não pode ser descrita por uma função $x \to f(x)$. Contudo, mesmo nessas situações é possível construir uma Spline que interpole essa curva, ou seja, podemos construir uma Spline para uma sequência de pontos $p_i = (x_i, y_i)$, com $i = 1, \cdots, n$, em que a distribuição dos mesmos não se caracteriza como gráfico de função [3]. Para isso, precisamos parametrizar a curva, isto é, tomar um parâmetro $t \in [1, n+1]$ de modo que os pontos da curva são dadas por $(x(t), y(t))$. Esse procedimento é conhecido como Spline interpolante parametrizada.

Para interpolar curvas parametrizadas com Spline lineares vamos construir um polinômio interpolante para as funções em $x(t)$ e outra para $y(t)$. Consideremos a curva tabelada e parametrizada em $t$ a seguir:

| $t$ | $t_1$ | $t_2$ | $\cdots$ | $t_n$ | $t_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ |
| $y(t)$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ | $y_{n+1}$ |

A Spline linear para a curva tabelada é dada por:

$$SLI(t) = \begin{cases} SLI_x(t) \\ SLI_y(t) \end{cases} \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

em que $SLI_x$ e $SLI_y$ são Spline lineares construídas conforme vimos em 2.1.

*Exemplo* 2.4. Vamos construir uma Spline Linear para o gráfico da Figura 4.5, considerando o início em A e o fim em B. Primeiramente, vamos parametrizar a curva utilizando $t \in \mathbb{N}$, temos

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | 1 | 10 | 5 | 2 | 7 | 5 | 5 |
| $y(t)$ | 1 | 1 | 10 | 2 | 2 | 7 | 5 |

Construindo a Spline Linear Parametrizada em $x$ e em $y$, temos que

$$SLI_x(t) = \begin{cases} 9t - 8, & t \in [1,2] \\ -5 + 20, & t \in [2,3] \\ -3t + 14t, & t \in [3,4] \\ 5t - 18, & t \in [4,5] \\ -2t + 17, & t \in [5,6] \\ 5, & t \in [6,7] \end{cases} \qquad SLI_y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1,2] \\ 9t - 17, & t \in [2,3] \\ -8t - 34, & t \in [3,4] \\ 2, & t \in [4,5] \\ 5t - 23, & t \in [5,6] \\ -2t + 19, & t \in [6,7] \end{cases}$$

Com isso, o gráfico da Spline Linear Parametrizada interpolante da Figura 4.5 é

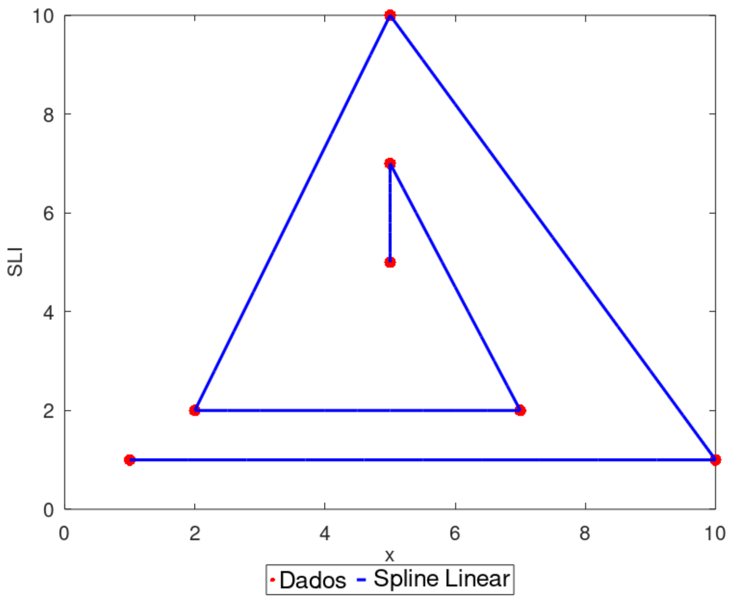



Figura 4.6: Spline Linear Parametrizada.

*Exemplo* 2.5. Considerando a curva dada pelas seguintes coordenadas tabeladas a seguir, retirada de [6]:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (2, 16) | (5, 4) | (12, 1) | (15, 20) |
| (3, 15) | (6, 4) | (15, 1) | (14, 19) |
| (5, 14) | (5, 3) | (14, 2) | (12, 16) |
| (7, 14) | (7, 3) | (13, 2) | (9, 16) |
| (6, 11) | (8, 2) | (15, 4) | (8, 15) |
| (1, 11) | (7, 2) | (15, 5) | (4, 16) |
| (2, 8) | (6, 1) | (14, 9) | (2, 16) |
| (5, 8) | (9, 1) | (15, 11) | |
| (4, 6) | (9, 2) | (14, 15) | |
| (6, 6) | (12, 2) | (15, 18) | |

Após calcularmos a Spline Linear Parametrizada, obtivemos o seguinte gráfico

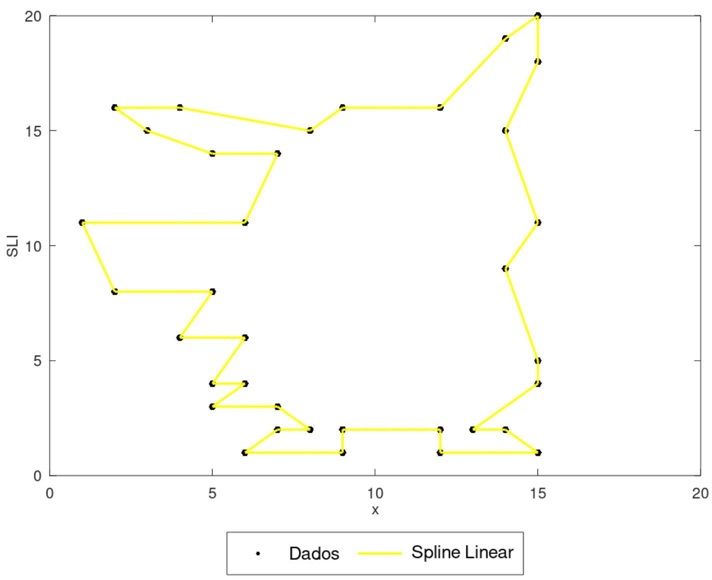



Figura 4.7: Spline Linear Parametrizada do Exemplo 2.5.

O gráfico da Spline interpoladora desses dados propositalmente se assemelha com o personagem `Pikachu` da série animada `Pokemón`. Desse modo, o exemplo mostra que além de ferramentas de aproximação de valores de funções, as Splines podem ser utilizadas para representações de geometrias, como apresentamos nesse exemplo.

Ainda mais poderíamos colorir a Figura 4.7 obtendo uma imagem ainda mais semelhante com o personagem, dada a seguir:

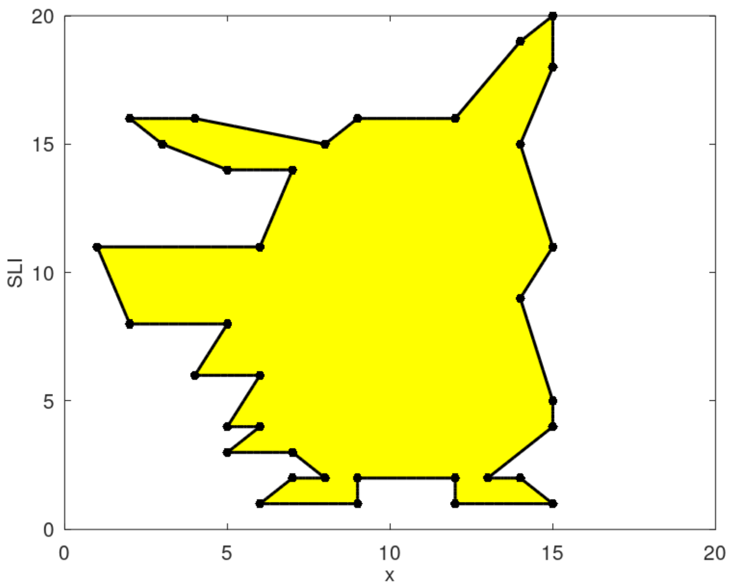



Figura 4.8: Spline Linear Parametrizada do Exemplo 2.5 Colorida.

As Splines Lineares por não possuírem derivadas de primeira ordem contínuas nos nós podem gerar polinômios interpoladores insatisfatórios quando precisamos considerar um grande conjunto de dados ou curvas mais complexas. Sendo assim, podemos definir uma Spline com um grau maior afim de solucionar esse problema. Se considerarmos uma Spline quadrática, construída com polinômios do segundo grau, teríamos só até a derivada de primeira ordem contínua, ou seja, nos pontos de nós poderia ocorrer mudança de curvatura, podendo causar modificações indesejáveis. Portando, as Splines Cúbicas, construída por polinômios do terceiro grau, são as mais utilizadas, visto que essas possuem derivadas de primeira e segunda ordem contínuas [5].

## 2.3 Spline Cúbica

Como vimos a vantagem na utilização de uma Spline Cúbica se deve ao fato da sua primeira e segunda derivadas serem contínuas, garantindo, assim, que não hajam bicos e mudanças bruscas de curvaturas nos nós.

**Definição 2.2** (Spline Cúbica)**.** Seja $f$ uma função tabelada

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ | $y_{n+1}$ |

Com $x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$, a função $SC$ é uma Spline Cúbica interpolante de $f$ se além de cumprir as condições de Spline, vista na Definição 2.1, tivermos:

1. $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k = 2, \cdots, n$.
2. $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 2, \cdots, n$.
3. $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, $k = 2, \cdots, n$.

Sendo cada polinômio igual a

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

com $k = 2, \cdots, n + 1$.

Notamos que para calcular a Spline Cúbica interpolante, é preciso determinar cada coeficiente $a_k, b_k, c_k$ e $d_k$ dos polinômios $s_k$. Com isso, saber a Spline em questão exige determinar um total de $4n$ coeficientes.

Sendo assim, para determinar $SC$ vamos impor a condição de ser interpolante de $f$, ou seja, $SC(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, ..., n + 1$, assim

$$s_k(x_k) = d_k = f(x_k) \Rightarrow d_k = f(x_k).$$

Denotaremos $f(x_k)$ por $y_k$, logo

$$d_k = y_k \tag{4.1}$$

Agora, considerando as condições da Definição 2.2, segue

$$s''_k(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k \Rightarrow s''_k(x_k) = 2b_k \Rightarrow b_k = \frac{s''_k(x_k)}{2}.$$

Denotando $s''_k(x_k) = g_k$, então

$$b_k = \frac{g_k}{2}. \tag{4.2}$$

Além disso,

$$s''_k(x_{k-1}) = 6a_k(x_{k-1} - x_k) + 2b_k.$$

Substituindo (4.2) e lembrando $s''_k(x_{k-1}) = s''_{k-1}(x_{k-1}) = g_{k-1}$, temos

$$s''_k(x_{k-1}) - s''_k(x_k) = 6a_k(x_{k-1} - x_k) \Rightarrow a_k = \frac{g_{k-1} - g_k}{6(x_{k-1} - x_k)}.$$

Considerando $h_k = -(x_{k-1} - x_k) = (x_k - x_{k-1})$, temos que

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k}. \tag{4.3}$$

Sabendo que $s_{k-1}(x_{k-1}) = s_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) = y_{k-1}$, $h_k = -(x_{k-1} - x_k)$ e substituindo (4.3), (4.2) e (4.1), temos

$$\begin{aligned}
s_k(x_{k-1}) = y_{k-1} = a_k(x_{k-1} - x_k)^3 + b_k(x_{k-1} - x_k)^2 + c_k(x_{k-1} - x_k) + d_k \\
\Rightarrow y_{k-1} = a_k(-h_k)^3 + b_k(-h_k)^2 + c_k(-h_k) + d_k \\
\Rightarrow y_{k-1} = -\left(\frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k}\right) h_k^3 + \left(\frac{g_k}{2}\right) h_k^2 + y_k - c_k(h_k) \\
\Rightarrow c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{(2g_k + g_{k-1})h_k}{6}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{(2g_k + g_{k-1})h_k}{6}. \tag{4.4}$$

Por fim, obtemos as igualdade (4.3),(4.2),(4.4) e (4.1):

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k} \\
b_k &= \frac{g_k}{2} \\
c_k &= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{(2g_k + g_{k-1})h_k}{6} \\
d_k &= y_k
\end{aligned}$$

Vejamos que os coeficientes do polinômio $s_k$ estão em função de $g_i$, $i = 1, ..., n+1$. Com isso, vamos construir um sistema para encontrar os valores e $g_i$, $i = 1, \cdots, n+1$, desse modo,

$$\begin{aligned}
s'_{k+1}(x_k) = s'_k(x_k) \Rightarrow 3a_{k+1}(x_k - x_{k+1})^2 + 2b_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + c_{k+1} = c_k \\
\Rightarrow 3a_{k+1}(h_{k+1})^2 + 2b_{k+1}(-h_{k+1}) + c_{k+1} = c_k
\end{aligned}$$

Substituindo $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$ e $c_k$, temos

$$\begin{aligned}
&3\left(\frac{g_{k+1} - g_k}{6h_{k+1}}\right)(h_{k+1})^2 - 2\left(\frac{g_{k+1}}{2}\right)(h_{k+1}) + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} + \frac{(2g_{k+1} + g_k)h_{k+1}}{6} \\
&= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{(2g_k + g_{k-1})h_k}{6} \\
&\Rightarrow (g_{k-1})h_k + g_k(2h_{k+1} + 2h_k) + g_{k+1}(h_{k+1}) = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right)
\end{aligned}$$

Estamos interpolando $f(x)$ em $(n+1)$ nós e temo que $g_i = s''_i(x_i)$, com $i = 1, \cdots, n+1$.

Logo, esse sistema possuí $(n+1)$ incógnitas, com equações dadas por

$$\begin{cases} h_2g_1 + 2(h_3+h_2)g_2 + h_3g_3 = 6\left(\dfrac{y_3-y_2}{h_3} - \dfrac{y_2-y_1}{h_2}\right), \; k=2 \\ \vdots \\ h_ng_{n-1} + 2(h_{n+1}+h_n)g_n + h_{n+1}g_{n+1} = 6\left(\dfrac{y_{n+1}-y_n}{h_{n+1}} - \dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right), \; k=n \end{cases} \tag{4.5}$$

Notemos que $k = 2, \cdots, n$, sendo assim temos um sistema com $(n-1)$ equações e $(n+1)$ incógnitas sendo assim, esse sistema é indeterminado. Desse modo, para conseguir determinar a Spline Cúbica precisamos impor outras condições afim de conseguir um sistema com solução única.

**Spline Cúbica Natural**

Uma forma de definir a Spline Cúbica é impor que

$$g_1 = g_{n+1} = 0.$$

Nesse caso, a Spline é conhecida como Spline Cúbica Natural. Para essa imposição o sistema (4.5) é dado por:

$$\begin{cases} 2(h_3+h_2)g_2 + h_3g_3 = 6\left(\dfrac{y_3-y_2}{h_3} - \dfrac{y_2-y_1}{h_2}\right), \; k=2 \\ \vdots \\ h_ng_{n-1} + 2(h_{n+1}+h_n)g_n = 6\left(\dfrac{y_{n+1}-y_n}{h_{n+1}} - \dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right), \; k=n \end{cases}$$

Com isso, temos um sistema possível e determinado. Podemos ainda escrever na forma matricial: $Ax = B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 \\ 0 & h_4 & 2(h_4+h_5) \\ 0 & 0 & h_5 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & h_n & 2(h_n+h_{n+1}) \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$x = \begin{pmatrix} g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}_{(n-1)\times 1}$$

$$B = 6 \begin{pmatrix} \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}} - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \end{pmatrix}_{(n-1)\times 1}$$

*Exemplo* 2.6. A fim de representar o procedimento de cálculo de uma Spline Cúbica Natural, vamos interpolar a função $f$ tabelada a seguir

| $x$ | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 1.8616 | -0.5571 | -4.1987 | -9.0536 |

Notemos que $h_k = 0.5$ para $k = 2, \cdots, n+1$, então faremos $h_k = h$. Definindo os parâmetros $g_i$, com $i = 1, \cdots, n+1$, pelo sistema (4.5), segue que

$$\begin{cases} 0 + 4hg_2 + hg_3 = \dfrac{6}{h}(-1,2805) \\ hg_2 + 4hg_3 + hg_4 = \dfrac{6}{h}(-1.2229) \\ hg_3 + 4hg_4 + 0 = \dfrac{6}{h}(-1.2133) \end{cases}$$

Substituindo $h$, temos

$$\begin{cases} 0 + 2g_2 + 0.5g_3 = \dfrac{6}{0.5}(-1,2805) \\ 0.5g_2 + 2g_3 + 0.5g_4 = \dfrac{6}{0.5}(-1.2229) \\ 0.5g_3 + 2g_4 + 0 = \dfrac{6}{0.5}(-1.2133) \end{cases} \sim \begin{cases} g_2 = -6.6541 \\ g_3 = -4.111 \\ g_4 = -6.252 \end{cases}$$

Com isso, podemos calcular os coeficientes de cada polinômio da Spline, ou seja,

$$\begin{aligned} s_2(x) &= -2.218(x-0.5)^3 - 3.327(x-0.5)^2 - 3.3854(x-0.5) + 1.8616 \\ s_3(x) &= 0.8477(x-1)^3 - 2.0555(x-1)^2 - 6.289(x-1) - 0.5571 \\ s_4(x) &= -0.7137(x-1.5)^3 - 3.126(x-1.5)^2 - 8.6677(x-1.5) - 4.1987 \\ s_5(x) &= 2.084(x-2)^3 - 11.1956(x-2) - 9.0536 \end{aligned}$$

Portanto, a Spline Cúbica interpoladora de $f$ é

$$SC(x) = \begin{cases} -2.218(x-0.5)^3 - 3.327(x-0.5)^2 - 3.3854(x-0.5) + 1.861, x \in [0, 0.5] \\ 0.8477(x-1)^3 - 2.0555(x-1)^2 - 6.289(x-1) - 0.557, x \in [0.5, 1] \\ -0.713(x-1.5)^3 - 3.126(x-1.5)^2 - 8.667(x-1.5) - 4.198, x \in [1, 1.5] \\ 2.084(x-2)^3 - 11.195(x-2) - 9.0536,\ x \in [1.5, 2] \end{cases}$$

Sendo seu gráfico:

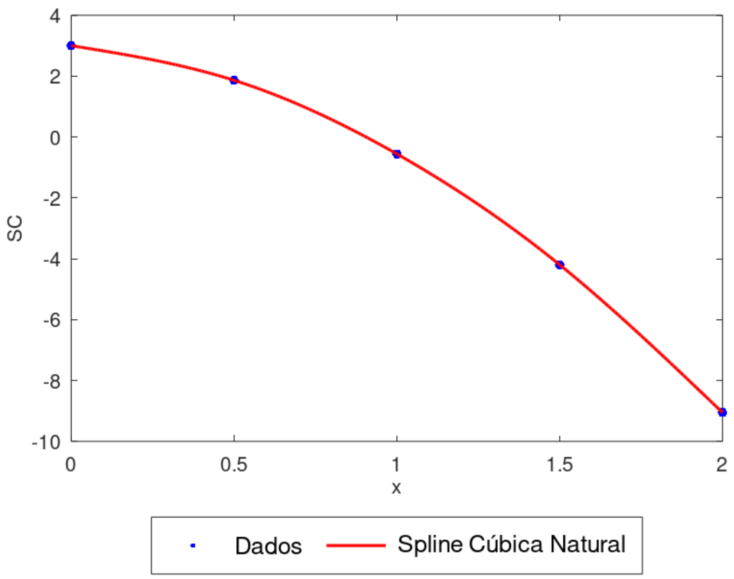



Figura 4.9: Spline Cúbica Natural do Exemplo 2.6

*Exemplo* 2.7. Dada a função $f$ tabelada a seguir

| $x$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 20 | 16 | 22 | 18 |

Para determinar a Spline que interpola $f$, observamos que $h_k = 5$ para todo $k = 2, \cdots, 5$. Além disso, pela imposição da Natural $g_1 = g_5 = 0$, definindo $g_2, g_3, g_4$, segue que

$$\begin{cases} 20g_2 + 5g_3 = -22.8 \\ 5g_2 + 20g_3 + 5g_4 = -12 \\ 5g_3 + 20g_4 = -12 \end{cases} \sim \begin{cases} g_2 = -1.436 \\ g_3 = 1.183 \\ g_4 = -0.8957 \end{cases}$$

Desse modo, através das igualdades (4.3), (4.2), (4.4) e (4.1) é possível determinar cada polinômio que compõe a Spline Cúbica Natural Interpolante de $f$, dada por

$$SC(x) = \begin{cases} -0.048(x-10)^3 - 0.718(x-10)^2 + 0.607(x-10) + 20, & x \in [5,10] \\ \\ 0.087(x-15)^3 + 0.591(x-15)^2 - 0.022(x-15) + 16, & x \in (10,15] \\ \\ -0.069(x-20)^3 - 0.448(x-20)^2 + 0.693(x-20) + 22, & x \in (15,20] \\ \\ 0.029(x-25)^3 - 1.546(x-25) + 18, & x \in (20,25] \end{cases}$$

O gráfico desse polinômio interpolador:

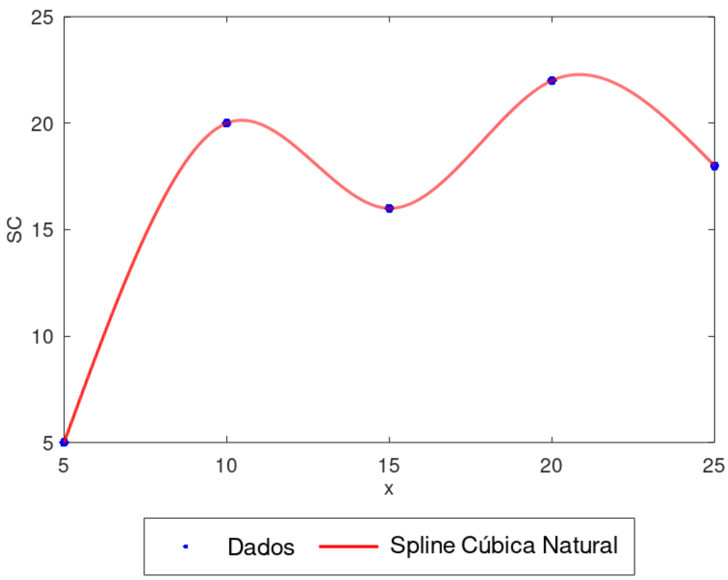



Figura 4.10: Spline Cúbica Natural do Exemplo 2.7

**Spline Cúbica por Aproximação por Parábola**

Uma outra maneira de definir uma Spline Cúbica é pela técnica conhecida como aproximação por parábola, em que impomos $g_1 = g_2$ e $g_n = g_{n+1}$. Nessas condições, os polinômios extremos ($s_2$ e $s_{n+1}$) são parábolas e não ocorrem mudanças de concavidade nesses polinômios.

De fato, sabemos que o primeiro polinômio da Spline Cúbica é

$$s_2(x) = a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2.$$

Substituindo os coeficientes $a_2$, $b_2$, $c_2$ e $d_2$, temos

$$s_2(x) = \left(\frac{g_2 - g_1}{6h_2}\right)(x - x_2)^3 + \frac{g_2}{2}(x - x_2)^2 + \left(\frac{y_2 - y_2}{h_2} + \frac{(2g_2 + g_1)h_2}{6}\right)(x - x_2) + y_2.$$

Impondo a condição de Aproximação por Parábola, $g_1 = g_2$, segue que

$$s_2(x) = \frac{g_2}{2}(x - x_2)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} + \frac{3g_2h_2}{6}\right)(x - x_2) + y_2.$$

Realizando o mesmo processo agora para o último polinômio que compõe a Spline, $s_{n+1}$, definido como

$$s_{n+1}(x) = a_{n+1}(x - x_{n+1})^3 + b_{n+1}(x - x_{n+1})^2 + c_{n+1}(x - x_{n+1}) + d_{n+1}.$$

Substituindo os coeficientes e impondo $g_n = g_{n+1}$, temos que

$$s_{n+1}(x) = \frac{g_{n+1}}{2}(x - x_{n+1})^2 + \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}} + \frac{(3g_{n+1})h_{n+1}}{6}\right)(x - x_{n+1}) + y_{n+1}.$$

Vejamos que tanto $s_2$ quanto $s_{n+1}$ são polinômios de segundo grau, ou seja, parábolas. Impondo as condições desse método ao sistema (4.5) temos que:

$$\begin{cases} (2h_3 + 3h_2)g_2 + h_3g_3 = 6\left(\dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2}\right), \; k = 2 \\ \vdots \\ h_n g_{n-1} + (3h_{n+1} + 2h_n)g_{n+1} = 6\left(\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}} - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right), \; k = n \end{cases}$$

Com isso, o sistema para determinar as variáveis $g_i$, $i = 1, \cdots, n+1$, e consequentemente determinar a Spline Cúbica é possível e determinado. Ademais, podemos escrever esse sistema do modo matricial $Ax = B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} (2h_3 + 3h_2) & h_3 & 0 & 0 \\ h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & h_n & (3h_{n+1} + 2h_n) \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$x = \begin{pmatrix} g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}_{(n-1)\times 1}$$

$$B = 6 \begin{pmatrix} \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}} - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \end{pmatrix}_{(n-1)\times 1}$$

*Exemplo* 2.8. Para exemplificar o processo de determinação de uma Spline Cúbica pelo método da aproximação de parábolas, consideremos a mesma função tabelada $f$ no Exemplo (2.7), sendo ela

| $x$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 20 | 16 | 22 | 18 |

Primeiramente, notamos que $h_k = 5$, para $k = 2, \cdots, n+1$. Após isso, resolvendo o sistema de $g_i$, com $i = 2, \cdots, 4$, por meio matricial, temos que

$$\begin{pmatrix} 25 & 5 & 0 \\ 5 & 20 & 5 \\ 0 & 5 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22.8 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$g_2 = -1.123,\ g_3 = 1.053 \text{ e } g_4 = -0.6907.$$

Lembrando que $g_1 = g_2$ e $g_4 = g_5$ podemos definir a Spline utilizando o sistema $Ax = B$, dado anteriormente. Desse modo, a spline por aproximação de parábola é

$$SC(x) = \begin{cases} -0.561(x-10)^2 + 0.192(x-10) + 20, & x \in [5, 10] \\ \\ 0.072(x-15)^3 + 0.526(x-15)^2 + 0.019(x-15) + 16, & x \in (10, 15] \\ \\ -0.058(x-20)^3 - 0.345(x-20)^2 + 0.926(x-20) + 22, & x \in (15, 20] \\ \\ -0.345(x-25)^2 - 2.527(x-25) + 18, & x \in (20, 25] \end{cases}$$

Plotando o gráfico dessa função interpolante:

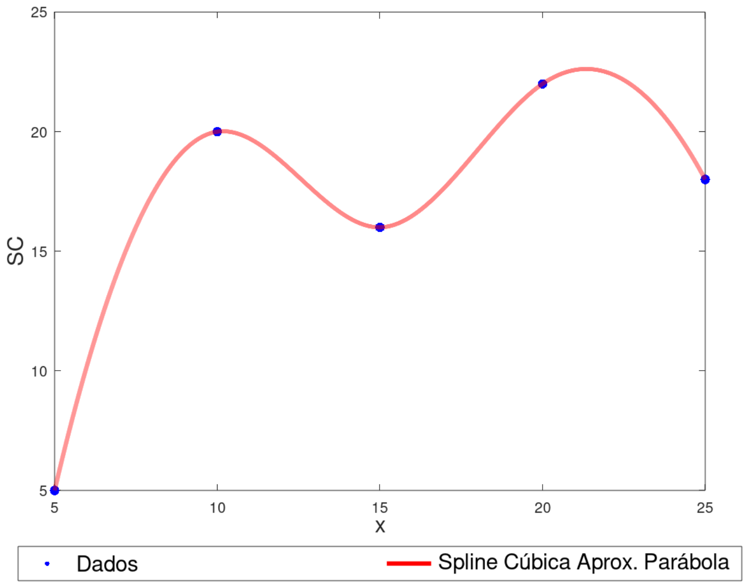



Figura 4.11: Spline Cúbica por Aproximação de Parábola do Exemplo 2.8.

**Spline Cúbica por Inclinação nos Extremos**

Por fim, abordaremos mais uma maneira de determinar uma Spline cúbica, sendo essa através da imposição de uma inclinação pré-determinada para os polinômios extremos, ou ainda, considerar $g_1 = H$ e $g_{n+1} = G$, com $H, G \in \mathbb{R}$.

Substituindo $g_1 = H$ na primeira linha do sistema (4.5), temos

$$\begin{aligned} h_2H + 2(h_3+h_2)g_2 + h_3g_3 &= 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_3} - \frac{y_2-y_1}{h_2}\right) \\ \Rightarrow 2(h_3+h_2)g_2 + h_3g_3 &= 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_3} - \frac{y_2-y_1}{h_2}\right) - h_2H \\ \Rightarrow 2(h_3+h_2)g_2 + h_3g_3 &= 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_3} - \frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{h_2H}{6}\right). \end{aligned}$$

Realizando o mesmo processo para a última linha desse sistema e substituindo $g_{n+1} = G$, segue que

$$\begin{aligned} h_ng_{n-1} + 2(h_{n+1}+h_n)g_n + h_{n+1}G &= 6\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{h_{n+1}} - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right) \\ h_ng_{n-1} + 2(h_{n+1}+h_n)g_n &= 6\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{h_{n+1}} - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_n} - \frac{h_{n+1}G}{6}\right). \end{aligned}$$

Portanto, para o método de inclinação nos extremos o processo de determinar os polinômios da Spline depende do seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2(h_3+h_2)g_2 + h_3g_3 = 6\left(\dfrac{y_3-y_2}{h_3} - \dfrac{y_2-y_1}{h_2} - \dfrac{h_2H}{6}\right), k=2 \\ h_3g_2 + 2(h_4+h_3)g_3 + h_4g_4 = 6\left(\dfrac{y_4-y_3}{h_4} - \dfrac{y_3-y_2}{h_3}\right), \ k=3 \\ \vdots \\ h_ng_{n-1} + 2(h_{n+1}+h_n)g_n + h_{n+1}g_{n+1} = 6\left(\dfrac{y_{n+1}-y_n}{h_{n+1}} - \dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right), \ k=n \end{cases}$$

Ademais, construindo esse sistema de modo matricial $Ax = B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_3+h_2) & h_3 & 0 \\ h_3 & 2(h_4+h_3) & h_4 \\ 0 & h_4 & 2(h_5+h_4) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & h_n & 2(h_{n+1}+h_n) \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$x = \begin{pmatrix} g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}_{(n-1)\times 1}$$

$$B = 6\begin{pmatrix} \dfrac{y_3-y_2}{h_3} - \dfrac{y_2-y_1}{h_2} - \dfrac{(H)h_2}{6} \\ \vdots \\ \dfrac{y_{n+1}-y_n}{h_{n+1}} - \dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{(h_{n+1})G}{6} \end{pmatrix}_{(n-1)\times 1}$$

Do mesmo modo que os métodos Natural e Aproximação por Parábola com a imposição sobre a inclinação nos extremos garante que o Sistema (4.5) seja possível e determinado.

*Exemplo* 2.9. Consideremos a mesma função $f$ tabelada dos Exemplos 2.7 e 2.8 a seguir

| $x$ | 5 | 10 | 1 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 20 | 16 | 22 | 18 |

Vamos construir a Spline Cúbica interpolante dessa função pelo método de inclinação nos extremos, para isso impomos que as segundas derivadas dos polinômios extremos sejam iguais aos coeficientes angulares das retas formadas, respectivamente, pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ com $(x_2, f(x_2))$ e $(x_n, f(x_n))$ com $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$.

Sendo assim, primeiramente, calculamos os coeficientes angulares das retas em questão:

- Coeficiente angular da reta formada por $(5,5)$ e $(10,20)$: $m_1 = \dfrac{20-5}{10+5} = 3.$
- Coeficiente angular da reta formada por $(15,22)$ e $(20,18)$: $m_2 = \dfrac{18-22}{20-15} = -0.8.$

Desse modo, queremos uma Spline tal que $g_1 = m_1 = 3$ e $g_{n+1} = m_2 = -0.8$.

Notemos que $h_k = 5$, para todo $k = 2, ..., n$. Com isso, substituindo os valores no sistema matricial $Ax = B$, segue que

$$\begin{pmatrix} 20 & 5 & 0 \\ 5 & 20 & 5 \\ 0 & 5 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37.8 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Logo, $g_1 = 3$, $g_2 = -2.225$, $g_3 = 1.34$, $g_4 = -0.735$ e $g_5 = -0.8$. Com isso,

$$SC(x) = \begin{cases} -0.174(x-10)^3 - 1.112(x-10)^2 + 1.792(x-10) + 20, & x \in [5,10] \\ \\ 0.119(x-15)^3 + 0.670(x-15)^2 - 0.421(x-15) + 16, & x \in (10,15] \\ \\ -0.069(x-20)^3 - 0.367(x-20)^2 + 1.092(x-20) + 22, & x \in (15,20] \\ \\ -0.002(x-25)^3 - 0.4(x-25)^2 - 2.745(x-25) + 18, & x \in (20,25] \end{cases}$$

Construindo o gráfico, segue

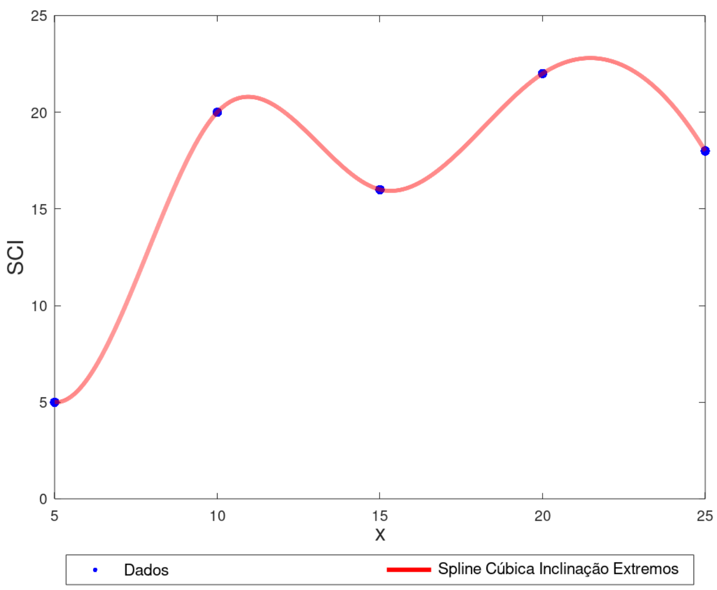



Figura 4.12: Spline Cúbica Inclinação nos Extremos do Exemplo 2.9.

Cada escolha de imposição para a Spline Cúbica (Natural, Aproximação por Parábola ou Inclinação nos Extremos), muda os polinômios que compõem a Spline e consequentemente sua curva. Nos Exemplos 2.7, 2.8 e 2.9 foram feitas as diferentes formas de interpolar a mesma função $f$ com Spline Cúbica, vejamos as curvas obtidas em cada caso:

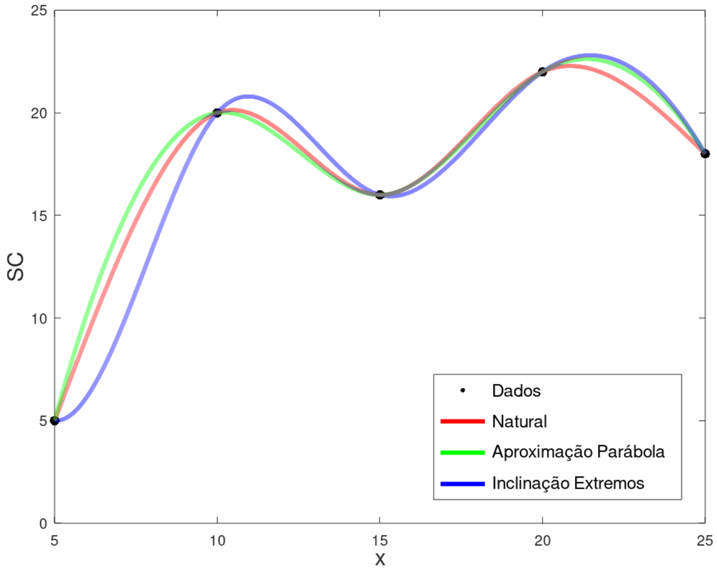



Figura 4.13: Comparação Splines Natural, Aproximação por Parábola e Inclinação no Extremo.

## 2.4 Spline Cúbica Parametrizada

Como foi visto em Spline Linear Interpolante Parametrizada (2.2), nem toda curva os pontos $x_i$, $i = 1, \cdots, n+1$ estão em monotocidade estrita, ou ainda, podem ser descritos por uma função. Sendo assim, com o objetivo de interpolar por Spline Cúbica a curva dada pela tabela

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ | $y_{n+1}$ |

Vamos precisar parametriza-la, para isso consideramos um parâmetro igualmente espaçados no eixo das coordenadas, $t \in [1, n+1]$ tal que os pontos da curva são dadas por $(x(t), y(t))$.

| $t$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $n$ | $n+1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | $\cdots$ | $x(n)$ | $x(n+1)$ |
| $y(t)$ | $y(1)$ | $y(2)$ | $\cdots$ | $y(n)$ | $y(n+1)$ |

Desse modo, vamos interpolar essa curva para $x(t)$ e para $y(t)$, sendo assim a Spline Cúbica é dada por:

$$SC(t) = \begin{cases} SC_x^i(t) = a_{1i}(t-t_i)^3 + a_{2i}(t-t_i)^2 + a_{3i}(t-t_i) + a_{4i} \\ SC_y^i(t) = b_{1i}(t-t_i)^3 + b_{2i}(t-t_i)^2 + b_{3i}(t-t_i) + b_{4i} \end{cases}, t \in [t_{i-1}, t_i],$$

para $i = 2, ..., n+1$.

Notemos que ao escolher um parâmetro igualmente espaçado no eixo garante que os termos $h_i$ para $i = 2, ..., n+1$ sejam constante iguais à $h = 1$.

De modo análogo à (4.3), (4.2), (4.4) e (4.1), vamos definir os coeficientes da Spline Cúbica para $x(t)$ por:

$$\begin{aligned} a_{1_k} &= \frac{g_k^x - g_{k-1}^x}{6} \\ a_{2k} &= \frac{g_k^x}{2} \\ a_{3k} &= x_k - x_{k-1} + \frac{2g_k^x + g_{k-1}^x}{6} \\ a_{4k} &= g_k^x \end{aligned}$$

Em que $g_k^x = (x_3^k)''(t_k)$, com $k = 2, \cdots, n+1$.

Para $y(t)$ por:

$$\begin{aligned} b_{1k} &= \frac{g_k^y - g_{k-1}^y}{6} \\ b_{2k} &= \frac{g_k^y}{2} \\ b_{3k} &= y_k - y_{k-1} + \frac{2g_k^y + g_{k-1}^y}{6} \\ b_{4k} &= g_k^y \end{aligned}$$

Em que $g_k^y = (y_3^k)''(t_k)$, com $k = 2, \cdots, n+1$.

Para definir os valores de $g_k^x$ e $g_k^y$, com $k = 2, \cdots, n+1$, assim como vimos em (4.5), precisamos resolver os seguintes sistemas

$$\begin{cases} g_1^x + 4g_2^x + g_3^x = 6\left(x_3 - 2x_2 + x_1\right), \; k = 2 \\ \vdots \\ g_{n-1}^x + 4g_n^x + g_{n+1}^x = 6\left(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}\right), \; k = n \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} g_1^y + 4g_2^y + g_3^y = 6\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right),\ k = 2 \\ \vdots \\ g_{n-1}^y + 4g_n^y + g_{n+1}^y = 6\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right),\ k = n \end{cases} \tag{4.7}$$

Da mesma maneira que vimos em Spline Cúbica Interpolantes na parametrizada é necessário fazer algumas imposições a fim de definir os coeficientes $(a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, a_{4k})$ e $(b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}, b_{4k})$.

### Spline Cúbica Natural Parametrizada

Para essa interpolação, além das imposições de Spline interpoladora, consideramos:

$$g_1^x = g_{n+1}^x = 0 \ \ e \ \ g_1^y = g_{n+1}^y = 0.$$

Sendo assim, os sistemas (4.6) e (4.7) ficam do seguinte modo

$$\begin{cases} 4g_2^x + g_3^x = 6\left(x_3 - 2x_2 + x_1\right),\ k = 2 \\ \vdots \\ g_{n-1}^x + 4g_n^x + = 6\left(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}\right),\ k = n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4g_2^y + g_3^y = 6\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right),\ k = 2 \\ \vdots \\ g_{n-1}^y + 4g_n^y = 6\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right),\ k = n \end{cases}$$

De modo matricial, temos

- $Ax = B_x$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^x \\ \vdots \\ g_n^x \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_3 - 2x_2 + x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} \end{pmatrix}$$

- $Ay = B_y$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^y \\ \vdots \\ g_n^y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} y_3 - 2y_2 + y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \end{pmatrix}$$

*Exemplo* 2.10. Mesmo quando temos uma curva que pode ser descrita como função, como a $f$ tabelada do Exemplo 2.7, podemos parametriza-la e construir uma Spline interpolante. Para isso, consideremos essa $f$ dada por:

| $x$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 20 | 16 | 22 | 18 |

Parametrizando com $t$, segue que

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| $y(t)$ | 5 | 20 | 16 | 22 | 18 |

Vamos definir a Spline Cúbica Natural Parametrizada ($SC(t)$), ou seja, consideramos

$$g_1^x = g_k^x = g_1^y = g_k^y = 0,$$

desse modo, temos os seguintes sistemas

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^x \\ g_3^x \\ g_4^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g_2^x = 0 \\ g_3^x = 0 \\ g_4^x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^y \\ g_3^y \\ g_4^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -114 \\ 60 \\ -60 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g_2^y = -35.89 \\ g_3^y = 29.57 \\ g_4^y = -22.39 \end{cases}$$

Dessa forma,

$$SC_x(t) = \begin{cases} 5(t-2) + 10, \ t \in [1,2] \\ 5(t-3) + 15, \ t \in [2,3] \\ 5(t-4) + 20, \ t \in [3,4] \\ 5(t-5) + 25, \ t \in [4,5] \end{cases}$$

$$SC_y(t) = \begin{cases} -5.981(t-2)^3 - 17.945(t-2)^2 + 3.0367(t-2) + 20, \ t \in [1,2] \\ 10.91(t-3)^3 + 14.786(t-3)^2 - 0.125(t-3) + 16, \ t \in [2,3] \\ -8.66(t-4)^3 - 11.95(t-4)^2 + 3.465(t-4) + 22, \ t \in [3,4] \\ 3.732(t-5)^3 - 7.732(t-5) + 18, \ t \in [4,5] \end{cases}$$

Portanto, a Spline Cúbica Natural Parametrizada que interpola a função tabelada é

$$SC(t) = \begin{cases} SC_x^2(t) = 5(t-2)+10 & \\ & t \in [1,2] \\ SC_y^2(t) = -5.981(t-2)^3 - 17.945(t-2)^2 + 3.0367(t-2)+20 & \\ & \\ SC_x^3(t) = 5(t-3)+15 & \\ & t \in [2,3] \\ SC_y^2(t) = 10.91(t-3)^3 + 14.78(t-3)^2 - 0.125(t-3)+16 & \\ & \\ SC_x^4(t) = 5(t-4)+20 & \\ & t \in [3,4] \\ SC_y^4(t) = -8.66(t-4)^3 - 11.19(t-4)^2 + 3.465(t-4)+22 & \\ & \\ SC_x^5(t) = 5(t-5)+25 & \\ & t \in [4,5] \\ SC_y^5(t) = 3.732(t-5)^3 - 7.732(t-5)+18 & \end{cases}$$

O gráfico da Spline é dado a seguir

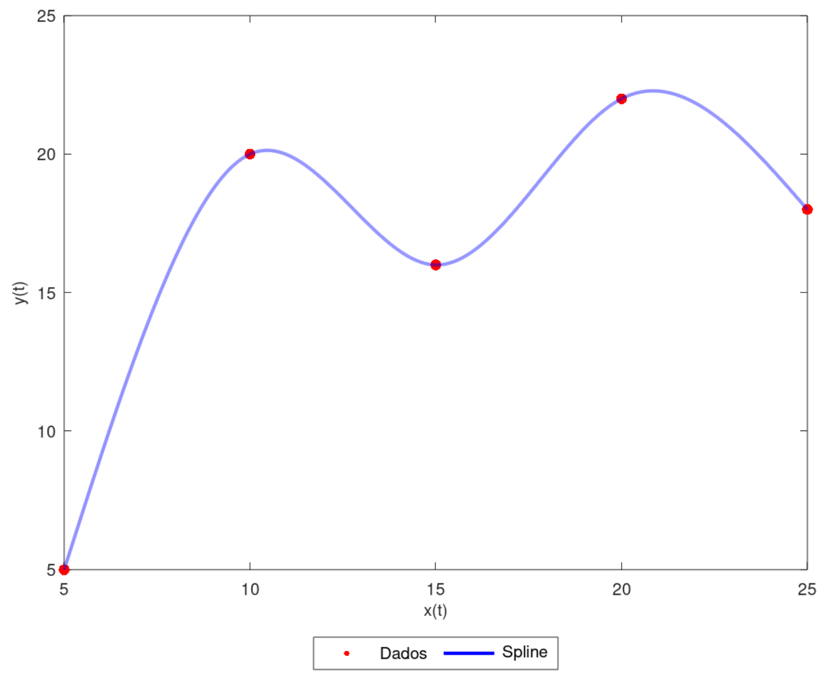



Figura 4.14: Spline Cúbica Natural Parametrizada.

**Spline Cúbica por Aproximação por Parábola Parametrizada**

Semelhante ao caso que não precisa de parametrização, vamos impor que

$$g_1^x = g_2^x \;\; e \;\; g_n^x = g_{n+1}^x$$

$$g_1^y = g_2^y \;\; e \;\; g_n^y = g_{n+1}^y$$

Sendo assim, os sistemas (4.6) e (4.7) ficam do seguinte modo

$$\begin{cases} 5g_2^x + g_3^x = 6\left(x_3 - 2x_2 + x_1\right), \; k = 2 \\ \vdots \\ g_{n-1}^x + 5g_n^x + = 6\left(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}\right), \; k = n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5g_2^y + g_3^y = 6\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right), \; k = 2 \\ \vdots \\ g_{n-1}^y + 5g_n^y = 6\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right), \; k = n \end{cases}$$

Da forma matricial, temos

- $Ax = B_x$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & & 0 \\ 1 & 4 & & 1 \\ \vdots & \ddots & & \ddots \\ 0 & & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^x \\ \vdots \\ g_n^x \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_3 - 2x_2 + x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} \end{pmatrix}$$

- $Ay = B_y$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & & 0 \\ 1 & 4 & & 1 \\ \vdots & \ddots & & \ddots \\ 0 & & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^y \\ \vdots \\ g_n^y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} y_3 - 2y_2 + y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \end{pmatrix}$$

*Exemplo* 2.11. Vamos construir a Spline parametrizada da função $f$ trabalhada no Exemplo 2.8, sendo ela

| $x$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 20 | 16 | 22 | 18 |

Parametrizando, temos que

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| $y(t)$ | 5 | 20 | 16 | 22 | 18 |

Vamos definir a Spline Cúbica Parametrizada por Aproximação de Parábola ($SC(t)$), sendo assim precisamos impor

$$g_1^x = g_2^x, g_n^x = g_{n+1}^x$$

$$g_1^y = g_2^y, g_n^y = g_{n+1}^y$$

com isso, temos os sistemas

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^x \\ g_3^x \\ g_4^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g_2^x = 0 \\ g_3^x = 0 \\ g_4^x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^y \\ g_3^y \\ g_4^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -114 \\ 60 \\ -60 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g_2^y = -28.07 \\ g_3^y = 26.33 \\ g_4^y = -17.27 \end{cases}$$

Logo,

$$SC_x(t) = \begin{cases} 5(t-2)+10, \ t \in [1,2] \\ 5(t-3)+15, \ t \in [2,3] \\ 5(t-4)+20, \ t \in [3,4] \\ 5(t-5)+25, \ t \in [4,5] \end{cases}$$

$$SC_x(t) = \begin{cases} -14.035(t-2)^2 + 0.965(t-2) + 20, \ t \in [1,2] \\ 9.067(t-3)^3 + 13.165(t-3)^2 + 0.098(t-3) + 16, \ t \in [2,3] \\ -7.267(t-4)^3 - 8.635(t-4)^2 + 4.631(t-4) + 22, \ t \in [3,4] \\ -8.634(t-5)^2 - 12.634(t-5) + 18, \ t \in [4,5] \end{cases}$$

Portanto, a Spline Cúbica por Aproximação por Parábola Parametrizada que interpola a função tabelada é

$$SC(t) = \begin{cases} SC_x^2(t) = 5(t-2)+10 & \\ & t \in [1,2] \\ SC_y^2(t) = -14.035(t-2)^2 + 0.965(t-2) + 20 & \\ & \\ SC_x^3(t) = 5(t-3)+15 & \\ & t \in [2,3] \\ SC_y^2(t) = 9.067(t-3)^3 + 13.165(t-3)^2 + 0.098(t-3) + 16 & \\ & \\ SC_x^4(t) = 5(t-4)+20 & \\ & t \in [3,4] \\ SC_y^4(t) = -7.267(t-4)^3 - 8.635(t-4)^2 + 4.631(t-4) + 22 & \\ & \\ SC_x^5(t) = 5(t-5)+25 & \\ & t \in [4,5] \\ SC_y^5(t) = -8.634(t-5)^2 - 12.634(t-5) + 18 & \end{cases}$$

O gráfico da Spline é dado abaixo

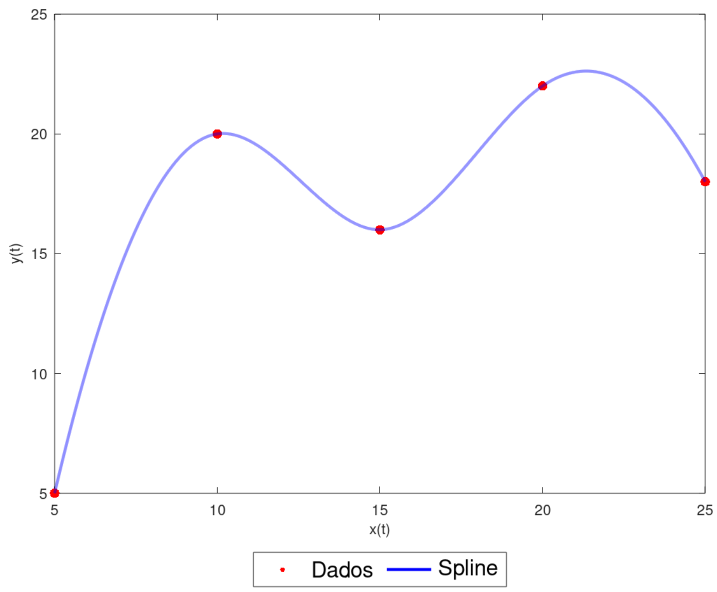



Figura 4.15: Spline Cúbica por Aproximação de Parábola Parametrizada.

### Spline Cúbica por Inclinação nos Extremos Parametrizada

Nesse caso, vamos impor uma inclinação nos polinômios extremos da Spline, ou seja, queremos que eles possuem uma inclinação pré-estabelecida:

$$g_1^x = A \;\; e \;\; g_{n+1}^x = B$$

$$g_1^y = H \;\; e \;\; g_{n+1}^y = G$$

Sendo assim, os sistemas (4.6) e (4.7) ficam do seguinte modo

$$\begin{cases} 4g_2^x + g_3^x = 6\,(x_3 - 2x_2 + x_1) - A, \; k = 2 \\ \vdots \\ g_{n-1}^x + 4g_n^x + = 6\,(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) - B, \; k = n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4g_2^y + g_3^y = 6\,(y_3 - 2y_2 + y_1) - H, \; k = 2 \\ \vdots \\ g_{n-1}^y + 4g_n^y = 6\,(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) - G, \; k = n \end{cases}$$

Podemos reescrever os sistema matricialmente como

- $Ax = B_x$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{x_2} \\ \vdots \\ g_{x_n} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_3 - 2x_2 + x_1 - \dfrac{A}{6} \\ \vdots \\ x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} - \dfrac{B}{6} \end{pmatrix}$$

- $Ay = B_y$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{x_2} \\ \vdots \\ g_{y_n} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x_3 - 2x_2 + x_1 - \dfrac{H}{6} \\ \vdots \\ x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} - \dfrac{G}{6} \end{pmatrix}$$

*Exemplo* 2.12. Dada a função tabelada

| $x$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 20 | 16 | 22 | 18 |

Por meio da parametrização em $t$, temos

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| $y(t)$ | 5 | 20 | 16 | 22 | 18 |

Vamos definir a Spline Cúbica Parametrizada por Inclinação nos Extremos ($SC(t)$), em que os polinômios externos da Spline ($SC_x^2$,$SC_y^2$) vão ter a mesma inclinação das retas que ligam, respectivamente, os pontos $(1, 5)$ com $(2, 10)$ e $(4, 20)$ com $(5, 25)$, enquanto os polinômios ($SC_x^4$,$SC_y^4$) a inclinação das retas que ligam $(1, 5)$ com $(2, 20)$ e $(4, 22)$ com $(5, 18)$, respectivamente. Com isso,

- Seja $A$ o coeficiente angular da reta que contêm $(1, 5)$ com $(2, 10)$, então

$$A = \frac{10 - 5}{2 - 1} = 5.$$

- Seja $B$ o coeficiente angular da reta que contêm $(4, 20)$ com $(5, 25)$, então

$$B = \frac{25 - 20}{5 - 4} = 5.$$

- Seja $H$ o coeficiente angular da reta que contêm $(1, 5)$ com $(2, 20)$, então

$$H = \frac{20-5}{2-1} = 15.$$

- Seja $B$ o coeficiente angular da reta que contêm $(4, 22)$ com $(5, 18)$, então

$$G = \frac{18-22}{5-4} = -4.$$

Desse modo, vamos impor $g_1^x = 5$, $g_1^y = 5$, $g_5^x = 15$ e $g_5^x = -4$, sendo assim

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^x \\ g_3^x \\ g_4^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g_2^x = -1,429 \\ g_3^x = 0.7143 \\ g_4^x = -1.429 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^y \\ g_3^y \\ g_4^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -129 \\ 60 \\ -56 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g_1^y = -39.84 \\ g_2^y = 30.36 \\ g_3^y = -21.59 \end{cases}$$

Dessa forma, segue que

$$SC_x(t) = \begin{cases} -1.0715(t-2)^3 - 0.7145(t-2)^2 + 5.357(t-2) + 10, \; t \in [1, 2] \\ \\ 0.3572(t-3)^2 + 0.35715(t-3)^2 + 5(t-3) + 15, \; t \in [2, 3] \\ \\ -0.35721(t-4)^3 - 0.7145(t-4)^2 + 4.627(t-4) + 20, \; t \in [3, 4] \\ \\ 1.015(t-5)^3 + 2.5(t-5)^2 + 6.40(t-5) + 25, \; t \in [4, 5] \end{cases}$$

$$SC_y(t) = \begin{cases} -9.14(t-2)^3 - 19.91(t-2)^2 + 4.22(t-2) + 20, \; t \in [1, 2] \\ \\ 11.7(t-3)^3 + 15.18(t-3)^2 - 0.52(t-3) + 16, \; t \in [2, 3] \\ \\ -8.66(t-4)^3 - 10.79(t-4)^2 + 3.86(t-4) + 22, \; t \in [3, 4] \\ \\ 2.93(t-5)^3 - 2(t-5)^2 - 8.93(t-5) + 18, \; t \in [4, 5] \end{cases}$$

Portando, a Spline Cúbica com a inclinação definida é dada por:

$$SC(t) = \begin{cases} SC_x^2(t) = -1.0715(t-2)^3 - 0.7145(t-2)^2 + 5.357(t-2) + 10 & \\ & t \in [1,2] \\ SC_y^2(t) = -9.14(t-2)^3 - 19.91(t-2)^2 + 4.22(t-2) + 20 & \\ SC_x^3(t) = 0.3572(t-3)^3 + 0.35715(t-3)^2 + 5(t-3) + 15 & \\ & t \in [2,3] \\ SC_x^2(t) = 11.7(t-2)^3 + 15.18(t-2)^2 - 0.52(t-2) + 16 & \\ SC_x^4(t) = -0.35721(t-4)^3 - 0.7145(t-4)^2 + 4.627(t-4) + 20 & \\ & t \in [3,4] \\ SC_y^4(t) = -8.66(t-4)^3 - 10.79(t-4)^2 + 3.86(t-4) + 22 & \\ SC_x^5(t) = 1.071(t-5)^3 + 2.5(t-5)^2 + 6.40(t-5) + 25 & \\ & t \in [4,5] \\ SC_y^5(t) = 2.93(t-5)^3 - 2(t-5)^2 - 8.93(t-5) + 18 & \end{cases}$$

Sendo seu gráfico,

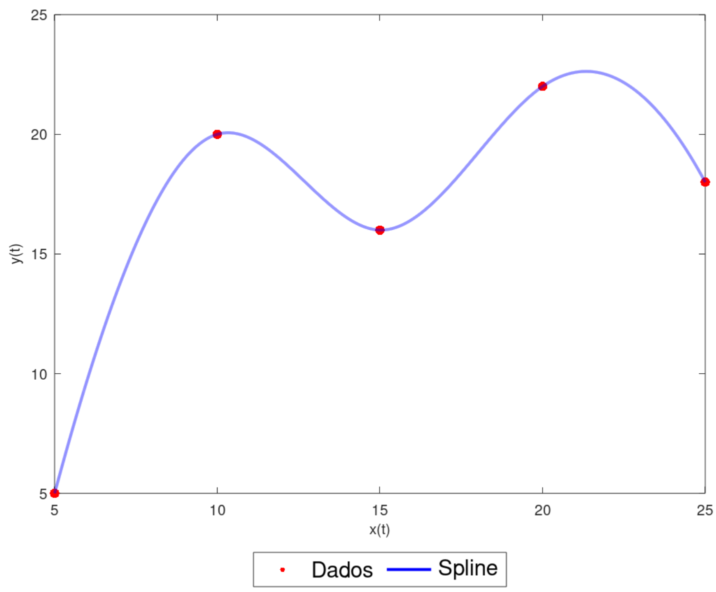



Figura 4.16: Spline Cúbica por Inclinação nos Extremos.

## 3 Implementação Computacional

Todos os processos de interpolação por Spline (Linear e Cúbica) foram implementados computacionalmente, por meio do `software Octave`. Veremos então os códigos utilizados no trabalho.

No caso da Spline Linear, de acordo com sua Definição 2.1, escrevemos uma função "`Funcao_Spline_Linear`" a qual leva os vetores de entrada "`xdata`" e "`ydata`", que representam os valores da função em $x$ e em sua imagens $f(x)$, respectivamente, nos coeficientes dos polinômios que formam a Spline. O código é dado a seguir:

```
function [M,L] = Funcao_Spline_Linear(xdata, ydata )

n = length(xdata) - 1;

for i = 2:n+1
    %Calculando os coeficientes dos polinômios da Spline
    m(i) = (ydata(i)-ydata(i-1))./(xdata(i)-xdata(i-1));
    l(i) = (ydata(i-1).*xdata(i)-ydata(i).*xdata(i-1))./(xdata(i)-xdata
   (i-1));
endfor

M=[m(2:n+1)];
L=[l(2:n+1)];
endfunction
```

Listing 4.1: Função Spline Linear

O modo que escolhemos programar a Spline, por meio de funções no `Octave` [4], permitiu uma maior praticidade no cálculo de Splines parametrizadas. Visto que para calcular no caso da parametrizada, basta inicialmente definir o parâmetro $t$ e utilizar a função duas vezes, uma para o cálculo da Spline em $(t, x)$ e outra em $(t, y)$. Vejamos a seguir o código utilizado no caso da Spline linear parametrizada, observamos também que já *plotamos* o gráfico da função nesse código.

```
clc;
clear all;

%%% DADOS DA FUNÇÃO TABELADA
%EXEMPLO 1.1
xdata = [5 10 17 21 25 ];
ydata = [0 5   9 7  0 ];

%%% PARAMETRIZAÇÃO
n_param= length (xdata)
tdata=1:1:n_param;
n = length(tdata) - 1;

%SPLINE LINEAR
[M_x,L_x] = Funcao_Spline_Linear(tdata, xdata);
[M_y,L_y] = Funcao_Spline_Linear(tdata, ydata);
```

```

n = length(xdata) - 1;

%%% IMPRIME OS COEFICIENTES DA SPLINE LINEAR:
printf('Spline em x\n');
for i=1:n
  printf('SLIx_%d = %f t + %f\n', i, M_x(i), L_x(i));
  printf('\n')
endfor

printf('Spline em y\n');
for i=1:n
  printf('SLIy_%d = %f t + %f\n', i, M_y(i), L_y(i));
  printf('\n')
endfor

%%% GRÁFICO
 n= length(tdata);
 nos= abs(tdata(1)-tdata(n))./00.1+1;
 t = linspace (tdata(1), tdata(n), nos);
 nn=length(t);

 i = 1; k = 1;

%% Cálculo da Spline em vários pontos:
while (k <= nn)
    if ( ( tdata(i) <= t(k) ) && ( t(k) <= tdata(i+1) ) )
        SLIx(k) = M_x(i) .* t(k) .+ L_x(i);
        SLIy(k) = M_y(i) .* t(k) .+ L_y(i);
        k = k + 1 ;
    else
        i = i + 1;
    endif
endwhile

plot(xdata, ydata, 'k.',"markersize", 15, SLIx, SLIy, 'k-',"linewidth"
    ,1.5); %Plot dos dados e do gráfico
xlabel('x', 'fontsize', 10); %rótulo do eixo das abscissa
ylabel('SLI', 'fontsize', 10); %rótulo do eixo das coordenadas
h = legend('Dados', 'Spline Linear',"location", "southoutside", "
    orientation", "horizontal"); %legenda do gráfico
set(h, "fontsize", 12); %tamanho da letra da legenda
```

Listing 4.2: Geração dos gráficos para Spline Linear Parametrizada

O parâmetro definido para calcular a Spline foi nomeamos de `tdata` e está igualmente espaçado no eixo, como podemos ver em 4.2. Além disso, esse mesmo código gera e os gráficos da Spline nos eixos $x$ e $y$, todos os gráficos do trabalho foram feitos nesse sistema de programação.

Após rodar o Código 4.2 geramos a Imagem 4.2 e os coeficientes da Spline apresentados na Janela de Comando do `Octave`:

```
Janela de Comandos
Spline em x
SLIx_1 = 5.000000 t + 0.000000

SLIx_2 = 7.000000 t + -4.000000

SLIx_3 = 4.000000 t + 5.000000

SLIx_4 = 4.000000 t + 5.000000

Spline em y
SLIy_1 = 5.000000 t + -5.000000

SLIy_2 = 4.000000 t + -3.000000

SLIy_3 = -2.000000 t + 15.000000

SLIy_4 = -7.000000 t + 35.000000
```

Figura 4.17: Janela de Comando Octave.

Para a Spline Cúbica, por exemplo a Natural, realizamos um funcionamento muito semelhante, agora de acordo com a Definição 2.2, escrevemos a seguinte programa que leva a função tabelada nos coeficientes dos polinômios que formam a Spline

```

function [A,B,C,D] = Funcao_Spline_Natural(xdata, ydata)

n = length(xdata) - 1;

% Espaçamentos
for k = 2:(n+1)
    h(k) = xdata(k) .- xdata(k-1);
endfor

% Montagem da diagonal principal (DP), do termo independente (TI) e das
    diagonais superior (DS) e inferior (DI) respectivamente
for k = 2:n
        DP(k) = 2.0 .* ( h(k) + h(k+1) );
        TI(k) = 6.0 .* ( ydata(k+1) -     ydata(k) ) ./ h(k+1) - 6.0 .*
    ( ydata(k) - ydata(k-1) ) ./ h(k);
        DS(k) = h(k+1);
        DI(k) = h(k);
endfor

% Primeiro termo
```

```
w(2) = DP(2);
q(2) = DS(2) ./ w(2);
fi(2) = TI(2) ./ w(2);
for k = 3:(n-1)
    w(k) = DP(k) - DI(k) .* q(k-1);
    q(k) = DS(k) ./ w(k);
    fi(k) = ( TI(k) .- DI(k) .* fi(k-1) ) ./ w(k);
endfor
w(n) = DP(n) - DI(n) .* q(n-1);
fi(n) = ( TI(n) .- DI(n) .* fi(n-1) ) ./ w(n);

% Substituição
g(n) = fi(n);

for k = (n-1):-1:2
g(k) = fi(k) - q(k) .* g(k+1);
endfor

% Spline Natural
g(1)   = 0.0;   g(n+1) = 0.0;
for k = 2:(n+1)
    a(k) = ( g(k) - g(k-1) ) ./ (6.0 .* h(k));
    b(k) = g(k) ./ 2.0;
    c(k) = ( ydata(k) - ydata(k-1) ) ./ h(k) + ( 2.0 .* h(k) .* g(k) +
   g(k-1) .* h(k) ) ./ 6.0;
    d(k) = ydata(k);
endfor
A = [a(2:n+1)];
B = [b(2:n+1)];
C = [c(2:n+1)];
D = [d(2:n+1)];

endfunction
```

Listing 4.3: Função Spline Cúbica Natural

# 4 Conclusão

No presente estudo abordamos conceitos gerais e definições de Spline para o caso de interpolar funções tabeladas. Passamos pelas principais formas de determinar essa função interpoladora, o caso por polinômios de primeiro grau, Spline linear, e por de terceiro grau, as Splines Cúbicas. Sendo ainda necessário outras três classificações para a Spline Cúbica: Natural, Aproximação por Parábola e Inclinação nos Extremos.

Além disso, estendemos o estudo para curvas, utilizando o método de Parametrização da mesma e aplicamos os conceitos de Spline para essa parametrização. Todos os processos foram implementados computacionalmente por meio do `software Octave`, onde os gráficos do trabalho foram gerados. Ademais podemos, por meio de diferentes exemplos e aplicações, visualizar a efetividade de interpolação por Spline.

Com o desenvolvimento do trabalho podemos concluir que Splines são poderosas ferramentas matemáticas capazes de aproximar funções, com leis matematicamente complicadas ou desconhecidas, como vimos no Exemplo 2.3. Como também, são utilizadas em diversos problemas reais, como o trabalho [7] o qual utilizando essa técnica de interpolação para criar o contorno do Lago Igapó I (Londrina-PR) nos seus estudos sobre a dispersão e escoamentos de poluentes sobre a superfícies desse lago. A representação de geometrias foi inicialmente introduzido nesse estudo no Exemplo 2.5. Com isso, podemos concluir que Splines são ferramentas com grande potencial de utilização para o estudo de fenômenos por meio de teorias matemática.

# Referências Bibliográficas


[1] Carlos JS Alves. Análise numérica (teoria).

[2] Eliandro Rodrigues Cirilo and Álvaro Luiz De Bortoli. Geração da malha da traquéia e dos tubos bronquiais por splines cúbico. *Semina: ciências exatas e tecnológicas. Londrina, PR. Vol. 27, n. 2 (jul./dez. 2006), p. 147-155*, 2006.

[3] José Sérgio Domingues. Interpolação por splines cúbicos paramétricos no maple para a segmentação do contorno do ventrículo esquerdo humano. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, 2(1):182–193, 2016.

[4] John W. Eaton, David Bateman, Søren Hauberg, and Rik Wehbring. *GNU Octave version 5.2.0 manual: a high-level interactive language for numerical computation s*, 2020.

[5] V. L. da Rocha Lopes M. A. Gomes Ruggiero. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Editora Pearson, 1997.

[6] Materi-Aulas. Spline draw. `https://sites.google.com/view/materi-aulas/spline-draw`.

[7] NML Romeiro, ER Cirilo, and PL Natti. Estudo do escoamento e da dispersão de poluentes na superfície do lago igapó i. *Anais do II Seminário Nacional sobre Regeneração Ambiental de Cidades-Águas Urbanas II*, 4:14–28, 2007.

[8] CAMILA HIROMI TAMURA. Resolução das equações adimensionais de geração de malhas 2d com modelagem de parâmetros de qualidade. *Dissertação (Mestrado em

*Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional*, 2017.

# INTRODUÇÃO À DINÂMICA SIMBÓLICA

Catharina de Moura Moreira
*Estudante*

Túlio Oliveira de Carvalho
*Orientador(a)*

## RESUMO

Este relatório tem como objetivo descrever os conteúdos estudados pela aluna durante os anos de 2020 e 2021. Com a realização do projeto, a estudante teve oportunidade de compreender os fundamentos da dinâmica simbólica, a partir do estudo de sequências que representam as órbitas de uma aplicação do intervalo. Estudou-se ainda as $\beta$-expansões, particularmente as finitas, tema que, por sua vez, tem ligação com classes de números algébricos.
**Palavras-chave:** Sequências, Dinâmica Simbólica, $\beta$-expansões, Números Algébricos

## ABSTRACT

This report aims to summarize the subjects studied by the student (first author) between 2020 and 2021. With the realization of the project, the student has had an understanding of the foundations of symbolic dynamics, from the study of sequences that represent the orbits of an application of the interval. A study of $\beta$-expansions followed, particularly those that are finite, a theme that, in turn, is connected to classes of algebraic numbers.
**Keywords:** Sequences, Symbolic Dynamics, $\beta$-expansions, Algebraic Numbers

# 1 Introdução

Observar e descrever a evolução do estado de um sistema ao longo do tempo resumem, de forma geral, o conceito de sistema dinâmico. Ao considerar que as anotações do estado do sistema se dão por meio de códigos (símbolos) num conjunto finito ou infinito enumerável, e que o tempo passa de forma discreta, tem-se a abordagem da dinâmica simbólica. A dinâmica simbólica serve para modelar problemas bastante complexos, não se confirmando como simplificação excessiva da descrição da evolução de um sistema. Há ainda conexões com temas em teoria de números, nas expansões em frações continuadas e com a teoria de códigos.

O objetivo deste projeto é dar a conhecer à estudante problemas resolvidos de dinâmica simbólica, em especial no modelo das $\beta$-expansões de Rényi.

O projeto teve como ponto de partida o estudo de sequências de números reais ou complexos. A dinâmica simbólica foi introduzida como estudo da aplicação a aplicação

$$\begin{aligned} T_\beta : [0,1) &\to [0,1) \\ x &\mapsto \beta x \text{ mod } 1 \end{aligned}$$

em que $\beta$ é um número real maior do que 1, e $[y]$ denota a parte inteira do número real $y$. Pode-se descrever esta dinâmica usando-se um conjunto infinito de símbolos, qual seja, $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, [\beta]-1\}$. O estudo das sequências em $\mathcal{A}$ que representam órbitas$(T_\beta^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ para algum $x \in [0,1)$ é o primeiro objetivo do projeto, conteúdo do parágrafo segundo de [6].

O segundo objetivo é caracterizar o conjunto de parâmetros $\beta$ cujas $\beta$-expansões são finitas. Este tópico tem uma conexão interessante com números de Pisot e números de Salem [2, 6].

Ao longo do estudo, alguns tópicos importantes se mostraram necessários, como a Teoria de Perron-Frobenius. Baseando-nos em [3, 7], expomos parte deste assunto.

O estudo de frações continuadas, seguindo [5], pode ser uma continuação natural para este trabalho.

O texto é preliminar e pode ser melhor articulado, tendo em vista sua possível utilização futura.

# 2 Sequências

Usamos as seguintes notações: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ para os conjuntos numéricos dos naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, respectivamente. Em particular,

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \cdots\} \ , \text{ e} \\ \mathbb{Z} &= \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} \ . \end{aligned} \tag{5.1}$$

O conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ constitui-se como o domínio para a definição de sequência.

**Definição 2.1.** Seja $X$ um conjunto arbitrário. Uma **sequência** em $X$ é uma função $f : \mathbb{N} \to X$.

A notação utilizada para uma sequência é $(s_1, s_2, \cdots)$ ou $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou menos explicitamente $(s_n)$, $s_n = f(n) \in X$, para alguma função $f : \mathbb{N} \to X$.

O estudo do conceito de convergência se dá em espaços $X$ nos quais se pode medir distâncias por uma *métrica*. Começaremos nosso estudo de sequências tomando $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$. Nestes conjuntos, a métrica é $d(x, y) = |x - y|$.

## A Desigualdade Triangular

**Proposição 2.1.** $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \leq |x| + |y|$.

*Demonstração.* Observe que $|xy| \geq xy$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Portanto Temos $(|x|+|y|)^2 = x^2 + 2|x|\ |y| + y^2 \geq x^2 - 2xy + y^2$. Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, obtemos o resultado. □

**Proposição 2.2.** $\forall z, a \in \mathbb{C}$,

- $|z - a| \leq |z| + |a|$;
- $|z + a| \leq |z| + |a|$;
- $|z - a| \geq |\ |z| - |a|\ |$.

*Demonstração.* Seja $z = x + iy$, e $a = \alpha + i\beta$. Então

$$|z - a| = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}.$$

Se $y = \beta$,

$$|z - a| = |x - \alpha| \leq |x| + |\alpha| \leq |z| + |a| \ ,$$

em que desigualdade na segunda passagem decorre da desigualdade triangular para os números reais, provada na Proposição 2.1. Se $y \neq \beta$,

$$\begin{aligned} |z-a| &= \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} \\ &< |x-\alpha| \leq |x|+|\alpha| < |z|+|a|. \end{aligned}$$

Este argumento também prova a segunda desigualdade, trocando $a$ por $-a$.

Para ver a terceira desigualdade,

$$|z| = |z-a+a| \leq |z-a|+|a| \quad \Longrightarrow \quad |z|-|a| \leq |z-a|.$$

De modo análogo,

$$|a| = |a-z+z| \leq |a-z|+|z| \Rightarrow |a|-|z| \leq |a-z| = |z-a| \Rightarrow -|z-a| \leq |z|-|a|.$$

Portanto

$$-|z-a| \leq |z|-|a| \leq |z-a| \ ,$$

como queríamos. □

**Definição 2.2.** Uma sequência $(z_n)$ é dita limitada, se existe um número $K > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|z_n| \leq K \ .$$

Quando uma sequência, digamos $(x_n)$, assume valores reais, dizemos que ela é *limitada pela esquerda* se $\exists K_1$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq K_1$. Analogamente dizemos que $(x_n)$ é limitada pela direita se $\exists K_2$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq K_2$.

Seja $I_n = \{1, \cdots, n\}$ o subconjunto finito dos primeiros $n$ números naturais. Uma **sequência finita** é uma função $f : I_n \to X$.

Considere uma sequência $(s_n)$ definida por $f : \mathbb{N} \to X$: $s_n = f(n)$ e um subconjunto infinito $J \subset \mathbb{N}$. Uma **subsequência** de $(s_n)$, denotada por $(s_n)_{n\in J}$, é a restrição da função $f|_J$. De fato, toda subsequência é também uma sequência, pois existe uma bijeção crescente $g : \mathbb{N} \to J$. Assim $(s_n)_{n\in J}$ é a sequência $(r_n)$, com $r_n = g(f(n))$, com $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, se $J = \{2n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ é o subconjunto dos números pares, e $s_n = (-1)^n$, então a subsequência $(s_n)_{n\in J}$ é constante igual a 1.

Se $(x_n)$ é uma sequência com valores reais, dizemos que $(x_n)$ é **monótona** quando $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \leq x_{n+1}$ ou $x_n \geq x_{n+1}$. No primeiro caso, $(x_n)$ é monótona não-decrescente, e no segundo caso, $(x_n)$ é monótona não-crescente. Se as desigualdades são estritas, $\forall n$, $x_n < x_{n+1}$, então $(x_n)$ é crescente e $\forall n$, $x_n > x_{n+1}$, então $(x_n)$ é decrescente.

## 2.1 Sequências Nulas

**Definição 2.3.** Uma sequência $(z_n)$ é dita **sequência nula**, se ela possui a seguinte propriedade:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que se } \ n \geq N, \text{então } |z_n| < \epsilon.$$

A definição de Knopp [4] introduz a propriedade:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \mu > 0 \text{ tal que se } n > \mu, \text{então } |z_n| < \epsilon.$$

As duas propriedades são equivalentes, pois se vale a propriedade usada em Definição 2.3, tomando $\mu = N - \frac{1}{2}$, temos a propriedade de Knopp. Por outro lado, se vale a propriedade (aparentemente mais geral) de Knopp, então tomando $N = \lceil \mu \rceil + 1$, temos a propriedade da Definição 2.3, lembrando que $\lceil x \rceil$ denota o maior inteiro contido em $x$.

**Teorema 2.1.** *Toda sequência nula é limitada.*

*Demonstração.* Tome $\epsilon = 1$, e seja $N$ tal que $|z_n| < 1$ para todo $n \geq N$. Tome $K$ tal que

$$|z_n| \leq K = \max(1, |z_1|, ..., |z_n|).$$

Com esta escolha, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leq K$, como se queria demonstrar. □

**Teorema 2.2.** *Seja $(z_n)$ uma sequência nula. Suponha que para um $K > 0$ fixo, os termos da sequência $(t_n)$ satisfazem a condição: $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,*

$$|t_n| \leq K|z_n|.$$

*Então $(t_n)$ é uma sequência nula.*

*Demonstração.* Dado $\epsilon > 0$, seja $N_0$ um número natural tal que para todo $n \geq N_0$, $|z_n| < \frac{\epsilon}{K}$. Tome $N_1 = \max\{N, N_0\}$. Se $n \geq N_1$, então $|t_n| \leq K|z_n| < \epsilon$, provando que $(t_n)$ é nula. □

**Teorema 2.3.** *Seja $(z_n)$ uma sequência nula. Então toda subsequência $(z_n)_{n \in J}$ é nula.*

Sejam $J_1,\ J_2 \subset \mathbb{N}$ tais que $J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}$, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$. O par $(J_1, J_2)$ é chamado partição de $\mathbb{N}$. Vamos nos interessar por partições de $\mathbb{N}$ tais que cada $J_i$ possui infinitos elementos. Neste caso, dada uma sequência $(z_n)$, as subsequências $(z_n)_{n \in J_1}$ e $(z_n)_{n \in J_2}$ são uma **decomposição** de $(z_n)$. Uma decomposição pode ser feita em qualquer número finito $p$ de subconjuntos de índices $J_1, \cdots, J_p$.

**Teorema 2.4.** *Se* $(z_n)_{n\in J}$ *e* $(z_n)_{n\in I}$ *são nulas, e o par* $(I, J)$ *é uma partição de* $\mathbb{N}$*, então* $(z_n)$ *é nula.*

*Demonstração.* Dado $\epsilon > 0$, seja $N_1$ tal que para todo $n \geq N_1$ $|z_n| < \epsilon$ para a subsequência $(z_n)_{n\in J_1}$. Analogamente, seja $N_2$ tal que para todo $n \geq N_2$ $|z_n| < \epsilon$ para a subsequência $(z_n)_{n\in J_2}$.

Tome $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então $|z_n| < \epsilon$ para todo $n \geq N$, agora em toda a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

**Teorema 2.5.** *Sejam* $(s_n)$ *e* $(t_n)$ *duas sequências nulas. Então a sequência* $(z_n)$*, com*

$$z_n = s_n + t_n \ ,$$

*também é uma sequência nula.*

O resultado acima nos diz que o conjunto de sequências nulas é fechado com relação à soma. O Teorema abaixo é uma generalização deste resultado: de fato, o conjunto de sequências nulas é fechado sob qualquer combinação linear, caracterizando-o como subespaço no espaço de sequências.

**Teorema 2.6.** *Sejam* $(s_n)$ *e* $(t_n)$ *duas sequências nulas, e* $a$ *e* $b$ *dois números fixos arbitrários. Então a sequência* $(z_n)$*, com*

$$z_n = as_n + bt_n \ ,$$

*é nula.*

*Demonstração.* O Teorema 2.2 é a prova do caso em que $a = 0$ ou $b = 0$. Podemos portanto supor $a$ e $b$ não nulos. Dado $\epsilon > 0$, seja $N_1$ tal que, se $n \geq N_1$, então $|s_n| < \frac{\epsilon}{2|a|}$. Seja $N_2$ tal que, se $n \geq N_2$, então $|t_n| < \frac{\epsilon}{2|b|}$.

Para $N = \max\{N_1, N_2\}$, se $n \geq N$, então

$$|z_n| \leq |a| \ |s_n| + |b| \ |t_n| < \epsilon \ .$$

□

## 2.2 Exemplos

*Exemplo* 2.1. A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é nula.

*Demonstração.* Dado $\epsilon > 0$, tome $N = \lceil \dfrac{1}{\epsilon} \rceil + 1$.

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} n > N &\implies n > \frac{1}{\epsilon} \\ &\implies \frac{1}{n} < \epsilon \\ &\implies \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \end{aligned}$$

Logo a sequência é nula. □

*Exemplo* 2.2. Se $|a| < 1$, então a sequência $(a^n)$ é nula.

*Demonstração.* Se $|a| < 1$, tome $p > 0$ tal que $\left|\frac{1}{a}\right| = 1 + p$.

Dado $\epsilon > 0$, considere $N = \lceil \frac{1}{\epsilon p} \rceil + 1$. Com isto, se $n \geq N$, temos $n > \frac{1}{\epsilon p}$ e

$$a^n \leq |a|^n = \frac{1}{(1+p)^n} < \frac{1}{np} < \epsilon\ .$$

Logo a sequência $(a^n)$ para $|a| < 1$ é nula. □

*Exemplo* 2.3. Se $|a| < 1$, então a sequência $(na^n)$ é nula.

*Demonstração.* De fato,se $|a| < 1$, tome $p > 0$ tal que $|a| = \dfrac{1}{1+p}$

Dado $\epsilon > 0$, considere $N = \lceil \dfrac{2}{\epsilon p^2} \rceil + 2$. Assim, se $n \geq N$, temos $n > \dfrac{2}{\epsilon p^2} + 1$ e

$$n > \frac{2}{\epsilon p^2} + 1 \implies n - 1 > \frac{2}{\epsilon p^2} \implies \frac{2}{(n-1)p^2} < \epsilon$$

, e observe que, para $n \geq 2$

$$na^n \leq n|a|^n = \frac{n}{(1+p)^n} < \frac{n}{1 + np + \frac{n(n-1)}{2}p^2} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}p^2} = \frac{2}{(n-1)p^2} < \epsilon\ .$$

□

*Exemplo* 2.4. Se $|a| < 1$ e $t > 0$, então a sequência $(n^t a^n)$ é nula.

*Demonstração.* Seja $b = |a|^{1/t}$. Então $|n^t a^n| = |nb^n|^t$, pois $b^t = |a|$. Como $0 < b < 1$, temos que $(nb^n)$ é nula e pelo Teorema 2.2, segue que $(n^t a^n)$ é nula. □

*Exemplo* 2.5. Se $t > 0$, a sequência $\left(\dfrac{\log\ n}{n^t}\right)$ é nula.

*Demonstração.* Como corolário, temos que $\left(\frac{\log n}{n}\right)$ é nula. O resultado segue escolhendo $t = 1$.

Fixe $b > 1$. Então $b^k$ é crescente e seja $k_n$ o expoente tal que $b^{k_n} \leq n < b^{k_n+1}$. Portanto

$$k_n \frac{\log\, b}{n^t} \leq \frac{\log\, n}{n^t} < (k_n+1)\frac{\log\, b}{n^t}\ .$$

Usando que $n \geq b^{k_n}$, temos

$$\frac{\log\, n}{n^t} < (k_n+1)\frac{\log\, b}{b^{tk_n}} = b^t \log b \frac{k_n+1}{b^{t(k_n+1)}}.$$

Note que $b^t \log b$ é uma constante e $(k_n+1)\left(\frac{1}{b}\right)^{k_n+1}$ é uma subsequência de uma sequência nula, pelo que vimos nos problemas 3 e 4. Pelo Teorema 2.2, a sequência $\left(\frac{\log n}{n^t}\right)$ é nula. $\square$

*Exemplo* 2.6. Se $t > 0$, a sequência $\left(\dfrac{\log\, n}{n^t}\right)$ é nula.

*Demonstração.* Como corolário, temos que $\left(\frac{\log n}{n}\right)$ é nula. O resultado segue escolhendo $t = 1$.

Fixe $b > 1$. Então $b^k$ é crescente e seja $k_n$ o expoente tal que $b^{k_n} \leq n < b^{k_n+1}$. Portanto

$$k_n \frac{\log\, b}{n^t} \leq \frac{\log\, n}{n^t} < (k_n+1)\frac{\log\, b}{n^t}\ .$$

Usando que $n \geq b^{k_n}$, temos

$$\frac{\log\, n}{n^t} < (k_n+1)\frac{\log\, b}{b^{tk_n}} = b^t \log b \frac{k_n+1}{b^{t(k_n+1)}}.$$

Note que $b^t \log b$ é uma constante e $(k_n+1)\left(\frac{1}{b}\right)^{k_n+1}$ é uma subsequência de uma sequência nula, pelo que vimos nos exemplos anteriores. Pelo Teorema 2.2, a sequência $\left(\frac{\log n}{n^t}\right)$ é nula. $\square$

*Exemplo* 2.7. Como consequência do exemplo 2.6, a sequência $\left(\frac{(\log n)^s}{n^t}\right)$, para $s, t > 0$ fixos, é nula.

*Demonstração.* Basta considerar que

$$x_n = \frac{(\log n)^s}{n^t} = \left(\frac{\log n}{n^{t/s}}\right)^s ,$$

e uma potência positiva de uma sequência nula é também uma sequência nula. $\square$

*Exemplo* 2.8. Se $(x_n)$ é uma sequência nula, então $(\log(1+x_n))$ é uma sequência nula.

*Demonstração.* Dado $\epsilon > 0$, defina $\epsilon_1 = e^\epsilon - 1$ e $\epsilon_2 = 1 - e^{-\epsilon}$. Então $\epsilon_1 = \epsilon_2 \cdot e^\epsilon > \epsilon_2 > 0$, pois a exponencial é uma função crescente e $e^0 = 1$.

Então $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \epsilon_2$ e daí

$$\begin{aligned} & -\epsilon_2 < x_n < \epsilon_2 < \epsilon_1 \ \Leftrightarrow \ 1-\epsilon_2 < x_n + 1 < 1+\epsilon_1 \\ & \Leftrightarrow \ e^{-\epsilon} < 1 + x_n < e^{\epsilon} \ . \end{aligned}$$

Considerando que log é crescente, concluímos

$$-\epsilon < \log(1+x_n) < \epsilon \ ,$$

como queríamos. □

*Exemplo* 2.9. Se $(x_n)$ é uma sequência real nula, na qual $x_n > -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ fixado, a sequência $((1+x_n)^\alpha - 1)$ é uma sequência nula.

*Demonstração.* Defina $a_n = (1+x_n)^\alpha - 1$. Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n > -1$, temos $a_n > -1$. Observe que $\log(1+a_n) = \alpha \log(1+x_n)$ é uma sequência nula, pelo exemplo anterior, e pelo Teorema 2.6.

O que precisamos provar é a recíproca do exemplo anterior para $(a_n)$: se $\log(1+a_n)$ é nula, então $(a_n)$ é nula.

Dado $\epsilon > 0$, note que como log é crescente e $\log 1 = 0$

$$\log(1-\epsilon^2) < 0 \ \Rightarrow \ \log(1+\epsilon) + \log(1-\epsilon) < 0 \Rightarrow \ \log(1+\epsilon) < -\log(1-\epsilon) \ .$$

Seja $\epsilon_1 = \log(1+\epsilon)$. Existe $N$ tal que se $n \geq N$, então

$$\begin{aligned} & \log(1-\epsilon) < -\epsilon_1 < \log(1+a_n) < \epsilon_1 \ \Rightarrow \\ & \log(1-\epsilon) < \log(1+a_n) < \log(1+\epsilon) \ \Rightarrow \\ & 1-\epsilon < 1 + a_n < 1+\epsilon \ \Leftrightarrow \ -\epsilon < a_n < \epsilon \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

## 2.3 Convergência e Divergência

**Definição 2.4.** Seja $(z_n)$ uma sequência de números. Se existe um número $z$ tal que $(z_n - z)$ é uma sequência nula, então dizemos que a sequência $(z_n)$ é *convergente*, *converge* para $z$, ou ainda que o *limite* de $(z_n)$ é $z$. Escrevemos

$$\begin{aligned} & z_n \to z \ \text{ quando } \ n \to \infty, \ \text{ ou} \\ & \lim_{n\to\infty} z_n = z. \end{aligned}$$

*Observação* 2.1. Note que, pelas Definições 2.3 e 2.4, $\lim_{x\to\infty} z_n$ existe quando existe $z$ tal que

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que se } \ n > N \text{ então } \ |z_n - z| < \epsilon\ .$$

**Definição 2.5.** Dizemos que uma sequência $(z_n)$ *diverge*, ou é *divergente*, quando $\forall z$, $(z_n - z)$ não é uma sequência nula.

*Observação* 2.2. Não existir o limite de uma sequência $(z_n)$ corresponde à seguinte propriedade

$$\forall z,\ \exists\epsilon > 0\ ,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n > N \ \text{ tal que } \ |z_n - z| \geq \epsilon\ .$$

**Definição 2.6.** Sejam $(a_n)$ e $(z_n)$ duas sequências de números, e suponha que $a_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Introduzimos as seguintes notações para abreviar os comportamentos chamados *assintóticos* das sequências.

1. Se a sequência $(z_n/a_n)$ é nula, então dizemos que $(z_n)$ é de *ordem menor* do que $(a_n)$, e escrevemos $z_n = o(a_n)$.

2. Se a sequência $(z_n/a_n)$ é limitada, então dizemos que $(z_n)$ é *da mesma ordem* que $(a_n)$, e escrevemos $z_n = O(a_n)$.

3. Se a sequência $(z_n/a_n)$ converge para $g \neq 0$, então dizemos que a sequência $(z_n)$ é *proporcionalmente assintótica* à sequência $(a_n)$, fato denotado por $z_n \sim a_n$.

4. Finalmente, se $(z_n/a_n)$ converge para 1, então dizemos que $z_n$ e $a_n$ são *assintoticamente iguais*, propriedade denotada por $z_n \simeq a_n$.

**Definição 2.7.** Dizemos que $(z_n)$ é sequência de Cauchy se

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, p \in \mathbb{N} \implies |z_{n+p} - z_n| < \epsilon.$$

**Definição 2.8.** Toda sequência de Cauchy converge.

**Teorema 2.7.** *Quando uma sequência converge, seu limite é único.*

*Demonstração.* Suponha que $(z_n)$ converge e que $z_n \to z_1$ e $z_n \to z_2$.

Seja $\epsilon = |z_1 - z_2| > 0$. Segue da hipótese que, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_1$ então $|z_n - z_1| < \frac{\epsilon}{2}$.

De modo análogo, decorre que $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_2$ então $|z_n - z_2| < \frac{\epsilon}{2}$.

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Se $n \geq N$, então

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_n + z_n - z_1| \leq |z_n - z_1| + |z_n - z_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Logo $|z_1 - z_2| < |z_1 - z_2|$ uma contradição. $\square$

**Teorema 2.8.** *Toda sequência convergente é limitada.*

*Demonstração.* Seja uma sequência $(z_n)$ que converge para $z$. Tomando $\epsilon = 1$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $|z_n - z| < 1$. Como $|z_n| - |z| \leq |z_n - z|$, segue que

$$|z_n| - |z| \leq |z_n - z| < 1 \tag{5.2}$$

para todo $n > n_0$. Deste modo, considere

$$M = \max\{|z_1, |z_2|, ..., |z_{n_0}|, |z| + 1\} .$$

Está claro que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leq M$. □

**Teorema 2.9.** *Toda sequência possui uma subsequência decrescente, ou uma subsequência crescente, ou ambas.*

*Demonstração.* Para esta demonstração, dada uma sequência $(a_k)$ de números reais, dizemos que um termo $a_n$ é destacado se $a_n \geq a_k$, $\forall k > n$.

Há dois casos a considerar

1. A sequência possui infinitos termos destacados.

2. A sequência possui finitos termos destacados.

No primeiro caso, seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto de índices para os quais $a_n$ é destacado. $D = \{n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...\}$. É claro que $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência monótona não crescente.

No segundo caso, seja $n_1 = \max\{n \in D\} + 1$. Logo $a_{n_1}$ não é destacado, assim existe $n_2$ tal que $n_2 > n_1$ com $a_{n_1} < a_{n_2}$, e $a_{n_2}$ também não é destacado. Repetindo o argumento indutivamente, obtemos uma subsequência crescente de $(a_n)$. □

**Teorema 2.10.** *Se* $\lim_{x\to\infty} z_n = z$ *então toda subsequência de* $(z_n)$ *converge para o limite* $z$.

*Demonstração.* Seja $(z_{n_k})$ uma subsequência de $(z_n)$. Dado qualquer intervalo $I$ de centro em $z$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos $z_n$, com $n > N$, pertencem a $I$. Em particular, todos os termos $z_{n_k}$, com $n_k > N$ também pertencem a $I$. Como $n_k$ é sequência crescente, existe $k_0$ tal que $n_k > N$, para todo $k \geq k_0$. Logo, $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$. □

**Teorema 2.11.** *Toda sequência monótona limitada converge.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência não decrescente, isto é, $n_{n+1} \geq x_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$. E sejam $A \leq x_n \leq \forall n \in \mathbb{N}$. Construímos sequências auxiliares $A_k$ e $B_k$ como segue.

$A_1 = A$ e $B_1 = B$. Considere $M = \frac{A_{k-1}+B_{k-1}}{2}$. Então $[A_{k-1}, M]$ ou $[M, B_{k-1}]$, e apenas um destes intervalos contém infinitos termos da sequência. Pois se existe $n_0$ tal que $x_{n_0} > M$, então $x_n \geq x_{n_0} > M, \forall n > n_0$.

Definimos

a) $A_k = A_{k-1}, B_k = M$.
Se $x_n \leq M$,$\forall n$.

b) $A_k = M, B_k = B_{k-1}$.
Se $\exists n_0$ tal que $x_{n_0} > M$.

Afirmação $(B_k)$ é convergente, ou seja $\forall \epsilon > 0$, $\exists k_0$ tal que se $k > k_0$, então $|B_k - B_{k+j}| < \epsilon, \forall j \in \mathbb{N}$.
De fato, por construção temos que $B_k \geq A_k \forall k$ e $0 \leq B_k - B_{k+j} \leq B_k - A_k = \frac{B-A}{2^{k-1}}$, consequentemente $|B_k - B_{k+j}| \leq \frac{B-A}{2^{k-1}} < \epsilon$.

De modo análogo, prova-se que $(A_k)$ converge.

Desta forma, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tal que

$$b - \epsilon < A_{n_0} < B_{n_0} < b + \epsilon.$$

Assim $\exists n_1$ tal que se $n > n_1, An_{n_0} \leq x_n \leq B_{n_0}$.

Portanto $|x_n - b| < \epsilon$ para $n \geq \max\{n_o, n_1\}$. □

**Teorema 2.12.** *(Teorema do Confronto para sequências) Se* $\lim_{x\to\infty} b_n = \lim_{x\to\infty} c_n = L$ *e* $\exists N \in \mathbb{Z}$ *tal que* $b_n \leq a_n \leq c_n \forall n > N$*, então* $\lim_{x\to\infty} a_n = L$.

*Demonstração.* Seja $\epsilon > 0$, decorre que $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \implies |b_n - L| < \epsilon;$$
$$n > n_2 \implies |c_n - L| < \epsilon.$$

Deste modo, tome $n_0 = \max\{n_1, n_2, N\}$. Logo, para $n > n_0 \implies L - \epsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < L + \epsilon \implies a_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$. □

**Teorema 2.13** (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada* $(z_n)$ *de números reais, possui uma subsequência convergente.*

*Demonstração.* Seja $(a_n)$ uma sequência limitada, isto é, existe uma constante positiva M tal que

$$-M \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Segue do Teorema 2.9 que $(a_n)$ possui uma subsequência decrescente ou crescente. Se a sequência for decrescente , e pelo fato dela ser limitada inferiormente, ela converge para o ínfimo do seu conjunto de valores. De modo análogo, se ela não for decrescente, ela converge para o supremo de seus conjunto de valores. □

*Demonstração.* Por consequência do Teorema 2.9, temos que se $(a_n)$ é uma sequência limitada, então ela possui uma sequência $(x_{n_k})$ que é monótona. Desde que essa subsequência seja limitada, segue do teorema 2.11, que esta subsequência converge. □

*Demonstração.* Seja $(a_n)$ uma sequência limitada de números reais. Existem dois casos a considerar dependendo da cardinalidade do conjunto $\{a_n|n \in N\}$.

Caso 1: $\{an|n \in N\}$ é finito. Neste caso, está claro que alguma subsequência de $(a_n)$ é constante.

Caso 2: $\{an|n \in N\}$ é infinito. Aplicando o Teorema 2.14, obtemos que o conjunto $\{an|n \in N\}$ possui um ponto limite a. Escolhendo $n_1$ com $|a_{n_1} - a| < 1$. Escolhendo $n_2 > n_1$ com $|a_{n_1} - a| < \dfrac{1}{2}$ . Cada vizinhança aberta de a contém infinitamente muitos elementos de $\{an|n \in N\}$.

E continuando o processo desta maneira, considere $n_k > n_{k-1}$ com $|a_{n_k} - a| < \dfrac{1}{k}$

Logo, encontramos uma subsequência $(a_{n_k})$ da sequência $(a_n)$ que converge para a. □

**Teorema 2.14.** *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada $(z_n)$, possui ao menos um limite no ponto z.*

*Demonstração.* Seja $(a_n)$ uma sequência limitada, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq L$. Deste modo, todos os termos de $a_n$ pertencem ao intervalo [-L,L], denote $-L = A_1$ e $L = B_1$. Considere por p o ponto médio do intervalo$[A_1, B_1]$. Assim, temos que pelo menos um dos intervalos $[A_1, p]$ e $[p, B_1]$ deve conter infinitos termos da sequência(pois de outra forma, toda a sequência conteria apenas finitamente muitos termos). Se apenas um dos dois intervalos tiver essa propriedade, denote este intervalo por $[A_2, B_2]$; se ambos os intervalos tiverem esta propriedade, escolha o esquerdo($[A_1, p]$) para ser $[A_2, B_2]$.

Observação:Se ambos os intervalos contêm infinitamente muitos termos no sequência, não importa qual escolha fazemos; mas nós especifique o intervalo esquerdo apenas para definição.

Em qualquer caso, obtemos

1. $[A_2, B_2] \subset [A_1, B_1]$;
2. $B_2 - A_2 = \frac{1}{2}(B_1 - A_1)$;
3. $[A_1, B_1]$ e $[A_2, B_2]$ juntos contem infinitos termos na sequência $(a_n)$.

Sendo assim, repetimos o processo, bisseccionando $[A_2, B_2]$ para obter $[A_3, B_3]$, e assim por diante. Isso dá uma sequência de intervalos fechados $([A_n, B_n])$, na qual

1. $[A_{n+1}, B_{n+1}] \subset [A_n, B_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

2. $B_n - A_n = (\frac{1}{2})^{n-1}(B_1 - A_1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

3. Cada intervalo $[A_n, B_n]$ contém infinitos termos na sequência $(a_n)$

Segue que a sequência $(A_n)$ é crescente e limitada sobre $B_1$=L. Consequentemente, $(A_n)$ é convergente, e denote por A este limite. E temos , $A \leq L$.

De modo análogo, decorre que a sequência $B_n$ é decrescente e limitada abaixo por $A_1 = -L$. Por conseguinte, $B_n$ é convergente, e denote por B este limite. E ainda, $B \geq -L$.

Usando essas informações, obtemos

$$\begin{aligned} B - A &= \lim_{x\to\infty} B_n - \lim_{x\to\infty} A_n \\ &= \lim_{x\to\infty} (B_n - A_n) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (B_1 - A_1) \\ &=(B_1 - A_1) \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &=0. \end{aligned}$$

Logo, as duas sequências convergem ao mesmo limite. Denote esse limite por $l$, então $A = B = l$, e assim $-L < l < L$.

Finalmente, escolha um $a_{n_1} \in [A_1, B_1]$. Em seguida, escolha $a_{n_2}$ na sequência, com $n_2 > n_1$, tal que $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$, e assim por diante.

Desta forma, construirmos uma subsequência $(a_{n_k})$ de $(a_n)$, com $n_{k+1} > n_k$, $\forall k$. Como $A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$, segue do teorema 13, que $(a_{n_k})$ converge para $l$.

□

**Teorema 2.15.** *(Critério de Cauchy) A sequência $(z_n)$ é convergente se, e somente se, ela é uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Decorre da hipótese que $(z_n)$ é convergente, isto é, $z_n \to z$, sendo assim $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n > N$. Consequentemente, se existe $p \in \mathbb{N}$ com $p > N$, então $|z_{n+p} - z| < \frac{\epsilon}{2}$, e assim

$$|z_{n+p} - z_n| \leq |z_{n+p} - z| + |z_n - z| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Seja $(z_n)$ uma sequência de Cauchy, então $|z_n - z_{N+1}| < \epsilon$, e como $|z_n| - |z_{N+1}| \leq |z_n - z_{N+1}| < \epsilon$, segue que $|z_n| < |z_{N+1}| + \epsilon$ para $n > N$.

Portanto, $\forall n$,

$$|z_n| \leq K = \max\{|z_0|, ..., |z_N|, |z_{N+1}| + \epsilon\}.$$

Deste modo, $(z_n)$ é limitada, e logo decorre do teorema 2.13 que ela possui uma subsequência convergente. Considere $(z_{n_k})$ está subsequência. Então dado $\epsilon > 0$ existe um $N$ tal que $\forall n$, $n_k > N$ com $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $|z_{n+n_k} - z_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Como $(z_{n_k})$ é convergente , existe $n_k > N$ com $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $|z_{n+n_k} - z| < \frac{\epsilon}{2}$.

Logo,

$$|z_n - z| \leq |z_{n+n_k} - z| + |z_{n+n_k} - z_n| < \epsilon, \forall n > N.$$

□

## 2.4 Exemplos

*Exemplo* 2.10. Uma sequência é definida recursivamente por $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}.$$

Considere a subsequência dos índices impares $(a_{2n+1})$. Então a subsequência $(a_{2n+1})$ é convergente.

*Demonstração.* Vejamos

$$a_{2n+1} = \frac{1}{1 + a_{2n}} = \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + a_{2n-1}}} = \frac{1 + a_{2n-1}}{2 + a_{2n-1}}. \tag{5.3}$$

A sequência $(a_{2n+1})$ é decrescente.

De fato,

Para n=1, $a_{2\cdot 1+1} > a_{2\cdot 2+1}$ é evidente, pois

$$a_3 = \frac{2}{3} > \frac{5}{8} = a_5.$$

Suponha que valha para algum $n$ natural. Decorre que $a_{2n+1} > a_{2n+3}$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} a_{2n+1} > a_{2n+3} &\implies 2 + a_{2n+1} > 2 + a_{2n+3} \\ &\implies \frac{1}{2 + a_{2n+1}} < \frac{1}{2 + a_{2n+3}} \\ &\implies -\frac{1}{2 + a_{2n+1}} > -\frac{1}{2 + a_{2n+3}} \\ &\implies 1 - \frac{1}{2 + a_{2n+1}} > 1 - \frac{1}{2 + a_{2n+3}}. \end{aligned}$$

Segue de 5.3 que

$$\implies 1 - \frac{1}{2 + a_{2n+1}} > 1 - \frac{1}{2 + a_{2n+3}} \Leftrightarrow a_{2n+3} > a_{2n+5}.$$

Logo, $a_{2n+1}$ é decrescente.

Mostraremos agora que $a_{2n+1} > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ para todo n.

i) $a_{2\cdot 1+1} > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ é evidente.

De fato,

$$a_{2\cdot 1+1} = a_3 = \frac{2}{3} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

ii)Se $p(n)$ é verdadeira, então $p(n+1)$ é verdadeira.

Com efeito,

Segue da hipótese que $a_{2n+1} > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned} &2 + a_{2n+1} > 2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ &\implies \frac{1}{2 + a_{2n+11}} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ &\implies -\frac{1}{2 + a_{2n+1}} > \frac{\sqrt{5}-3}{2} \\ &\implies 1 - \frac{1}{2 + a_{2n+1}} > 1 + \frac{\sqrt{5}-3}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned}$$

Logo $a_{2n+1}$ é limitada inferiormente.

Segue do Teorema 2.11 que $a_{2n+1}$ converge.

Desta forma, seja $\theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\theta = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}.$$

Donde $a_{2n+1} = \dfrac{1 + a_{2n+1}}{2 + a_{2n+1}}$, e tomando o limite, obtemos

$$\theta = \frac{1+\theta}{2+\theta} \implies \theta^2 + \theta - 1 = 0 \implies \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

□

*Exemplo* 2.11. $(cos\, x)$ é uma sequência limitada. Seja

$$x_0 = \theta_0$$
$$x_n = x_{n-1} + \sqrt{3}\pi.$$

e considere $y_n = cos\, x_n$. Obtenha uma subsequência convergente de $(y_n)$.

*Demonstração.* Tome $\theta_0 = 0$. Decorre do Teorema 2.13 que $y_n$ possui uma sub- sequência convergente. Analisando temos que

$$y_n = (\cos n\sqrt{3}\pi).$$

Temos que $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, ....] = [1; \bar{1, 2}]$.

Dado

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + 1 \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

E disto obtemos:

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{a_{2n-2}}{b_{2n-2}}}}.$$

Em que $\dfrac{a_{2n-2}}{b_{2n-2}}$ são os aproximantes de $\sqrt{3} - 1$.

Obtendo a formula para $\dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}$:

Vejamos

$$\frac{a_{2n}}{b_{2n}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{a_{2n-2}}{b_{2n-2}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{b_{2n-2}}{2b_{2n-2} + a_{2n-2}}} = \frac{2b_{2n-2} + a_{2n-2}}{3b_{2n-2} + a_{2n-2}}$$

Para $\sqrt{3}$:

$$1+\frac{2b_{2n-2}+a_{2n-2}}{3b_{2n-2}+a_{2n-2}}=\frac{5b_{2n-2}+2a_{2n-2}}{3b_{2n-2}+a_{2n-2}}.$$

Note que

$$\frac{2b_{2n-2}+a_{2n-2}}{3b_{2n-2}+a_{2n-2}}=\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \implies 1+\frac{2b_{2n-2}+a_{2n-2}}{3b_{2n-2}+a_{2n-2}}=1+\frac{a_{2n}}{b_{2n}}=\frac{a_{2n}+b_{2n}}{b_{2n}}.$$

Segue então,

$$p_{2n}=a_{2n}+b_{2n} \text{ e } q_{2n}=b_{2n}.$$

Como

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{5b_{2n-2}+2a_{2n-2}}{3b_{2n-2}+a_{2n-2}}.$$

temos que

$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \end{pmatrix}$$

Deste modo,

$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim,

$$(a_{2n})=(0,1,2,8,30,...).$$
$$(b_{2n})=(1,1,3,11,41,...).$$

A partir destas informações, podemos utilizar as aproximações diofantinas e obter que

$$cos(a_{2n}\pi)\cong cos(b_{2n}\sqrt{3}\pi).$$

Decorre das propriedades trigonométricas que

$$cos(a_{2n})=cos(2\pi)=cos(8\pi)=...=-1$$

Assim, essa subsequência converge para -1.

Por conseguinte, segue que $cos(b_{2n}\sqrt{3}\pi)$ converge para -1.

$$-1 \leq \cos(n\sqrt{3}\pi) \leq 1.$$

□

*Exemplo* 2.12. Seja $\beta$ um irracional fixo, e seja $T_\beta$ a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} T_\beta : &[0,1] \to [0,1] \\ &x \mapsto \beta x \, mod \, 1 \end{aligned}$$

E seja $y_n = T_\beta^n(\frac{1}{2})$. Obtenha uma subsequência convergente de $(y_n)$ para $\beta = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$ e $\beta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

*Demonstração.* Para $\beta = \sqrt{2}$,

$$T_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Note que,

$$T_\beta \circ T_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\right) - 1 = \frac{2}{2} - 1 = 0.$$

Assim obtemos que,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0, ...\right).$$

Logo $(y_n) = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$.

Para $\beta = \sqrt{3}$,

$$T_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Note que,

$$T_\beta \circ T_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}\right) - 1 = \frac{1}{2}.$$

Deste modo,

$$T_\beta^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, T_\beta^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sendo assim, obtemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, ...\right).$$

Logo, obtemos duas subsequências convergentes, $(y_n) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ com $n = 2k$, $(y_n) = \dfrac{1}{2}$ com $n = 2k+1$, para quaisquer $n$ e $k$ natural.

Para $\beta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$,

$$T_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Note que,

$$T_\beta \circ T_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
$$T_\beta \circ T_\beta \circ T_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = T_\beta \circ T_\beta\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Deste modo,

$$T_\beta^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, T_\beta^3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, T_\beta^3\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Sendo assim, obtemos

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \dots\right).$$

Logo, obtemos três subsequências convergentes, $(y_n) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ com $n = 3k$, $(y_n) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ com $n = 3k+1$ e $(y_n) = \dfrac{1}{2}$ com $n = 3k+2$, para quaisquer $n$ e $k$ natural. □

## 2.5 Séries

Seja a soma $s_n$ definida por $s_n - s_{n-1} = a_n$ e que o elemento inicial $s_0 = a_0$, desta forma, temos que, para $n = 0, 1, 2, \dots$

$$s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n.$$

O $n^{th}$(enésimo) termo da sequência $(s_n)$ é obtido "adicionando" os termos de outra sequência (infinita) $a_n$. Para indicar esse processo continuo, a sequência obtida é denotada por

$$a_0 + a_1 + ... + a_n + ... \; ou \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

que é chamada de série(infinita).

**Definição 2.9.** Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $s_n = \sum_{n=0}^{n} a_n$. Se $(s_n)$ converge e $\lim_{x \to \infty} s_n = s$ então, existe a soma $\sum a_n$ é convergente, e escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad \text{ou} \quad a_0 + a_1 + ... + a_n + ... = s.$$

**Definição 2.10.** Se a sequência $(s_n)$ é divergente, então a série é convergente.

*Observação* 2.3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

## 2.6 Exemplos

*Exemplo* 2.13. Analise a série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + .... + a^n + ....$

*Demonstração.* Note que

$$s_n = 1 + a + ... + a^n, e \tag{5.4}$$

$$as_n = a + a^2 + ... + a^{n+1} \tag{5.5}$$

Subtraindo (3)de(2), temos

$$\begin{aligned} s_n - as_n = 1 - a^{n+1} &\implies s_n(1-a) = 1 - a^{n+1} \\ &\implies s_n = \frac{1 - a^{n+1}}{(1-a)}. \end{aligned}$$

desde que $|a| \neq 1$.
Se $|a| < 1$, temos

$$s_n = \frac{1}{1-a}.$$

□

*Exemplo* 2.14. A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverge.

*Demonstração.* Vejamos,

$$\begin{aligned} s_1 &= -1 \\ s_2 &= 0 \\ s_3 &= -1 \\ s_4 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sendo assim, chegamos no seguinte sistema

$$\begin{cases} s_{2n} = 0 \\ s_{2n+1} = -1 \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} s_{2n} &= \lim_{x\to\infty} 0 = 0, \\ \lim_{x\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{x\to\infty} -1 = -1. \end{aligned}$$

Como, os limites das subsequências de $s_n$ não convergem ao mesmo ponto, temos que $s_n$ diverge.

Consequentemente a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverge. □

# 3 Frações Continuadas

**Definição 3.1.** Seja $(a_n)$ uma sequencia de números complexos $\neq 0$, e seja $(f_n)$ uma sequencia de $\hat{C} = C \bigcup \infty$ dada por

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = \frac{a_1}{1+a_2}, \quad f_3 = \frac{a_1}{1+\frac{a_2}{1+a_3}}$$

e generalizando

$$f_n = \cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_3}{1+\ddots}}}$$

De maneira similar, obtemos um conceito de fração continuada, construído da sequencia $(a_n)$.

**Definição 3.2.** Seja uma sequencia $(a_n)$ de números complexos,todos $\neq$0:

$$K_{i=1}^{\infty}(a_n/1) = \cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_3}{1+\ddots}}}$$

É chamado de fração contínua, ou fração continuada.

**Definição 3.3.** Para duas sequencias, $(a_n)$ e $(b_n)$ de números complexos, no qual todo $a_n \neq 0$, a fração continuada

$$K_{i=1}^{\infty}(a_n/b_n) = \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots}}}$$

**Definição 3.4.** A fração continuada é o par ordenado

$$\Big(\big((a_n),(b_n)\big),(f_n)\Big),$$

onde $(a_n)_1^{\infty}$ e $(b_n)_1^{\infty}$ são sequencias de números complexos, $a_n \neq 0$, e onde $(f_n)$ é a sequencia estendida dos números complexos,dada por

$$f_n = S_n(0), \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

onde

$$\begin{array}{lll} S_0(w) = s_0(w), & S_n = S_n - 1(s_n(w)), & n = 1, 2, 3, ... \\ s_0 = b_0 + w, & s_n(w) = \dfrac{a_n}{b_n + w}, & n = 1, 2, 3... \end{array}$$

Os números $a_n$ e $b_n$ são chamados de $n^{th}$ numeradores e denominadores parciais, em respectivo. O número

$$S_n(0) = \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

é chamado de $n^{th}$ aproximado $(a = 1)$.

**Notação**

$$S_n(0) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\frac{a_2}{b_2 +}\cdots + \frac{a_n}{b_n}.$$

Generalizando

$$S_n(w) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\frac{a_2}{b_2 +}\cdots + \frac{a_n}{b_n + w}.$$

## 3.1 Exemplos

*Exemplo* 3.1. Use a identidade

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Para produzir uma fração continuada.

**Solução**

Segue da igualdade que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}-1}{2} &= \frac{2}{2 +}\frac{4}{2 + (\sqrt{5}-1)}\\ &= \frac{1}{1 +}\frac{2}{1 + (\sqrt{5}-1)}\\ &= \frac{1}{1 +}\frac{1}{1 +}\frac{1}{1 +}\cdots + \frac{1}{1 +}\frac{2}{1 + (\sqrt{5}-1)}.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 &= \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{5}-1}{2}} + 1\\ &= 1 + \frac{1}{1 +}\frac{1}{1 +}\frac{1}{1 +}\cdots + \frac{1}{1 +}\frac{2}{1 + (\sqrt{5}-1)}.\end{aligned}$$

Observe que é uma boa ideia dar uma olhada nas aproximações da fração contínua:

$$1 + \frac{1}{1 +}\frac{1}{1 +}\frac{1}{1 +}\cdots + \frac{1}{1 +}\cdots$$

Encontramos

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{1}=2\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{3}{2}=1,5\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{5}{3}=1.66666666667\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{8}{5}=1,6\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{13}{8}=1,625\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{21}{13}=1,615\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{34}{21}=1,619
\end{aligned}$$

*Exemplo* 3.2. Encontre a fração continuada que expressa $\sqrt{3}$.

*Demonstração.* Como $\sqrt{3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, temos que

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{x}\implies\sqrt{3}-1=\frac{1}{x}\implies x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}.$$

Note que

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Deste modo,

$$x=1+\frac{1}{2x}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2x}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}}.$$

Como $\sqrt{3}=1+\dfrac{1}{x}$, temos

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

Deste modo $\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\ldots$. Aproximando esses termos, temos

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{1}=2\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2}=\frac{5}{3}\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1}=\frac{7}{4}\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}=\frac{19}{11}\\
&1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1}=\frac{26}{15}
\end{aligned}
$$

e sucessivamente. □

# 4 $\beta$-xpansões

**Definição 4.1.** Dado $\beta > 1$, definimos a aplicação $T_\beta$ por,

$$
\begin{aligned}
T_\beta : [0,1) &\to [0,1)\\
x &\mapsto \beta x \bmod 1
\end{aligned}
$$

Dado $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor$ denota a parte inteira de $y$ e $0 \leq \big(y\big) < 1$ a parte fracionária de $y$, de modo que $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$y = \lfloor y \rfloor + \big(y\big) \ .$$

Se $\beta > 1$, então $\forall x > 0$ possui uma $\beta$-expansão:

$$x = \epsilon_0(x) + \frac{\epsilon_1(x)}{\beta} + \frac{\epsilon_2(x)}{\beta^2} + \cdots \quad \text{ou} \quad x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon_i(x)}{\beta^i} \ ,$$

em que $\epsilon_0(x) = \lfloor x \rfloor$, $\epsilon_1(x) = \lfloor \beta\big(x\big) \rfloor$, $\epsilon_2(x) = \lfloor \beta\big(\beta\big(x\big)\big) \rfloor$ e sucessivamente.

Observe que, dado $x \geq 0$, $\epsilon_i(x) \in \{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$, para cada $i \geq 1$. De fato, $0 \leq \big(x\big) < 1$. Se $\big(x\big) = 0$, $\epsilon_i(x) = 0$, para todo $i \geq 1$. Do contrário $\beta\big(x\big) < \beta$, o que implica que $\lfloor \beta\big(x\big) \rfloor \leq \lfloor \beta \rfloor$. Agora note que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lfloor \beta \rfloor}{\beta^i} = \frac{\lfloor \beta \rfloor}{\beta(1 - 1/\beta)} > 1 \ .$$

Com isto, a $\beta$-expansão de um número arbitrário $0 < x < 1$ deve ter pelo menos um dos termos $\epsilon_i(x) < \lfloor \beta \rfloor$.

Introduzimos a ordem *lexicográfica* no conjunto das sequências $(\epsilon_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$. Denotando por $\mathcal{A}_\beta = \{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$, as sequências em estudo formam um subconjunto de $\mathcal{A}_\beta^*$.

**Definição 4.2.** Se $(a_0, a_1, ...)$ e $(b_0, b_1, ...)$ são sequências finitas ou infinitas de inteiros não negativos com o mesmo número de termos (com a mesma cardinalidade), dizemos que

$$(a_0, a_1, ...) < (b_0, b_1, ...);$$

quando $a_n < b_n$ para o primeiro $n$ tal que $a_n \neq b_n$.

**Definição 4.3.** Se $(a_0, a_1, ...)$ é uma sequência finita ou infinita de inteiros não negativos $(a_0, a_1, ...)(\beta)$ denota o número real

$$a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{\beta^i} \quad \text{ou ainda} \quad a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\beta^i}.$$

*Observação* 4.1. Se a $\beta$-expansão de $\beta$ é constante, $a_n = a_0$, para todo $n$, então $\beta = a_0 + 1$ é inteiro. Neste caso, o número 1 possui uma $\beta$-expansão finita: $1 = 0 + \frac{\beta}{\beta}$, e a expansão infinita $(0, \beta - 1, \beta - 1, \ldots)$. No que segue, assumimos $\beta > 1$ mas não inteiro.

**Lema 5.1.** *Se $\beta = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\beta^i}$ onde $(a_0, a_1, ...)$ é uma sequência de inteiros não negativos e se $(b_0, b_1, ...)$ é uma sequência de inteiros não negativos com $(b_n, b_{n+1}, ...) < (a_0, a_1, ...)$ $\forall n \geq 1$, então para cada $m \geq 0$*

$$\begin{cases} b_n + \dfrac{b_{n+1}}{\beta} + \cdots & < a_m + \dfrac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots \quad \textit{sempre que} \\ (b_n, b_{n+1}, ...) & < (a_m, a_{m+1}, ...), \end{cases}$$

*a menos que $\beta = (a_0, a_1, ..., a_q)(\beta)$ para algum $q$ e a cauda de $(b_n)_{n\geq 0}$ coincidir com $(c_i)$, dada por*

$$c_i = \begin{cases} a_i & \textit{se} \quad 0 \leq i < q, \\ a_q - 1 & \textit{se} \quad i = q \end{cases}$$

*e $c_i = c_{i-q-1}$, para $i > q$.*

*Demonstração.* Primeiro provaremos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{n+i}}{\beta^i} = b_n + \frac{b_{n+1}}{\beta} + \cdots \leq a_m + \frac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{m+i}}{\beta^i}$$

sempre que $(b_n, b_{n+1}, ...) < (a_m, a_{m+1}, ...)$, mostrando que $\forall r \geq 0$.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{r} \frac{b_{n+i}}{\beta^i} = b_n + \sum_{i=1}^{r} \frac{b_{n+i}}{\beta^i} & < a_m + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{a_{m+i}}{\beta^i} = \sum_{i=0}^{r} \frac{a_{m+i}}{\beta^i} \quad \text{sempre que} \\ (b_n, ..., b_{n+r}) & < (a_m, ..., a_{m+r}). \end{cases} \tag{5.6}$$

Para $r = 0$, temos que

$$(b_n) < (a_m) \implies (b_n) = (b_n)(\beta) = \sum_{i=0}^{r} \frac{b_{n+i}}{\beta^i} < (a_m) = (a_m)(\beta) = \sum_{i=0}^{r} \frac{a_{m+i}}{\beta^i}$$

Portanto 5.6 vale $\forall m, n$ quando $r = 0$.

Suponha que 5.6 vale $\forall m, n$ quando $r < k$.

Se $(b_n, ..., b_{n+r}, ..., b_{n+k}) < (a_m, ..., a_{m+r}, ..., a_{m+k})$, então

(i) $b_n = a_m$ e $(b_{n+1}, ..., b_{n+k}) < (a_{m+1}, ..., a_{m+k})$ ou (ii) $b_n < a_m$.

No caso (i), decorre da hipótese de indução que

$$b_{n+1} + \frac{b_{n+2}}{\beta} + \cdots + \frac{b_{n+k}}{\beta^k} < a_{m+1} + \frac{a_{m+2}}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_{m+k}}{\beta^k} \ .$$

Dividindo a inequação por $\beta$ e somando $b_n = a_m$ em ambos os membros, temos 5.6 para $r = k$.

No caso (ii), como $(b_{n+1}, ..., b_{n+k}) \leq (a_0, ..., a_{k-1})$ por hipótese, obtemos que

$$b_{n+1} + \cdots + \frac{b_{n+k}}{\beta^{k-1}} \leq a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^{k-1}} \implies \frac{b_{n+1}}{\beta} + \cdots + \frac{b_{n+k}}{\beta^k} \leq \frac{a_0}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^k} \quad (5.7)$$

Como $\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^{k-1}} + \cdots$ então $\beta \geq a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^{k-1}}$ e consequentemente

$$\frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^k} \leq 1 \quad (5.8)$$

Visto que $b_n < a_m$, e considerando que $a_m$ e $b_n$ são inteiros, segue que $1 \leq a_m - b_n$.

Deste modo em (5.8) temos

$$\frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^k} \leq a_m - b_n \implies b_n + \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^k} \leq a_m \quad (5.9)$$

Sendo assim, combinando as desigualdades 5.7 e 5.9, obtemos

$$b_n + \cdots + \frac{b_{n+k}}{\beta^k} \leq b_n + \frac{a_0}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^k} \leq a_m \leq a_m + \cdots + \frac{a_{m+k}}{\beta^k}. \quad (5.10)$$

Em (5.10), as três igualdades valem se e somente se a igualdade valer em (5.8)

$$\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^{k-1}}$$

e também, por (5.7),

$$(b_{n+1}, ..., b_{n+k}) = (a_0, ..., a_{k-1}) \ .$$

Entretanto isto é excluído pela condição $(b_n, b_{n+1}, ...) < (a_0, a_1, ...)$ $\forall n \geq 1$.

Consequentemente (5.6) está provado para todo $r \geq 0$. Decorre desta desigualdade que quando $(b_n, b_{n+1}, ...) < (a_m, a_{m+1}, ...)$, temos

$$b_n + \frac{b_{n+1}}{\beta} + \cdots + \frac{b_{m+r}}{\beta^r} + \cdots \leq a_m + \frac{a_{m+1}}{\beta} + \cdots \frac{a_{m+r}}{\beta^r} + \cdots . \tag{5.11}$$

Vejamos quando vale a igualdade em (5.11).

Suponha que $(b_n, b_{n+1}, ...) < (a_m, a_{m+1}, ...)$, então, pela definição da ordem $\exists p, q \geq 0$, com $p \geq n$ e $q \geq m$ tal que $p - n = q - m \geq 0$ e $b_p < a_q$.

Deste modo,

$$b_p + \frac{b_{p+1}}{\beta} + \cdots + \frac{b_{p+r}}{\beta^r} + \cdots \leq b_p + \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots \leq a_q \leq a_q + \frac{a_{q+1}}{\beta} + \cdots \frac{a_{q+r}}{\beta^r} + \cdots . \tag{5.12}$$

A igualdade em (5.11) implica na igualdade entre os três termos de (5.12). Em particular, pela terceira desigualdade, concluímos que a cauda de $(a_i)$ é nula: $a_{q+1} = a_{q+2} = \cdots = 0$. Portanto $\beta$ possui a $\beta$-expansão finita: $\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_q}{\beta^q}$. Por outro lado, já argumentamos que a igualdade não valeria se a expansão $(b_n, \cdots)(\beta)$ fosse finita.

Como

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_q}{\beta^{q+1}} \\
&= \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_q - 1}{\beta^{q+1}} + \frac{1}{\beta^{q+1}} \\
&= \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_q - 1}{\beta^{q+1}} + \frac{a_0}{\beta^{q+2}} + \frac{a_1}{\beta^{q+3}} + \cdots + \frac{a_q - 1}{\beta^{2q+1}} + \frac{1}{\beta^{2q+1}}
\end{aligned}$$

Com isto,

$$\beta = (c_0, c_1, \cdots)(\beta) \ ,$$

em que

$$c_i = \begin{cases} a_i \ , & \text{se } \ 0 \leq i < q \\ a_q - 1 \ , & \text{se } \ i = q \end{cases}$$

e $c_i = c_{i-q-1}$, para $i > q$. A sequência $(c_i)_{i \geq 0}$ é periódica de período $q + 1$. Veja que $(c_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência com infinitos termos positivos, pois pelo menos um dos termos $(a_0, a_1, \ldots, a_q - 1)$ é positivo.

Voltando a considerar a igualdade em (5.11), temos pela primeira igualdade em (5.12)

$$b_{p+1} + \cdots \frac{b_{p+r}}{\beta^{r-1}} + \cdots = \beta \ ,$$

donde $(b_{p+1}, b_{p+2}, \cdots)$ coincide com a sequência $(c_i)_{i \geq 0}$.

Caso valha a desigualdade, para todo $n \geq 1$ e $m \geq 0$

$$(b_n, b_{n+1}, \ldots) < (c_m, c_{m+1}, \ldots) \ .$$

A demonstração do Lema está completa. □

**Teorema 4.1.** *Se $\beta > 1$ não inteiro e a $\beta$-expansão de $\beta$ é*

$$\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots \ .$$

*e se $(b_0, b_1, ...)$ é uma sequência de números não negativos cuja cauda, no caso de a $\beta$-expansão de $\beta$ ser finita, não coincide com $(c_i)_{i\geq 0}$ (Lema 5.1), então uma condição necessária e suficiente para a existência de $x$ com $\beta$-expansão*

$$x = b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \cdots \ .$$

*é que $(b_n, b_{n+1}, \ldots) < (a_0, a_1, \ldots)$, $\forall n \geq 1$. Em particular, $(a_n, a_{n+1}, \ldots) < (a_0, a_1, \ldots)$, $\forall n \geq 1$.*

*Demonstração.* Considere $x$ com a $\beta$-expansão

$$x = b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \cdots \ , \tag{5.13}$$

Lembre que $b_0 = \epsilon_0(x) = \lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de $x$.

Devemos mostrar que $\forall n \geq 1$,

$$\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots < 1 = \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots \ . \tag{5.14}$$

Pela definição de parte inteira, o membro esquerdo em (5.14) é menor do que 1 para $n = 1$. Para $n = 2$, o membro esquerdo vale $T_\beta(x)$, que é menor do que 1. Para $n$ qualquer, o membro esquerdo vale $T_\beta^{n-1}(x)$ que é sempre menor do que 1 pela definição da aplicação $T_\beta$. (A igualdade em (5.14) decorre da $\beta$-expansão de $\beta$.)

Por consequência, para todo $n \geq 1$,

$$(b_n, b_{n+1}, \ldots) \neq (a_0, a_1, \ldots).$$

Seja $k$ o primeiro inteiro que $b_{n+k} \neq a_k$, então, usando (5.14),

$$b_{n+k} + \frac{b_{n+k+1}}{\beta} + \cdots < a_k + \frac{a_{k+1}}{\beta} + \cdots \ ,$$

e desde que $\frac{a_{k+1}}{\beta} + \frac{a_{k+2}}{\beta^2} + \cdots < 1$, temos que $b_{n+k} < a_k + 1$. Portanto $b_{n+k} \leq a_k$. Mas $b_{n+k} \neq a_k$, portanto $b_{n+k} < a_k$.

Reciprocamente, pelo Lema 5.1 tem-se que se $(b_n, b_{n+1}, ...) < (a_0, a_1, ...)$, $\forall n \geq 1$, então

$$\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots < \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots = 1 \ ,$$

não podendo ocorrer a igualdade porque, por hipótese, a cauda $(b_n, b_{n+1}, \cdots)$ não coincide com $(c_i)_{i\geq 0}$ no caso de a $\beta$-expansão de $\beta$ ser finita.

Portanto, dado $b_0 \in \mathbb{Z}$, pondo

$$x = b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \cdots \ ,$$

tem-se que a $\beta$-expansão de $x$ é $(b_0, b_1, \ldots)(\beta)$. □

Dizemos que uma sequência não constante $(a_k)_{k\geq 0}$ é **admissível** se $a_0 \geq 1$, $0 \leq a_n \leq a_0$, para todo $n \geq 1$ e existe $n > 0$ tal que $a_n > 0$. Note que se $\beta > 1$ e $\beta$ não é inteiro, então a $\beta$-expansão de $\beta$ é uma sequência admissível.

Dada uma sequência admissível, considere a função $f : (1, \infty) \to (1, \infty)$, definida pela série

$$f(x) = (a_0, a_1, \ldots)(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

Note que $f$ está bem definida, pois a série converge uniformemente por ser dominada pela série geométrica de razão $\frac{1}{x} < 1$. Além disto, $f$ é derivável em $(1, \infty)$ e a derivada pode ser calculada termo a termo.

Como pelo menos um dos termos da sequência $a_n > 0$, para $n \geq 1$, concluímos que a derivada é negativa para todo $x \in (1, \infty)$, e portanto $f$ é monótona decrescente.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k > a_0 \ ,$$

podendo ser infinito, e $\lim_{x\to\infty} f(x) = a_0$.

Por fim, note que $f(a_0) > a_0$ e que

$$f(a_0 + 1) < a_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{a_0+1}} = a_0 + 1 \ .$$

Concluímos que $f$ possui um único ponto fixo no intervalo $(a_0, a_0 + 1)$.

**Corolário 4.1.** *A única solução $\beta > 1$, de*

$$x = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

*tem sua $\beta$-expansão*

$$\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots$$

*se, e somente se, $(a_n, a_{n+1}, \ldots) < (a_0, a_1, \ldots)$, para todo $n \geq 1$.*

*Demonstração.* Já provamos que se $\beta > 1$ é não-inteiro, então $(a_n)_{n\geq 0}$ é admissível e portanto a solução da equação

$$x = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

é única e tem a referida $\beta$-expansão. Decorre do Teorema 4.1 que $(a_n, a_{n+1}, \ldots) < (a_0, a_1, \ldots)$, para todo $n \geq 1$.

Reciprocamente, se $(a_n, a_{n+1}, \ldots) < (a_0, a_1, \ldots)$, para todo $n \geq 1$, então $0 \leq a_n \leq a_0$, $\forall n \geq 1$. Além disto, existe $n \geq 1$ tal que $a_n > 0$, pois $\beta$ não é inteiro. Novamente, de $\beta$ não-inteiro, concluímos que $(a_n)_{n\geq 0}$ é não-constante. Com isto, a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ é admissível. □

Vamos agora estudar os números $\beta$ cujas $\beta$-expansões são pré-periódicas. Uma sequência $(a_k)_{k\geq 0}$ é dita **pré-periódica** de período $m$ se existe $n \geq 0$ e $m > 0$ tal que

$$a_{n+rm+k} = a_{n+k} \ ,$$

para todo $r \geq 0$ e todo $0 \leq k < m$.

**Corolário 4.2.** *A única solução de $\beta > 1$ de*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k} \ ,$$

*em que $(a_k)_{k\geq 0}$ é pré-periódica de período $m$, tem*

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\beta^k},$$

*como sua $\beta$-expansão, se e somente se*

$$\begin{cases} (a_0, ..., a_{n+m-1}) > (a_1, ..., a_{n+m-1}, a_n), \\ \vdots \\ (a_0, ..., a_{n+m-1}) > (a_k, ..., a_{n+m-1}, a_n, \ldots, a_{n+k}), \\ \vdots \\ (a_0, ..., a_{n+m-1}) > (a_{n+m-1}, a_n, \ldots, a_{2n+2m-2}) \end{cases} \tag{5.15}$$

*Demonstração.* Decorre do Corolário 4.1 que $(a_k)_{k\geq 0}$ é admissível se, e somente se, $(a_p, a_{p+1}, \ldots) < (a_0, a_1, \ldots)$, para todo $p \geq 1$.

Se a sequência é admissível e pré-periódica de período $m$, podemos escrevê-la como

$$\left(a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1}, (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1})^{\infty}\right) .$$

Seja $k$ o primeiro índice em que ocorre uma diferença entre as sequências $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(a_n)_{n\geq p}$, isto é,

$$a_{k+p} < a_k \ .$$

Este índice deve satisfazer $0 \leq k \leq n+m-1$. Do contrário, teríamos as igualdades:

$$a_0 = a_p, \ldots, a_{n+m-1} = a_{p+n+m-1} \ .$$

Da condição de periodicidade $a_{n+m} = a_n$ e $a_{p+n+m} = a_{p+n}$, mas $a_n = a_{p+n}$, pois $n \leq n+m-1$. Por transitividade,

$$a_{n+m} = a_n = a_{p+n} = a_{p+n+m} \ .$$

Usando este efeito dominó, concluiríamos que $a_j = a_{p+j}$ para todo $j \geq 1$. Isto contraria a existência de $k$ tal que $a_{k+p} < a_k$.

Em resumo, considerando que $(a_k)_{k\geq 0}$ é pré-periódica de período $m$, é necessário comparar o início da sequência com trechos futuros, mas de tamanho finito, para estabelecer se ela é admissível, como está nas desigualdades (5.15).

Isto também é suficiente, porque se as desigualdades em (5.15) ocorrem, então

$$(a_p, a_{p+1}, \ldots) < (a_0, a_1, \ldots) \ ,$$

para todo $p \geq 1$. □

**Corolário 4.3.** *A única solução $\beta > 1$ de*

$$x^{n+m} - (a_0 x^{n+m-1} + \cdots + a_{n+m-1}) = x^n - (a_0 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}) \ , \tag{5.16}$$

*em que $(a_k)_{k\geq 0}$ é pré-periódica de período $m$, tem*

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\beta^k},$$

*como sua $\beta$-expansão, se e somente se valem as equações* (5.15).

*Demonstração.* A demonstração é obtida a partir de manipulações algébricas de (5.16).

De fato, temos que

$$x^{n+m} - x^n = (a_0 x^{n+m-1} + \cdots + a_{n+m-1}) - (a_0 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}).$$

Reagrupando os termos à direita, temos

$$\begin{aligned} x^{n+m} - x^n =& a_0(x^{n+m-1} - x^{n-1}) + a_1(x^{n+m-2} - x^{n-2}) + \cdots + a_k(x^{n+m-k} - x^{n-k-1}) + \cdots \\ &+ a_{n-1}(x^m - 1) + a_n x^{m-1} + \cdots + a_{m+n-1}. \end{aligned}$$

Fatorando os termos $x^{n+m} - x^n$ à esquerda, obtemos

$$\begin{aligned} x(x^{n+m-1} - x^{n-1}) =& a_0(x^{n+m-1} - x^{n-1}) + a_1(x^{n+m-2} - x^{n-2}) + \cdots \\ &+ a_{n-1}(x^m - 1) + a_n x^{m-1} + \cdots + a_{m+n-1} \end{aligned}$$

Portanto, $x$ é dado por

$$x = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n x^{m-1} + \cdots + a_{n+m-1}}{x^{n+m-1} - x^{n-1}}. \tag{5.17}$$

Os últimos termos de (5.17) podem ser reescritos com o auxílio de uma série geométrica de razão $\frac{1}{x^m}$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_n x^{m-1} + \cdots + a_{n+m-1}}{x^{n+m-1} - x^{n-1}} &= \frac{a_n x^{m-1} + \cdots + a_{n+m-1}}{x^{n-1}(x^m - 1)} \\ &= \frac{a_n}{x^n}\frac{x^m}{x^m - 1} + \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}\frac{x^m}{x^m - 1} + \cdots + \frac{a_{n+m-1}}{x^{n+m-1}}\frac{x^m}{x^m - 1} \end{aligned}$$

Mas, para cada $k$, $n \leq k < n + m$,

$$\frac{a_k}{x^k}\frac{x^m}{x^m - 1} = a_k\left(\frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+m}} + \cdots\right) = \frac{a_k}{x^k} + \frac{a_{k+m}}{x^{k+m}} + \cdots \ ,$$

pois $a_{k+rm} = a_k$ para todo $r \geq 0$.

Isto implica que $\beta$ é a única solução da equação do Corolário 4.2, concluindo a demonstração. $\square$

**Corolário 4.4.** *A única solução $\beta > 1$ de*

$$x = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n},$$

*tem sua $\beta$-expansão*

$$\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_n}{\beta^n},$$

*se e somente se*

$$\begin{cases} (a_0, .., a_n) > (a_1, ..., a_n, 0), \\ (a_0, ..., a_n) > (a_k, ..., a_n, 0, ..., 0), \\ (a_0, ..., a_n) > (a_n, 0, ..., 0). \end{cases} \tag{5.18}$$

(5.18) *é equivalente a*

$$\begin{cases} (a_0, ...a_{n-1}) \geq (a_1, ..., a_n), \\ (a_0, ..., a_{n-k}) \geq (a_k, ..., a_n), \\ (a_0) \geq (a_n). \end{cases}$$

*Demonstração.* Note que quando a $\beta$-expansão de $\beta$ é finita ou pré-periódica, $\beta$ é um número algébrico. A demonstração deste Corolário é uma redução do Corolário 4.3. De fato, tomando $n = 0$, ou seja, tomando como vazia a parte que não se repete da sequência pré-periódica, na equação (5.16), temos

$$x^m = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \cdots + (a_{m-1} + 1) \ .$$

Dividindo por $x^{m-1}$ em ambos os membros e fazendo a identificação $n = m - 1$, $a_n = a_{m-1} + 1$, temos que o Corolário 4.3 se reduz ao Corolário 4.4, com a questão da admissibilidade da sequência agora *periódica* $(a_k)_{k \geq 0}$ de período $n$, resultando nas condições descritas pelas equações (5.18). (Note apenas que $a_0 \geq a_n$ na expansão finita, corresponde no Corolário 4.3 a $a_0 > a_{m-1}$.) □

Para os próximos Lemas, se faz necessário a aplicação de $T_\beta(1)$. Como sabemos, a aplicação $T_\beta$ possui como domínio o intervalo $[0, 1)$, no entanto, em decorrência do Corolário 4, temos que quando a $\beta$-expansão de $\beta$ é finita ou pré-periódica, $\beta$ é um número algébrico. Nisto se $\beta$ possui uma $\beta$-expansão finita, sendo está

$$\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + ... + \frac{a_n}{\beta^n},$$

a equação

$$z^{n+1} - (a_0 z^n + ... + a_n) = 0. \tag{5.19}$$

é a equação característica de $\beta$ finito.

Se $\beta$ possui uma $\beta$-expansão pré-periódica, sendo está

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\beta^k},$$

a equação

$$z^{n+m} - (a_0 z^{n+m-1} + \cdots + a_{n+m-1}) = z^n - (a_0 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1})$$

é a equação característica de $\beta$ pré-periódica.

Decorre da Definição 4.1 que se $\beta > 1$, então $x = 1$ possui uma $\beta$-expansão

$$1 = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_n}{\beta^n}.$$

Expandindo o conceito de $T_\beta$ para $T_\beta(1) = \beta \cdot 1 \bmod 1$.

Definindo $T(1) = \beta - a_0$, decorre que

$$T_\beta^2(1) = T_\beta(\beta - a_0) = \beta(\beta - a_0) - \lfloor \beta(\beta - a_0) \rfloor = \beta(\beta - a_0) - a_1 = \beta^2 - a_0\beta - a_1.$$

Por indução, encontramos que $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$T_\beta^k(1) = \beta^k - a_0\beta^{k-1} - a_1\beta^{k-2} - \ldots - a_{k-1}.$$

De fato,

para $k = 1$ é evidente.

Se $T_\beta^k(1) = \beta^k - a_0\beta^{k-1} - a_1\beta^{k-2} - \ldots - a_{k-1}$, então

$$\begin{aligned} T_\beta^{k+1}(1) &= \beta(\beta^k - a_0\beta^{k-1} - \ldots - a_{k-1}) - a_k \\ &= \beta^{k+1} - a_0\beta^k - \ldots - a_{k-1}\beta - a_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $T_\beta^{n+1}(1) = \beta^{k+1} - a_0\beta^k - \ldots - a_{k-1}\beta - a_k = 0$.

**Lema 5.2.** *Se $\beta$ é um $\beta$-número com expansão finita com equação característica*

$$z^{n+m} - (\epsilon_0 z^{n+m-1} + \cdots + \epsilon_{n+m-1}) = 0$$

*os conjugados $\beta_1, ..., \beta_{n+m-1}$ de $\beta$ em relação a equação característica, satisfaz*

$$z^{n+m-1} + T_\beta(1) z^{n+m-2} + \cdots + T_\beta^{n+m-1}(1) = 0 \tag{5.20}$$

*Demonstração.* A demonstração é obtida a partir de operações algébricas de (5.20).

Multiplicando (5.20) por $(z - \beta)$, obtemos

$$z^{n+m} - z^{n+m-1}\beta + T_\beta(1) z^{n+m-1} - T_\beta(1) z^{n+m-2}\beta + \cdots + T_\beta^{n+m-1} z - T_\beta^{n+m-1}\beta = 0$$

Fatorando os termos em função dos $z^{n+m-p}$, obtemos

$$z^{n+m}-z^{n+m-1}(\beta-T_\beta(1))-z^{n+m-2}(T_\beta(1)\beta-T_\beta^2(1))-\ldots-z(T_\beta^{n+m-2}(1)\beta-T_\beta^{n+m-1}(1))-T_\beta^{n+m-1}(1)\beta=0. \tag{5.21}$$

Sendo assim, em (5.21) usando a $T_\beta^n(1)$, temos

$$z^{n+m}-z^{n+m-1}(\beta-(\beta-a_0))-z^{n+m-2}((\beta-a_0)\beta-(\beta^2-a_0\beta-a_1))-\ldots-(\beta^{n+m-2}-\ldots-\epsilon_{n+m-1})\beta=0. \tag{5.22}$$

Consequentemente em (5.22), obtemos

$$z^{n+m}-(\epsilon_0 z^{n+m-1}+\cdots+\epsilon_{n+m-1})=0$$

□

**Lema 5.3.** *Se $\beta$ é um $\beta$-número com expansão pré periódica com equação característica*

$$z^{n+m}-(\epsilon_0 z^{n+m-1}+\cdots+\epsilon_{n+m-1})=z^n-(\epsilon_0 z^{n-1}+\cdots+\epsilon_{n-1})$$

*os conjugados $\beta_1,...,\beta_{n+m-1}$ de $\beta$ em relação a equação característica, satisfaz*

$$z^{n+m-1}+T_\beta(1)z^{n+m-2}+\cdots+T_\beta^{n+m-1}(1)=z^{n-1}+T_\beta(1)z^{n-2}+\cdots+T_\beta^{n-1}(1). \tag{5.23}$$

*Demonstração.* A demonstração é obtida a partir de operações algébricas de (5.23).

Multiplicando (5.23) por $(z-\beta)$, obtemos

$$z^{n+m}-z^{n+m-1}\beta+T_\beta(1)z^{n+m-1}+\ldots+T_\beta^{n+m-1}z-T_\beta^{n+m-1}\beta=z^n-z\beta+\ldots+T_\beta^{n-1}(1)z-T_\beta^{n-1}\beta. \tag{5.24}$$

Note que o lado esquerdo da igualdade de (5.24) é o mesmo de (5.21), portanto, em (5.24) temos

$$z^{n+m}-(\epsilon_0 z^{n+m-1}+\cdots+\epsilon_{n+m-1})=z^n-z\beta+\ldots+z(\beta^{n-2}-\ldots-\epsilon_{n-1})-(\beta^{n-2}-\ldots-\epsilon_{n-1})\beta.$$

Consequentemente,

$$z^{n+m}-(\epsilon_0 z^{n+m-1}+\cdots+\epsilon_{n+m-1})=z^n-(\epsilon_0 z^{n-1}+\cdots+\epsilon_{n-1})$$

□

**Teorema 4.2.** *Os conjugados de $\beta$-expansão em relação a equação característica, possuem valor absoluto menor que 2.*

*Demonstração.* Decorre do Lema 5.2 e do Lema 5.3 que os conjugados de $\beta$ em relação a sua equação característica satisfazem para o caso $\beta$-expansão finita

$$z^{n+m-1} + T_\beta(1)z^{n+m-2} + \cdots + T_\beta^{n+m-1}(1) = 0,$$

e para o caso $\beta$-expansão pré-periódica

$$z^{n+m-1} + T_\beta(1)z^{n+m-2} + \cdots + T_\beta^{n+m-1}(1) = z^{n-1} + T_\beta(1)z^{n-2} + \cdots + T_\beta^{n-1}(1).$$

Se $|z| > 1$,

$$(|z|^m - 1|)|z^{n-1} + T(1)z^{n-2} + \cdots + T^{n-1}(1)| < |z|^{m-1} + \cdots + 1, \tag{5.25}$$

note que multiplicando (5.25) por $\dfrac{1}{|z|^m - 1}$ obtemos ,

$$|z^{n-1} + T_\beta(1)z^{n-2} + \cdots + T_\beta^{n-1}(1)| < \frac{|z|^{m-1} + \cdots + 1}{|z| - 1},$$

onde o termo esquerdo da desigualdade forma uma série geométrica de razão $\frac{1}{|z|^m}$.

Assim

$$|z^{n-1} + T_\beta(1)z^{n-2} + \cdots + T_\beta^{n-1}(1)| < \frac{1}{|z| - 1}. \tag{5.26}$$

Deste modo, fazendo manipulações algébricas em (5.26), obtemos

$$|z|^{n-1} < \frac{1}{|z| - 1} + |T_\beta(1)z^{n-2} + \cdots + T_\beta^{n-1}| \leq \frac{1}{|z| - 1} + \frac{|z|^{n-1} - 1}{|z| - 1} = \frac{|z|^{n-1}}{|z| - 1}. \tag{5.27}$$

Logo em (5.27)

$$|z|^{n-1} < \frac{|z|^{n-1}}{|z| - 1} \implies 1 < \frac{1}{|z| - 1} \implies |z| - 1 < 1 \implies |z| < 2.$$

Portanto, $|z| < 2$, como queríamos. □

# 5 Dinâmica Simbólica

Esta seção é baseada em [1]. Um conjunto finito não-vazio $\mathcal{A}$ é chamado **alfabeto**. Uma **palavra** é uma sequência finita (ou infinita) de elementos de $\mathcal{A}$.

**Definição 5.1.** Uma **linguagem** em $\mathcal{A}$ é um conjunto de palavras finitas.

**Definição 5.2.** Um **código** em $\mathcal{A}$ é uma linguagem $X$ tal que para qualquer igualdade

$$x_1 x_2 \ldots x_k = y_1 y_2 \ldots y_n,$$

com $x_i, y_j \in X$, tem-se $n = k$, $x_i = y_i$, para cada $1 \leq i \leq n$.

Considere o conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dotado da topologia produto, e seja $\sigma$ o shift em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$: $\sigma(x_n) = x_{n+1}$. $\sigma$ é uma aplicação contínua e injetora em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, também é usual se considerar o shift $\sigma$, mas neste caso ele não é uma aplicação injetora.

**Definição 5.3.** Um sistema dinâmico simbólico (subshift) é um subconjunto fechado de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ invariante sob $\sigma$.

**Proposição 5.1.** *Um subshift $S$ é completamente definido pelo conjunto $L(S)$ de palavras permitidas: aquelas que aparecem como $x_k \ldots x_{k+n-1}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e algum $n \in \mathbb{N}$, $x \in S$.*

**Definição 5.4.** Um subshift $S$ é transitivo se

$$\forall u, v \in L(S), \exists w \in L(S) \text{ tal que } uwv \in L(S).$$

**Definição 5.5.** Um subshift do tipo finito $S$ é o subshift definido pela proibição de um conjunto finito de palavras.

# 6 Classes de Números

O polinômio característico de um número algébrico é o polinômio em $\mathbb{Z}$ com menor grau de que esse número é uma raiz. Seus conjugados são as outras raízes de seu polinômio característico.

**Definição 6.1.** Um inteiro algébrico é um número algébrico, cujo o polinômio característico tem um termo de maior grau com coeficiente 1.

**Definição 6.2.** Um número de *Perron* é um número inteiro algébrico maior que 1, onde todos os seus conjugados têm valor absoluto menor que esse número.

**Definição 6.3.** Um número de *Salem*é um número de *Perron*, nos quais, todos os seus conjugados possuem valor absoluto menor ou igual a 1, com pelo menos um conjugado com valor absoluto 1.

# 7 Número de Pisot

**Definição 7.1** (Número de Pisot)**.** Seja $\alpha$ um inteiro algébrico, dizemos que $\alpha$ é de Pisot quando seu polinômio minimal sobre $\mathbb{Z}[x]$ tem uma raiz $\beta > 1$ e conjugados $|\beta'| < 1$.

*Exemplo* 7.1. Seja $\beta$ a raiz dominante do polinômio $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$. Então $\beta$ é um número de Pisot, $d(1, \beta) = .2102$, e a $\beta$ expansão de 6 é $6 = 20.210(00112)^{\omega}$.

Se $d(1,\beta) = .2102$ decorre que

$$1 = \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^4}.$$

Verificamos agora que a $\beta$-expansão de 6 é infinita.

De Frougny-Solomyak [2] $6 = 20.210(00112)^{\omega}$, ou seja,

$$6 = 2\beta + \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta^{6+5k}} + \frac{1}{\beta^{7+5k}} + \frac{2}{\beta^{8+5k}}\right) . \tag{5.28}$$

De (5.28) temos

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{2\beta^3 + 2\beta + 1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^8}(\beta^2 + \beta + 2) \cdot \frac{1}{1 - \beta^{-5}} \\ &= \frac{2\beta^3 + 2\beta + 1}{\beta^2} + \frac{\beta^2 + \beta + 2}{\beta^3(\beta^5 - 1)} \end{aligned}$$

Assim

$$6 = \frac{(2\beta^4 + 2\beta^2 + \beta)(\beta^5 - 1) + \beta^2 + \beta + 2}{\beta^3(\beta^5 - 1)} \tag{5.29}$$

Consequentemente de (5.29), obtemos

$$6\beta^8 - 6\beta^3 = 2\beta^9 + 2\beta^7 + \beta^6 - 2\beta^4 - 2\beta^2 - \beta + \beta^2 + \beta + 2$$

Logo,

$$2\beta^9 - 6\beta^8 + 2\beta^7 + \beta^6 - 2\beta^4 + 6\beta^3 - \beta^2 + 2 = 0.$$

Sendo assim, $\beta$ é raiz do polinômio $p_1(x) = 2x^9 - 6x^8 + 2x^7 + x^6 - 2x^4 + 6x^3 - x^2 - 2$.

Dividindo $p_1(x)$ por $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$, temos

$$\frac{2x^9 - 6x^8 + 2x^7 + x^6 - 2x^4 + 6x^3 - x^2 - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x - 2} = (2x^6 - 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)$$

ou seja,

$$p_1(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x - 2)(2x^6 - 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)$$

Vejamos se $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ possui alguma raiz em comum a $2x^6 - 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$.

$$\frac{2x^6 - 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x - 2} = (2x^6 - 2x^4 - x^3 - 69x^2 + 30x - 54) + (70x^2 - 31x + 53)$$

Por conseguinte, temos que a divisão possui resto e assim $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ não é fator de $2x^6 - 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$.

Desta forma, temos a relação para $\beta$ raiz dominante do polinômio $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$, sendo este $\beta$ um número de Pisot.

*Exemplo* 7.2. Obtenha as $\beta$-expansões de 2, 4, e 7, sendo $\beta$ a raiz dominante do polinômio $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

*Demonstração.* Como a $d(1, \beta) = .2102$, disto, decorre que a $\beta$-expansão de 1 na base $\beta$ é finita, dada por

$$1 = \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^4}, \tag{5.30}$$

cujo o alfabeto é o conjunto $\mathcal{A}_\beta = \{0, 1, 2\}$, com $\lfloor \beta \rfloor = 2$. Sendo assim, podemos encontrar as $\beta$-expansões de 4 e 7.

$\beta$-expansão de 4:

Como $2 < \beta < 3$, temos $4 = \beta + 1 + x$. Seja $x_0 = 3 - \beta$.

$$x_1 = T_\beta(x_0) = \beta(3 - \beta) - \lfloor 3\beta - \beta^2 \rfloor \ .$$

Note que

$$\beta^3 - 3\beta^2 + 2\beta - 2 = 0 \implies (\beta - 3)\beta = \frac{2}{\beta} - 2 < -1.$$

Portanto $\lfloor 3\beta - \beta^2 \rfloor = \lfloor 2 - \frac{2}{\beta} \rfloor \geq 1$. Por outro lado, $1 - \frac{1}{\beta} < 1$ implica que $2 - \frac{2}{\beta} < 2$. Em resumo, $\lfloor \beta x_0 \rfloor = 1$ e $x_1 = 3\beta - \beta^2 - 1$.

Do mesmo modo, de $\beta x_1 = 3\beta^2 - \beta^3 - \beta = \beta - 2 < 1$, concluímos que $\lfloor \beta x_1 \rfloor = 0$ e $x_2 = \beta - 2$.

Agora

$$\beta x_2 = \beta^2 - 2\beta = \beta - 2 + \frac{2}{\beta} \ .$$

Por outro lado,

$$-2 < -2 + \frac{2}{\beta} < -1 \implies \beta - 2 < \beta - 2 + \frac{2}{\beta} < \beta - 1 \ ,$$

donde $\lfloor \beta x_2 \rfloor \leq 1$. Para ver que, de fato, $\lfloor \beta x_2 \rfloor = 1$, escrevemos

$$\begin{aligned} &\beta^3 + 2\beta = 3\beta^2 + 2 > 3\beta^2 \implies \beta^2 + 2 > 3\beta \\ \implies &\beta^2 - 2\beta + 2 > \beta \ \text{ e } \ \beta^3 - 2\beta^2 = \beta^2 - 2\beta + 2 \\ \implies &\beta^3 - 2\beta^2 > \beta \implies \beta^2 - 2\beta > 1 \ . \end{aligned}$$

Por fim, $x_3 = \beta^2 - 2\beta - 1$.

$$\beta x_3 = \beta^3 - 2\beta^2 - \beta = \beta^2 - 3\beta - 2 = \frac{2}{\beta} \ .$$

Com isto $\lfloor \beta x_3 \rfloor = 0$ e $\beta x_4 = 2$. Finalmente, $x_5 = 0$.

Deste modo, a órbita será dada por

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 - \beta \\ x_1 &= 3\beta - \beta^2 - 1 \\ x_2 &= \beta - 2 \\ x_3 &= \beta^2 - 2\beta - 1 \\ x_4 &= \beta^2 - 3\beta - 2 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$4 = \beta + 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^5}\ , \tag{5.31}$$

ou seja, $4 = 11.10102$.

Reescrevendo a equação (5.31), temos que

$$4 = \frac{\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^2 + 2}{\beta^5},$$

isto é,

$$\beta^6 - 3\beta^5 + 4\beta^4 + \beta^2 + 2 = 0$$

Sendo assim, $\beta$ é raiz do polinômio $p(x) = x^6 - 3x^5 + 4x^4 + x^2 + 2$. De fato, ao dividirmos $x^6 - 3x^5 + 4x^4 + x^2 + 2 = 0$ por $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ temos

$$\frac{x^6 - 3x^5 + 4x^4 + x^2 + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x - 2} = (x^3 - x - 1).$$

Portanto, encontramos que $p(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x - 2) \cdot (x^3 - x - 1)$.

$\beta$-expansão de 7:

Podemos encontrar a $\beta$-expansão utilizando a *expansão gulosa*

Como $7 > \beta^2$, temos que $7 = \beta^2 + x_0$, com $0 < x_0 < 1,$.

Assim, $\beta x_0 = 7\beta - \beta^3$, com $\lfloor \beta x_0 \rfloor = 1$ e deste modo, $x_1 = 7\beta - (3\beta^2 - 2\beta + 2) - 1 = 9\beta - 3\beta^2 - 3$.

Com isso, repetindo o processo e usando o fato de $\beta^3 = 3\beta^2 - 2\beta + 2$, encontramos os seguintes resultados:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 9\beta - 3\beta^2 - 3 & & \\
&\beta x_1 = 3\beta - 6 & & \lfloor \beta x_1 \rfloor = 1 \\
&x_2 = 3\beta - 7 & & \\
&\beta x_2 = 3\beta^2 - 7\beta - 1 & & \lfloor \beta x_2 \rfloor = 1 \\
&x_3 = 3\beta^2 - 7\beta - 1 & & \\
&\beta x_3 = 2\beta^2 - 7\beta + 6 & & \lfloor \beta x_3 \rfloor = 1 \\
&x_4 = 2\beta^2 - 7\beta + 5 & & \\
&\beta x_4 = -\beta^2 + \beta + 4 & & \lfloor \beta x_4 \rfloor = 0 \\
&x_5 = -\beta^2 + \beta + 4 & & \\
&\beta x_5 = -2\beta^2 + 6\beta - 2 & & \lfloor \beta x_5 \rfloor = 0 \\
&x_6 = -2\beta^2 + 6\beta - 2 & & \\
&\beta x_6 = 2\beta^2 - 4 & & \lfloor \beta x_6 \rfloor = 1 \\
&x_7 = 2\beta^2 - 5 & & \\
&\beta x_7 = 2\beta^2 - 5\beta & & \lfloor \beta x_7 \rfloor = 0 \\
&x_8 = 2\beta^2 - 5\beta & & \\
&\beta x_8 = 2\beta^2 - 7\beta + 6 & & \lfloor \beta x_8 \rfloor = 0 \\
&x_9 = \beta^2 - 4\beta + 4 & & \\
&\beta x_9 = -\beta^2 + 2\beta + 2 & & \lfloor \beta x_9 \rfloor = 0 \\
&x_{10} = -\beta^2 + 2\beta + 2 & & \\
&\beta x_{10} = -\beta^2 + 4\beta - 2 & & \lfloor \beta x_{10} \rfloor = 1 \\
&x_{11} = -\beta^2 + 4\beta - 3 & & \\
&\beta x_{11} = \beta^2 - \beta - 2 & & \lfloor \beta x_{11} \rfloor = 1 \\
&x_{12} = \beta^2 - \beta - 3 & & \\
&\beta x_{12} = 2\beta^2 - 5\beta + 2 & & \lfloor \beta x_{12} \rfloor = 2 \\
&x_{13} = 2\beta^2 - 5\beta = x_8 & &
\end{aligned}
$$

Note que $x_{13} = x_8$, e disto podemos encontrar um padrão, pois dos próximos termos, temos

$\lfloor \beta x_{13} \rfloor = \lfloor \beta x_{14} \rfloor = \lfloor \beta x_9 \rfloor = 0$, $\lfloor \beta x_{15} \rfloor = \lfloor \beta x_{16} \rfloor 1 \lfloor \beta x_{17} \rfloor = \lfloor \beta x_{10} \rfloor = 1$, $\lfloor \beta x_{18} \rfloor = 2 = \lfloor \beta x_{12} \rfloor$.

Com isso, podemos escrever 7 como

$$7 = \beta^2 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^7} + \frac{1}{\beta^{11}} + \frac{1}{\beta^{12}} + \frac{2}{\beta^{13}} + \frac{1}{\beta^{16}} + \frac{1}{\beta^{17}} + \frac{2}{\beta^{18}} + \ldots$$

Por fim, pela recorrência a partir de $x_{13}$, obtemos

$$7 = \beta^2 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^7} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta^{11+5k}} + \frac{1}{\beta^{12+5k}} + \frac{1}{\beta^{13+5k}}\right).$$

Disto segue que

$$7 = 100.11110010(00112)^{\omega}$$

Vamos agora obter o polinômio desta $\beta$-expansão.

Como $\beta$ é raiz do polinômio $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$, podemos escrever 7 em função de $x$, isto é,

$$7 = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^7} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x^{11+5k}} + \frac{1}{x^{12+5k}} + \frac{1}{x^{13+5k}}\right). \tag{5.32}$$

Manipulando algebricamente (5.32), temos

$$\begin{aligned}
7 &= x^2 + \left(\frac{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1}{x^7}\right) + \left(\frac{x^2 + x + 2}{x^{13} - x^8}\right) \\
&= \frac{x^{15} - x^{10} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^6 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x + x^2 + x + 2}{x^{13} - x^8} \\
&= \frac{x^{15} + x^{12} + x^{11} + x^9 - x^7 - x^5 - x^4 + x^2 + 2}{x^{13} - x^8}
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$x^{15} - 7x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^9 + 7x^8 - x^7 - x^5 - x^4 + x^2 + 2 = 0.$$

Sendo assim, $\beta$ é raiz do polinômio $p(x) = x^{15} - 7x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^9 + 7x^8 - x^7 - x^5 - x^4 + x^2 + 2$. De fato, ao dividirmos $p(x) = x^{15} - 7x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^9 + 7x^8 - x^7 - x^5 - x^4 + x^2 + 2$ por $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ temos $x^{12} + 3x^{11} - 3x^9 - 2x^8 - x^6 + x^4 + x^3 - x - 1$.

Portanto, $p(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x - 2) \cdot (x^{12} + 3x^{11} - 3x^9 - 2x^8 - x^6 + x^4 + x^3 - x - 1)$.

$\square$

# 8 A soma posicional para $\beta$-expansões

Vimos que se $\beta$ é raiz dominante do polinômio $m(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$, então a $\beta$-expansão de 1 é 2102.

Segundo a teoria desenvolvida por Parry, a transformação $T_\beta$ é conjugada a um *subshift* no alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, [\beta]\}$. Dado $x \in [0, 1)$, sua $\beta$-expansão é uma palavra em $\mathcal{A}_\beta$ em que, entre outras propriedades, não ocorre uma palavra que seja maior, na ordem lexicográfica, que qualquer **subpalavra** (fator) de 2102. Em particular, não ocorrem 22 e 211 nas $\beta$-expansões para este *subshift*.

Exceto pela expansão de 1, as $\beta$-expansões seguem o algoritmo guloso. Vamos obter a $\beta$-expansão de 7 a partir da soma posicional das $\beta$-expansões de 6 e de 1.

$$6 = 20.210(00112)^\omega$$
$$1 = 0.2102$$

Para somar à direita do ponto, vemos que $2+2$ não teria representante em $\mathcal{A}_\beta = \{0, 1, 2\}$. Como uma das expansões é infinita, estendemos a expansão de 1, acrescentando infinitos zeros à direita. O primeiro problema ocorre no $2 + 2$. Veremos que este terá efeito tanto à esquerda, quanto à direita da posição em que ocorre.

Ao efetuar a operação de *subir* 1 na posição à esquerda de onde ocorre o $2+2$, ficamos com
$$7 = 21.210(00112)^\omega \ .$$
Esta não é uma $\beta$-expansão, pois a palavra 212 é maior do que a palavra 210. Consequentemente, temos que subir 1 à esquerda da palavra 212, obtendo

$$7 = 100.2(-1)0(00112)^\omega \ .$$

Repare que o 1 que sobe carrega toda a palavra 2102:

$$21.21 = 21.02 + 0.2 - 0.01 \ .$$

Agora
$$\frac{2}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{2\beta - 1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta} + \frac{\beta - 1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{\beta - 2}{\beta^2} \ .$$
Expandindo $\beta - 2$, temos $\beta(\beta - 2) = \beta - 2 + \frac{2}{\beta}$, donde $[\beta^2 - 2\beta] = 1$. Por enquanto

$$7 = 100.111 + 0.000(00112)^\omega + \frac{\beta^2 - 3\beta + 2}{\beta^4} \ .$$

Note que $\beta^2 - 3\beta + 2 = \frac{2}{\beta} < 1$. Este algarismo 2 entraria na parte periódica da expansão:

$$7 = 100.111(02112)(00112)^\omega \ .$$

Mas a palavra $211 > 210$. Fazendo o sobe 1 novamente, temos

$$2112 = 2102 + 0010 \ ,$$

e finalmente

$$7 = 100.11110010(00112)^\omega \ .$$

Esta é a expansão gulosa de 7.

A expansão de 8 é tranquila:

$$8 = 101.11110010(00112)^\omega \ .$$

Mas na expansão de 9, temos a ocorrência de 2.11 que é proibido.

Assim, escrevendo as expansões intermediárias, ainda que não sejam $\beta$-expansões:

$$\begin{aligned}
9 &= 102.11110010(00112)^\omega \\
&= 110.01(-1)10010(00112)^\omega \\
\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4} &= \frac{1}{\beta^3} + \frac{\beta - 2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4} \\
&= \frac{1}{\beta^3} + \frac{\beta^2 - 2\beta + 1}{\beta^4} \\
&= \frac{1}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^4} + \frac{\beta^2 - 2\beta - 1}{\beta^4} = \frac{1}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^4} + \frac{\beta^2 - 3\beta + 2}{\beta^5} \\
&= \frac{1}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^4} + \frac{2}{\beta^6} \\
9 &= 110.00120210(00112)^\omega
\end{aligned}$$

Voltando a 2, 3, 4 e 5:

$$
\begin{aligned}
2 &= 2 = 1.2102 \\
3 &= 2.2102 = 10.11(-2)2 \\
\frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^4} &= \frac{\beta - 2}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^4} \\
&= \frac{1}{\beta^4} + \frac{\beta^2 - 2\beta - 1}{\beta^4} + \frac{2}{\beta^4} \\
&= \frac{3}{\beta^4} + \frac{2}{\beta^6} = \frac{1}{\beta^3} + \frac{3-\beta}{\beta^4} + \frac{2}{\beta^6} = \frac{1}{\beta^3} + \frac{3\beta^2 - \beta^3 + 2}{\beta^6} \\
&= \frac{1}{\beta^3} + \frac{2}{\beta^5} \\
3 &= 10.10102 \\
4 &= 11.10102 \\
5 &= 12.10102
\end{aligned}
$$

Agora vamos ver como se chega à $\beta$-expansão de 6 fazendo a soma posicional $5+1$. Lembrando que podemos passar por expansões que não são $\beta$-expansões, temos

$$
\begin{aligned}
5 + 1 &= 13.10102 = 21.00(-1)02 \\
&= 20.21(-1)22 = 20.210010(-2)
\end{aligned}
$$

Agora vamos estudar $\frac{1}{\beta^5} - \frac{2}{\beta^7}$, que aparece na expansão de 6. Observe o seguinte

$$
\begin{aligned}
\left[\beta - \frac{2}{\beta}\right] = 1 \Rightarrow \frac{1}{\beta^5} - \frac{2}{\beta^7} &= \frac{1}{\beta^6} + \frac{\beta^2 - 2 - \beta}{\beta^7} \\
\frac{1}{\beta^5} - \frac{2}{\beta^7} &= \frac{1}{\beta^6} + \frac{1}{\beta^7} + \frac{\beta^2 - 3 - \beta}{\beta^7} \\
&= \frac{1}{\beta^6} + \frac{1}{\beta^7} + \frac{\beta^3 - 3\beta - \beta^2}{\beta^8} \\
\beta^3 - \beta^2 - 3\beta &= 2\beta^2 - 5\beta + 2 \\
\frac{1}{\beta^6} - \frac{2}{\beta^7} &= \frac{1}{\beta^6} + \frac{1}{\beta^7} + \frac{2}{\beta^8} + \frac{2\beta^2 - 5\beta}{\beta^8}
\end{aligned}
$$

Agora $2\beta^2 - 5\beta < 1$ é pequeno e

$$\begin{aligned}
&2\beta^3 - 5\beta^2 = \beta^2 - 4\beta + 4 \\
&\beta^3 - 4\beta^2 + 4\beta = -\beta^2 + 2\beta + 2 \\
&-\beta^3 + 2\beta^2 + 2\beta = -\beta^2 + 4\beta - 2
\end{aligned}$$

A parte inteira do último termo é 1. O denominador tem a potência $\beta^{11}$. Observe, por fim, que

$$\beta(-\beta^2 + 4\beta - 3) = -\beta^3 + 4\beta^2 - 3\beta = \beta^2 - \beta - 2\ ,$$

usando na última igualdade a equação $\beta^3 - 3\beta^2 + 2\beta - 2 = 0$. Para concluir, basta notar que o polinômio $\beta^2 - \beta - 2$, numerador a ser dividido por $\beta^{12}$, é o mesmo que aparece como numerador que foi dividido por $\beta^7$.

# 9 Representação dos números

Seja $\beta > 1 \in \mathbb{R}$. A representação na base $\beta$ (ou a $\beta$-representação) de um número $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ é a sequência infinita $(x_i)_{k \geq i \geq -\infty}$, com $x_i \geq 0$, tal que

$$x = x_k\beta^k + x_{k-1}\beta^{k-1} + \ldots + x_1\beta + x_0 + \frac{x_{-1}}{\beta} + \frac{x_{-2}}{\beta^2} + \ldots \tag{5.33}$$

para um certo $k \geq \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Denotamos a $\beta$-representação por

$$x = x_k x_{k-1} \ldots x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \ldots$$

A $\beta$-representação particular é chamada de $\beta$-expansão, onde ela pode ser computada pelo *algoritmo "guloso"*.

Para o algoritmo guloso, considere $y \in \mathbb{R}$ e sejam $\lfloor y \rfloor$, $\big(y\big)$ as notações para a parte inteira e parte fracionaria de $y$, respectivamente.

**Algoritmo Guloso**

Dado $x > 0$, seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta^k \leq x < \beta^{k+1}$. Seja $x_k = \left\lfloor \dfrac{x}{\beta^k} \right\rfloor$, e $r_k = \left(\dfrac{x}{\beta^k}\right)$. Então para $k > i \geq -\infty$, defina $x_i = \lfloor \beta r_{i+1} \rfloor$ e $r_i = \big(\beta r_{i+1}\big)$. Deste modo, obtemos uma expansão

$$x = x_k\beta^k + x_{k-1}\beta^{k-1} + \ldots . \tag{5.34}$$

Se $k < 0$, então $x < 1$. Com isto, definimos $x_0 = x_{-1} = \ldots = x_{k+1} = 0$.

Se uma expansão termina em um número infinito de zeros, dizemos que ela é finita, e os zeros finais são omitidos.

Os dígitos $x_i$ obtidos por este algoritmo são números inteiros, que pertencem ao conjunto $\mathcal{A} = \{0, \dots, \beta - 1\}$ se $\beta$ é inteiro, ou o conjunto $\mathcal{A} = \{0, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$ se $\beta$ não é inteiro.

Para $x < 1$, a expansão definida em (5.34) coincide com a $\beta$-expansão de Rényi, que pode ser definida pela aplicação

$$\begin{aligned} T_\beta : [0,1) &\to [0,1) \\ x &\mapsto \beta x - \lfloor \beta x \rfloor \end{aligned}$$

A $\beta$-expansão de 1 é denotada por $d(1,\beta)$. Considere $t_1 = \lfloor \beta \rfloor$. Então $\beta - t_1 < 1$ e

$$d(1,\beta) = .t_1 t_2 \dots, \quad t_k = \lfloor \beta T_\beta^{k-1}(1) \rfloor,$$

em que interpretamos $T_\beta^0(1) = 1$ (aplicação identidade) e $T_\beta(1) = \beta - \lfloor \beta \rfloor$.

Seja $\mathcal{D}_\beta$ o conjunto de todas as $\beta$-expansões, onde a $\beta$-expansão é uma sequência no alfabeto, e seja $d : [0,1] \to \mathcal{D}_\beta \cup \{d(1,\beta)\}$ a função que leva $x < 1$ na sua $\beta$-expansão, e 1 associa a $d(1,\beta)$.

Note que, dividindo (5.33) por $\beta^{k+1}$, temos que

$$\frac{x}{\beta^{k+1}} = \frac{x_k}{\beta} + \frac{x_{k-1}}{\beta^2} + \dots + \frac{x_1}{\beta^k} + \frac{x_0}{\beta^{k+1}} + \cdots, \tag{5.35}$$

como $\beta^k \leq x < \beta^{k+1}$, segue que $\dfrac{1}{\beta^k} \leq \dfrac{x}{\beta^{k+1}} < 1$ e deste modo, $\dfrac{x}{\beta^{k+1}} = .x_k \dots x_0 x_1 \dots$ pertence a $\mathcal{D}_\beta$.

O conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ é dotado da ordem lexicográfica ($<_{lex}$). Se $\mathcal{A}$ tem a métrica discreta, a topologia produto o torna $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ conjunto compacto. Em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ é natural estudar-se a aplicação *shift*: dado $x = x_1 x_2 \cdots$, define-se $\sigma(x) = x_2 x_3 \cdots$. Ou ainda, $y = \sigma(x)$ é a sequência dada por $y_n = x_{n+1}$, $n \geq 1$.

**Proposição 9.1.** *$T_\beta : [0,1) \to [0,1)$ e $\sigma : \mathcal{D}_\beta \to \mathcal{D}_\beta$ são aplicações conjugadas.*

O Teorema 9.1 caracteriza o conjunto de $\beta$-expansões admissíveis.

**Teorema 9.1.** *Seja $\beta > 1$, com $d(1,\beta) = t_1 t_2 \dots$ e seja $s$ uma sequência infinita dos inteiros positivos.*

*(i) Se $d(1,\beta)$ é infinita, a condição*

$$\forall p \geq 0, \quad \sigma^p(s) <_{lex} d(1,\beta),$$

*é necessária e suficiente para $s$ pertencer a $\mathcal{D}_\beta$.*

*(ii) Se* $d(1,\beta) = t_1 \dots t_{n-1}t_n$ *é finita , então* $s \in \mathcal{D}_\beta$ *se, e só se,*

$$\forall p \geq 0, \quad \sigma^p(s) <_{lex} d^*(1,\beta) = (t_1 \dots t_{n-1}(t_n - 1))^\omega \ .$$

# 10 Expansões finitas

Seja $Per\,(\beta)$ o conjunto de todos os números $x \geq 0$ que possuem $\beta$ expansões pré periódicas. O conjunto $Per\,(\beta) \cap [0,1)$ é o conjunto de pontos cujas órbitas sobre $T_\beta$ são finitas.

**Definição 10.1.** Definimos por $\mathbb{Q}(\beta)$ o menor corpo que contém o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ e $\beta > 1$.

De Bertrand e Schmidt, é provado o seguinte Teorema.

**Teorema 10.1.** *Se $\beta$ é um número de Pisot, então $Per\,(\beta) = \mathbb{Q}(\beta) \cap \mathbb{R}_+$.*

Por outro lado, Schmidt provou:

**Teorema 10.2.** *Se $\mathbb{Q} \cap [0,1) \subset Per\,(\beta)$, então $\beta$ é um número de Pisot, ou um número de Salem.*

Seja $Fin(\beta)$ o conjunto dos $x \geq$ que possuem $\beta$ expansão finita. Note que $Fin(\beta) \cap [0,1)$, consiste nos pontos cujas órbitas sob $T_\beta$ termina em zero.

Para $\lambda > 0$, denotamos por $\mathbb{Z}[\lambda]$ o anel de polinômios em $\lambda$ com coeficientes inteiros, $\mathbb{Z}_+[\lambda]$ o cone de polinômios com termos não negativos, e o conjunto $(\mathbb{Z}[\lambda])_+ = \mathbb{Z}[\lambda] \cap \mathbb{R}_+$.

Se $\beta > 1$ é um inteiro, então $Fin(\beta) = (\mathbb{Z}[\beta^{-1}])_+$.

## 10.1 Para quais $\beta$ todos os inteiros possuem $\beta$-expansões finitas?

Considere as seguintes condição de $\beta$:

1. $\mathbb{Z}_+ \subset Fin\,(\beta)$;
2. $\mathbb{Z}_+[\beta^{-1}] \subset Fin\,(\beta)$;
3. $(\mathbb{Z}[\beta^{-1}])_+ \subset Fin\,(\beta)$.

A condição (1) implica que $\beta$ é um inteiro algébrico, considerando a $\beta$-expansão de $x = \lfloor \beta \rfloor + 1$. Se $\beta$ é um inteiro algébrico, então $Fin\,(\beta) \subset \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}] = \mathbb{Z}[\beta^{-1}]$, assim, a condição (3) significa que $Fin\,(\beta) = (\mathbb{Z}[\beta^{-1})_+])$.

**Lema 5.4.** *Se $\mathbb{Z}_+ \subset Fin\,(\beta)$, então $\beta$ é Pisot ou Salem.*

*Demonstração.* Se $\gamma$ é um conjugado de Galois de $\beta$ e $|\gamma| > 1$, seja $\eta = \max|\beta^{-1}, |\gamma^{-1}$ e $C = 2\lfloor\beta\rfloor\eta(1-\eta)^{-1}$. $\exists m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $|\beta^m - \gamma^m| > C$. Tome $x = \lfloor\beta^m + 1\rfloor$. Como $x$ tem uma $\beta$ expansão finita

$$x = \beta^m + \epsilon_1\beta^{-1} + \cdots + \epsilon_k\beta^{-k}.$$

Mas está pode ser vista como equação com coeficientes inteiros que $\beta$ satisfaz. Neste caso, $\gamma$ também a satisfaz e

$$x = \gamma^m + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i\gamma^{-i}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} |\beta^m - \gamma^m| &\leq \sum_{i=1}^{k} |\epsilon_i|(|\gamma^{-i}| + |\beta^{-i}|) \\ &\leq 2\lfloor\beta\rfloor\sum_{i=1}^{\infty}\eta^{+i} = 2\lfloor\beta\rfloor\frac{\eta}{1-\eta} = C. \end{aligned}$$

Absurdo. □

**Lema 5.5.** *Se $(\mathbb{Z}[\beta^{-1}])_+ \subset Fin\,(\beta)$, então $\beta$ é Pisot.*

*Demonstração.* Note que $\mathbb{Z}_+ \subset (\mathbb{Z}[\beta^{-1}])_+ \subset Fin\,(\beta)$, portanto $\beta$ é um inteiro algébrico. Com isto $\beta \in \mathbb{Z}[\beta^{-1}]$ e

$$\beta^m = k_1\beta^{m-1} + \cdots + k_m, \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

Agora $\beta - \lfloor\beta\rfloor > 0$ e $\beta - \lfloor\beta\rfloor \in Fin\,(\beta)$.

Considere a $\beta$-expansão de $\beta - \lfloor\beta\rfloor$:

$$\beta - \lfloor\beta\rfloor = t_1\beta^{-1} + \cdots + t_n\beta^{-n}, \quad t_j \in \{0, \lfloor\beta\rfloor\}.$$

Assim,

$$\beta^{n+1} = \lfloor\beta\rfloor\beta^n + t_1\beta^{m-1} + \cdots + t_n, \quad t_n \neq 0.$$

Pela unicidade do polinômio mônico do qual $\beta$ é raiz, $n + 1 = m$

$$k_1 = \lfloor\beta\rfloor, k_j = t_{j-1} \geq 0, \quad \forall j.$$

Segue que $\beta$ não tem conjugados de Galois positivos, o que exclui a possibilidade de ele ser Salem. □

Considere $\lambda$ uma raiz de um polinômio $p(\lambda)$. Se $\lambda$ é um inteiro algébrico,

$$p(\lambda) = \lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - \cdots - c_k \ ,$$

em que $c_i \in \mathbb{Z}$. A **matriz companheira** de $p(\lambda)$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{k-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_1 \end{pmatrix} .$$

Uma matriz $A$ com entradas inteiras não-negativas é dita primitiva se existe $k > 0$ tal que $A^k$ tem todas as entradas positivas. Matrizes primitivas possuem um autovalor positivo $r$, estritamente maior do que 1, tal que o autovetor correspondente tem todas as componentes positivas. Além disto, $r$ é um autovalor simples e todos os demais autovalores de $A$ têm valor absoluto menor do que $r$. Tal autovalor é chamado autovalor de Perron, pois a teoria de matrizes primitivas foi desenvolvida inicialmente por Oskar Perron.

**Lema 5.6.** *Seja $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. $(\mathbb{Z}[\lambda^{-1}])_+ = \mathbb{Z}_+[\lambda^{-1}]$ se, e somente se, $\lambda$ é um autovalor de Perron de uma matriz companheira primitiva.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Se $\lambda < 1$, então $\mathbb{Z}_+[\lambda^{-1}] \cap (0,1) = \varnothing$, mas $0 < \lambda^{-1} - [\lambda^{-1}] < 1$ e $\lambda^{-1} - [\lambda^{-1}] \in (\mathbb{Z}[\lambda^{-1}])_+$. Portanto $\lambda > 1$.

$(\mathbb{Z}[\lambda^{-1}])_+ = \mathbb{Z}_+[\lambda^{-1}]$ implica, em particular, que $\exists k > 0$ tal que

$$1 = c_1\lambda^{-1} + c_2\lambda^{-2} + \cdots + c_k\lambda^{-k} \tag{5.36}$$

com $c_i \in \mathbb{Z}_+,\ c_k > 0,\ k \geq 1$. Deste modo, $\lambda$ é um autovalor de uma matriz companheira $A$ com polinômio característico:

$$p(x) = x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_k \ ,$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & c_{k-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_1 \end{pmatrix}$$

Prova-se que $A^k > 0$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\lambda$ é um autovalor de Perron da matriz primitiva:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{k-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

com $a_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$.

O polinômio característico de $M$, do qual $\lambda > 0$ é raiz, é

$$p_k(u) = (-u)^k (1 - \sum_{i=1}^{k} a_i u^{-i}) \ .$$

Dado $x \in (\mathbb{Z}[\lambda^{-1}])_+$, podemos usar relação de recorrência:

$$\lambda^r = a_1 \lambda^{r-1} + a_2 \lambda^{r-2} + \cdots + a_k \lambda^{r-k}, \quad r \in \mathbb{Z},$$

que decorre de $p_k(\lambda) = 0$, para expressar $x$ como uma combinação linear inteira de $k$ potências consecutivas de $\lambda$.

Por exemplo, se $x = \lambda^{-1} - 2\lambda^{-5}$ e

$$1 = 3\lambda^{-1} + \lambda^{-3} + \lambda^{-4} \ ,$$

então

$$x = 3\lambda^{-2} + \lambda^{-4} - \lambda^{-5} \ .$$

Observe que $\Lambda = [\lambda^{-k+1}, \dots, \lambda^{-1}, 1]$ satisfaz

$$\Lambda M = \lambda \Lambda \ ,$$

pois

$$a_k \lambda^{-k+1} + a_{k-1} \lambda^{-k+2} + \cdots + a_1 = \lambda \ .$$

Portanto existem $s \in \mathbb{N}$, e um vetor $B \in \mathbb{Z}^k$ tais que

$$x = \lambda^{-s} \Lambda \cdot B, \quad \Lambda = [\lambda^{-k+1}, \dots, \lambda^{-1}, 1].$$

Uma vez que $\Lambda$ é o autovetor de Perron à esquerda para $M$

$$x = \lambda^{-s-l} \Lambda \cdot M^l B. \tag{5.37}$$

Pela teoria de Perron-Frobenius, $\lambda^{-l}M^l$ converge para uma projeção sobre o autovetor de $M$ correspondente ao autovalor maximal $\lambda$. Sendo $v$ o autovetor de $M$ à direita, que tem $\lambda$ como autovalor (lembrando que $\lambda > 0$ é autovalor maximal), então

$$\lim_{l\to\infty} \frac{M^l}{\lambda^l} = \frac{v\Lambda}{\Lambda \cdot v} \ .$$

Com isto,

$$\lim_{l\to\infty} \lambda^{-l}M^l B = \frac{\Lambda \cdot B}{\Lambda \cdot v} v = \frac{x\lambda^s}{\Lambda \cdot v} v \ ,$$

Lembrando que $v$ tem todas as componentes positivas, concluímos que, para $l$ suficientemente grande, $M^l B = [d_i]_{i=1}^k > 0$ para $l$ suficientemente grande, isto é, existe $l$ tal que $M^l B$ é um vetor de inteiros positivos. Agora, em virtude de (5.37),

$$x = \sum_{i=1}^{k} d_i \lambda^{-s-l-k+i} \in \mathbb{Z}_+[\lambda^{-1}].$$

□

# 11 Sistemas de tipo finito

**Teorema 11.1.** *Seja $\beta$ a raiz positiva do polinômio $m(x) = x^m - a_1x^{m-1} - a_2x^{m-2} - \cdots - a_m$, $a_i \in \mathbb{Z}$, e $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m > 0$. Então $\beta$ é um número de Pisot, $d(1,\beta) = a_1a_2\cdots a_m$, e $Fin\,(\beta) = (\mathbb{Z}[\beta^{-1}])_+$.*

# 12 Teoria de Perron-Frobenius

Faremos uma exposição de resultados sobre o espectro de matrizes não-negativas.

Escrevemos $A \geq 0$ quando $A$ é uma matriz de entradas não-negativas. Escrevemos $A > 0$ quando todas as entradas de $A$ são positivas. Analogamente, escrevemos $C \geq D$ (ou $D \leq C$) quando $C - D \geq 0$. $C^+$ denota a matriz obtida de $C$ substituindo os valores de suas entradas por seus respectivos módulos.

**Definição 12.1.** Uma matriz quadrada não negativa é dita **primitiva** se existe um inteiro positivo $k$ tal que $T^k > 0$.

**Teorema 12.1** (Perron-Frobenius)**.** *Suponha que $A$ é uma matriz primitiva $n \times n$. Então $A$ possui um autovalor $r > 0$ tal que:*

*(a) se $v$ é um autovetor $Av = rv$, então $v$ pode ser tomado com todas as componentes positivas;*

*(b) $r > |\lambda|$ para qualquer outro autovalor $\lambda \neq r$;*

*(c) Se* $0 \leq B \leq A$ *e* $\beta$ *é autovalor de* $B$*, então* $|\beta| \leq r$*. Além disso,* $|\beta| = r \implies B = A$*.*

*(d)* $r$ *é raiz simples da polinômio característico de* $A$*.*

A cada matriz $A$ de ordem $n$ está associado um operador linear, representado por $A$ e também denotado por $A$, que tem como domínio um espaço vetorial $V$ de dimensão $n$. Se $W \subset V$ é um subespaço, dizemos que $W$ é **invariante** sob $A$ se $Aw \in W$, para todo $w \in W$.

**Definição 12.2.** Uma matriz $A$ é dita **redutível** se possui um subespaço invariante próprio.

**Lema 5.7.** *Se* $A \geq 0$ *é uma matriz irredutível de ordem* $n$*, então*

$$(I + A)^{n-1} > 0 \ .$$

*Demonstração.* É suficiente mostrar que, para todo vetor $y \geq 0$, com $y \neq 0$, vale a desigualdade $(I + A)^{n-1} y > 0$. De fato, se $y = e_i$, um vetor da base canônica, $(I + A)^{n-1} e_i > 0$ significa que a $i$-ésima linha de $(I + A)^{n-1}$ é positiva.

Para isto, vamos mostrar que o vetor $z = (I + A)y$ tem menos coordenadas nulas do que $y$. Como $A \geq 0$ e $z = y + Ay$, então o pior que poderia acontecer é de $z$ e $y$ possuírem as mesmas coordenadas não-nulas. Fazendo uma permutação, se necessário, podemos assumir que

$$y = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ z = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \ (u > 0, \ v > 0) \ ,$$

em que $u$ e $v$ tem o mesmo número de componentes, digamos $k < n$.

Escrevendo $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, em que $A_{11}$ é $k \times k$, e $A_{22}$ é $(n-k) \times (n-k)$, temos

$$\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Portanto $A_{21} u = 0$. Como $u > 0$, segue que $A_{21} = 0$. Isto contraria a irredutibilidade de $A$. Como razão alternativa, observe que a equação acima atesta que o subespaço onde estão $u$ e $v$ é invariante sob $A$. $\square$

*Demonstração do Teorema de Perron-Frobenius.* Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$, $x \neq 0$, um vetor de $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$r_x = \min_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \ , \ ((Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \ ; \ i = 1, 2, \ldots, n) \ .$$

Na definição de $r_x$ podemos excluir os valores de $i$ para os quais $x_i = 0$, ou interpretá-los como $+\infty$, entendendo que este é maior do que qualquer número real.

Claramente $r_x \geq 0$. Se $\rho$ satisfaz

$$\rho x \leq Ax \ ,$$

então $\rho \leq r_x$, portanto

$$r_x \geq \max\{\rho, \ \rho x \leq Ax \ , x \geq 0, \ x \neq 0\} \ .$$

Mostraremos que $r_x$ é uma função de $x$ que assume um valor máximo $r$ para algum vetor $z \geq 0$:

$$r = r_z = \max_{x\geq 0} r_x = \max_{x\geq 0} \min_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \ . \tag{5.38}$$

Pela definição de $r_x$, temos que se $x \geq 0$ $(x \neq 0)$ é multiplicado por um número $k > 0$, o valor $r_x$ não muda. Com isto, podemos restringir o cálculo do máximo de $r_x$ ao conjunto fechado de vetores de norma euclidiana 1:

$$M = \{x \geq 0 \ \text{ e } \ x \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\} \ .$$

Se a função $r_x$ fosse contínua em $M$, então a existência do máximo estaria garantida pelo teorema de Weierstrass. Entretanto, embora contínua em cada ponto $x > 0$, $r_x$ pode ser descontínua nos pontos da fronteira de $M$, na qual pelo menos uma das componentes de $x$ se anula.

Introduzimos o conjunto $N$ de todos os vetores da forma

$$N = \{y \mid y = (I + A)^{n-1}x \ , x \in M\} \ .$$

O conjunto $N$, por ser imagem de $M$ por um operador limitado, é fechado e limitado. Pelo Lema 5.7, os vetores de $N$ possuem todas as componentes positivas.

Multiplicando a inequação

$$r_x x \leq Ax \ ,$$

à esquerda por $(I + A)^{n-1} > 0$ temos

$$r_x y \leq Ay \ , y = (I + A)^{n-1}x \ .$$

Portanto, pela definição de $r_y$, vemos que

$$r_x \leq r_y \ .$$

Como $r_x$ é contínua em $N$, e $N$ é fechado e limitado, o máximo existe em $N$. Pelo que acabamos de ver, para todo $x \in M$, $r_x \leq r_y$, com $y \in N$. Portanto o máximo em $N$ é também o máximo em $M$.

Chamamos os vetores $z \geq 0$ para os quais $r_z = r$ de **extremais**. Mostramos agora que

i) o número $r$ definido em (5.38) é positivo e é um autovalor de $A$;

ii) todo vetor extremal $z$ é positivo e é um autovetor de $A$ com autovalor $r$, isto é, $r > 0$, $z > 0$ e $Az = rz$.

Considere o vetor $\mathbf{1'} \stackrel{\text{def}}{=} (1, 1, \cdots, 1)$, então

$$r_{\mathbf{1'}} = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0 \ ,$$

pois nenhuma das linhas da matriz $A$ pode ser nula, pois $A$ é irredutível. Como $r \geq r_1$, temos que $r > 0$.

Dado um vetor extremal $z$, seja $x = (I + A)^{n-1}z$. Pelo Lema 5.7, $x > 0$. Suponha que $Az - rz \neq 0$. Então, como $rz \leq Az$, temos

$$(I + A)^{n-1}(Az - rz) > 0 \ \Rightarrow \ Ax - rx > 0 \ .$$

Isto contraria a maximalidade de $r$ pois implicaria que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$(r + \epsilon)x < Ax \ \Rightarrow \ r_x \geq r + \epsilon > r \ .$$

Portanto $Az = rz$. Consequentemente

$$0 < x = (I + A)^{n-1}z = (1 + r)^{n-1}z \ ,$$

e por fim $z > 0$.

Mostremos (b): $r > |\lambda|$ para qualquer outro autovalor $\lambda \neq r$.

Sejam $\lambda$ e $y$ tais que

$$Ay = \lambda y \ , y \neq 0 \ .$$

Tomando o módulo de ambos os lados, lembrando que $A \geq 0$ e usando a desigualdade triangular:

$$|\lambda| y^+ \leq Ay^+ \ \Rightarrow \ |\lambda| \leq r_{y^+} \leq r \ .$$

Assim, se valer $|\lambda| = r$, concluímos que $y^+$ tem que ser extremal. Em particular, $y^+ > 0$.

Isto implica que ao autovalor $r$ corresponde um único autovetor com todas as componentes positivas. Porque se existissem dois autovetores linearmente independentes, $z$ e $z_1$, digamos, existiriam $a, b$ escalares reais tais que uma das componentes de

$$y = az + bz_1$$

seria nula, o que é impossível.

Voltando à equação de autovalor e autovetor: $Ay = \lambda y$, vimos que

$$|\lambda| y^+ \leq Ay^+ \ .$$

Se $|\lambda| = r$, esta desigualdade tem como consequência que $y^+ > 0$ e, de fato, $Ay^+ = ry^+$.

Note que $A^k > 0$, donde $A^k y^+ = r^k y^+$. Mas

$$r^k y^+ = |\lambda^k y| = |A^k y|$$

Cada componente (complexa) de $A^k y$ satisfaz uma igualdade do tipo

$$(A^k y^+)_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^{(k)} |y_i| = r^k (y^+)_j = |(\lambda^k y)_j| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^{(k)} y_i \right| = |(A^k y)_j| \ .$$

Interessa analisar a igualdade entre os somatórios. Sabe-se que a soma dos módulos de números complexos só é igual ao módulo da soma se todos os números em questão têm o mesmo argumento, ou seja, concluímos que $y_i = e^{i\theta_i} |y_i|$, com $\theta_i = \theta$, independente da componente $i$. Neste caso, voltando à equação de autovalor e autovetor:

$$Ay = \lambda y \ \Rightarrow \ A(e^{i\theta} y^+) = \lambda e^{i\theta} y^+ \ \Rightarrow \ Ay^+ = \lambda y^+ \ .$$

Como o membro esquerdo é positivo, $\lambda$ é real e positivo. Uma vez que assumimos que $|\lambda| = r$, concluímos que $\lambda = r$. Assim, o único autovalor de módulo maximal $r > 0$ para uma matriz primitiva é o próprio $r$.

Para mostrar (c), considere $y$ um autovetor de $B$:

$$By = \beta y \ \Rightarrow \ |\beta| y^+ \leq By^+ \leq Ay^+$$

Disto se conclui que $|\beta| \leq r_{y^+} \leq r$.

Se $|\beta| = r$, então $y^+$ é autovetor extremal de $A$, $y^+ > 0$. Além disto

$$ry^+ = By^+ = Ay^+ \ .$$

Se, em alguma linha de $B$, existe $b_{ij} < a_{ij}$, então a segunda equação não poderia ser satisfeita, levando em conta que todas as componentes de $y^+$ são positivas. Portanto, $|\beta| = r$ implica que $B = A$.

Para mostrar (d), considere a matriz adjunta de $\lambda I - A$, $\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = B(\lambda)$. Cada elemento $b_{ij}$ de $B(\lambda)$ é definido como o cofator (ou complemento algébrico) de $\lambda\delta_{ji} - a_{ji}$. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

$$B(\lambda)(\lambda I - A) = p(\lambda)I$$
$$(\lambda I - A)B(\lambda) = p(\lambda)I$$

em que $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ é o polinômio característico de $A$.

Para $\lambda = r$, a equação

$$(rI - A)B(r) = 0$$

implica que cada coluna de $B(r)$ é múltipla do único autovetor extremal. Mas cada linha de $B(r)$, pela primeira equação, também deve ser múltipla de um único autovetor extremal para a transposta de $A$. Observe que a existência de um único autovetor extremal já foi provada para toda matriz primitiva; se $A$ é primitiva, $A'$ também o é. Mas nenhuma componente de um autovetor extremal é nula. Portanto, há dois casos

i) $B(r)$ tem todas as entradas positivas;

ii) $B(r)$ tem todas as entradas nulas.

Vamos provar que o caso (i) vale, provando que o elemento $b_{nn} > 0$. Seja $A_{n-1}$ a matriz obtida de $A$ apagando-se a $n$-ésima linha e a $n$-ésima coluna. Temos

$$0 \leq \begin{pmatrix} A_{n-1} & 00 & 0 \end{pmatrix} = C \leq A \ .$$

Além disto, a matriz $C$ é distinta de $A$, pois $A$ é irredutível. Segue que os autovalores de $C$ têm módulo menor do que $r$. Com isto,

$$rb_{nn} = \det(rI - C) > 0 \ \Rightarrow \ b_{nn} > 0 \ .$$

Derivando a equação com relação a $\lambda$:

$$B(\lambda)(\lambda I - A) = p(\lambda)I \ \Rightarrow \ B'(\lambda)(\lambda I - A) + B(\lambda) = p'(\lambda)I \ .$$

Calculando em $\lambda = r$, e aplicando no autovetor extremal $z$:

$$B(r)z = p'(r)z \ .$$

Como $B(r)$ tem todas as entradas positivas, assim como $z$, concluímos que $p'(r) > 0$, o que é suficiente para mostrar que $r$ é uma autovalor simples de $A$. $\square$

**Corolário 12.1.** *Se $r$ é o autovalor maximal de uma matriz primitiva $A$, então $r$ é o autovalor maximal de $A'$.*

*Demonstração.* $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A')$. $\square$

Seja $w$ o autovetor extremal de $A'$: $A'w = rw$. Então $w'A = rw'$.

**Corolário 12.2.**

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq r \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tag{5.39}$$

*Se a igualdade valer para qualquer um dos lados, então a igualdade vale para ambos os lados, implicando que $r$ só pode ser igual à soma máxima ou mínima das linhas se todas as somas das linhas forem iguais.*

*Demonstração.* Escrevemos a definição de $r_x$ para $A'$:

$$r_x = \min_{1\leq i\leq n} \frac{(A'x)_i}{x_i} = \min_{1\leq i\leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ji}}{x_i} \ .$$

Para $x = \mathbf{1}$:

$$0 < r_{\mathbf{1}} = \min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \leq r \ , \tag{5.40}$$

em que a segunda desigualdade vale para $r$ o autovalor maximal de $A$. Isto prova a desigualdade da esquerda de (5.39).

Por outro lado,

$$x_i r_x \leq \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ji} \ ,$$

para cada $i$. Portanto, sendo $\mathbf{1}$ um vetor coluna de uns:

$$\begin{aligned}
&x' r_x \leq x'A \\
&x'\mathbf{1} r_x \leq x'A\mathbf{1} \\
&A\mathbf{1} \leq K\mathbf{1} \ , \quad \text{para} \quad K = \max_{1\leq i\leq n} \sum_j a_{ij} \\
&x'\mathbf{1} r_x \leq x'K\mathbf{1} = (x'\mathbf{1})K \ \Rightarrow r_x \leq K \ .
\end{aligned}$$

Tomando o máximo em $x$:

$$r \leq \max_i \sum_j a_{ij} \ .$$

Por outro lado, assuma que vale apenas a igualdade da esquerda em (4.1):

$$\min_i \sum_j a_{ij} = r \ .$$

Como o máximo da soma das linhas é maior, é possível diminuir as linhas cujas somas excedem o mínimo $r$ até que elas tenham soma igual a $r$, mantendo-as não-negativas. Obtemos outra matriz $B < A$, mas com mesmo autovalor maximal que $A$ (note que $B\mathbf{1}= r\mathbf{1}$), o que é impossível, pelo que provamos no item (c) do Teorema 12.1.

Analogamente, se valer

$$\min_i \sum_j a_{ij} < r = \max_i \sum_j a_{ij} \ ,$$

aumenta-se as entradas da matriz até que todas as linhas tenham soma igual a $r$. Obtemos outra matriz $B > A$, com o mesmo autovalor maximal que $A$ (o autovetor extremal de $B$ é $\mathbf{1}$). Isto é novamente impossível pelo item (c) do Teorema 12.1. □

**Corolário 12.3.** *Sejam $v$, tal que $A'v = rv$, e $z$ tal que $Az = rz$, normalizados para que $v'z = 1$. Então, se $B(r) = \mathrm{Adj}(rI - A)$,*

$$\frac{B(r)}{p'(r)} = zv'.$$

*Demonstração.* Vimos que as colunas de $B(r)$ são múltiplas positivas de $z$ e as linhas de $B(r)$ são múltiplas positivas de $v'$. Portanto, existe umas constante $c > 0$ tal que

$$B(r) = czv' \ .$$

Derivando $B(\lambda)(\lambda I - A) = p(\lambda)I$ com relação a $\lambda$, e calculando em $r$:

$$B'(r)(rI - A) + B(r) = p'(r)I$$

Aplicando esta matriz no vetor $z$, como $(rz - Az) = 0$, temos

$$B'(r)(rI - A)z + B(r)z = B(r)z = p'(r)z \Rightarrow czv'z = p'(r)z \ .$$

Considerando que $v'z = 1$, concluímos que $c = p'(r) = c$. □

Observe que $P \stackrel{\text{def}}{=} zv'$ é um operador linear que satisfaz $P^2 = P$, pois

$$P^2 = zv'zv' = z(v'z)v' = zv' = P \ .$$

Além disto, $Pz = z$. Se $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$Px = zv'x = (v'x)z \ ,$$

que é paralela a $z$. Com isto, a imagem de $P$ é unidimensional. Por outro lado, o núcleo de $P$ contém todos os vetores da forma $x = (I - P)y$, pois $Px = (P - P^2)y = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. O núcleo de $I - P$ é unidimensional, portanto pelo teorema de Núcleo e Imagem, a dimensão da imagem de $I - P$ é $n - 1$. Com isto,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x = (I - P)y, \ y \in \mathbb{R}^n\}$$

é precisamente o núcleo de $P$. Com isto, $P$ é um **projetor** sobre o espaço gerado por $z$.

O Teorema 12.1 é a versão forte do Teorema de Perron-Frobenius que vale para uma matriz primitiva; devemos generalizar o Teorema 12.1 para uma classe mais ampla de matrizes, chamada de irredutível.

## 12.1 Limite assintótico para as potências de uma matriz primitiva

Dada uma matriz primitiva $A$, consideramos agora a sequencia de operadores $\frac{A^k}{r^k}$, em que $r > 0$ é o autovalor de Perron de $A$.

O resolvente de $A$, dado por $R(s) = (sI - A)^{-1}$, para $s \in \mathbb{C}$ fora do espectro de $A$ pode ser calculado pela identidade:

$$(sI - A)B(s) = p(s)I;$$

já usada anteriormente. Portanto $R(s) = \frac{B(s)}{p(s)}$

Do Teorema12.1, sabemos que

$$p(s) = (s - r)(s - \lambda_2)^{m_2} \cdots (s - \lambda_j)^{m_j},$$

em que $m_k$ denota a multiplicidade algébrica de $\lambda_k$, com $|\lambda_k| < r$, para cada $k \geq 2$. A partir da igualdade

$$(s - r)R(s) = B(s)\frac{(s - r)}{p(s)}$$

tomamos o limite $s \to r$. Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos no membro direito

$$\lim_{s \to r}(s - r)R(s) = \frac{B(r)}{p'(r)} = P,$$

em que $P = zv'$ é o projetor sobre o subespaço gerado pelo autovetor extremal, pelo Corolário 12.3. Para qualquer $\lambda$, a matriz adjunta de $A$ satisfaz

$$B(\lambda)A = AB(\lambda) = \lambda B(\lambda) - p(\lambda)I.$$

Com isto temos $AP = PA$. Além disto, dado $x \in \mathbb{R}^n$

$$APx = Azv'x = (v'x)Az = (v'x)rz = r(zv')x = rPx.$$

Vamos agora escrever a seguinte decomposição em $A$:

$$A = r(P + C), \tag{5.41}$$

na qual estamos a definir C. Observe que $CP = (A/r - P)P = (AP/r - P^2) = (P - P^2) = 0$. Analogamente, $PC = 0$. Seja $\alpha$ um autovalor de C, e $x$ o respectivo autovetor não-nulo: $Cx = \alpha x$.

$$\alpha Px = PCx = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } Px = 0.$$

Suponha $\alpha \neq 0$. De $Px = 0$, e $Pz = z$, $x$ pertence ao núcleo de $P$, subespaço que não contém o autovetor extremal $z$. Então $Ax = r(P + C)x = rCx = r\alpha x$. Portanto $|r\alpha| < r$, ou seja, $|\alpha| < 1$.

Portanto o raio espectral de C é menor que 1, e consequentemente $C^k \to 0$, quando $k \to \infty$. Com isto,

$$A^k = r^k(P + C)^k = r^k(P^k + C^k) = r^k(P + C^k) \implies \lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{r^k} = P.$$

Suponha agora que os autovalores distintos da matriz primitiva $T$ são $r, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$, $t \leq n$ quando $r > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_t|$. No caso $|\lambda_2| = |\lambda_3|$ nós estipulamos que a multiplicidade $m_2$ de $\lambda_2$ é é pelo menos tão grande quanto o de $\lambda_3$, e de qualquer outro autovalor com o mesmo módulo que $\lambda_2$.

Pode acontecer que uma matriz primitiva tenha $\lambda_2 = 0$, um exemplo é a matriz da forma

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ a & c & b \end{pmatrix} > 0 \tag{5.42}$$

para qual $r = a + b + c$. $(\det(T - \lambda I) = \lambda^2(-\lambda + a + b + c))$.

Este tipo de situação dá ao seguinte teorema, onde o exemplo (5.42) ilustra que na parte (b) o limite $(n - 1)$ não pode ser reduzido.

**Teorema 12.2.** *Para a matriz primitiva $T$:*

*(a) Se $\lambda_2 \neq 0$, então quando $k \to \infty$*

$$T^k = r^k wv + O(k^s |\lambda_2|^k)$$

*onde $s = m_2 - 1$;*

*(b) Se* $\lambda_2 = 0$*, então para* $k \geq n-1$

$$T^k = r^k wv.$$

Em ambos os casos $w, v$ são quaisquer autovetores esquerdo e direito positivos correspondentes a r garantido pelo Teorema 12.1, desde que apenas sejam normatizados para que $vw = 1$.

A condição (d) do Teorema 12.1 afirma que a multiplicidade geométrica do autovalor $r$ é um, enquanto a afirmação (f) afirma que a multiplicidade algébrica é 1. É bem conhecido na teoria das matrizes que a multiplicidade geométrica para os autovalores de uma matriz arbitrária quadrada não implica, em geral, multiplicidade algébrica um. Um exemplo simples para isso é a matriz $A$ que é não negativa, mas é claro que ela não é primitiva:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tem multiplicidade algébrica 2 ($(\lambda - 1)^2$), mas o autovetor esquerdo correspondente pode ser múltiplo de $\{0, 1\}$ (multiplicidade geométrica).

A distinção entre multiplicidade geométrica e algébrica em conexão com $r$ em uma matriz primitiva é arrastada em alguns tratamentos da teoria da matriz não negativa.

## 12.2 Estrutura de uma matriz geral não negativa

**Definição 12.3.** A sequência $(i, i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, j)$, para $t \geq$ (onde $i_0 = i$), do conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$ da matriz não negativa $T$ é dito que forma uma *cadeia* de comprimento $t$ entre o par ordenado $(i, j)$ se

$$t_{ii_i} t_{i_1 i_2} \cdots t_{i_{t-2} i_{t-1}} t_{i_{t-1} j} > 0.$$

Essa cadeia para a qual $i = j$ é chamada de *ciclo* de comprimento $t$ entre $i$ e ele mesmo.

Da Definição 12.3 podemos, sem perda de generalidade, impor a restrição de que, para fixos $(i, j)$, $i$, $j \neq i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_{t-1}$, para obter uma *cadeia* ou *ciclo* de comprimento mínimo, a partir de um dado.

## 12.3 Matrizes Irredutíveis

**Definição 12.4.** Uma matriz $n \times n$ não negativa $T$ é irredutível se para cada par $i, j$ de seu conjunto de índices, existe um número inteiro positivo $m = m(i, j)$ tal que $t_{ij}^{(m)} > 0$.

Uma matriz irredutível é dita cíclica (periódica) com período d, se o período de qualquer um (e portanto de cada um) de seus índices satisfaz $d > 1$, e é dita acíclica (aperiódica) se $d = 1$.

Todos os resultados a seguir referem-se a uma matriz irredutível com período d. Observe que uma matriz irredutível T não pode ter uma linha ou coluna zero.

**Lema 5.8.** *Se $i \to i, t_{ij}^{kd} > 0$ para todos os inteiros $k \geq N_0 (= N_0(i))$.*

**Teorema 12.3.** *Seja $i$ qualquer índice fixo do conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$ de $T$. Então para todo índice $j$ existe um único inteiro $r_j$ na imagem $0 \leq r_j < d$ ($r_j$ é chamado com a classe de resto modulo $d$) tal que*

1. *$t_{ij}^{(s)} > 0$ implica $s \equiv r_j (mod\, d)$.*
2. *$t_{ij}^{(kd+r)} > 0$ para $k \geq N(j)$, onde $N(j)$ é um inteiro positivo.*

**Definição 12.5.** O conjunto dos índices $j$ em $\{1, 2, \ldots, n\}$ correspondentes a mesma classe de resto $(mod\, d)$ é chamado de subclasse da classe $\{1, 2, \ldots, n\}$, e é denotado por $C_r, 0 < r < d$.

**Teorema 12.4.** *Uma matriz irredutível acíclica $T$ é primitiva e reciprocamente. As potências da matriz cíclica irredutível pode ser estudado em termos de potências de matrizes primitivas.*

## 12.4 Perron-Frobenius para Matrizes Irredutíveis

**Teorema 12.5.** *Suponha que $T$ é uma matriz $n \times n$ não negativa e irredutível. Então todas as afirmações do Teorema 12.1 são válidas, exceto que (c) é substituído pela afirmação mais fraca: $r \geq |\lambda|$ para qualquer autovalor $\lambda$ de $T$. Os Corolários 4.1 e 4.2 do Teorema 12.1 também valem.*

De agora em diante, chamaremos $r$ como autovalor de Perron-Frobenius de uma matriz irredutível T, e seus correspondentes autovetores positivos, os autovetores de Perron-Frobenius.

O Teorema 12.5 não responde em detalhes a questões sobre autovalores $\lambda$ tais que $\lambda \neq r$ mas $|\lambda| = r$ no caso cíclico.

O seguinte resultado auxiliar é mais geral do que iremos exigir imediatamente, mas é importante em contextos futuros

**Teorema 12.6.** *(Teorema da Sub-invariância) Seja $T$ uma matriz $n \times n$ não negativa e irredutível, $s$ um número positivo, e $y \geq 0, \neq 0$, um vetor que satisfaça*

$$Ty \leq sy.$$

*Então (a) $y > 0$; (b) $s \geq r$, onde $r$ é o autovalor de Perron-Frobenius de $T$. Além disso, $s = r$ se e só se $Ty = sy$.*

**Teorema 12.7.** *Para uma matriz cíclica $T$ com período $d > 1$, estão presentes precisamente $d$ autovalores distintos $\lambda$ com $|\lambda| = r$, onde $r$ é o autovalor de Perron-Frobenius de $T$. Os autovalores são:*

$$re^{i(\frac{2k\pi}{d})},\ k = 0, 1, \ldots, d-1$$

*ou seja, as raízes $d$ da equação $\lambda^d - r^d = 0$.*

**Corolário 12.4.** *Se $\lambda \neq 0$ for qualquer autovalor de $T$, então os números*

$$\lambda e^{i(\frac{2k\pi}{d})},\ k = 0, 1, \ldots, d-1$$

*também são autovalores. Deste modo, a rotação do plano complexo sobre a origem através dos ângulos de $\frac{2\pi}{d}$ carrega o conjunto de autovalores para dentro de si.*

# 13 Agradecimentos

Agradeço à minha família por me apoiar em todas as situações, ao meu orientador Dr. Túlio Oliveira de Carvalho por todo o conhecimento transmitido, ao grupo PET-Matemática pela experiência adquirida e pelo companheirismo dos integrantes e à Secretaria de Educação Superior (SESu) do Ministério da Educação (MEC) e o Fundo Nacional de Desenvolvimento Estudantil (FNDE), pela Bolsa-PET, que financiaram o projeto. Por fim, agradeço à matemática, pois sem ela o mundo não teria sentido.

# Referências Bibliográficas

[1] F. Blanchard. $\beta$-Expansions and Symbolic Dynamics. Th. Comp. Sc., **65**, p. 131-141, 1989.

[2] C. Frougny and B. Solomyak. Finite $\beta$-expansions. Ergod. Th. & Dynam. Sys., **12**, p. 713-723, 1992.

[3] F.R.Gantmacher and Brenner, JL (trans.).Applications of the theory of matrices-Dover Publications, 1959.

[4] K. Knopp. Infinite Sequences and Series. Dover Pub., New York, 1956.

[5] L. Lorentzen and H. Waadeland. Continued Fractions with Applications. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[6] W. Parry. On the $\beta$-expansion of real numbers. Acta Math. Hung., **11**, p. 401-416, 1960.

[7] E. Seneta. Non-negative Matrices and Markov Chains-Springer, 2006.

# TOPOLOGIA E TEOREMAS DE SEPARAÇÃO

Gustavo Sylvio de Paula Menani
*Estudante*

Prof. Dr. Bruno Mendonça Rey dos Santos
*Orientador(a)*

**RESUMO**

Este relatório tem como objetivo descrever os conteúdos estudados pelo aluno durante os anos de 2020 e 2021. O trabalho explora tópicos iniciais de topologia, tais como espaços topológicos, continuidade, espaços métricos, compactos e conexos, topologia quociente e axiomas de separação e enumerabilidade. A partir desses conceitos é desenvolvido um estudo de homotopias, grupos fundamentais e espaços de recobrimento. Finalmente, são demonstrados alguns teoremas de separação, culminando no Teorema da Curva de Jordan.
**Palavras-chave:** Topologia algébrica, Grupos fundamentais, Espaços de recobrimento, Teorema da Curva de Jordan

**ABSTRACT**

This report aims to summarize the subjects studied by the author during the years of 2020 and 2021. The work adresses basic notions of topology, such as topological spaces, continuity, metric, compact and conected spaces, quotient topology and countability and separation axioms. Based on these notions, a study of homotopies, fundamental groups and covering spaces is developed. Finally, some separation theorems are proved, leading up to Jordan Curve Theorem.
**Keywords:** Algebraic topology, Fundamental groups, Covering spaces, Jordan Curve Theorem

# 1 Noções iniciais de topologia

O principal conceito utilizado nesse trabalho é o de topologia em um conjunto, e será introduzido a seguir.

**Definição 1.1.** Dado um conjunto $X$ não vazio, uma **topologia** em $X$ é uma família $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ii) A união arbitrária de elementos de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

(iii) A interseção finita de elementos de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

Nessas condições o par $(X, \mathcal{T})$ é chamado de **espaço topológico**. Quando a topologia $\mathcal{T}$ estiver implícita iremos representar o espaço topológico apenas pelo conjunto $X$. Além disso, os elementos de $\mathcal{T}$ serão chamados de **conjuntos abertos** do espaço topológico.

*Observação* 1.1. A palavra topologia pode ser usada tanto para indicar o ramo da matemática que estuda os espaços topológico quanto para indicar o conjunto definido acima.

Veremos mais adiante que é possível que existam diversas topologias em um conjunto, isso nos leva à seguinte definição.

**Definição 1.2.** Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ topologias em um conjunto $X$, se $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ então é dito que:

- $\mathcal{T}_2$ é mais fina que $\mathcal{T}_1$;
- $\mathcal{T}_1$ é mais grossa que $\mathcal{T}_2$.

*Exemplo* 1.1. Dado $X \neq \emptyset$, vale que:

- $\mathcal{P}(X)$ é uma topologia em $X$, que é chamada de **topologia discreta**.
- O conjunto $\{\emptyset, X\}$ é uma topologia em $X$, chamada de **topologia indiscreta**.

A topologia discreta é sempre a mais fina possível, enquanto a topologia indiscreta é a mais grossa.

## 1.1 Base

Outra definição que será amplamente utilizada é a de base para uma topologia.

**Definição 1.3.** Uma **base** para uma topologia em $X$ é um conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:

(i) $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

(ii) Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$.

A família formada pelo conjunto vazio juntamente com as uniões de elementos de $\mathcal{B}$ é uma topologia em $X$ e é chamada de topologia gerada por $\mathcal{B}$.

Para que a definição seja válida precisamos mostrar que a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é de fato uma topologia em $X$. Para isso considere $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ satisfazendo a Definição 1.3 e o conjunto a seguir

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \;\middle|\; \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \right\} \bigcup \{\emptyset\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{T}$ cumpre as três condições da Definição 1.1:

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ por definição.

(ii) Tome uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de elementos de $\mathcal{T}$. Cada $A_\alpha$ é união de elementos de $\mathcal{B}$, logo a união de todos os $A_\alpha$ também o é.

(iii) Considere $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, então a interseção está em $\mathcal{T}$. Suponha que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, logo, para cada $x \in A_1 \cap A_2$, existe $A_x \in \mathcal{B}$ com $x \in A_x \subset (A_1 \cap A_2)$, portanto $A_1 \cap A_2 = \cup A_x \in \mathcal{T}$.

Esse resultado vale para qualquer número finito de conjuntos, o que pode ser mostrado por indução a partir do caso $n = 2$.

Com isso concluímos que o conjunto gerado por $\mathcal{B}$ de fato é uma topologia.

*Observação* 1.2. Todo espaço topológico possui uma base, afinal podemos definir a base como sendo a própria topologia. Além disso um espaço topológico pode possuir mais de uma base (até mesmo infinitas).

**Proposição 1.1.** *Seja $\mathcal{T}$ uma topologia num conjunto $X$ e $\mathcal{B}$ uma base que gera essa topologia. Um subconjunto $A \in X$ é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um conjunto $B \in \mathcal{B}$ contendo $x$ tal que $B \subset A$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Seja $A$ um aberto não vazio de $X$, vale que $A = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ com $B_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in I$. Tomando $x \in A$ existe algum elemento $B_i$ nessa união que contem $x$, logo $x \in B_i \subset A$.

($\Leftarrow$) Seja $A \subset X$ de forma que para todo $x \in A$ existe um conjunto $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. Com isso temos que

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x$$

e portanto $A$ é aberto, dado que é união de elementos de $\mathcal{B}$. $\square$

*Exemplo* 1.2. O conjunto

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b;\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

é uma base para uma topologia em $\mathbb{R}$, chamada **topologia euclidiana**.

Vamos verificar que $\mathcal{B}$ cumpre as duas condições da definição de base:

- $\mathbb{R}$ pode ser escrito como a união $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+2)$. Como esses intervalos estão em $\mathcal{B}$ então a união de elementos de $\mathcal{B}$ é $\mathbb{R}$.

- A interseção de dois intervalos $(a, b)$ e $(c, d)$ com $a < b$ e $c < d$ só pode ser um desses conjuntos: $\emptyset$, $(a, b)$, $(c, d)$, $(c, b)$ ou $(a, d)$. Tomando um elemento em qualquer um deles (exceto o vazio), podemos encontrar um intervalo aberto em torno desse elemento que está contido na interseção.

## 1.2 Sub-base

**Definição 1.4.** Seja $X$ um conjunto não vazio, uma **sub-base** de $X$ é um conjunto $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $X$ é a união dos elementos de $\mathcal{S}$:

$$\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S = X$$

A sub-base gera uma topologia da seguinte forma: As interseções finitas de elementos de $S$ formam uma base para uma topologia em $X$. Para verificar isso basta mostrar as duas propriedades da Definição 1.3:

Considere o conjunto das interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ e } S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S} \right\}$$

- Cada elemento de $\mathcal{S}$ também é um elemento de $\mathcal{B}$, portanto a união dos elementos de $\mathcal{B}$ é $X$.

- Sejam $B_1 = S_1 \cap \cdots \cap S_n$ e $B_2 = S_1' \cap \cdots \cap S_m'$ elementos de $\mathcal{B}$, então $B_1 \cap B_2$ também está em $\mathcal{B}$, pois

$$B_1 \cap B_2 = S_1 \cap \cdots \cap S_n \cap S_1' \cap \cdots \cap S_m'.$$

A construção de uma topologia a partir de uma sub-base ocorre da seguinte forma:

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\text{Interseções finitas}} \mathcal{B} \xrightarrow{\text{Uniões}} \mathcal{T}$$

*Exemplo* 1.3 (Topologia da ordem). Considere um conjunto totalmente ordenado $X$ com uma relação de ordem $\prec$ e uma família $\mathcal{S}$ formada pelos intervalos de forma:

$$(a, \infty) = \{x \in X \mid a \prec x\} \qquad\qquad (-\infty, b) = \{x \in X \mid x \prec b\}$$

com $a, b \in X$. Então $\mathcal{S}$ é uma sub-base em $X$ e a topologia gerada por $\mathcal{S}$ é chamada de **topologia da ordem** em $X$.

Quando $X = \mathbb{R}$ com a ordem usual, a topologia da ordem é igual a topologia euclidiana. Para ver isso basta notar que as interseções de intervalos $(a, \infty)$ e $(-\infty, b)$ são intervalos do tipo $(a, b)$ (quando não são vazias), por outro lado qualquer intervalo $(a, b)$ pode ser escrito como interseção de dois intervalos da sub-base. Com isso podemos concluir que a base gerada por $\mathcal{S}$ é igual a base da topologia euclidiana.

## 1.3 A topologia num produto cartesiano

**Definição 1.5.** Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos, nessas condições o conjunto

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1,\, V \in \mathcal{T}_2\}$$

define uma base no conjunto $X \times Y$. A topologia gerada por essa base é chamada de **topologia produto** em $X \times Y$.

Vamos verificar que $\mathcal{B}$ é de fato uma base:

- Como $X \in \mathcal{T}_1$ e $Y \in \mathcal{T}_2$, então $X \times Y \in \mathcal{B}$ e a união dos elementos de $\mathcal{B}$ é $X \times Y$.
- Tomando $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$ em $\mathcal{B}$ então

  $$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)\,.$$

  Essa interseção está em $\mathcal{B}$ dado que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_1$ e $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}_2$.

*Observação* 1.3. A mesma topologia pode ser obtida definindo $\mathcal{B}$ como o conjunto dos produtos $U \times V$ onde $U$ está numa base de $\mathcal{T}_1$ e $V$ está numa base de $\mathcal{T}_2$. Independente da escolha das bases a topologia produto é a mesma.

**Proposição 1.2.** *Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos e $\pi_1$ a função projeção que leva cada ponto $(x, y)$ de $X \times Y$ na sua coordenada em $X$, ou seja, $\pi_1((x, y)) = x$, de forma análoga $\pi_2((x, y)) = y$. Nessas condições a coleção a seguir é uma sub-base para a topologia produto em $X \times Y$:*

$$\mathcal{S} = \left\{\pi_1^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_1\right\} \cup \left\{\pi_2^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_2\right\}$$

*onde* $\pi_1^{-1}(U)$ *e* $\pi_2^{-1}(V)$ *são imagens inversas dos conjuntos* $U$ *e* $V$*.*

*Demonstração.* Primeiramente note que $\pi_1^{-1}(X) = X \times Y$, portanto $\mathcal{S}$ é uma sub-base.

Denotaremos por $\mathcal{T}$ a topologia produto em $X \times Y$ e por $\mathcal{T}'$ a topologia gerada por $\mathcal{S}$, iremos mostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Para quaisquer $U \in \mathcal{T}_1$ e $V \in \mathcal{T}_2$ vale que $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ e $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, como ambos os conjuntos estão em $\mathcal{T}$ segue que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Além disso, sabemos que a topologia $\mathcal{T}$ preserva interseções finitas e uniões, logo $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, pois $\mathcal{T}'$ é construída a partir de $\mathcal{S}$ usando essas operações.

Por outro lado, tomando $U \times V$ em $\mathcal{B}$ (base de $\mathcal{T}$), podemos escrever

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$$

e portanto $U \times V$ é interseção de elementos de $\mathcal{S}$ e está na base $\mathcal{B}'$ gerada por essa sub-base, ou seja, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Isso implica que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

A partir das duas inclusões concluímos a demonstração. □

## 1.4 Topologia de subespaço

**Definição 1.6.** Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $Y \subset X$, o conjunto

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

define uma topologia em $Y$, chamada topologia subespaço de $Y$.

Para verificar que $\mathcal{T}_Y$ é topologia basta notar que $\emptyset = Y \cap \emptyset$, $Y = Y \cap X$ e além disso temos as seguintes identidades:

$$(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y$$

$$\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) = \left( \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \right) \cap Y$$

Também vale que:

- Se $\mathcal{B}$ é base de $\mathcal{T}$ então $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B \,|\, B \in \mathcal{B}\}$ é base para $\mathcal{T}_Y$.
- Se $A \subset Y$ é aberto em $Y$ e $Y$ é aberto em $X$ então $A$ é aberto em $X$.

**Proposição 1.3.** *Sejam* $X$ *e* $Y$ *espaços topológicos, se* $A \subset X$ *e* $B \subset Y$ *então a topologia produto em* $A \times B$ *(*$A$ *e* $B$ *com a topologia subespaço) é igual a topologia subespaço em* $A \times B \subset X \times Y$*.*

*Demonstração.* Um elemento qualquer da base da topologia subespaço em $A \times B$ é da forma $(U \times V) \cap (A \times B)$ onde $U \times V$ é um elemento da base da topologia produto em $X \times Y$. Por outro lado vale que

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

Mas $(U \cap A) \times (V \cap B)$ é justamente um elemento genérico da base da topologia produto em $A \times B$, pois $U \cap A$ e $V \cap B$ são elementos das topologias subespaço em $A$ e $B$ respectivamente. Com isso concluímos que a base para as duas topologia é a mesma. □

## 1.5 Conjuntos fechados

**Definição 1.7.** Um subconjunto $F$ de um espaço topológico $X$ é dito **fechado** se o seu complementar em $X$ é aberto.

Diretamente da definição segue que $\emptyset$ e $X$ são fechados.

**Proposição 1.4.** *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.*

*(i) A interseção arbitrária de fechados é fechada.*

*(ii) Uma união finita de fechados é fechada.*

*Demonstração.* (i) Se $F_\alpha$ são conjuntos fechados, então:

$$\left(\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha\right)^{\complement} = \bigcup_{\alpha \in J} F_\alpha^{\complement}.$$

Como cada $F_\alpha^{\complement}$ é aberto, então o complementar da interseção é aberto e portanto a interseção é fechada.

(ii) O item segue de maneira semelhante a partir da identidade:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^{\complement}.$$

□

Dado $Y \subset X$ com a topologia de subespaço, vale que:

- $F \subset Y$ é fechado em $Y$ se, e só se, é interseção de $Y$ com um fechado de $X$.
- Se $F \subset Y$ é fechado em $Y$ e $Y$ é fechado em $X$ então $F$ é fechado em $X$.

**Definição 1.8.** Seja $X$ espaço topológico e $A \subset X$.

(i) O **interior** de $A$ é a união de todos os abertos contidos em $A$ e é denotado por $int\, A$.

(ii) O **fecho** de $A$ é a interseção de todos os fechados que contém $A$ e é denotado por $\overline{A}$.

Segue diretamente da definição que, para qualquer $A \subset X$:

- $int\, A$ é aberto e $\overline{A}$ é fechado.
- $int\, A \subset A \subset \overline{A}$.
- $A$ é aberto se, e somente se, é igual ao seu interior.
- $A$ é fechado se, e somente se, é igual ao seu fecho.

Vamos verificar o seguinte resultado: Se $A \subset Y \subset X$ então o fecho de $A$ na topologia subespaço de $Y$ é $\overline{A} \cap Y$ onde $\overline{A}$ é o fecho de $A$ em $X$.

Com efeito, denotando por $B$ o fecho de $A$ em $Y$, como $\overline{A} \cap Y$ é um fechado de $Y$ que contém $A$, então $B \subset \left(\overline{A} \cap Y\right)$.

Por outro lado, $B$ é a interseção de um fechado $C$ de $X$ com $Y$, segue que $C$ é um fechado de $X$ contendo $A$, pois $A \subset B$. Portanto

$$\overline{A} \subset C \Rightarrow \left(\overline{A} \cap Y\right) \subset (C \cap Y) = B.$$

**Proposição 1.5.** *Seja $X$ espaço topológico, $x \in X$ e $A \subset X$. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \subset X$ aberto contendo $x$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar as duas implicações pela contrapositiva.

($\Rightarrow$) Suponha que exista um aberto $U$ contendo $x$ tal que $A \cap U = \emptyset$, disso segue que $A \subset U^{\complement}$, como $U^{\complement}$ é fechado então pela definição de fecho temos $\overline{A} \subset U^{\complement}$ e portanto $x \notin \overline{A}$.

($\Leftarrow$) Se $x \notin \overline{A}$, então $U := \overline{A}^{\complement}$ é aberto, contém $x$ e $U \cap A = \emptyset$. □

**Definição 1.9.** Dados um espaço topológico $X$ e $x \in X$, uma **vizinhança** de $x$ é um aberto de $X$ que contém $x$.

**Definição 1.10.** Dados $X$ um espaço topológico e $A \subset X$ um ponto $x \in X$ é dito **ponto de acumulação** de $A$ se toda vizinhança de $x$ intersecta $A$ em um ponto diferente de $x$ ou, equivalentemente, se $U$ é vizinhança de $x$ então $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos de acumulação de $A$ será denotado por $A'$.

Vamos verificar que para qualquer $A \subset X$ vale $\overline{A} = A \cup A'$.

De fato, diretamente da definição de $A'$ e da Proposição 1.5 temos que $A' \subset \overline{A}$. Como $A \subset \overline{A}$ então $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Por outro lado, dado $x \in \overline{A}$, se $x \notin A$ então, tomando uma vizinhança $U$ de $x$ vale $U \cap A \neq \emptyset$. Porém $A = A - \{x\}$, logo $U$ intersecta $A - \{x\}$ e $x \in A'$, o que prova a segunda inclusão.

Com isso também concluímos que um conjunto $A$ é fechado se, e só se, contém todos os seus pontos de acumulação, dado que $A$ é fechado se, e só se, $A = \overline{A}$.

**Definição 1.11.** Um espaço topológico $X$ é chamado de **espaço de Hausdorff** se para todo par de pontos distintos $x, y \in X$ existem $U$ e $V$ abertos disjuntos com $x \in U$ e $y \in V$.

**Proposição 1.6.** *Todo conjunto finito num espaço de Hausdorff é fechado.*

*Demonstração.* Seja $X$ espaço de Hausdorff e $x \in X$. Tome $y \neq x$ em $X$. Por hipótese existe uma vizinhança $U$ de $x$ que não contém $y$, logo $y \notin \overline{\{x\}}$ e portanto $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Como qualquer conjunto unitário é fechado então a união finitas deles também o é. $\square$

*Observação* 1.4. Espaços que satisfazem a propriedade da Proposição 1.6 (todo conjunto finito é fechado) são chamados espaços $T_1$ e espaços da Hausdorff também são chamados de $T_2$.

**Proposição 1.7.** *Seja $X$ um espaço $T_1$, $A \subset X$ e $x \in X$, vale que $x \in A'$ se, e somente se, $U \cap A$ é infinito para toda vizinhança $U$ de $x$.*

*Demonstração.* ($\Leftarrow$) Se, para toda vizinhança $U$ de $x$, $U \cap A$ é infinito então toda vizinhança de $x$ contém elementos de $A$ diferentes de $x$ e portanto $x \in A'$.

($\Rightarrow$) Suponha que $x \in A'$ e $U$ é uma vizinhança de $x$ com $U \cap A$ finito. Disso segue que $U \cap (A - \{x\}) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ é finito e portanto fechado.

Note que, o conjunto $U \cap \{x_1, \cdots, x_n\}^{\complement}$ é aberto e contém $x$, porém não intersecta $A - \{x\}$, o que é uma contradição dado que $x \in A'$. $\square$

**Definição 1.12.** Dizemos que uma sequência $(x_n)$ de elementos de um espaço topológico $X$ converge para $x \in X$ se para toda vizinhança $U$ de $x$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n \in U$ sempre que $n > n_0$.

**Teorema 1.1.** *Num espaço $T_2$ o limite de uma sequência, quando existe, é único.*

*Demonstração.* Seja $X$ um espaço $T_2$ e $(x_n)$ uma sequência convergindo para $x \in X$ e $y \in X$ distintos. Por hipótese existem abertos disjuntos $U$ e $V$ contendo $x$ e $y$ respectivamente. Da definição de convergência existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ com $x_n \in U$ sempre que $n > n_0$, portanto $x_n \notin V$ para todo $n > n_0$ e $(x_n)$ não pode convergir para $y$ pois $V$ é vizinhança de $y$. □

**Proposição 1.8.** *É válido que:*

*(i) O produto de dois espaços $T_2$ também é $T_2$.*

*(ii) Um subespaço de um espaço $T_2$ também é $T_2$.*

*Demonstração.* (i) Sejam $X$ e $Y$ espaços $T_2$. Tome $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ distintos, suponha que $x_1 \neq x_2$, disso segue que existem $U$ e $V$ abertos disjuntos de $X$ contendo $x_1$ e $x_2$ respectivamente.

Com isso os conjuntos $U \times Y$ e $V \times Y$ são abertos de $X \times Y$, disjuntos e contêm $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$, respectivamente.

(ii) Considere $X$ um espaço $T_2$ e $Y \subset X$, tomando $x$ e $y$ distintos em $Y$ então existem abertos disjuntos $U$ e $V$ que contêm $x$ e $y$ respectivamente. Vale que $x \in U \cap Y$ e $y \in V \cap Y$ e além disso $U \cap Y$ e $V \cap Y$ são abertos disjuntos de $Y$.

□

# 2 Continuidade

**Definição 2.1.** Dados $X$ e $Y$ espaços topológicos e uma função $f : X \to Y$, $f$ é dita **contínua** se para cada $V \subset Y$ aberto, a imagem inversa $f^{-1}(V)$ é um aberto de $X$.

Segue diretamente da definição que a composta de funções contínua também é contínua.

*Observação* 2.1. Para mostrar que uma função é contínua é suficiente mostrar que a condição acima vale para todo elemento da base de $Y$.

**Proposição 2.1.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos e $f : X \to Y$, são equivalentes:*

*(1) $f$ é contínua.*

*(2) Para todo $A \subset X$, vale $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

*(3) Para todo $B$ fechado de $Y$, $f^{-1}(B)$ é fechado.*

*(4) Para todo ponto $x \in X$ e toda vizinhança $V$ de $f(x)$ existe uma vizinhança $U$ de $x$ com $f(U) \subset V$.*

*Demonstração.* (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $f(x) \in f(\overline{A})$ e $W$ uma vizinhança de $f(x)$, pela continuidade de $f$ temos que $f^{-1}(W)$ é aberto e além disso contém $x$.

Como $x \in \overline{A}$ segue que existe um ponto $y \in A \cap f^{-1}(W)$ e portanto $f(y) \in f(A) \cap W$. Com isso concluímos que $f(x) \in \overline{f(A)}$ o que prova (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $B \subset Y$ fechado e considere $A = f^{-1}(B)$, vale que $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Tome $x \in \overline{A}$, por hipótese temos $f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$. Disso segue que $x \in f^{-1}(B) = A$ e portanto $A = \overline{A}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja $W \subset Y$ aberto, note que $f^{-1}\left(W^{\complement}\right) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(W) = f^{-1}(W)^{\complement}$.

Dado que $W^{\complement}$ é fechado, então $f^{-1}\left(W^{\complement}\right)$ também é (por hipótese) e portanto $f^{-1}(W)$ é aberto e $f$ é contínua.

(1) $\Rightarrow$ (4) Seja $V$ uma vizinhança de $f(x)$, defina $U = f^{-1}(V)$. É válido que $U$ é vizinhança de $x$, pois $f$ é contínua, além disso temos $f(U) = f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Considere $V \subset Y$ aberto e tome $x \in f^{-1}(V)$. Como $f(x) \in V$ então existe $U_x$ vizinhança de $x$ com $f(U_x) \subset V$, de onde $U_x \subset f^{-1}(V)$. Segue que $f^{-1}(V)$ pode ser escrito como união dos $U_x$ e é aberto. $\square$

**Definição 2.2.** Dada uma função bijetora $f$ entre dois espaços topológicos, se $f$ e $f^{-1}$ são contínuas então $f$ é chamada de **homeomorfismo**.

**Lema 6.1** (Lema da colagem)**.** *Considere $X = A \cup B$ e $Y$ espaços topológico onde $A$ e $B$ são fechados em $X$ e $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x$ em $A \cap B$ então a função $h : X \to Y$ com $h = f$ em $A$ e $h = g$ em $B$ é contínua.*

*Demonstração.* Tome um fechado $F$ de $Y$. Como $A$ e $B$ são fechados em $X$ então $f^{-1}(F)$ e $g^{-1}(F)$ também são fechados em $X$ e a demonstração segue do fato de que $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$. $\square$

Na próxima proposição iremos usar o fato de que a função projeção $\pi_1 : X \times Y \to X$ é contínua, afinal se $U$ é um aberto de $X$ então $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ é um elemento da base do espaço produto.

**Proposição 2.2.** *Dada uma função $f$ do espaço topológico $A$ no espaço produto $X \times Y$ com $f = (f_1, f_2)$ então $f$ é contínua se e somente se $f_1$ e $f_2$ são contínuas.*

*Demonstração.* Suponha que $f$ é contínua. Podemos escrever $f_1 = \pi_1 \circ f$ e $f_2 = \pi_2 \circ f$ e portanto $f_1$ e $f_2$ são contínuas.

Reciprocamente, suponha $f_1$ e $f_2$ contínuas e considere $U \times V$ na base de $X \times Y$, segue que:

$$a \in f^{-1}(U \times V) \Leftrightarrow f(a) \in U \times V \Leftrightarrow f_1(a) \in U,\ f_2(a) \in V \Leftrightarrow a \in f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

Portanto $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ e $f^{-1}(U \times V)$ é aberto. $\square$

# 3 Topologia produto

**Definição 3.1.** Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família de espaços topológicos com um conjunto de índices $J$. O **produto cartesiano** dessa família de espaços é definido por

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha := \left\{ f : J \to \bigcup_{\alpha\in J} X_\alpha \,\middle|\, f(\beta)\in X_\beta,\ \forall \beta\in J \right\}.$$

**Definição 3.2.** Sejam $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}$ espaços topológicos, a **topologia das caixas** em $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ é a topologia gerada pela seguinte base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha\in J} U_\alpha \,\middle|\, U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha,\ \forall \alpha\in J \right\}.$$

**Definição 3.3.** Seja $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ uma coleção de espaços topológicos, a **topologia produto** em $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ é a topologia gerada pela seguinte sub-base:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{S}_\alpha.$$

Onde $\mathcal{S}_\beta = \left\{ \pi_\beta^{-1}(U) \,\middle|\, U\in\mathcal{T}_\beta \right\}$ e $\pi_\beta$ é a projeção do espaço $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ em $X_\beta$.

Os elementos de $S_\alpha$ são conjuntos da forma $\prod_{\beta\in J} U_\beta$ onde $U_\beta = X_\beta$ para todo índice com exceção de $\alpha$. E os elementos da base gerada por $\mathcal{S}$ são as intercessões finitas desses produtos, que tem a forma $\prod_{\beta\in J} V_\beta$ onde $V_\beta = X_\beta$ com exceção de um número finito de índices.

*Observação* 3.1. A topologia da caixa e a topologia produto coincidem em produtos finitos, e ambas coincidem com a topologia do produto de dois espaços definida anteriormente.

*Observação* 3.2. Se $A_\alpha$ é um subespaço de $X_\alpha$ para cada $\alpha\in J$ então, considerando $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ com a topologia produto, a topologia de subespaço em $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha \subset \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ é igual à topologia produto de $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ onde cada $A_\alpha\subset X_\alpha$ está munido com a topologia subespaço.

O mesmo vale considerando a topologia das caixas ao invés da topologia produto.

**Teorema 3.1.** *Dados $\{X_\alpha\}$ espaços topológicos de forma que cada $X_\alpha$ é um espaço de Hausdorff, então $\prod X_\alpha$ com a topologia produto/caixa é um espaço de Hausdorff.*

*Demonstração.* Tome $x = (x_\alpha)$ e $y = (y_\alpha)$ distintos em $\prod X_\alpha$, então existe um índice $\beta$ de forma que $x_\beta \neq y_\beta$. Considere abertos distintos $U$ e $V$ em $X_\beta$ que contém $x_\beta$ e $y_\beta$ respectivamente.

O conjunto $\prod U_\alpha$ onde $U_\alpha = X_\alpha$ para todo $\alpha \neq \beta$ e $U_\beta = U$ é um aberto da topologia produto/caixa que contém $x$ e de forma similar podemos construir um aberto $\prod V_\alpha$ que contém $y$, além disso esses abertos são disjuntos, pois $U \cap V = \emptyset$. □

**Proposição 3.1.** *Sejam $\{X_\alpha\}$ espaços topológicos e $A_\alpha \subset X_\alpha$, vale que $\prod \overline{A_\alpha} = \overline{\prod A_\alpha}$ (em ambas as topologias).*

*Demonstração.* A demonstração é igual para ambas as topologias, então não faremos distinção de topologia.

Tome $(x_\alpha) \in \prod \overline{A_\alpha}$ e considere $\prod U_\alpha$ um aberto da base que contem $(x_\alpha)$. Fixado $\alpha$, vale que $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$ e portanto existe $y_\alpha \in A_\alpha \cap U_\alpha$, pois $x_\alpha \in U_\alpha$.

O elemento $(y_\alpha)$ construído dessa forma pertence à $\prod U_\alpha$ e à $\prod A_\alpha$ e portanto a interseção dos dois produtos não é vazia. Pela arbitrariedade de $\prod U_\alpha$ concluímos que $(x_\alpha) \in \overline{\prod A_\alpha}$.

Por outro lado, tome $(x_\alpha) \in \overline{\prod A_\alpha}$. Dado um índice $\beta$ qualquer vamos mostrar que $x_\beta \in \overline{A_\beta}$.

Seja $V_\beta$ um aberto de $X_\beta$ contendo $x_\beta$, em ambas as topologias vale que $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ é um aberto contendo $(x_\alpha)$. Mas como $(x_\alpha) \in \overline{\prod A_\alpha}$ então existe $(y_\alpha)$ na interseção de $\prod A_\alpha$ com $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$. Disso segue que $y_\beta \in A_\beta \cap V_\beta$ e portanto $x_\beta \in \overline{A_\alpha}$.

Como isso vale para qualquer índice, então $(x_\alpha) \in \prod \overline{A_\alpha}$, o que conclui a segunda inclusão. □

**Proposição 3.2.** *Sejam $A$, $\{X_\alpha\}$ espaços topológicos, $\prod X_\alpha$ com a topologia produto e $f : A \to \prod X_\alpha$. Podemos escrever a função $f$ como $f(a) = (f_\alpha(a))$, $f_\alpha : A \to X_\alpha$.*

*Nessas condições $f$ é contínua se, e somente se, cada $f_\alpha$ é contínua.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Suponha que $f$ é contínua, nesse caso temos $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$, logo $f_\alpha$ é contínua para qualquer índice $\alpha$, pois a função projeção é contínua.

($\Leftarrow$) Suponha que $f_\alpha$ é contínua para todo índice $\alpha$, tome um aberto $U = \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ da sub-base de $\prod X_\alpha$, vamos mostrar que a imagem inversa de $U$ por $f$ é aberta.

Como $f_\beta = \pi_\beta \circ f$ então

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = (\pi_\beta \circ f)^{-1}(U_\beta) = f_\beta(U_\beta)$$

da continuidade de $f_\beta$ temos que $f^{-1}(U)$ é aberto.

Seja $V$ um aberto da base da topologia produto, $V$ é interseção finita de elementos da sub-base e a imagem inversa de $V$ por $f$ é a interseção das imagens inversas dos elementos da sub-base, as quais vimos que são abertas, logo $f^{-1}(V)$ é aberto e $f$ é contínua. □

*Exemplo* 3.1. Veremos que a Proposição 3.2 não é válido se considerarmos a topologia das caixas. Para isso considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ onde $\mathbb{R}^\omega$ é o conjunto das sequências de números reais e $f$ é dada por $f(t) = (t, t, \dots)$. As funções $f_n$ são a função identidade, logo são contínuas.

Para mostrar que $f$ não é contínua considere o elemento da base da topologia das caixas $B = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, vamos mostrar que $f^{-1}(B)$ não é aberto.

Vale que $f(0) = (0, 0, \dots) \in B$, se $f^{-1}(B)$ é aberto, então contém um intervalo em torno de 0 do tipo $(-\epsilon, \epsilon)$, ou seja, $f(-\epsilon, \epsilon) \subset B$. Disso obtemos que $f_n(-\epsilon, \epsilon) = (-\epsilon, \epsilon) \subset \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, mas isso deve valer para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição.

# 4 Espaços métricos

**Definição 4.1.** Dado um conjunto não vazio $X$, uma **métrica** em $X$ é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$;

para quaisquer $x, y, z \in X$.

Além disso definimos a bola aberta com centro em $x \in X$ e raio $\epsilon > 0$ como o conjunto

$$B_d(x, \epsilon) \coloneqq \{y \in X \,|\, d(x, y) < \epsilon\}$$

Quando não existir risco de confusão em relação à $d$ escreveremos apenas $B(x, \epsilon)$.

**Definição 4.2.** Seja $d$ uma métrica em $X$, o conjunto das bolas

$$B = \{B_d(x, \epsilon) \,|\, x \in X,\ \epsilon > 0\}$$

forma uma base para uma topologia em $X$ chamada de topologia induzida por $d$.

Vamos verificar que $B$ de fato é base:

(i) Com efeito, para cada $x \in X$ vale que $x \in B_d(x, \epsilon)$ para qualquer $\epsilon > 0$, logo a união dos elementos de $B$ é $X$.

(ii) Antes de mostrar a segunda propriedade vamos verificar que dado $y \in B_d(x, \epsilon)$ e tomando $\delta = \epsilon - d(x, y)$ então $B_d(y, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$.

De fato, se $z \in B_d(y, \delta)$ então $d(x, z) \leq d(y, z) + d(x, y) < \epsilon$ e portanto $z \in B_d(x, \epsilon)$

Agora considere duas bolas abertas $B_1$ e $B_2$ e $y \in B_1 \cap B_2$, pelo que vimos acima existem $\delta_1$ e $\delta_2$ maiores que 0 tais que $B_d(y, \delta_1) \subset B_1$ e $B_d(y, \delta_2) \subset B_2$.

Tomando $0 < \delta_y < \delta_1, \delta_2$ temos $B_d(y, \delta_y) \subset B_1 \cap B_2$.

Portanto a métrica de fato induz uma topologia no conjunto.

*Exemplo* 4.1.

- Seja $X$ um conjunto e $x, y \in X$, a métrica discreta em $X$ é definida como $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e gera a topologia discreta em $X$.

- Dados $x, y \in \mathbb{R}$ a métrica dada por $d(x, y) = |x - y|$ gera a topologia euclidiana de $\mathbb{R}$.

**Definição 4.3.** Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é chamado de **metrizável** se existe uma métrica em $X$ que induz $\mathcal{T}$.

Sabemos que num espaço topológico $X$ qualquer um conjunto $U \subset X$ é aberto se, e somente se, para todo $x \in U$ existe um aberto $B$ da base que contém $x$ e está contido em $U$. No caso em que $X$ é espaço métrico $B$ é uma bola aberta, além disso vimos no item (ii) acima que para todo elemento de $B$ existe um bola centrada nesse elemento contida em $B$, o que nos leva à seguinte condição para determinar conjuntos abertos:

**Lema 6.2.** *Um subconjunto $U$ de um espaço métrico é aberto se, e somente se, para todo $x \in U$ existe uma bola $B(x, \epsilon)$ contida em $U$.*

Com essa condição vemos que se considerarmos o conjunto formado apenas pelas bolas de raio menor que 1 como base, esse conjunto também gera a mesma topologia do que a base da Definição 4.2. Afinal se $B(x, \epsilon)$ está contida em $U$ então conseguimos um $\delta < 1$ tal que $B(x, \delta) \subset B(x, \epsilon) \subset U$.

Isso nos motiva a enunciar a próxima proposição.

**Proposição 4.1.** *Seja $d$ uma métrica em um conjunto $X$, a métrica $\overline{d}$ definida por*

$$\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

*gera a mesma topologia em $X$ que $d$.*

Para demonstrar a proposição basta notar que a base gerada por $\overline{d}$ é formada por $X$ e pelas bolas $B_d(x, \epsilon)$ onde $x \in X$ e $\epsilon \leq 1$, dado que, se $\epsilon > 1$ então $B_{\overline{d}}(x, \epsilon) = X$ e se $\epsilon \leq 1$ temos $B_{\overline{d}}(x, \epsilon) = B_d(x, \epsilon)$

Além disso é necessário mostrar que $\overline{d}$ é de fato uma métrica, para isso basta verificar que a desigualdade triangular continua válida, afinal as outras propriedades são imediatas.

**Proposição 4.2.** *Sejam $d$ e $d'$ métricas num conjunto $X$, suponha que existam $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$ para todos $x, y \in X$. Então $d$ e $d'$ induzem a mesma topologia em $X$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que, para toda bola em $d$ existe uma bola de mesmo centro em $d'$ contida nela e vice-versa.

Considere $B_{d'}(x,\epsilon)$ e $\delta = \frac{\epsilon}{\beta}$, vale que

$$y \in B_d(x,\delta) \Rightarrow \beta d(x,y) < \epsilon \Rightarrow d'(x,y) < \epsilon \Rightarrow y \in B_{d'}(x,\epsilon).$$

Donde $B_d(x,\delta) \subset B_{d'}(x,\epsilon)$.

Por outro lado, temos $d(x,y) \leq \frac{1}{\alpha} d'(x,y)$, então procedemos de forma análoga com $\delta = \epsilon\alpha$ e concluímos que $B_{d'}(x,\delta) \subset B_d(x,\epsilon)$.

Denote por $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $d$ e $\mathcal{T}'$ a gerada por $d'$. Com o que foi mostrado acima obtemos que qualquer elemento da base da topologia gerada por $d$ pode ser escrito como união de elementos da base de $d'$, ou seja, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ e também mostramos que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, o que conclui a demonstração. □

*Exemplo* 4.2. Sejam $d$ e $\rho$ métricas em $\mathbb{R}^n$ dadas por

$$d(x,y) = ||x-y|| = \Big((x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2\Big)^{1/2}$$

$$\rho(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|\}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que ambas as métricas geram a mesma topologia.

Basta notar que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, se $\rho(x,y) = |x_i - y_i|$, então:

$$|x_i - y_i| = \Big(|x_i-y_i|^2\Big)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right)^{1/2} \Rightarrow \rho(x,y) \leq d(x,y)$$

$$d(x,y)^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j-y_j|^2 \leq n|x_i-y_i|^2 \Rightarrow d(x,y) \leq \sqrt{n}\rho(x,y)$$

A Proposição 4.2 nos garante que $d$ e $\rho$ geram a mesma topologia.

Agora veremos que essa topologia é a topologia produto de $\mathbb{R}$ com a topologia euclidiana $n$ vezes, vamos usar a mesma estratégia da proposição anterior: mostrar que qualquer ponto num elemento da base $U$ de uma topologia está contido num elemento $V$ da base da outra com $V \subset U$.

Seja $B = \prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ um elemento na base da topologia produto e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$. Tome $\epsilon$ de forma que $(x_i - \epsilon, x_i + \epsilon) \subset (a_i, b_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$, vale que

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \in B_\rho(x,\epsilon) \Rightarrow |x_i - y_i| < \epsilon \Rightarrow y_i \in (a_i, b_i)$$

para todo $1 \leq i \leq n$, portanto $y \in B$.

Por outro lado, dado $B_\rho(x,\epsilon)$ temos que

$$B_\rho(x,\epsilon) = (x_1-\epsilon, x_1+\epsilon) \times \cdots \times (x_n-\epsilon, x_n+\epsilon)$$

é um elemento da base da topologia produto, logo qualquer ponto de $B_\rho(x,\epsilon)$ está contido num elemento da base da topologia produto contido em $B_\rho(x,\epsilon)$.

*Exemplo* 4.3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $\overline{d}(a,b) = \max\{d(a,b), 1\}$ onde $d(a,b) = |a-b|$, então a função $D : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$D(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} \right\}$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^\omega$. Ademais, $D$ gera a mesma topologia que o produto enumerável de $\mathbb{R}$ com a topologia euclidiana.

*Observação* 4.1.

- Se $d$ é uma métrica em $X$ que gera uma topologia $\mathcal{T}$ e $A \subset X$ então $d|_{A\times A}$ gera a topologia de subespaço em $A$ (em relação a $\mathcal{T}$).

- Todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff. Para verificar isso basta tomar um espaço métrico $X$ e dois pontos distintos $x, y \in X$, as bolas $B(x,\epsilon)$ e $B(y,\epsilon)$ com $\epsilon = \frac{1}{2}d(x,y)$ são disjuntas.

  Como consequência disso temos que espaços que não são de Hausdorff não são metrizáveis.

- Produtos enumeráveis de espaços metrizáveis com a topologia produto são metrizáveis. Basta tomar a distância $D$ definida no Exemplo 4.3, com a diferença que cada um dos espaços no produto $\prod X_i$ terão uma métrica $d_i$.

## 4.1 Continuidade em espaços métricos

**Teorema 4.1.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos com distâncias $d_X$ e $d_Y$ respectivamente. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$ e todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ para qualquer $y \in X$.*

*Demonstração.* Suponha que $f$ é contínua em $x \in X$, tome $x \in X$ e tome $\epsilon > 0$. Pela continuidade temos que $f^{-1}(B(f(x),\epsilon)) \subset X$ é aberto contendo $x$, logo deve conter uma bola $B(x,\delta)$ para algum $\delta > 0$. Disso segue que, dado $y \in X$:

$$d_X(x,y) < \delta \Rightarrow y \in B(x,\delta) \Rightarrow y \in f^{-1}(B(f(x),\epsilon))$$

$$\Rightarrow f(y) \in B(f(x),\epsilon) \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Reciprocamente, suponha que a implicação é válida para todo $y \in X$ e considere $V \subset Y$ aberto, vamos mostrar que $f^{-1}(V)$ é aberto.

Tome $x \in f^{-1}(V)$ e $\epsilon > 0$ tal que $B(f(x), \epsilon) \subset V$, por hipótese existe $\delta > 0$ de forma que $d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ para todo $y \in X$, o que é equivalente a $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$ e portanto

$$B(x, \delta) \subset f^{-1}(f(B(x, \delta))) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) \subset f^{-1}(V).$$

O que mostra que $f^{-1}(V)$ é aberto e com isso concluímos que $f$ é contínua. $\square$

**Lema 6.3.** *Seja $X$ um espaço topológico e $A \subset X$, se existe uma sequência de pontos de $A$ que converge para $x \in X$ então $x \in \overline{A}$. Se $X$ é metrizável vale a recíproca.*

*Demonstração.* Suponha que $(x_n)$ converge para $x$, da definição de sequência convergente sabemos que todo aberto contendo $x$ contém infinitos elementos da sequência. Como a sequência está contida em $A$, então todo aberto contendo $x$ intersecta $A$ e portanto $x \in \overline{A}$.

Agora suponha que $X$ é metrizável e que $x \in \overline{A}$, disso segue que para todo $n$ natural a bola $B(x, \frac{1}{n})$ intersecta $A$ em um ponto $x_n$, vamos mostrar que a sequência $(x_n)$ converge para $x$.

Seja $U$ um aberto contendo $x$ e $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$, considere $N \in \mathbb{N}$ de forma que $\dfrac{1}{N} < \epsilon$. Pela definição de bola aberta temos $B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, \epsilon) \subset U$ para todo $n \geq N$ e portanto $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. $\square$

**Teorema 4.2.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua então para toda sequência $(x_n)$ em $X$ que converge para um ponto $x \in X$, a sequência $(f(x_n))$ converge para $f(x)$. Se $X$ é metrizável é válida a recíproca.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência de pontos de $X$ convergindo para $x$, vamos mostrar que $(f(x_n))$ converge para $f(x)$. Para isso tome $V \subset Y$ uma vizinhança de $f(x)$, como $f$ é contínua então $f^{-1}(V)$ é vizinhança de $x$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in f^{-1}(V)$, isso é o mesmo que dizer que $n > n_0 \Rightarrow f(x_n) \in V$ e portanto $f(x)$ é o limite de $(f(x_n))$

Reciprocamente, suponha que $X$ é metrizável e que a imagem de toda sequência convergente em $X$ converge para a imagem do limite. Vamos mostrar que $f$ é contínua usando o item (2) da Proposição 2.1, ou seja, dado $A \subset X$ vale $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Tome $x \in \overline{A}$ $(f(x) \in f(\overline{A}))$, pelo Lema 6.3 existe uma sequência $(x_n)$ em $A$ convergindo para $x$.

A nossa hipótese garante que $f(x_n) \to f(x)$, porém $(f(x_n))$ é uma sequência em $f(A)$ então podemos usar novamente o Lema 6.3 para concluir que o limite $f(x)$ está em $\overline{f(A)}$, logo $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. $\square$

## 4.2 Convergência uniforme

**Definição 4.4.** Sejam $X$ um espaço topológico, $Y$ espaço métrico com distância $d$, $f : X \to Y$ e $f_n : X \to Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $(f_n)$ **converge uniformemente** para $f$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ de forma que $n > N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$.

**Teorema 4.3.** *Sejam $X$ um espaço topológico, $Y$ espaço métrico com distância $d$, e $f_n : X \to Y$ funções contínuas para cada $n \in \mathbb{N}$ que convergem uniformemente para $f : X \to Y$. Nessas condições $f$ é contínua.*

*Demonstração.* Seja $V \subset Y$ um aberto e $x_0 \in f^{-1}(V)$ queremos encontrar uma vizinhança de $x_0$ que está contida em $f^{-1}(V)$.

Tome $\epsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \epsilon) \subset V$, pela Definição 4.4 existe $N$ de forma que $d(f_n(x), f(x)) < \dfrac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in X$ sempre que $n \geq N$.

Pela continuidade de $f_N$ podemos encontrar uma vizinhança $U$ de $x_0$ com $f_N(U) \subset B(f_N(x_0), \frac{\epsilon}{3})$. Vamos mostrar que $f(U) \subset B(f(x_0), \epsilon)$:

Dado $x \in U$ temos que $d(f_N(x), f(x)) < \dfrac{\epsilon}{3}$ (pela escolha de $N$), $d(f_N(x), f_N(x_0)) < \dfrac{\epsilon}{3}$ (pela escolha de $U$) e $d(f_N(x_0), f(x_0)) < \dfrac{\epsilon}{3}$ (pela escolha de $N$), portanto:

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f_N(x), f(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) < \epsilon$$

donde segue que $f(x) \in B(f(x_0), \epsilon) \subset V$ e com isso

$$f(U) \subset V \Rightarrow U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V).$$

□

# 5 Topologia quociente

**Definição 5.1.** Seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetora entre espaços topológicos, $f$ é chamada de **aplicação quociente** se, para todo $U \subset Y$ vale que $U$ é aberto se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é aberto.

*Observação* 5.1. Toda aplicação quociente é contínua, mas a recíproca não é verdadeira. E um homeomorfismo nada mais é do que uma aplicação quociente bijetora.

**Lema 6.4.** *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são quocientes, então a função composta $g \circ f : X \to Z$ é quociente.*

*Demonstração.* Dado $U \subset Z$, temos que $U$ é aberto se, e só se, $g^{-1}(U)$ é aberto, o que ocorre se, e só se, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto. Como $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$, então $g \circ f$ é quociente. □

**Definição 5.2.** Seja $X$ um espaço topológico, $A$ um conjunto não vazio e $p : X \to A$ uma função sobrejetora, existe uma única topologia em $A$ na qual $p$ é aplicação quociente, essa topologia é chamada de **topologia quociente** induzida por $p$.

Seja $\mathcal{T}'$ a topologia de $X$, pela Definição 5.1 a topologia quociente em $A$ deve ser o conjunto $\mathcal{T} \coloneqq \{U \subset A \mid p^{-1}(U) \in \mathcal{T}'\}$.

As propriedades da imagem inversa nos garantem que $\mathcal{T}$ é uma topologia.

**Definição 5.3.** Seja $X$ um espaço topológico e $X^* \subset \mathcal{P}(X)$ uma partição disjunta de $X$, ou seja, $\bigcup_{A \in X^*} A = X$ e os conjuntos de $X^*$ são dois a dois disjuntos. Seja $p : X \to X^*$ a função que leva cada $x \in X$ no conjunto de $X^*$ que o contém. O conjunto $X^*$ com a topologia induzida por $p$ é chamado de **espaço quociente** de $X$.

*Observação* 5.2.

- Relacionando os elementos de $X$ que estão no mesmo conjunto de $X^*$ definimos uma relação de equivalência em $X$;
- Um subconjunto $U \subset X^*$ é uma coleção de classes de equivalência e portanto $p^{-1}(U)$ é a união dos elementos dessas classes;
- Um conjunto $C \subset X$ é chamado de conjunto saturado se pode ser escrito como imagem inversa de um subconjunto de $X^*$, ou seja, se para cada elemento $x$ de $C$ todos os elemento equivalentes a $x$ (que estão no mesmo conjunto de $X^*$) também estão em $C$.

**Definição 5.4.** Uma função $f : X \to Y$ entre dois espaços topológicos é dita **aberta** se a imagem de abertos de $X$ é sempre um aberto de $Y$. Se a imagem de todo fechado de $X$ é um fechado de $Y$ então $f$ é chamada de **fechada**.

**Proposição 5.1.** *Sejam $p : X \to Y$ uma aplicação quociente, $A$ um subconjunto saturado de $X$ e $q : A \to p(A)$ a restrição de $p$ à $A$. Então:*

1. *Se $A$ é aberto ou fechado, $q$ é aplicação quociente;*
2. *Se $p$ é aberta ou fechada, $q$ é aplicação quociente.*

*Demonstração.* Primeiro mostraremos que, para qualquer $V \subset p(A)$, $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$.

Com efeito, dado que $A$ é saturado então é a imagem inversa de um subconjunto de $Y$, digamos $p^{-1}(B) = A$ e como $p$ é sobrejetora temos $p(A) = B$. Logo $p^{-1}(V) \subset p^{-1}(B) = A$. Portanto $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$, já que todos os elementos de $X$ que são levados em $V$ por $p$ estão em $A$.

Agora vamos verificar que $p(U \cap A) = p(U) \cap p(A)$ para todo $U \subset X$.

A inclusão $p(U \cap A) \subset p(U) \cap p(A)$ é sempre verdadeira, por outro lado, tome $y \in p(U) \cap p(A)$ disso segue que $y = p(x_1) = p(x_2)$, $x_1 \in U$ e $x_2 \in A$ e utilizando o que vimos acima:

$$y \in p(A) \Rightarrow \{y\} \subset p(A) \Rightarrow p^{-1}(\{y\}) \subset A \Rightarrow x_1 \in A.$$

Mas como $x_1 \in U$ então $y = p(x_1) \in p(U \cap A)$ o que prova a igualdade.

Finalmente prosseguimos para a afirmação da proposição:

Suponha que $A$ ou $p$ é aberto e tome $V \subset p(A)$, devemos mostrar que $V$ é aberto em $p(A) \Leftrightarrow q^{-1}(V)$ é aberto em $A$.

($\Rightarrow$) Se $V$ é aberto em $p(A)$ então $q^{-1}(V)$ é aberto em $A$, pois $q$ é contínua.

($\Leftarrow$) Suponha que $q^{-1}(V)$ é aberto em $A$.

- Caso 1: $A$ é aberto.

  Note que $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$, ou seja, $p^{-1}(V)$ é aberto em $A$, mas como $A$ é aberto em $X$, $p^{-1}(V)$ também o é, do que segue que $V$ é aberto em $Y$ e consequentemente em $p(A)$.

- Caso 2: $p$ é aberta.

  Novamente, como $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$, podemos escrever $p^{-1}(V) = U \cap A$ com $U$ aberto de $X$. A função $p$ é sobrejetora e aberta, logo

  $$V = p(p^{-1}(V)) = p(U \cap A) = p(U) \cap p(A)$$

  portanto $V$ é aberto em $p(A)$, dado que $p(U)$ é aberto em $Y$.

$\square$

**Proposição 5.2.** *Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente e $g : X \to Z$ uma função entre espaços topológicos que é constante em cada $p^{-1}(\{y\})$ para todo $y \in Y$. Nessa condições existe uma função $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = g$ e além disso:*

$$f \ \text{ é contínua} \Leftrightarrow g \ \text{ é contínua}$$

$$f \ \text{ é quociente} \Leftrightarrow g \ \text{ é quociente}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Diagrama da função $f$

*Demonstração.* Para cada $y \in Y$ o conjunto $g(p^{-1}(\{y\}))$ é unitário, logo podemos definir $f(y)$ como sendo o único elemento desse conjunto. Dessa forma, vale que, dado $x \in X$ e denotando $y = p(x)$, temos $x \in p^{-1}(\{y\})$ e portanto $f(p(x)) = f(y) = g(x)$, pois $g$ é constante em $p^{-1}(\{y\})$.

Agora, se $f$ é contínua, $g = f \circ p$ também é. Por outro lado, suponha que $g$ é contínua e tome $V \subset Z$ aberto, logo $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$ é aberto. Como $p$ é aplicação quociente, temos que $f^{-1}(V)$ é aberto e $f$ é contínua.

Finalmente, se $f$ é quociente $g$ também o é, pois é composta de aplicações quocientes (Lema 6.4).

Supondo que $g$ é quociente, então deve ser sobrejetora, logo $f$ também é, dado que $f(Y) = f(p(X)) = g(X) = Z$. Além disso, tome $V \subset Z$, vale que:

$$f^{-1}(V) \text{ aberto} \Rightarrow p^{-1}(f^{-1})(V) = g^{-1}(V) \text{ aberto} \Rightarrow V \text{ aberto}$$

e portanto $f$ é quociente, pois a outra implicação ($V$ aberto $\Rightarrow f^{-1}(V)$ aberto) segue da continuidade de $g$. □

**Corolário 5.1.** *Sejam $g : X \to Z$ sobrejetora e contínua e $X^* = \{g^{-1}(\{z\}) \,|\, z \in Z\}$ com a topologia quociente induzida por $g$.*

*(i) A função $g$ induz uma função $f : X^* \to Z$ contínua bijetora. Além disso $f$ é homeomorfismo se, e somente se, $g$ é quociente;*

*(ii) Se $Z$ é um espaço de Hausdorff, $X^*$ também o é.*

*Demonstração.* (i) Considere a aplicação quociente $p : X \to X^*$ que leva cada ponto $x$ no conjunto contendo ele. Pela definição de $X^*$ temos que $p(x) = g^{-1}(\{g(x)\})$ e $g$ é constante em cada $p^{-1}(A)$ com $A \in X^*$. Portanto podemos aplicar a Proposição 5.2 e concluir que existe $f : X^* \to X$ que satisfaz $p \circ f = g$ e como $g$ é contínua, $f$ também é.

Ademais, $f$ é sobrejetora, pois $g$ é sobrejetora. Para mostrar a injetividade tome $A, B \in X^*$ com $f(A) = f(B)$, como $A$ e $B$ não podem ser vazios (pois $g$ é sobrejetora) então existem $x \in A$ e $y \in B$ e $f(A) = g(x) = g(y) = f(B)$, mas disso segue que $x$ e $y$ estão no mesmo conjunto de $X^*$, logo $A = B$.

Agora suponha que $f$ é um homeomorfismo, disso obtemos que $f$ e $p$ são quocientes, logo $g = f \circ p$ também é.

Por outro lado, se $g$ é quociente, novamente pela Proposição 5.2, $f$ também é, portanto é homeomorfismo.

(ii) Suponha que $Z$ é um espaço de Hausdorff e tome $A$, $B$ distintos em $X^*$. Segue de $f(A) \neq f(B)$ que $f(A)$ e $f(B)$ possuem vizinhanças disjuntas $U$ e $V$ respectivamente, mas da continuidade de $f$, temos que $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ são abertos contendo $A$ e $B$, respectivamente, e $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = \emptyset$.

$\square$

# 6 Espaços conexos

**Definição 6.1.** Um espaço topológico $X$ é chamado **conexo** se não existem $U, V \subset X$ abertos disjuntos e não vazios tais que $X = U \cup V$.

De forma equivalente, um espaço é $X$ conexo se os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados de $X$ são $\emptyset$ e $X$.

Ademais, dois conjuntos $A, B \subset X$ abertos, disjuntos e não vazios cuja união é $X$ formam uma **separação** de $X$.

**Lema 6.5.** *Se $A, B \subset X$ formam uma separação de $X$ e $Y \subset X$ é conexo, então $Y \subset A$ ou $Y \subset B$.*

*Demonstração.* Os conjuntos $Y \cap A$ e $Y \cap B$ são disjuntos e abertos em $Y$, ainda, sua união é $Y$, pois $A \cup B = X$. Se forem ambos não vazios, então formam uma separação de $Y$, do que segue que um deles é vazio e $Y$ deve estar contido no outro. $\square$

**Proposição 6.1.** *A união de conexos com um ponto em comum é um conexo.*

*Demonstração.* Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma coleção de conexos e $p \in \cap A_\alpha$. Suponha que $C$ e $D$ formam uma separação de $\cup A_\alpha$ e $p \in C$ (sem perda de generalidade). Pelo Lema 6.5, para cada $\alpha \in \Lambda$ devemos ter $A_\alpha \subset C$ ou $A_\alpha \subset D$, mas como $p \in A_\alpha$, então $A_\alpha \subset C$, do que segue que $D = \emptyset$, uma contradição. $\square$

**Proposição 6.2.** *Sejam $A, B \subset X$ com $A \subset B \subset \overline{A}$ e $A$ conexo, então $B$ é conexo.*

*Demonstração.* Suponha que $C$ e $D$ formam uma separação de $B$, vale que $\overline{C} \cap D = \emptyset$ pois, caso contrário, existiria $p \in \overline{C} \cap D$, logo haveria uma vizinhança de $p$ que está contida em $D$ e intersecta $C$, ou seja, $C \cap D \neq \emptyset$. De forma análoga, $C \cap \overline{D} = \emptyset$.

Pelo Lema 6.5, $A$ está contido em $C$ ou $D$, suponha $A \subset C$, disso obtemos uma contradição:

$$A \subset C \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{C} \Rightarrow \overline{A} \cap D = \emptyset \Rightarrow B \cap D = \emptyset.$$

$\square$

**Proposição 6.3.** *A imagem de um conexo por uma função contínua é conexo.*

*Demonstração.* Se $X$ é conexo e $f : X \to Y$ é contínua, a restrição $g : X \to f(X)$ também é contínua. Suponha que $A$ e $B$ formam uma separação de $f(X)$, então $g^{-1}(A)$ e $g^{-1}(B)$ são abertos disjuntos não vazios cuja união é $X$, uma contradição. $\square$

**Proposição 6.4.** *O produto finito de conexos é conexo.*

*Demonstração.* Tome $(a, b)$ no produto dos conexos $X$ e $Y$, então

$$T_x \coloneqq (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

é conexo para todo $x \in X$, pois é união de dois conexos com $(x, b)$ em comum. Além disso $(a, b) \in T_x$, para todo $x \in X$, portanto $X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x$ é conexo.

Como $X_1 \times \cdots \times X_n$ é homeomorfo a $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$, o caso geral segue por indução. □

*Exemplo* 6.1. O mesmo não se pode afirmar para o produto infinito com a topologia das caixas, o conjunto $\mathbb{R}^\omega$ munido dessa topologia não é conexo. Pode ser escrito, por exemplo, como a união do subconjunto das sequências limitadas com o subconjunto das sequências ilimitadas, que são uma separação de $\mathbb{R}^\omega$.

Já com a topologia produto esse mesmo conjunto é conexo.

**Teorema 6.1.** $\mathbb{R}$ *e seus intervalos são conexos com a topologia da ordem.*

*Demonstração.* Seja $Y \subset \mathbb{R}$ intervalo (limitado ou não), e suponha que $A$ e $B$ formam uma separação de $Y$. Tome $a \in A$, $b \in B$ e suponha, sem perda de generalidade, que $a < b$. Então $A_0 = A \cap [a, b]$ e $B_0 = B \cap [a, b]$ formam uma separação de $[a, b]$, dado que $[a, b] \subset Y$.

Seja $c$ o supremo de $A_0$ (existe pois $A_0$ é limitado), primeiro suponha que $c \in B_0$, disso segue que $c \neq a$, logo $c = b$ ou $a < c < b$.

Como $B_0$ é aberto em $[a, b]$, existe um intervalo do tipo $(d, c]$ contido em $B_0$, se $c = b$ então $d$ é cota superior de $A_0$, mas $d < c$, uma contradição. Se $c < b$, como $(c, b] \cap A_0 = \emptyset$, então $(d, b] \cap A_0 = \emptyset$, contradição dado que $d$ seria cota superior de $A_0$. Concluímos que $c \notin B_0$.

Suponha, então, $c \in A_0$, logo existe $[c, e) \subset A_0$ (pois $A_0$ é aberto de $[a, b]$), isso é uma contradição dado que $c$ é supremo de $A$.

Com isso temos que $c \notin A_0$ e $c \notin B_0$, mas $c = \sup(A_0) \in [a, b]$, que é união de $A_0$ e $B_0$, outro absurdo.

Portanto, tal separação de $Y$ não pode existir e $Y$ é conexo. □

**Teorema 6.2** (Valor intermediário)**.** *Seja $f : X \to Y$ contínua, $X$ conexo e $Y$ um conjunto ordenado com a topologia da ordem. Se $a, b \in X$ e $r \in Y$ tal que $f(a) \leq r \leq f(b)$, então existe $c \in X$ com $f(c) = r$.*

*Demonstração.* Defina os abertos $A = f(X) \cap (-\infty, r)$ e $B = f(X) \cap (r, +\infty)$. Eles são disjuntos e não vazios, dado que $f(a) \in A$ e $f(b) \in B$, se sua união for $f(X)$, então eles formam uma separação de $f(X)$, o que não pode ocorrer (Proposição 6.3). Portanto existe um elemento de $f(X)$ que não está em $A \cup B$, esse elemento só pode ser $r$, logo $f(c) = r$ para algum $c \in X$. $\square$

## 6.1 Conexidade por caminhos

**Definição 6.2.** Dados $x, y$ pontos de um espaço topológico $X$, um **caminho** entre $x$ e $y$ é uma função contínua $f : [a, b] \to X$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $f(a) = x$, $f(b) = y$.

Um espaço é dito **conexo por caminhos** se para qualquer par de pontos existe um caminho entre eles.

Essa definição é mais forte do que a de conexidade. De fato, se $X$ é conexo por caminhos e $A \cup B$ é uma separação de $X$, tomando um ponto $x \in A$ e $y \in B$ e $f : [a, b] \to X$ um caminho entre $x$ e $y$, então $f([a, b])$ é conexo mas não está inteiramente contido em $A$ nem em $B$, uma contradição.

**Proposição 6.5.** *A imagem de um espaço conexo por caminhos por uma função contínua é conexa por caminhos.*

*Demonstração.* Seja $g : X \to Y$ contínua e $X$ conexo por caminhos, tome $g(x), g(y) \in g(X)$ e $f$ um caminho entre $x$ e $y$. Dessa forma, $g \circ f$ é um caminho entre $g(x)$ e $g(y)$. $\square$

*Exemplo* 6.2. Nem todo espaço conexo é conexo por caminhos: considere

$$S = \left\{ \left( x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) ; 0 < x \leq 1 \right\}.$$

$\overline{S}$ como subespaço de $\mathbb{R}^2$ com a topologia euclidiana é chamada de curva senoidal do topologista. $S$ é conexo pois é imagem de $(0, 1]$ por uma função contínua, logo $\overline{S}$ também é conexo. Porém não existe caminho entre $(0, 0) \in \overline{S}$ e qualquer ponto de $S$.

*Exemplo* 6.3. Com a definição de conexidade podemos ver que os espaços $(0, 1)$ e $(0, 1]$ não são homeomorfos, afinal, se existisse um homeomorfismo $f : (0, 1] \to (0, 1)$, então $(0, 1] - \{1\}$ seria homeomorfo a $(0, 1) - \{f(1)\}$, mas o primeiro é conexo e o último não.

Da forma semelhante, retirando uma reta de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, temos um espaço conexo, mas o mesmo não ocorre retirando uma reta de $\mathbb{R}$, logo estes espaços não são homeomorfos.

## 6.2 Componentes

**Definição 6.3.** Sejam $x, y \in X$, defina uma relação de equivalência $\sim$ da seguinte forma: $x \sim y$ se existe um subespaço conexo de $X$ contendo $x$ e $y$. As classes de equivalência de $\sim$ são chamadas **componentes** de $X$.

De forma análoga são definidas as **componentes por caminhos**.

**Lema 6.6.** *As componentes de um espaço são conexas.*

*Demonstração.* Seja $X$ um espaço topológico e $C \subset X$ uma componente de $X$. Tome $x_0 \in C$, para cada $x \in C$, existe, pela definição de componente, um conexo $A_x$ que contém $x$ e $x_0$. Dado um ponto $y$ de $A_x$, temos que $y \sim x_0$, logo $A_x \subset C$. Com isso, podemos escrever $C$ como a união $\bigcup_{x \in C} A_x$, como cada $A_x$ é conexo e todos têm o ponto $x_0$ em comum, então $C$ é conexo. □

**Definição 6.4.** $X$ é dito **localmente conexo** se, para todo $x \in X$ e toda vizinhança $U$ de $x$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de $x$ que é conexa.

$X$ é **localmente conexo por caminhos** se, para todo $x \in X$ e $U$ vizinhança de $x$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de $x$ que é conexa por caminhos.

**Proposição 6.6.** *$X$ é localmente conexo se, e somente se, para todo $U$ aberto, cada componente de $U$ é aberta.*

*Demonstração.* Suponha $X$ localmente conexo e tome $U \subset X$ aberto, $C$ componente de $X$ e $x \in C$. Pela Definição 6.3 existe $V \subset U$ vizinhança conexa de $x$, o Lema 6.5 garante que $V \subset C$, logo $C$ é aberto.

Reciprocamente, suponha que as componentes dos abertos de $X$ são abertas. Tome $U$ uma vizinhança de um ponto $x \in X$, seja $C$ a componente de $U$ contendo $x$, então, usando o Lema 6.2, $C$ é uma vizinhança conexa de $x$ contida em $U$. □

A próxima proposição segue de forma análoga.

**Proposição 6.7.** *$X$ é localmente conexo por caminhos se, e somente se, para todo $U$ aberto, cada componente por caminhos de $U$ é aberta.*

Também é válido o seguinte resultado.

**Proposição 6.8.** *Cada componente por caminhos de $X$ está contida numa componente de $X$. Além disso, se $X$ é localmente conexo por caminhos, as componentes e as componentes por caminhos coincidem.*

# 7 Espaços compactos

**Definição 7.1.** Dado $X$ um espaço topológico, uma coleção $\mathcal{A}$ de subespaços de $X$ é uma **cobertura** de $X$ se sua união é igual a $X$. Se todos os subespaços da coleção são abertos, então $\mathcal{A}$ é uma **cobertura aberta**.

**Definição 7.2.** $X$ é chamado de **espaço compacto** se toda cobertura aberta possui uma subcoleção (subcobertura) finita que cobre $X$.

*Exemplo* 7.1. Temos os seguintes resultados:

- $\mathbb{R}$ não é compacto: $\{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura que não possui subcobertura finita.
- Todo conjunto finito é compacto.
- $(0,1]$ não é compacto: $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right] \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ é uma cobertura que não possui subcobertura finita.

Quando $Y \subset X$, podemos considerar como cobertura de $Y$ uma coleção de abertos de $X$ cuja união contém $Y$. Nesse caso, $Y$ é compacto quando qualquer cobertura dessa forma admite uma subcobertura finita dessa forma. Essa definição é equivalente à Definição 7.2.

**Proposição 7.1.** *Todo subespaço fechado de um compacto é compacto.*

*Demonstração.* Sejam $X$ um compacto, $Y \subset X$ fechado e $\mathcal{A}$ cobertura de $Y$ por abertos de $X$. Disso segue que $\mathcal{A} \cup \left\{Y^{\complement}\right\}$ é cobertura aberta de $X$, logo possui subcobertura finita. Essa subcobertura (com exceção de $Y^{\complement}$, caso esteja nela) é cobertura finita de $Y$ e está contida em $\mathcal{A}$. □

**Proposição 7.2.** *Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

*Demonstração.* Sejam $X$ um espaço de Hausdorff e $Y \subset X$ compacto. Tome $x \in Y^{\complement}$, para cada $y \in Y$ considere $U_y$ e $V_y$ vizinhanças disjuntas de $x$ e $y$, respectivamente. Vale que $\{V_y\}$ é cobertura aberta de $Y$, logo $Y$ pode ser coberto por finitos elementos dessa coleção: $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$.

Com isso temos que $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ é disjunto de $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Se $z \in Y$, então $z \in V_{y_i}$ para algum $y_i$, logo $z \notin U$, portanto $x \in U \subset Y^{\complement}$, e $Y^{\complement}$ é aberto. □

*Observação* 7.1. Com a última demonstração concluímos que, se $X$ é $T_2$ e $Y \subset X$ é compacto, então para cada ponto $x \notin Y$, existem abertos disjuntos contendo $x$ e $Y$, respectivamente.

**Proposição 7.3.** *A imagem de um compacto por uma função contínua é compacta.*

*Demonstração.* Sejam $X$ compacto, $f : X \to Y$ contínua e $\mathcal{A}$ cobertura aberta de $f(X)$. Temos que $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ é cobertura aberta de $X$, logo possui subcobertura finita $\{f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)\}$. Portanto $\{A_1, \ldots, A_n\}$ cobre $f(X)$. □

**Proposição 7.4.** *Se $X$ é compacto, $Y$ é $T_2$ e $f$ uma bijeção contínua entre $X$ e $Y$. Nessas condições, $f$ é homeomorfismo*

*Demonstração.* Tome $A \subset X$ fechado, segue das Proposições 7.1 e 7.3 que $A$ é compacto e $f(A)$ também, portanto $f(A)$ é fechado (Proposição 7.2). Como a imagem de qualquer fechado é fechada, $f^{-1}$ é contínua e $f$ é homeomorfismo. □

O próximo lema será utilizado para mostrar que o produto finito de compactos é compacto.

**Lema 6.7.** *Dados $X, Y$ espaços topológicos com $Y$ compacto. Se $x_0$ é um ponto de $X$ e $N$ é um aberto de $X \times Y$ contendo $\{x_0\} \times Y$ então existe uma vizinhança $W$ de $x_0$ tal que $W \times Y \subset N$.*

*Demonstração.* Como $\{x_0\} \times Y$ é homeomorfo a $Y$, então é compacto. Disso segue que possui uma cobertura finita $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$, onde cada $U_j \times V_j$ é um elemento da base de $X \times Y$ que intersecta $\{x_0\} \times Y$ e está contido em $N$.

Seja $W = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ um aberto que contém $x_0$. Tome $(x, y) \in W \times Y$, existe um elemento $U_i \times V_i$ da cobertura de $\{x_0\} \times Y$ que contém $(x_0, y)$, ou seja, $y \in V_i$. Como $x \in W$, então $x \in U_j$ para todo $j$ entre 1 e $n$, logo $(x, y) \in U_i \times V_i$, Com isso obtemos que $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$ também cobre $W \times Y$.

Como cada $U_j \times V_j$ está contido em $N$ e a união deles cobre $W \times Y$, então $W \times Y$ está contido em $N$. □

**Proposição 7.5.** *O produto finito de compactos é compacto.*

*Demonstração.* Sejam $X$ e $Y$ compactos e $\mathcal{A}$ cobertura aberta de $X \times Y$. Tome $x_0 \in X$, como $Y$ é compacto, $\{x_0\} \times Y$ também é, portanto existem $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ que cobrem $\{x_0\} \times Y$.

Denotando $N = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, podemos aplicar o Lema 6.7 para concluir que $N$ contém $W \times Y$ para alguma vizinhança $W$ de $x_0$.

Com isso vemos que, para cada $x \in X$, existe $W_x$ dessa forma. Além disso, o conjunto $\{W_x\,,\, x \in X\}$ é cobertura aberta de $X$, logo existem $W_{x_1}, \ldots, W_{x_m}$ que cobrem $X$. Disso segue que $W_{x_1} \times Y, \ldots, W_{x_m} \times Y$ cobre $X \times Y$.

Porém, vimos que cada $W_x \times Y$ é coberto por uma subcoleção finita de elementos de $\mathcal{A}$, logo $X \times Y$ também é. □

**Proposição 7.6.** *Um espaço topológico $X$ é compacto se, e somente se, satisfaz a seguinte condição:*

*Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de fechados de $X$, se toda subcoleção finita de $\mathcal{C}$ tem interseção não vazia, então a interseção de todos os elementos de $\mathcal{C}$ é não vazia.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{A}$ uma coleção de abertos de $X$ e $\mathcal{C} = \left\{A^{\complement} \,|\, A \in \mathcal{A}\right\}$, então, segue de $(\cup A_\alpha)^{\complement} = \cap A_\alpha^{\complement}$ que:

- $\mathcal{A}$ cobre $X$ se, e somente se, $\bigcap\limits_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$.
- $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ cobre $X$ se, e somente se, $\bigcap\limits_{i=n}^{n} A_i^{\complement} = \emptyset$.

Note que a contrapositiva da condição exposta na Definição 7.2 é: se nenhuma subcoleção finita de $\mathcal{A}$ cobre $X$, então $\mathcal{A}$ não cobre $X$. Mas, usando os itens acima, isso é equivalente a: se toda subcoleção finita de elementos de $\mathcal{C}$ tem interseção não vazia, então a interseção de todos os elementos de $\mathcal{C}$ é não vazia. A última é justamente a condição do enunciado. □

## 7.1 Subespaços compactos de $\mathbb{R}^n$

**Proposição 7.7.** *Todo intervalo fechado de $\mathbb{R}$ é compacto.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{A}$ cobertura de $I = [a, b]$, com $a < b$ reais. Primeiro note que, dado $x \in I$ diferente de $b$, o aberto de $\mathcal{A}$ que contém $x$ também contém $[x, d)$ para algum $x < d \leq b$, logo existe $y \in I$ maior que $x$ de forma que $[x, y]$ é coberto por um mesmo elemento de $\mathcal{A}$.

Denote por $C$ o conjunto dos pontos $y > a$ de $I$ tais que $[a, y]$ é coberto por um número finito de elementos de $\mathcal{A}$, pelo parágrafo anterior sabemos que $C \neq \emptyset$, logo existe $c = \sup C$. Vamos mostrar que $c \in C$.

Seja $A \in \mathcal{A}$ com $c \in A$ (existe, pois $c \in I$), vale que $[d, c) \subset A$ para algum $d \in I$. Como $c$ é o supremo de $C$, existe $z \in (d, c)$ de forma que $z \in C$, logo $[a, z]$ é coberto por finitos abertos de $\mathcal{A}$, ainda, dado que $A$ cobre $(d, c]$, então $[a, c]$ é coberto por finitos abertos, logo $c \in C$.

Agora veremos que $c = b$. Suponha, por absurdo, que $c < b$, disso obtemos que existe $y > c$ de forma que $[c, y]$ é coberto por algum $A \in \mathcal{A}$. Como $c \in C$, então $A_1, \ldots, A_n$ cobrem $[a, c]$, logo $A, A_1, \ldots, A_n$ cobrem $[a, y]$ e $y \in C$, uma contradição. Portanto $c = b$ e $I$ é coberto por finitos elementos de $\mathcal{A}$. □

*Observação* 7.2. A proposição também vale trocando $\mathbb{R}$ por qualquer conjunto ordenado com a propriedade do supremo, fazendo as devidas adaptações na demonstração.

**Teorema 7.1** (Heine-Borel)**.** *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado (com a métrica euclidiana).*

*Demonstração.* Podemos considerar qualquer métrica que gera a topologia euclidiana, por isso vamos mostrar para a métrica $\rho$ do Exemplo 4.2. Denotaremos $(0, \ldots, 0)$ por 0.

Suponha $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto e considere $\mathcal{A} = \{B_\rho(0, m) \,|\, m \in \mathbb{N}\}$. Como $A$ é coberto por finitas bolas desse conjunto, então existe $M$ tal que $A \subset B_\rho(0, M)$, com isso $A$ é limitado, pois, para quaisquer $x, y \in A$, temos $\rho(x, y) \leq 2M$. Além disso, pela Proposição 7.2, $A$ é fechado.

Reciprocamente, suponha que $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e limitado e que $\rho(x, y) \leq N$ para todos $x, y \in A$. Dado $x_0 \in A$, então $\rho(x, 0) \leq N + \rho(x_0, 0)$ para todo $x \in A$. Portanto $A$

está contido em $[-N-\rho(x_0,0), N+\rho(x_0,0)]^n$ (usando a definição de $\rho$), que é compacto. A Proposição 7.1 nos garante que $A$ é compacto. $\square$

**Proposição 7.8.** *Se $X$ é compacto, $Y$ tem a topologia da ordem e $f : X \to Y$ é contínua, então existem $c, d \in X$ tais que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo $x \in X$.*

*Demonstração.* Suponha que $f(X)$ não possui elemento máximo, disso segue que o seguinte conjunto é cobertura por abertos de $f(X)$:

$$\{(-\infty, y) \,|\, y \in f(X)\}.$$

Mas como $f(X)$ é compacto, então existem $(-\infty, y_1), \ldots, (-\infty, y_n)$ que o cobrem. Seja $y$ o máximo dos $y_i$, então $y \in f(X)$ mas não está em nenhum destes intervalos, um absurdo.

De maneira análoga, $f(X)$ possui elemento mínimo, o que conclui a demonstração. $\square$

Como consequência imediata temos que qualquer função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ definida num compacto atinge máximo e mínimo global. Em particular isso ocorre quando $X$ é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

**Definição 7.3.** Dado $(X, d)$ um espaço métrico e $A \subset X$ não vazio, para cada $x \in X$, a distância de $x$ a $A$ é:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \,|\, a \in A\},$$

A função que leva $x$ em $d(x, A)$ é contínua. Com efeito, dados $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} d(x, A) \leq d(x, a) &\leq d(x, y) + d(y, a), \ \forall a \in A \\ \therefore\ d(x, A) - d(x, y) &\leq \inf_{a \in A} d(y, a) = d(y, A) \qquad (6.1) \\ \therefore\ d(x, A) - d(y, A) &\leq d(x, y) \\ |d(x, A) - d(y, A)| &\leq d(x, y). \end{aligned}$$

Com isso, dado $\epsilon > 0$ e tomando $\delta = \epsilon$, temos, para quaisquer $x, y \in X$:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |d(x, A) - d(y, A)| < \epsilon.$$

**Definição 7.4.** Dados $(X, d)$ um espaço métrico e $B \subset X$, o supremo das distâncias entre elementos de $B$ é chamado de **diâmetro** de $B$, se não existe tal valor, o diâmetro é infinito.

**Lema 6.8** (Número de Lebesgue)**.** *Sejam $(X, d)$ um espaço métrico e $\mathcal{A}$ cobertura aberta de $X$. Se $X$ é compacto, existe um $\delta > 0$ de forma que, para cada $B \subset X$ com diâmetro menor que $\delta$, existe $A \in \mathcal{A}$ com $B \subset A$.*

*O número real $\delta$ é chamado de número de Lebesgue da cobertura $\mathcal{A}$.*

*Demonstração.* Se $X \in \mathcal{A}$, então qualquer real positivo satisfaz a condição, então suponha $X \notin \mathcal{A}$ e considere $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ subcobertura de $X$. Defina $C_i = A_i^{\complement}$ e $f(x) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$. Como cada $C_i$ é não vazio, então estas distâncias existem.

Como $f$ é uma função contínua definida em um compacto, existe um valor mínimo, que será denotado por $\delta$. Vale que $\delta > 0$, com efeito, dado $x \in X$ e $A_i$ contendo $x$, então $B(x, \varepsilon) \subset A_i$ para algum $\varepsilon > 0$, sendo assim:

$$f(x) \geq \frac{d(x, C_i)}{n} \geq \frac{\varepsilon}{n} > 0.$$

Agora considere $B \subset X$ com diâmetro menor que $\delta$ e $x_0 \in B$, então $B \subset B(x_0, \delta)$, disso obtemos, para algum $m$ entre 1 e $n$:

$$\delta \leq f(x_0) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{d(x_0, C_i)\} = d(x_0, C_m) \Rightarrow$$

$$d(x_0, C_m) - \delta \geq 0.$$

Dado $\tilde{x} \in B(x_0, \delta)$, por 6.1, vale que

$$d(\tilde{x}, C_m) \geq d(x_0, C_m) - d(\tilde{x}, x_0) > d(x_0, C_m) - \delta \geq 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{x} \in C_m^{\complement}.$$

Portanto

$$B(x_0, \delta) \subset C_m^{\complement} = A_m \Rightarrow$$

$$B \subset A_m.$$

□

**Definição 7.5.** Dados $X, Y$ espaços métricos e $f : X \to Y$, $f$ é dita **uniformemente contínua** se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

para todos $x, y \in X$.

Essa definição é mais forte do que a continuidade, veremos agora quando elas são equivalentes.

**Teorema 7.2.** *Uma função contínua entre espaço métricos e com domínio compacto é uniformemente contínua.*

*Demonstração.* Sejam $X, Y$ espaços métricos com $X$ compacto, $f : X \to Y$ contínua e $\varepsilon > 0$. O conjunto $\left\{\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \mid y \in Y\right\}$ é cobertura aberta de $Y$, logo o conjunto $\mathcal{A}$ definido da seguinte forma é cobertura aberta de $X$:

$$\mathcal{A} = \left\{f^{-1}\left(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \mid y \in Y\right\}.$$

Seja $\delta$ o número de Lebesgue de $\mathcal{A}$, dados $x_1, x_2 \in X$ com $d(x_1, x_2) < \delta$, então o diâmetro de $\{x_1, x_2\}$ é menor que $\delta$, disso segue que, para algum $y \in Y$:

$$\{f(x_1), f(x_2)\} \subset B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

$\square$

**Proposição 7.9.** *Seja $X$ um espaço de Hausdorff compacto, se $X$ não possui pontos isolados (conjuntos unitários abertos) então $X$ é não enumerável.*

*Demonstração.* Tome $U$ aberto de $X$ e $x \in X$, vamos verificar que existe um aberto $V$ não vazio contido em $U$ com $x \notin \overline{V}$.

Sejam $y \in U$ diferente de $x$ e $W_1$ e $W_2$ vizinhanças de $x$ e $y$, respectivamente, e disjuntos. Então, definindo $V = W_2 \cap U$, temos $x \notin \overline{V}$, pois $W_1 \cap V = \emptyset$, além disso $V \neq \emptyset$, pois $y \in V$.

Agora mostraremos que uma função $f : \mathbb{N} \to X$ qualquer não pode ser sobrejetora.

Seja $x_1 = f(1)$, aplicando o que vimos acima para $x_1$ e $U = X$, temos obtemos um aberto $V_1$ tal que $x_1 \notin \overline{V_1}$. Fazemos o mesmo com $x_2 = f(2)$ e $U = V_1$, e obtemos $V_2 \subset V_1$ com $x_2 \notin \overline{V_2}$. Recursivamente obtemos $V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $X$ é compacto e $\overline{V_1} \supset \overline{V_2} \supset \cdots$, a Proposição 7.6 garante que existe $x \in \bigcap_n \overline{V_n}$, logo $x \neq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Como consequência obtemos que os intervalos não degenerados de $\mathbb{R}$ são não enumeráveis, em particular $\mathbb{R}$ também é.

## 7.2 Outras formas de compacidade

**Definição 7.6.** Um espaço topológico $X$ é dito **contavelmente compacto** se todo subconjunto infinito de $X$ possui ponto de acumulação.

Essa definição é mais forte do que compacidade.

**Definição 7.7.** Um espaço topológico $X$ é dito **sequencialmente compacto** se toda sequência em $X$ possui uma subsequência convergente.

Adicionando uma hipótese sobre $X$ estas duas definições coincidem com a compacidade:

**Proposição 7.10.** *Seja $X$ um espaço metrizável. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *$X$ é compacto.*
2. *$X$ é contavelmente compacto*
3. *$X$ é sequencialmente compacto.*

Veremos agora propriedades locais de espaços topológicos relacionadas a compacidade.

**Definição 7.8.** Um espaço topológico $X$ é **localmente compacto em** $x \in X$ se existe um compacto $C \subset X$ contendo uma vizinhança de $x$. Se isso vale para todo ponto de $X$, então ele é chamado de **localmente compacto**.

**Proposição 7.11.** *Um espaço topológico $X$ é localmente compacto e $T_2$ se, e somente se, existe um espaço $Y$ tal que:*

1. *$X \subset Y$ ($X$ é subespaço de $Y$).*
2. *$Y - X = \{y\}$.*
3. *$Y$ é compacto e $T_2$.*

*Demonstração.* Suponha que $X$ é localmente compacto e $T_2$ e denote por $y$ um objeto que não é ponto de $X$, definimos $Y = X \cup \{y\}$ com a topologia:

$$\mathcal{T} = \{U \,|\, U \text{ é aberto de } X\} \cup \{Y - C \,|\, C \text{ é compacto de } X\}.$$

O conjunto $\mathcal{T}$ é, de fato, topologia, além disso, $X$ é subespaço de $Y$: seja $U \in \mathcal{T}$, se $U$ é aberto de $X$, então $U = X \cap U$. Se $U = Y - C$, então $(Y - C) \cap X = X - C$ é aberto de $X$ (pois $C$ é um compacto num espaço $T_2$).

Agora vamos verificar que $Y$ é compacto: tome $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de $Y$, o aberto de $\mathcal{A}$ que contém $y$ deve ser da forma $Y - C$. Com isso temos que $\mathcal{A} - \{Y - C\}$ cobre $C$ e, portanto, possui subcobertura finita. Unindo essa subcobertura com $Y - C$ obtemos uma subcoleção finita de $\mathcal{A}$ que cobre $Y$.

Para provar que $Y$ é $T_2$ tome $x_1, x_2 \in Y$ distintos, se ambos estão em $X$, existem abertos disjuntos de $X$ que os contém. Se $x_1 = y$, existe $C \subset X$ compacto contendo uma vizinhança $U$ de $x_2$ ($X$ é localmente compacto). Disso segue que $Y - C$ e $U$ são abertos disjuntos de $Y$ que contêm $x_1$ e $x_2$, respectivamente.

Reciprocamente, suponha que exista tal espaço $Y$ satisfazendo 1, 2 e 3. Obtemos imediatamente que $X$ é $T_2$, pois é subespaço de $Y$.

Sejam $x \in X$ e $U, V$ abertos de $Y$, disjuntos, contendo $x$ e $y$, respectivamente. Logo, $C = Y - V$ é fechado de $Y$, portanto é compacto. Como $C \subset X$, então $C$ é compacto de $X$, além disso $U \subset C$, então $X$ é localmente compacto em $x$. □

*Observação* 7.3. Se existem dois conjuntos $Y$ e $Y'$ que satisfazem as condições 1, 2 e 3 da proposição anterior, então existe um homeomorfismo entre eles que é a identidade quando restrito a $X$. Além disso, se $X$ não é compacto, então $\overline{X} = Y$.

Quando $Y$ é um espaço compacto e $T_2$ que contém um subespaço $X$ tal que $\overline{X} = Y$, dizemos que $Y$ é uma **compactificação** de $X$.

*Exemplo* 7.2. Os espaços $\mathbb{R}^n$ são localmente compactos e $T_2$, logo possuem uma compactificação com adição de um ponto. Em particular, no caso de $\mathbb{R}$ representamos esse espaço por $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, que é homeomorfo ao círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

# 8 Axiomas de separação e enumerabilidade

**Definição 8.1.** Um espaço topológico $X$ tem uma **base enumerável** em $x \in X$ se existe uma coleção enumerável $\mathcal{B}$ de vizinhanças de $x$ que satisfaz: toda vizinhança de $x$ contém um elemento de $\mathcal{B}$.

Quando um espaço tem base enumerável em todos os seus pontos dizemos que ele satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade**.

*Observação* 8.1. Note que, para mostrar que um espaço satisfaz essa definição, basta considerar as vizinhanças de uma base que gera a topologia desse espaço.

*Exemplo* 8.1. Se $X$ é espaço métrico, então, para qualquer ponto $x \in X$, o conjunto $\left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ é base enumerável em $x$.

**Proposição 8.1.** *As recíprocas do Lema 6.3 e do Teorema 4.2 valem para espaços que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade.*

*Demonstração.* Suponha que $X$ satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Para o Lema 6.3 precisamos mostrar que se $A \subset X$ e $x \in \overline{A}$, então existe uma sequência de pontos de $A$ que converge para $x$. Para isso basta tomar $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ base enumerável em $x$ e $x_n \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \cap A$, disso segue que $(x_n)$ converge para $x$, pois qualquer vizinhança de $x$ contém $B_n$ para algum $n$ natural, logo contém $x_i$ para todo $i \geq n$.

Já no Teorema 4.2 devemos verificar que, dada $f : X \to Y$, se $(f(x_n))$ converge para $f(x)$ sempre que $x_n \to x \in X$, então $f$ é contínua. Vamos fazer isso mostrando que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para qualquer $A \subset X$.

Tome $f(x) \in f(\overline{A})$, ou seja, $x \in \overline{A}$. Pela primeira parte dessa proposição, existe $(x_n)$ contida em $A$ que converge para $x$. Por hipótese temos $f(x_n) \to f(x)$. Como $(f(x_n))$ está contida em $f(A)$, então, pelo Lema 6.3, $f(x) \in \overline{f(A)}$ $\square$

**Definição 8.2.** Se $X$ é um espaço topológico que possui uma base enumerável (que gera sua topologia), então dizemos que $X$ satisfaz o **segundo axioma de enumerabilidade**.

O segundo axioma implica no primeiro, afinal, a base enumerável que gera a topologia de $X$ serve como base enumerável, no sentido da Definição 8.1, em cada ponto $x \in X$.

*Exemplo* 8.2. Ser espaço métrico já não é mais suficiente para satisfazer o segundo axioma: considere $X$ não enumerável com a topologia discreta. Vale que $X$ é metrizável, mas qualquer base deve conter todos os subconjuntos unitários de $X$, logo não é enumerável.

**Proposição 8.2.** *Subespaços e produtos enumeráveis (com a topologia produto) preservam o primeiro e o segundo axioma de enumerabilidade.*

*Demonstração.* Vamos demonstrar para $X$ satisfazendo o primeiro axioma. Seja $A \subset X$ e $x \in A$, se $\mathcal{B}$ é base enumerável em $x$, então $\{B \cap A \,|\, B \in \mathcal{B}\}$ é base enumerável em $x$ na topologia subespaço.

Agora, suponha que $X$ é o produto enumerável $\prod X_i$ com $X_i$ satisfazendo o primeiro axioma, $x = (x_1, x_2 \ldots)$ e $\mathcal{B}_i$ é base enumerável em $x_i$ para cada $i$. Denote por $\mathcal{B}$ a coleção dos conjuntos $\prod U_i$, onde $U_i \in \mathcal{B}_i$ para finitos valores de $i$ e $U_i = X_i$ para o restante. Nessas condições, $\mathcal{B}$ é base enumerável em $x$.

De fato, $\mathcal{B}$ pode ser visto como o conjunto enumerável das sequências finitas de naturais, afinal, em cada elemento de $\mathcal{B}$, cada $U_i$ corresponde a um natural em $\mathcal{B}_i$ e podemos para a sequência no último $U_i$ diferente de $X_i$. Além disso, se $V$ é vizinhança básica de $x$, então $V = \prod V_i$ e, quando $V_i \neq X_i$, temos que $V_i$ contém algum conjunto de $\mathcal{B}_i$, o que ocorre para finitos índices. □

Também é válido o seguinte resultado.

**Proposição 8.3.** *Se $X$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então toda cobertura aberta de $X$ possui uma subcobertura enumerável. Além disso, existe um subconjunto de $X$ que é denso e enumerável.*

**Definição 8.3.** Seja $X$ um espaço topológico onde todo conjunto unitário é fechado.

Dizemos que $X$ é **regular** se, para cada par $(x, B)$ consistindo num ponto $x \in X$ e num fechado $B \subset X$ que não contém $x$, existem abertos disjuntos $U$ e $V$ contendo $x$ e $B$, respectivamente.

Dizemos que $X$ é **normal** se para cada par de fechados disjuntos de $X$ existe um par de abertos disjuntos cada um contendo um dos fechados.

Quando todo conjunto unitário é fechado, obtemos:

$$\text{Normal} \Rightarrow \text{Regular} \Rightarrow \text{Hausdorff}.$$

Podemos caracterizar esses conceitos de outra forma:

**Proposição 8.4.** *Seja $X$ um espaço topológico onde todos os conjuntos unitários são fechados.*

- *$X$ é regular se, e somente se, dado $x \in X$ e $U$ vizinhança de $x$, existe uma vizinhança $V$ de $x$ com $\overline{V} \subset U$.*

- *$X$ é normal se, e somente se, dados $A \subset X$ fechado e $U$ aberto contendo $A$, existe um aberto $V$ contendo $A$ com $\overline{V} \subset U$.*

Com isso, podemos verificar propriedades importantes de espaços regulares e de Hausdorff.

**Teorema 8.1.** *Subespaços e produtos (com a topologia produto) de espaços de Hausdorff são espaços de Hausdorff. O mesmo ocorre com espaços regulares.*

*Demonstração.* Se $X$ é $T_2$, $Y \subset X$ e $x, y \in Y$ são distintos, então existem $U$ e $V$ abertos de $X$ e disjuntos contendo $x$ e $y$, respectivamente. Tomando $Y \cap U$ e $Y \cap V$ verificamos que $Y$ é $T_2$.

Agora suponha que $X = \prod X_\alpha$ é produto de espaços $T_2$ e tome $(x_\alpha), (y_\alpha) \in X$ distintos. Seja $\beta$ um índice onde $x_\beta \neq y_\beta$, nesse caso existem abertos disjuntos $U, V \subset X_\beta$ com $x_\beta \in U$ e $y_\beta \in V$. Vale que $\pi_\beta^{-1}(U)$ e $\pi_\beta^{-1}(V)$ são abertos disjuntos contendo $(x_\alpha)$ e $(y_\alpha)$, respectivamente.

Suponha que $X$ é regular e considere $Y \subset X$, é imediato que os conjuntos unitários de $Y$ são fechados em $Y$. Tome $x \in Y$ e $B \cap Y$ um fechado de $Y$ ($B$ é fechado de $X$) que não contém $x$. Pela regularidade de $X$, existem abertos disjuntos $U$ e $V$ que contêm $x$ e $B$, respectivamente. Com isso, $U \cap Y$ e $V \cap Y$ são abertos de $Y$, disjuntos, e contêm $x$ e $B \cap Y$, respectivamente.

Agora suponha que $X = \prod X_\alpha$ é produto de espaços regulares, pela primeira parte da demonstração, $X$ é $T_2$, logo os conjuntos unitários são fechados (Proposição 1.6). Seja $x = (x_\alpha)$ e $U$ uma vizinhança de $x$, tome $\prod U_\alpha$ um aberto da base que é vizinhança de $x$ e está contido em $U$.

Para cada índice $\alpha$, a regularidade de $X_\alpha$ garante a existência de uma vizinhança $V_\alpha$ de $x$ com $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$, se $U_\alpha = X_\alpha$, escolha $V_\alpha = X_\alpha$.

Com isso, o conjunto $\prod V_\alpha$ é vizinhança de $x$, pois é formada por finitos abertos diferentes de $X_\alpha$ no produto, e, usando a Proposição 3.1, temos

$$\overline{V} = \prod \overline{V}_\alpha \subset \prod U_\alpha \subset U.$$

Pela Proposição 8.4, $X$ é regular. □

Para espaços normais, no entanto, esse resultado não é válido: no caso de subespaços precisamos adicionar a hipótese do subespaço ser fechado. Para produtos temos um exemplo de que o resultado falha mesmo com produtos finitos:

*Exemplo* 8.3. O conjunto $\mathbb{R}$ com a topologia gerada tomando $\mathcal{S} = \{[x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ como sub-base é um espaço normal chamado de **reta de Sorgenfrey** e representado por $\mathbb{R}_\ell$. Porém o produto cartesiano $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell = \mathbb{R}_\ell^2$ (plano de Sorgenfrey) não é normal.

Ainda, se $\mathbb{R}$ possui a topologia euclidiana e $J$ é não enumerável, então $\mathbb{R}^J$ não é normal.

Vários critérios podem ser utilizados para garantir a normalidade de um espaço:

**Proposição 8.5.** *Seja $X$ um espaço topológico, para $X$ ser normal é suficiente que pelo menos um dos seguintes itens seja verdade.*

- *$X$ é regular e possui base enumerável.*
- *$X$ é metrizável.*
- *$X$ é $T_2$ e compacto.*
- *$X$ é ordenado, está munido com a topologia da ordem e satisfaz o princípio da boa ordenação.*

## 8.1 Lema de Urysohn e aplicações

**Lema 6.9** (Lema de Urysohn)**.** *Sejam $X$ um espaço normal, $A, B \subset X$ fechados e disjuntos e $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Existe uma função contínua $f : X \to [a, b]$ de forma que $f(x) = a$ para todo $x \in A$ e $f(x) = b$ para todo $x \in B$.*

*Demonstração.* Vamos considerar $[a, b] = [0, 1]$, para os outros basta tomar uma bijeção entre $[a, b]$ e $[0, 1]$. Considere o conjunto enumerável $P = \mathbb{Q} \cap I$ ordenado da forma $\{x_1 = 1, x_2 = 0, x_3, \ldots\}$.

Vamos construir uma família de abertos de $X$, $\{U_i\}$ com $i \in P$, de forma que

$$p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subset U_q. \tag{$*$}$$

Começamos tomando $U_{x_1} = X - B$ e $U_{x_2}$ de forma que $A \subset U_{x_2}$ e $\overline{U}_{x_2} \subset U_{x_1}$ (Proposição 8.4).

Agora, recursivamente, se $U_i$ está definido para $i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, note que $0, 1 \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, então escolhemos $U_{x_{n+1}}$ contendo $\overline{U}_r$ e com seu fecho contido em $U_s$, onde $r$ e $s$ são o antecessor e o sucessor imediatos de $x_{n+1}$ em $\{x_1, \ldots, x_n\}$, respectivamente.

Dessa forma, todos os pares de abertos $U_i$ com $i \in P$ satisfazem $(*)$. Vamos expandir o conjunto índice para todos os racionais da seguinte forma: se $p < 0$ então $U_p = \emptyset$ e se $p > 1$ então $U_p = X$. Com isso $(*)$ continua válido.

O próximo passo é definir, para cada $x \in X$, o conjunto $\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p\}$, tal conjunto possui ínfimo em $[0, 1]$, que chamaremos de $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x)$. Vamos mostrar que $f : X \to [0, 1]$ é a função procurada.

De fato, quando $x \in A$, então $x \in U_0 \subset U_p$ para todo $p \geq 0$, logo $f(x) = 0$. Já quando $x \in B$, então $p \leq 1 \Rightarrow x \notin U_p$, dado que $U_1 = X - B$, logo $f(x) = 1$.

Para mostrar a continuidade de $f$, considere $x_0 \in X$ e $(c, d) \cap \mathbb{Q}$ um intervalo real contendo $f(x_0)$. Tomando $p, q \in (c, d)$ com $p < f(x_0) < q$ e $U \coloneqq U_q - \overline{U}_p$. Vale que $x_0 \in U$ e

$$x \in U \Rightarrow x \in U_q \Rightarrow f(x) \leq q$$

$$x \in U \Rightarrow x \notin \overline{U}_p \Rightarrow f(x) \geq p.$$

Portanto $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$ e $f$ é contínua em $x_0$. □

**Definição 8.4.** Um espaço $X$ é **completamente regular** se os seus subconjuntos unitários são fechados e, para cada $x \in X$ e $A \subset X - \{x\}$ fechado, existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ e $f(A) = \{0\}$.

Essa definição é mais forte que a regularidade, além disso, pelo Lema de Urysohn obtemos que todo espaço normal é completamente regular. Também é válido o seguinte resultado:

**Proposição 8.6.** *A propriedade de ser completamente regular é preservada por subespaços e produtos.*

Agora veremos uma aplicação do Lema 6.9 relacionada a espaços metrizáveis.

**Teorema 8.2** (Teorema da metrização de Urysohn)**.** *Todo espaço regular com base enumerável é metrizável.*

*Observação* 8.2. Pela Proposição 8.5 temos que regular + base enumerável ⇒ normal.

*Demonstração.* Vamos mostrar que $X$ é homeomorfo a um subespaço de $\mathbb{R}^\omega$, para isso iremos construir uma sequência de funções de $X$ em $[0, 1]$ tais que, dado $x \in X$ e $U$ vizinhança de $x$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $f_n(x) > 0$ e $f_n(X - U) = \{0\}$.

Seja $\{B_n\}_n$ base de $X$, note que, para cada par de elementos da base $B_m$ e $B_n$ com $\overline{B}_n \subset B_m$, existe, pelo Lema de Urysohn, uma função contínua de $X$ em $[0, 1]$ que é constante igual a 1 em $\overline{B}_n$ e igual a 0 em $X - B_m$. Com isso, dados $x_0 \in X$ e $U$ vizinhança de $x_0$, basta tomar uma vizinhança $B_m$ de $x$ contida em $U$ e, pela regularidade, $B_n$ vizinhança de $x$ cujo fecho está contido em $B_m$. Como essas funções podem ser indexadas em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, então a sequência de funções procurada existe.

Definindo $F : X \to \mathbb{R}^\omega$ por $F = (f_1, f_2, \ldots)$, temos que $F : X \to F(X)$ é homeomorfismo. Com efeito, ela é contínua, pois as funções coordenadas o são. É injetora pois $X$

é $T_2$ (por ser regular), logo podemos separar dois pontos distintos por abertos disjuntos e com isso obter $f_n$ que assume valores distintos dentro desses abertos.

Por último, dado $U \subset X$ aberto e $y_0 = F(x_0) \in F(U)$, considere $N$ tal que $f_N(x_0) > 0$ e $f_N(X - U) = \{0\}$, então o conjunto $\pi_N^{-1}((0,\infty)) \cap F(X)$ é aberto e contém $y_0$. Além disso, dado $z \in \pi_N^{-1}((0,\infty)) \cap F(X)$, então $z = F(w)$ para $w \in X$ e $\pi_N(z) = f_N(w) > 0$. Como $f_N$ é zero fora de $U$, então $w \in U$ e $z \in F(U)$. Com isso, $\pi_N^{-1}((0,\infty)) \cap F(X)$ está contido em $F(U)$, ou seja, $F(U)$ é aberto e, portanto, $F^{-1}$ é contínua. □

É possível generalizar essa demonstração e obter o seguinte corolário.

**Corolário 8.1.** *Um espaço $X$ é completamente regular se, e somente se, é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^J$ para algum conjunto $J$ qualquer.*

Outra consequência do Lema de Urysohn será enunciada a seguir.

**Teorema 8.3** (Teorema da extensão de Tietze)**.** *Seja $X$ normal e $A \subset X$ fechado. Toda função contínua $f : A \to [a,b] \subset \mathbb{R}$ pode ser estendida em uma função contínua de $X$ em $[a,b]$. O mesmo resultado vale trocando $[a,b]$ por $\mathbb{R}$.*

# 9 Homotopias

**Definição 9.1.** Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas entre espaços topológicos, dizemos que $f$ é **homotópica** a $g$ se existe $F : X \times [0,1] \to Y$ contínua com $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

A função $F$ é chamada de **homotopia** entre $f$ e $g$ e essa relação será denotada por $f \simeq g$.

**Definição 9.2.** Dois caminhos $f, g : [0,1] \to Y$ são **caminhos homotópicos** se possuem os mesmos pontos inicial e final, isto é, $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$ e existe uma homotopia $F$ entre $f$ e $g$ com $F(0,t) = f(0)$ e $F(1,t) = f(1)$ para todo $t \in [0,1]$. Essa relação será denotada por $f \simeq_p g$.

Ambas as relações são simétricas e reflexivas, vamos verificar que também são transitivas para concluir que constituem relações de equivalência.

Suponha que $f \simeq g$ e $g \simeq h$ com $F$ e $G$ homotopias entre $f$ e $g$ e entre $g$ e $h$, respectivamente. Definindo $H : X \times [0,1] \to Y$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(x,2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Como $H$ é contínua em dois fechados com um ponto em comum, então é contínua (Lema 6.1). Além disso, $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = h(x)$, para todo $x \in X$, portanto $H$ é homotopia entre $f$ e $h$.

Ademais, se $F$ e $G$ são homotopias de caminhos, temos que $H(0,t) = f(0) = g(0) = h(0)$ e $H(1,t) = f(1) = g(1) = h(1)$, portanto $H$ também o é.

Portanto, as relações $\simeq$ e $\simeq_p$ são relações de equivalência e podemos tratar das classes de uma função (ou caminho).

*Exemplo* 9.1. Se $f$ e $g$ são funções contínuas de um espaço $X$ qualquer em $\mathbb{R}^n$, então são homotópicas, uma homotopia entre elas é dada por $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Além disso, se são caminhos com mesmos pontos inicial e final, então $F$ é homotopia entre os caminhos. Essa propriedade vale para qualquer conjunto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$.

## 9.1 Produto de homotopias

**Definição 9.3.** Sejam $f, g : X \to Y$ caminhos com $f(1) = g(0)$, então o **produto entre $f$ e $g$**, denotado por $f * g$, é o caminho de $f(0)$ a $g(1)$ dado por

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Ainda, se $f'$ e $g'$ são caminhos com $f \simeq_p f'$ e $g \simeq_p g'$, então vale que $(f*g) \simeq_p (f'*g')$. Ou seja, quando consideramos as classes $[f]$ e $[g]$, pela relação $\simeq_p$, independente do representante das classes que escolhemos, o resultado do produto sempre será homotópico a $f*g$. Portanto podemos considerar a operação $*$ definida para as classes de equivalência:

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Agora veremos que o conjunto das classes de equivalência, juntamente com o produto entre classes, satisfaz propriedades muito similares a de um grupo.

**Proposição 9.1.** *A operação $*$ definida nas classes de caminhos em algum conjunto $X$ possui as seguintes propriedades:*

1. *(Associatividade) Se $[f] * ([g] * [h])$ está definido, então é igual a $([f] * [g]) * [h]$.*

2. *(Elemento neutro) Sejam $e_x : [0,1] \to X$ dado por $e_x(t) = x$, para todo $t \in [0,1]$, e $f$ um caminho de $x_0 \in X$ a $x_1 \in X$, então*

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \qquad e \qquad [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

3. *(Inverso) Sejam $f$ um caminho de $x_0 \in X$ a $x_1 \in X$ e $\tilde{f}$ um caminho dado por $\tilde{f}(t) = f(1-t)$, então*

$$[f] * \left[\tilde{f}\right] = [e_{x_0}] \qquad e \qquad \left[\tilde{f}\right] * [f] = [e_{x_1}].$$

Alguns detalhes diferenciam esse conjunto de um grupo: a operação $*$ não está definida para qualquer par de classes, o elemento neutro depende da ordem da operação e, operando uma classe com sua inversa, o resultado se altera conforme a ordem.

Porém, quando fixamos $x_0 \in X$ e restringimos o conjunto das classes apenas a caminhos que possuem $x_0$ como ponto final e inicial (caminhos fechados/ciclos), isso constitui um grupo.

De fato, o elemento neutro é o mesmo à esquerda e à direita (também é o mesmo para qualquer classe) e, consequentemente, $\left[\tilde{f}\right] * [f] = [f] * \left[\tilde{f}\right] = e_{x_0}$.

Além disso, a associatividade continua válida, $*$ está definido para qualquer par de classes e, dadas duas classes $[f]$ e $[g]$ de caminhos fechados em $x_0$, então $[f] * [g]$ também corresponde um caminho fechado em $x_0$.

# 10 Grupo fundamental

**Definição 10.1.** Seja $X$ um espaço topológico e $x_0 \in X$, o grupo formado pelo conjunto das classes de caminhos fechados em $x_0$ juntamente com a operação $*$ é chamado de **grupo fundamental** de $X$ em $x_0$ e denotado por $\pi_1(X, x_0)$

*Exemplo* 10.1. Vimos que no espaço $\mathbb{R}^n$ quaisquer dois caminhos fechados em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são homotópicos, logo o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ contém apenas um elemento, que é a classe correspondente ao caminho constante em $x_0$.

*Exemplo* 10.2. Num espaço conexo por caminhos, o grupo fundamental não depende do ponto $x_0$ escolhido, isto é, dois grupos fundamentais em pontos diferentes são isomorfos. Isso ocorre porque, se $\gamma$ é um caminho entre dois pontos distintos $x_0$ e $x_1$ e $\tilde{\gamma}$ é o seu inverso (como na Proposição 9.1 (3)), então a seguinte função é um isomorfismo de grupos:

$$\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

$$\hat{\gamma}([f]) = [\tilde{\gamma}] * [f] * [\gamma].$$

Mais geralmente, se dois pontos podem ser ligados por um caminho, seus grupos fundamentais são isomorfos.

**Definição 10.2.** Um espaço topológico $X$ é dito **simplesmente conexo** se é conexo por caminhos e para todo ponto de $X$ o grupo fundamental consiste apenas no elemento neutro. Se $x_0 \in X$ denotamos $\pi_1(X, x_0) = 0$.

**Lema 6.10.** *Num espaço simplesmente conexo, dois caminhos com mesmo ponto inicial e final são homotópicos.*

*Demonstração.* Sejam $x_0, x_1 \in X$ e $\alpha$ e $\beta$ caminhos de $x_0$ a $x_1$, nesse caso $\alpha * \tilde{\beta}$ é um caminho fechado em $x_0$ e portanto é homotópico a $e_{x_0}$, logo:

$$[\alpha] = [\alpha * \tilde{\beta} * \beta] = [\alpha * \tilde{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] = [\beta].$$

□

**Definição 10.3.** Dados $X$ e $Y$ espaços topológicos, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ e $h : X \to Y$ uma função contínua com $h(x_0) = y_0$, definimos o homomorfismo induzido por $h$ em $x_0$, denotado por $h_*$ (ou $(h_{x_0})_*$).

$$\begin{aligned} h_* : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [f] &\mapsto h_*([f]) = [h \circ f]. \end{aligned}$$

A função está bem definida pois $h \circ f$ tem $y_0$ como ponto inicial e final e é contínuo. Além disso, se $F$ é uma homotopia entre $f$ e $g$, então $h \circ F$ é homotopia entre $h \circ f$ e $h \circ g$, ou seja, $h_*([f])$ independe do representante da classe.

Para verificar que é de fato homomorfismo basta notar que, para $g \in \pi_1(X, x_0)$, temos $(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g)$ e com isso:

$$h_*([f]) * h_*([g]) = [h \circ f] * [h \circ g] = [(h \circ f) * (h \circ g)] = [h \circ (f * g)] = h_*([f * g]).$$

O homomorfismo induzido possui as seguintes propriedades:

- Dados $h : X \to Y$ e $k : Y \to Z$ contínuas com $h(x_0) = y_0$, vale que $k_* \circ h_* = (k \circ h)_*$ (considerando $k_*$ o homomorfismo induzido em $y_0$ e $(k \circ h)_*$ em $x_0$).
- Se $i : X \to X$ é a identidade, então $i_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ também o é.

**Proposição 10.1.** *Se $h : X \to Y$ é um homeomorfismo e $h(x_0) = y_0$ então $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Seja $k$ a inversa de $h$ e $i$ a identidade de $X$, temos

$$k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$$

onde $i_*$ é a identidade de $\pi_1(X, x_0)$.

De maneira similar, $h_* \circ k_*$ é a identidade de $\pi_1(Y, y_0)$. Do que segue que $h_*$ é uma bijeção e portanto é isomorfismo. □

## 10.1 Espaços de recobrimento

**Definição 10.4.** Seja $p : X \to Y$ contínua e sobrejetora. Um aberto $U \subset Y$ é dito **uniformemente coberto** por $p$ se $p^{-1}(U)$ pode ser escrito como união de abertos disjuntos $\{V_\alpha\}_\alpha$ de $X$ de forma que $p|_{V_\alpha}$ é homeomorfismo de $V_\alpha$ em $U$. $\{V_\alpha\}_\alpha$ é chamada de **partição de $p^{-1}(U)$ em folhas**.

**Definição 10.5.** Seja $p : X \to Y$ contínua e sobrejetora, se todo ponto $y \in Y$ possui uma vizinhança que é uniformemente coberta por $p$, então $p$ é chamada de **aplicação de recobrimento** e $X$ é chamado de **espaço de recobrimento** de $Y$.

*Exemplo* 10.3. A função $p : \mathbb{R} \to S^1$ que leva $x \in \mathbb{R}$ em $(\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$ é aplicação de recobrimento da reta no círculo $S^1$.

**Proposição 10.2.** *Seja $p : X \to Y$ aplicação de recobrimento. Se $B \subset Y$ e $A = p^{-1}(B)$, então a restrição $p_0 : A \to B$ é aplicação de recobrimento.*

*Demonstração.* Tome $b \in B$ e $U \subset Y$ vizinhança de $b$ que é uniformemente coberta por $p$ por folhas $\{V_\alpha\}_\alpha$.

Então $U \cap B$ é vizinhança de $b$ e $\{V_\alpha \cap A\}_\alpha$ é partição em folhas de $p_0^{-1}(U \cap B)$. □

**Proposição 10.3.** *Dadas $p : X \to Y$ e $p' : X' \to Y'$ aplicações de recobrimento, então*

$$p \times p' : X \times X' \to Y \times Y'$$

*é aplicação de recobrimento.*

*Demonstração.* Dados $y \in Y$ e $y' \in Y'$, tome $U$ e $U'$ vizinhanças de $y$ e $y'$ uniformemente cobertas por $p$ e $p'$ com folhas $\{V_\alpha\}$, $\left\{V'_\beta\right\}$.

A imagem inversa de $U \times U'$ por $p \times p'$ é a união de todos os $V_\alpha \times V_\beta$. Esses conjuntos são abertos disjuntos de $X \times X'$ e cada um é levado homeomorficamente para $U \times U'$ □

**Definição 10.6.** Sejam $p : X \to Y$ e $f : Z \to Y$ funções com $f$ contínua. Um **levantamento** de $f$ é uma função $\overline{f} : Z \to X$ tal que $p \circ \overline{f} = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & Y
\end{tikzcd}$$

Diagrama da função $f$

**Lema 6.11.** *Sejam $p : X \to Y$ aplicação de recobrimento, $x_0 \in X$ e $p(x_0) = y_0$. Um caminho $f : [0,1] \to Y$ com $f(0) = y_0$ possui um único levantamento contínuo $\overline{f}$ com $\overline{f}(0) = x_0$.*

*Demonstração.* Seja $\{U_\lambda\}$ cobertura de $Y$ por abertos que são uniformemente cobertos por $p$, segue que $\{f^{-1}(U_\lambda)\}$ é cobertura por abertos de $[0,1]$. Pelo Lema do número de Lebesgue existe um $\delta > 0$ de forma que, para cada $(a,b) \subset [0,1]$ com diâmetro menor que $\delta$, existe um $U_\lambda$ tal que $(a,b) \subset f^{-1}(U_\lambda)$, ou seja, $f((a,b)) \subset U_\lambda$.

Dividimos $[0,1]$ em $0 = s_1 < \cdots < s_n = 1$ com $|s_{i+1} - s_i| < \delta$, então $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U_\lambda$ para algum $U_\lambda$.

Primeiro definimos $\overline{f}(0) = x_0$. Agora suponha que $\overline{f}$ está definido em $[0, s_i]$ e também que $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U_\lambda$. O conjunto $U_\lambda$ é uniformemente coberto por $p$ por folhas $\{V_\alpha\}$. Como $\overline{f}(s_i)$ está definido e $p \circ \overline{f} = f$ então $\overline{f}(s_i) \in V_\beta$ para algum índice $\beta$. Para cada $s \in [s_i, s_{i+1}]$ definimos

$$\overline{f}(s) = \left(p|_{V_\beta}\right)^{-1}(f(s))$$

Como $p|_{V_\beta}$ é homeomorfismo, $\overline{f}$ é contínua em $[s_i, s_{i+1}]$ e, pelo Lema da colagem $\overline{f}$, é contínua. Além disso, para cada $s \in [0,1]$ temos $p \circ \overline{f}(s) = f(s)$.

Suponha que $g$ é outro levantamento que satisfaz $g(0) = x_0$ e suponha $g(s) = \overline{f}(s)$ para todo $s \in [0, s_i]$. Temos que $g([s_i, s_{i+1}]) \subset p^{-1}(U_\lambda) = \dot{\cup} V_\alpha$ com $V_\alpha$ abertos, além disso $g([s_i, s_{i+1}])$ é conexo e $g(s_i) = \overline{f}(s_i) \in V_\beta$, disso segue que $g$ leva todo o intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ em $V_\beta$. Mas para $s$ nesse intervalo $g(s) \in p^{-1}(f(s))$ e no conjunto $V_\beta$ essa escolha é única, e é justamente $\overline{f}(s)$. $\square$

**Lema 6.12.** *Seja $p : X \to Y$ aplicação de recobrimento com $p(x_0) = y_0$ e $F : [0,1] \times [0,1] \to Y$ contínua com $F(0,0) = y_0$. Existe um único levantamento contínuo $\overline{F}$ de $F$ em $X$ com $\overline{F}(0,0) = x_0$. Além disso, se $F$ é homotopia de caminhos então $\overline{F}$ também é.*

*Demonstração.* A demonstração da primeira parte segue pelo Lema do número de Lebesgue, de forma similar ao lema anterior.

Agora suponha que $F$ é homotopia de caminhos em $Y$. Nesse caso vale que $F(0 \times [0,1]) = \{y_0\}$, disso segue $\overline{F}(0 \times [0,1]) \subset p^{-1}(y_0)$. Por outro lado, o subconjunto $p^{-1}(y_0)$ de $X$ tem a topologia discreta (pois cada elemento $a$ dele pode ser escrito como $\{a\} = W_\alpha \cap p^{-1}(y_0)$ para algum $W_\alpha$ aberto).

Como $\overline{F}(0 \times [0,1])$ é conexo, então deve estar contido em apenas um ponto de $p^{-1}(y_0)$, logo sua imagem é um ponto. De forma análoga a imagem de $1 \times [0,1]$ por $\overline{F}$ é um ponto. Com isso $\overline{F}$ é homotopia de caminhos em $X$ (explicitamente, entre os caminhos $f(s) = \overline{F}(s,0)$ e $g(s) = \overline{F}(s,1)$). $\square$

**Proposição 10.4.** *Sejam $p : X \to Y$ aplicação de recobrimento, $x_0 \in X$, $p(x_0) = y_0$, $f$ e $g$ caminhos homotópicos em $Y$ de $y_0$ a $y_1$ e $\overline{f}$ e $\overline{g}$ os levantamentos de $f$ e $g$ começando em $x_0$. Nessas condições, $\overline{f}$ e $\overline{g}$ são homotópicos.*

*Demonstração.* Seja $F$ homotopia entre $f$ e $g$ e $\overline{F}$ levantamento de $F$ com $\overline{F}(0,0) = x_0$. Pelo Lema 6.12, $\overline{F}$ é homotopia de caminhos, além disso a restrição de $\overline{F}$ em $[0,1] \times \{0\}$ é um caminho em $X$ começando em $x_0$ e é levantamento da restrição de $F$ a $[0,1] \times \{0\}$ (que é $f$). Mas $\overline{f}$ também é levantamento dessa restrição, logo, pela unicidade do Lema 6.11, temos $\overline{F}(s,0) = \overline{f}(s)$.

De maneira análoga a restrição de $\overline{F}$ a $[0,1] \times \{1\}$ é um caminho que começa em $x_0$ e é levantamento de $F$ restrito a $[0,1] \times \{1\}$, portanto $\overline{F}(s,1) = \overline{g}(s)$

Como vimos no Lema 6.12, $\overline{F}(\{1\} \times [0,1]) = \{x_1\}$ para algum $x_1 \in X$, portanto $x_1$ é ponto final de $\overline{f}$ e $\overline{g}$ e, com isso, estes caminhos são homotópicos. □

**Definição 10.7.** Sejam $p : X \to Y$ aplicação de recobrimento e $y_0 \in Y$. Tome $x_0 \in X$ de forma que $p(x_0) = y_0$. Dado $[f] \in \pi_1(Y, y_0)$, denote por $\overline{f}$ o levantamento de $f$ que começa em $x_0$. Definimos

$$\phi : \pi_1(Y, y_0) \to p^{-1}(y_0)$$

de forma que $\phi([f]) = \overline{f}(1)$. A aplicação $\phi$ é chamada de **correspondência de levantamentos** e está bem definida, dado que, para quaisquer dois ciclos homotópicos $f$ e $g$ em $\pi_1(Y, y_0)$ e fixado $x_0 \in X$, os levantamentos (únicos) de $f$ e $g$ começando em $x_0$ são homotópicos e, portanto, possuem o mesmo ponto final.

**Proposição 10.5.** *Seja $p : X \to Y$ aplicação de recobrimento com $p(x_0) = y_0$. Se $X$ é conexo por caminhos então a correspondência de levantamentos (em $x_0$) $\phi : \pi_1(Y, y_0) \to p^{-1}(y_0)$ é sobrejetora. Ademais, se $X$ é simplesmente conexo, $\phi$ é bijetora.*

*Demonstração.* Suponha que $X$ é conexo por caminhos e tome $x_1 \in p^{-1}(y_0)$, por hipótese existe um caminho $\overline{f}$ entre $x_0$ e $x_1$. Definindo $f = p \circ \overline{f}$ temos que $f$ é um caminho em $Y$ entre $p(x_0) = y_0$ e $p(x_1) = y_0$, ou seja, $[f] \in \pi_1(Y, y_0)$ e, consequentemente, $\phi([f]) = \overline{f}(1) = x_1$.

Suponha que $X$ é simplesmente conexo, falta mostrar que $\phi$ é injetora. Sejam $[f], [g] \in \pi_1(Y, y_0)$ com $\phi([f]) = \phi([g])$. Se $\overline{f}$ e $\overline{g}$ são levantamentos (começando em $x_0$) de $f$ e $g$, respectivamente, devemos ter $\overline{f}(1) = \overline{g}(1)$, como $\overline{f}$ e $\overline{g}$ tem mesmo ponto final e inicial então, por hipótese, existe uma homotopia $\overline{F}$ entre os dois caminhos. A função definida por $F = p \circ \overline{F}$ é uma homotopia entre $f$ e $g$, portanto $[f] = [g]$. □

**Teorema 10.1.** *O grupo fundamental de $S^1$ é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros.*

*Demonstração.* Considere $p : \mathbb{R} \to S^1$ a aplicação de recobrimento dada por $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, $x_0 = 0$ e $y_0 = p(x_0) = (1,0)$. Note que $p^{-1}(y_0) = \mathbb{Z}$ e, como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo, a Proposição 10.5 nos garante que a correspondência $\phi : \pi_1(S^1, y_0) \to \mathbb{Z}$ é uma bijeção.

Para verificar que $\phi$ é homomorfismo tome $[f]$ e $[g]$ em $\pi_1(S^1, y_0)$ e vamos denotar por $\overline{f}$ e $\overline{g}$ os levantamentos de $f$ e $g$ começando em 0, além disso definimos $n = \overline{f}(1) = \phi([f])$, $m = \overline{g}(1) = \phi([g])$ e $h(s) = n + \overline{g}(s)$ um caminho em $\mathbb{R}$. Disso segue que

$$p \circ h(s) = p(n + \overline{g}(s)) = p(\overline{g}(s)) = p \circ \overline{g}(s) = g(s)$$

para todo $s \in [0,1]$, ou seja, $h$ é levantamento de $g$ começando em $h(0) = n$. Como $\overline{f}(1) = n$ então $\overline{f} * h$ está bem definido e além disso:

$$p \circ (\overline{f} * h)(s) = ((p \circ \overline{f}) * (p \circ h))(s) = f * g(s)$$

para todo $s \in [0,1]$ e, portanto, $\overline{f} * h$ é levantamento de $f * g$ começando em $\overline{f} * h(0) = \overline{f}(0) = 0$. Com isso obtemos:

$$(\overline{f} * h)(1) = h(1) = n + \overline{g}(1) = n + m \Rightarrow$$

$$\phi([f] * [g]) = \phi([f * g]) = (\overline{f} * h)(1) = n + m = \phi([f]) + \phi([g]).$$

Portanto $\phi$ é um isomorfismo entre o grupo fundamental de $S^1$ em $y_0$ e $\mathbb{Z}$. Como $S^1$ é conexo por caminhos, então o grupo fundamental não depende de $y_0$ e portanto é sempre isomorfo a $\mathbb{Z}$. $\square$

**Definição 10.8.** Dados um grupo $G$, $H \subset G$ um subgrupo e $x \in G$, o conjunto $Hx \coloneqq \{hx \,|\, h \in H\}$ é uma **classe lateral à direita** de $H$ em $G$ e $xH \coloneqq \{xh \,|\, h \in H\}$ é uma **classe lateral à esquerda** de $H$ em $G$. Denotaremos por $G/H$ o conjunto das classes laterais à direita: $\{Hx \,|\, x \in G\}$.

**Proposição 10.6.** *Seja $p : X \to Y$ uma aplicação de recobrimento com $p(x_0) = y_0$. Vale que:*

1. *O homomorfismo $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ é injetivo (monomorfismo).*
2. *Definindo $H \coloneqq p_*(\pi_1(X, x_0))$, a correspondência de levantamentos $\phi$ induz uma função injetora:*
$$\Phi : \pi_1(Y, y_0)/H \to p^{-1}(y_0)$$
*além disso, se $X$ é conexo por caminhos, $\Phi$ é uma bijeção.*
3. *Se $f$ é um ciclo em $y_0$, então $[f] \in H$ se, e somente se, o levantamento de $f$ começando em $x_0$ é um ciclo em $x_0$.*

*Demonstração.*

1. Sejam $e$ o ciclo constante em $y_0$ e $\overline{e}$ o ciclo constante em $x_0$, ou seja, o levantamento de $e$ começando em $x_0$.

   Um homomorfismo entre grupos é injetivo se, e só se, o núcleo consiste apenas no elemento neutro do domínio. Considere um elemento $[\overline{f}] \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $p_*([\overline{f}]) = [p \circ \overline{f}] = [e]$, vamos mostrar que $[\overline{f}] = [\overline{e}]$.

   Denote a homotopia de caminhos entre $p \circ \overline{f}$ e $e$ por $F$ e seja $\overline{F}$ o levantamento de $F$ com $F(0,0) = x_0$, pelo Teorema 10.4, obtemos que $\overline{F}$ é homotopia entre o levantamento de $p \circ \overline{f}$ em $x_0$ e o levantamento de $e$ em $x_0$, ou seja, entre $\overline{f}$ e $\overline{e}$, portanto $[\overline{f}] = [\overline{e}]$ e $p_*$ é injetora.

2. Verifiquemos que, para quaisquer dois elementos da mesma classe lateral à direita de $H$ em $\pi_1(Y, y_0)$, as imagens desses elementos por $\phi$ deve ser a mesma. Isso é o mesmo que dizer que $[f] \in H * [g] \Rightarrow \phi([f]) = \phi([g])$, afinal, se eles estão na mesma classe então podemos escolher um como representante dela.

   Pela hipótese temos $[f] = [h * g]$ onde $h = p \circ \overline{h}$ para algum $\overline{h}$ ciclo em $x_0$. Considere o levantamento $\overline{g}$ de $g$ começando em $x_0$ que tem como ponto inicial o ponto final de $\overline{h}$, logo $\overline{h} * \overline{g}$ está bem definindo e ainda é levantamento de $h * g$ começando em $\overline{h} * \overline{g}(0) = \overline{h}(0) = x_0$, pois:

$$p \circ (\overline{h} * \overline{g}) = (p \circ \overline{h}) * (p \circ \overline{g}) = h \circ g.$$

   Como $[f] = [h * g]$ o Teorema 10.4 nos garante que $\overline{f}$ e $\overline{h * g} = \overline{h} * \overline{g}$ têm o mesmo ponto final, ou seja, $\overline{f}$ e $\overline{g}$ têm o mesmo ponto final e portanto $\phi([f]) = \overline{f}(1) = \overline{g}(1) = \phi([g])$.

   Agora devemos mostrar que, dados dois ciclos $f$ e $g$ em $y_0$ com $\phi([f]) = \phi([g])$, então $[f] \in H * [g]$, pois isso é o mesmo que dizer que $\Phi(H * [f]) = \Phi(H * [g]) \Rightarrow H * [f] = H * [g]$.

   Sejam $\overline{f}$ e $\overline{g}$ levantamentos de $f$ e $g$ começando em $x_0$ e $\overline{k}$ o produto de $\overline{f}$ com o inverso de $\overline{g}$, que é um ciclo em $x_0$.

   Note que $[\overline{k} * \overline{g}] = [\overline{f}]$ e, ainda, $\overline{k} * \overline{g} = \overline{k * g}$. Portanto, se $\overline{F}$ é homotopia entre $\overline{k * g}$ e $\overline{f}$ então $p \circ F$ é homotopia entre $p \circ (\overline{k} * \overline{g}) = p \circ \overline{k} * g$ e $p \circ \overline{f} = f$. Como $[p \circ \overline{k}] \in p_*(\pi_1(X, x_0))$ então $[f] \in H * [g]$.

   Finalmente, se $X$ é conexo por caminhos sabemos, pelo Teorema 10.5, que $\phi$ é sobrejetora. Dado $x \in p^{-1}(y_0)$ existe $[g] \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $\phi([g]) = x$, mas, por outro lado, $\phi[g] = \Phi(H * [g])$.

3. Aplicando o item anterior no caso em que $[g]$ é o ciclo constante $e$ em $y_0$ temos

$$\phi([f]) = \phi([g]) \Leftrightarrow [f] \in H * [g]$$

$$\phi([f]) = x_0 \Leftrightarrow [f] \in H.$$

Mas, se $\overline{f}$ é o levantamento de $f$ em $x_0$, então $\phi([f]) = \overline{f}(1) = x_0$, e isso ocorre se, e só se, $\overline{f}$ é um ciclo em $x_0$.

□

## 10.2 Pontos fixos

**Definição 10.9.** Sejam $X$ um espaço topológico e $A \subset X$ um subespaço, uma **retração** de $X$ em $A$ é uma função contínua $f : X \to A$ de forma que $f|_A$ é a identidade. Se existe tal função dizemos que $A$ é um **retrato** de $X$.

**Lema 6.13.** *Se $A$ é um retrato de $X$ e $j : A \to X$ é a inclusão de $A$ em $X$ então o homomorfismo de grupos fundamentais induzido por $j$ é injetor.*

*Demonstração.* Seja $f$ a retração de $X$ em $A$ e $a \in A$. A composição $f \circ j$ é a função identidade em $A$, logo $(f \circ j)_* = f_* \circ j_*$ é a identidade em $\pi_1(A, a)$ e, portanto, $j_*$ deve ser injetora. □

*Exemplo* 10.4. Com isso podemos verificar que não existe retração de $B^2$ em $S^1$, onde

$$B^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Se houvesse tal retração então, pelo Lema 6.13, haveria um homomorfismo injetivo entre o grupo fundamental de $S^1$ e o grupo fundamental de $B^2$, porém $B^2$ é simplesmente conexo, portanto seu grupo fundamental só contém o elemento neutro enquanto o grupo fundamental de $S^1$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Agora veremos um lema que será utilizado para deduzir vários resultados envolvendo retratos.

**Lema 6.14.** *Seja $h : S^1 \to X$ uma função contínua. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *$h$ é homotópica a uma função constante;*
2. *É possível estender $h$ para uma função contínua $k : B^2 \to X$;*
3. *$h_*$ é o homomorfismo trivial (leva todos os elementos no elemento neutro).*

**Corolário 10.1.** *A inclusão $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ não é homotópica a uma constante. Assim como a identidade $i : S^1 \to S^1$.*

*Demonstração.* A função $f(x) = \frac{x}{|x|}$ é uma retração de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ em $S^1$, logo segue do Lema 6.13 que $j_*$ é injetor e portanto não é trivial e não pode ser homotópico a uma função constante pelo Lema 6.14. Analogamente, $i_*$ é injetivo, portanto não existe homotopia entre $i$ e uma constante. □

**Proposição 10.7.** *Dado um campo vetorial que nunca se anula em $B^2$, existe um ponto de $S^1$ em que o campo aponta diretamente para o centro e um ponto de $S^1$ em que o campo aponta diretamente para fora.*

*Demonstração.* Como o campo nunca se anula podemos representá-lo por uma função $v : B^2 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Considere $w$ a restrição de $v$ a $S^1$, como $v$ é extensão de $w$ então o Lema 6.14 nos diz que $w$ é homotópico a uma constante.

Agora suponha que os vetores do campo dado por $w$ nunca apontam diretamente para o centro, vamos concluir que $w$ é homotópico à inclusão $j : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e portanto $j$ é homotópico a uma constante, o que contradiz o corolário anterior.

Considere a função $F(x,t) = tx + (1-t)w(x)$ com $x \in S^1$ e $t \in [0,1]$. Vale que $F(x,0) = w(x)$ e $F(x,1) = x$. Além disso, se $F(x,t) = (0,0)$ então $w(x) = -\frac{t}{1-t}x$. Sendo assim, pela nossa hipótese, $F$ nunca zera e portanto $F$ é homotopia entre $w$ e $j$, uma contradição.

Considerando o campo vetorial $-v(x)$ concluímos que $v$ nunca aponta para fora. □

**Teorema 10.2** (Ponto fixo de Brouwer para o disco)**.** *Se $f : B^2 \to B^2$ é contínua, então existe $x \in B^2$ tal que $f(x) = x$.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que $f(x) \neq x$ para todo $x \in B^2$. Desse forma o campo vetorial definido por $v(x) = f(x) - x$ nunca se anula no disco e segue da Proposição 10.7 que existe um ponto $x_0 \in S^1$ tal que $v(x_0) + x_0 = ax_0$ para $a > 1$.

Porém isso implica que $f(x_0) = v(x_0) + x_0 = ax_0$ está fora do disco unitário, um absurdo. Logo deve existir um ponto fixo por $f$. □

Com os conteúdos vistos nesta seção podemos demonstrar um teorema muito importante da Álgebra:

**Teorema 10.3** (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Uma equação polinomial*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

*de grau $n > 0$ e com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$.*

*Demonstração.* Considere a função $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = z^n$ $(z \in \mathbb{C})$. Vamos mostrar primeiro que $f_* : \pi_1(S^1, 1+0i) \to \pi_1(S^1, 1+0i)$ é injetora.

Para isso tome $p : \mathbb{R} \to S^1$ a aplicação de recobrimento do Exemplo 10.3 e $p_0$ sua restrição ao intervalo $[0,1]$. Note que $p_0(s) = e^{2\pi si}$ e $f_*$ leva a classe de $p_0$ na classe de $f \circ p_0$ com $f(p_0(s)) = e^{2\pi nsi}$. Além disso, o levantamento de $f \circ p_0$ em relação a $p$ é a função que toma um $s \in [0,1]$ e leva em $ns$, dado que $p(ns) = (\cos(2\pi ns), \operatorname{sen}(2\pi ns)) = e^{2\pi nsi} = f \circ p_0(s)$.

Considere a função $\phi$ da Definição 10.7, ela leva um ciclo no ponto final de seu levantamento, ou seja, $\phi(f \circ p_0) = n$ e $\phi(p_0) = 1$. Mas vimos no Teorema 10.1 que $\phi$ é um isomorfismo entre $\pi_1(S^1, 1+0i)$ e $\mathbb{Z}$.

Dado um ciclo $[k]$ em $S^1$ com $\phi([k]) = m$ temos que

$$[k] = [p_0] * \cdots * [p_0] \Rightarrow$$

$$f_*([k]) = [f \circ (p_0 * \cdots * p_0)] = [(f \circ p_0) * \cdots * (f \circ p_0)]$$

que corresponde ao número $n + \cdots + n = nm$ por $\phi$. Com isso vemos que $f_*$ é correspondente à multiplicação por $n$ em $\mathbb{Z}$ e portanto é injetora.

Agora vamos verificar que a função $g : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dada por $g(z) = z^n$ não é homotópica a uma constante. Basta notar que $g_* = f_* \circ j_*$ onde $j$ é a inclusão do círculo no plano sem a origem. Mas $f_*$ e $j_*$ são injetoras, logo $g_*$ também é. Com isso o Lema 6.14 afirma que $g$ não pode ser homotópica a uma constante, pois $g_*$ não leva todos os elementos no elemento neutro.

Considere um polinômio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ com $|a_{n-1}| + \cdots + |a_0| < 1$, vamos mostrar que ele tem uma raiz em $B^2$.

Suponha que não existe tal raiz, podemos definir uma função $k(z)$ que vai de $B^2$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ pelo polinômio e definir $h$ a restrição de $k$ à $S^1$. Pelo Lema 6.14 $h$ é homotópico a uma constante. Vamos chegar numa contradição encontrando uma homotopia entre $h$ e $g$, pois $g$ não é homotópico a constante.

Seja $F : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, com $F(z,t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)$. Vale que $F(z,0) = g(z)$ e $F(z,1) = h(z)$, para $F$ ser homotopia basta mostrar que está bem definida, ou seja, nunca é zero:

$$|F(z,t)| \geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)| \geq 1 - t(|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) > 0.$$

Portanto $F$ é uma homotopia, do que segue que $k$ deve ter uma raiz em $B^2$.

Considerando um polinômio $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ qualquer basta tomar um $c > 0$ tal que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{c}\right| + \left|\frac{a_{n-2}}{c^2}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{c^n}\right| < 1.$$

Com isso, pelo caso anterior, o polinômio $y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{c^n}$ possui uma raiz $y_0$:

$$y_0^n + \frac{a_{n-1}}{c}y_0^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{c^n} = 0 \Rightarrow$$

$$(cy_0)^n + a_{n-1}(cy_0)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Ou seja, $cy_0$ é raiz do polinômio original. $\square$

## 10.3 Teorema de Borsuk-Ulam

Nesta seção vamos introduzir uma definição e alguns resultados que serão usados para mostrar um importante resultado da topologia.

**Definição 10.10.** Dado um ponto $x \in S^n$, a sua **antípoda** é o ponto $-x$. Uma função $f : S^n \to S^m$ preserva os pontos antipodais se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in S^n$.

**Lema 6.15.** *Se $f : S^1 \to S^1$ é contínua e preserva pontos antipodais, então $f$ não é homotópica a uma constante.*

**Proposição 10.8.** *Não existe função contínua de $S^2$ em $S^1$ que preserva pontos antipodais.*

*Demonstração.* Suponha que $g : S^2 \to S^1$ é contínua e preserva pontos antipodais. Considerando $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e $S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \subset S^2$, temos que $g|_{S^1}$ é contínua e preserva pontos antipodais, portanto não é homotópica a uma constante (Lema 6.15).

Por outro lado, o hemisfério superior $E$ da esfera é homeomorfo à $B^2$, logo $g|_E$ pode ser vista como uma extensão contínua de $g|_{S^1}$ para $B^2$. O Lema 6.14 garante que $g|_{S^1}$ é homotópica a uma constante, um absurdo. $\square$

**Teorema 10.4** (Borsuk-Ulam para $S^2$)**.** *Se $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ é contínua, existe um ponto $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

*Demonstração.* Suponha que $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in S^2$ e defina

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}.$$

A função $g$ é contínua e vai de $S^2$ em $S^1$, além disso:

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{||f(-x) - f(x)||} = \frac{-(f(x) - f(-x))}{||f(x) - f(-x)||} = -g(x),$$

o que contradiz a Proposição 10.8. $\square$

**Corolário 10.2** (Teorema do sanduíche de presunto no $\mathbb{R}^2$)**.** *Dadas duas regiões poligonais limitadas em $\mathbb{R}^2$, existe uma reta que divide cada uma em regiões de mesma área.*

*Demonstração.* Vamos considerar o plano como sendo $\mathbb{R}^2 \times 1 \subset \mathbb{R}^3$. Para cada vetor $v$ de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ considere o plano normal à $v$ passando pela origem que divide o espaço em dois semiespaços.

Consequentemente, as duas regiões poligonais $A_1$ e $A_2$ também podem ser divididas entre os semiespaços. Para $i = 1, 2$ seja $f_i(v)$ a área de $A_i$ que está no mesmo semiespaço que $v$. As funções $f_i$ são contínuas de $S^2$ em $\mathbb{R}$.

Seja $k = (0, 0, 1)$, se $v = k$ então $f_i(v)$ é igual a área total de cada região. Se $v = -k$ então $f_i(v) = 0$. Para qualquer outro $v$, o plano normal à ele determina uma reta em $\mathbb{R}^2 \times 1$ e $f_i$ conta a área de $A_i$ que está em um dos semiplanos determinados por essa reta.

Note que, a reta determinada por $-v$ é a mesma de $v$, mas a região de $A_i$ que é considerada por $f_i$ é invertida, ou seja, $f_i(v) + f_i(-v)$ é a área total de $A_i$.

Considere $F : S^2 \to \mathbb{R}^2$ com $F = (f_1, f_2)$, pelo Teorema 10.4, existe um ponto $v \in S^2$ tal que $F(v) = F(-v)$, ou seja:

$$f_i(v) + f_i(-v) = f_i(v) + f_i(v) = \text{área de } A_i \Rightarrow f_i(v) = \frac{\text{área de } A_i}{2}.$$

Como $v$ não pode ser $k$ nem $-k$, então $v$ determina uma reta no plano $\mathbb{R}^2 \times 1$. $\square$

## 10.4 Tipos de homotopia

**Lema 6.16.** *Sejam $h, k : X \to Y$ funções homotópicas com $h(x_0) = k(x_0) = y_0$. Se existe uma homotopia $H$ entre $h$ e $k$ que fixa $x_0$ em $y_0$ ($H(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in [0, 1]$), então $h_* = k_*$.*

*Demonstração.* Devemos mostrar que, para qualquer $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, vale $[h \circ f] = [k \circ f]$. Basta verificar que $H \circ (f,\, Id) : [0, 1] \times [0, 1] \to Y$ é homotopia de caminhos entre $h \circ f$ e $k \circ f$:

$$(H \circ (f,\, Id))(s, 0) = H(f(s), 0) = h \circ f(s)$$

$$(H \circ (f,\, Id))(s, 1) = H(f(s), 1) = k \circ f(s)$$

$$(H \circ (f,\, Id))(0, t) = (H \circ (f,\, Id))(1, t) = H(x_0, t) = y_0.$$

$\square$

**Proposição 10.9.** *A inclusão $j : S^n \to X$, com $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, induz um isomorfismo entre grupos fundamentais.*

*Demonstração.* Seja $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ e $r : X \to S^n$ dada por $r(x) = \frac{x}{||x||}$. A composição $r \circ j$ é a identidade de $S^n$ e portanto $r_* \circ j_*$ é a identidade de $\pi_1(S^n, x_0)$.

Por outro lado, a composição $j \circ r : X \to X$ é homotópica à função identidade de $X$ pela homotopia $H : X \times [0, 1] \to X$ com

$$H(x, t) = (1 - t)x + t\frac{x}{||x||}.$$

Como $H(x_0, t) = x_0$ para todo $t$, o Lema 6.16 nos diz que $j_* \circ r_*$ é a identidade de $\pi_1(X, x_0)$. Ou seja, $r_*$ é a inversa de $j_*$, do que segue que $j_*$ é bijetora e portanto é isomorfismo. $\square$

**Definição 10.11.** Um conjunto $A \subset X$ é dito ser um **retrato por deformação** de $X$ se a identidade de $X$ é homotópica a uma função que leva $X$ em $A$ e todo ponto de $A$ se mantém fixo durante a homotopia. Em outras palavras, existe $H : X \times [0,1] \to X$ contínua de forma que $H(x,0) = x$, $H(x,1) \in A$ e $H(a,t) = a$ para todo $a \in A$.

A homotopia $H$ é chamada de **retração de deformação** de $X$ em $A$ e é homotopia entre a identidade de $X$ e $j \circ r$, onde $j$ é a inclusão de $A$ em $X$ e $r(x) = H(x,1)$ é uma retração de $X$ em $A$.

A Proposição 10.9 pode ser generalizada da seguinte forma:

**Proposição 10.10.** *Seja $A$ um retrato por deformação de $X$ e $x_0 \in A$. A inclusão $j : A \to X$ induz um isomorfismo entre $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(X, x_0)$.*

*Exemplo* 10.5. $H(x,y,z,t) = (x, y, (1-t)z)$ é uma retração de deformação do espaço $\mathbb{R}^3$ sem o eixo $z$ no espaço $\mathbb{R}^2$ sem a origem.

**Definição 10.12.** Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funções contínuas. Se $g \circ f$ é homotópica à identidade de $X$ e $f \circ g$ é homotópica à identidade de $Y$ então $X$ e $Y$ são ditos **homotopicamente equivalentes** (ou têm o mesmo tipo de homotopia) e $f$ e $g$ são chamadas de **equivalências homotópicas**.

*Observação* 10.1. Essa relação entre espaços é, de fato, relação de equivalência: as propriedades reflexiva e simétrica são imediadas.

Para a transitiva, suponha que existam $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $h : Y \to Z$ e $k : Z \to Y$ com $f \circ g \simeq Id_Y$, $g \circ f \simeq Id_X$, $h \circ k \simeq Id_Z$ e $k \circ h \simeq Id_Y$, logo $(h \circ f) \circ (g \circ k) \simeq Id_Z$ e $(g \circ k) \circ (h \circ f) \simeq Id_X$. Portanto $X$ é homotopicamente equivalente à $Z$.

Se $A$ é retrato por deformação de $X$, então eles são homotopicamente equivalentes, já que a função $r \circ j$ (da Definição 10.11) é igual à identidade de $A$ e $j \circ r$ é homotópica à identidade de $X$ (Proposição 10.10).

**Lema 6.17.** *Sejam $h, k : X \to Y$ funções contínuas com $h(x_0) = y_0$ e $k(x_0) = y_1$. Se $H$ é uma homotopia entre $h$ e $k$, então $\alpha(t) = H(x_0, t)$ é um caminho de $y_0$ até $y_1$. Definindo a função de $\pi_1(Y, y_0)$ até $\pi_1(Y, y_1)$ dada por $\hat{\alpha}([g]) = [\tilde{\alpha}] * [g] * [\alpha]$, onde $\tilde{\alpha}$ é o caminho inverso, temos que $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$.*

**Corolário 10.3.** *Sejam $h, k : X \to Y$ funções contínuas e homotópicas. Se $h_*$ é injetora ou sobrejetora ou trivial, $k_*$ também o é.*

**Corolário 10.4.** *Seja $h : X \to Y$ homotópica a uma função constante. Então $h_*$ é o homomorfismo trivial.*

**Proposição 10.11.** *Seja $f : X \to Y$ contínua e $f(x_0) = y_0$. Se $f$ é uma equivalência homotópica, então $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Seja $g : Y \to X$ a função que satisfaz a Definição 10.12 e denote $g(y_0) = x_1$ e $f(x_1) = y_1$. Com isso temos $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi(X, x_1)$ e $\tilde{f}_* : \pi(X, x_1) \to \pi_1(Y, y_1)$ (aqui $\tilde{f}$ é igual a $f$ mas a notação existe para diferenciar os homomorfismos induzidos em diferentes pontos de $X$).

Pelo fato de $f$ e $g$ serem equivalências homotópicas temos que $g \circ f$ é homotópica à identidade de $X$ e o Lema 6.17 nos diz que existe um caminho $\alpha$ de $x_1$ a $x_0$ tal que $(g \circ f)_* = \hat{\alpha}$. Além disso, pelo Corolário 10.3, temos que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ é bijetora.

Analogamente, como $f \circ g$ é homotópica à identidade de $Y$, então $(f \circ g)_* = \tilde{f}_* \circ g_*$ é bijetora.

Dessas duas conclusões temos que $g_*$ é sobrejetora e injetora, portanto é um isomorfismo. Como $f_* = g_*^{-1} \circ \hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}$ é isomorfismo (Exemplo 10.2), então $f_*$ também é. □

## 10.5 Alguns grupos fundamentais

**Proposição 10.12.** *Seja $X = U \cup V$, com $U$ e $V$ abertos de $X$ e $U \cap V$ conexo por caminhos. Considere $x_0 \in U \cap V$ e $i$ e $j$ as inclusões de $U$ e $V$ em $X$, respectivamente. Nessas condições, as imagens dos homomorfismos induzidos $i_*$ e $j_*$ geram $\pi_1(X, x_0)$, ou seja, qualquer $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ pode ser escritos como produto de ciclos $[g_1], \ldots, [g_m]$ em $x_0$, onde cada $[g_i]$ está contido em $U$ ou $V$.*

*Demonstração.* Dado $f$ ciclo em $x_0$, vamos mostrar que existem $0 = a_0 < \ldots < a_n = 1$ de forma que $f(a_i) \in U \cap V$ e $f([a_{i-1}, a_i])$ está contido em $U$ ou em $V$.

Usando o Lema do número de Lebesgue podemos encontrar $0 = b_0 < \ldots < b_m = 1$ que cumprem a segunda condição. Agora suponha que $f(b_i) \notin U \cap V$, nesse caso $i$ não pode ser 0 nem $m$, pois $f(0) = f(1) = x_0 \in U \cap V$. Logo, $f([b_{i-1}, b_i])$ e $f([b_i, b_{i+1}])$ devem estar contidos no mesmo conjunto ($U$ ou $V$), portanto podemos excluir o elemento $b_i$ e a segunda condição continua válida. Repetindo esse processo um número finito de vezes chegamos em $0 = a_0 < \ldots < a_n = 1$ de forma que $f(a_i) \in U \cap V$ para todo $i$.

Agora seja $f_i$ a composta da função linear crescente de $[0, 1]$ em $[a_{i-1}, a_i]$ seguida de $f$. Então $f_i$ é um caminho que está contido em $U$ ou em $V$, pois $f_i(t) = f(s)$ com $s$ no intervalo de $a_{i-1}$ até $a_i$. Além disso, vale que

$$[f] = [f_1] * \cdots * [f_n].$$

Como $U \cap V$ é conexo por caminhos, então denote por $\alpha_i$ um caminho em $U \cap V$ entre $x_0$ e $f(a_i)$, sendo $\alpha_0$ e $\alpha_n$ os caminhos constantes em $x_0$. O seguinte produto está bem definido e é um ciclo em $x_0$ contido em $U$ ou em $V$:

$$g_i = \alpha_{i-1} * f_i * \overline{\alpha_i}.$$

Note que

$$[g_i] * [g_{i+1}] = [\alpha_{i-1}] * [f_i] * [f_{i+1}] * [\overline{\alpha}_{i+1}].$$

Portanto

$$[g_1] * \cdots * [g_n] = [\alpha_0] * [f_1] * \cdots * [f_n] * [\overline{\alpha_n}] = [f_1] * \cdots * [f_n] = [f].$$

□

**Corolário 10.5.** *Seja $X = U \cup V$ com $U$ e $V$ abertos de $X$ e $U \cap V$ não vazio e conexo por caminhos. Se $U$ e $V$ são simplesmente conexos então $X$ é simplesmente conexo.*

*Demonstração.* Tome $x_0 \in U \cap V$, então, pela proposição anterior, qualquer ciclo em $x_0$ pode ser escrito como produto de ciclos em $U$ e $V$, mas esses ciclos devem ser homotópicos ao ciclo constante, pois $U$ e $V$ são simplesmente conexos, logo o ciclo original em $x_0$ também o é.

Como $U$ e $V$ são conexos por caminhos, têm interseção não vazia e $X = U \cup V$ então $X$ também é conexo por caminhos e portanto é simplesmente conexo. □

**Proposição 10.13.** *A n-esfera $S^n$, com $n \geq 2$, é simplesmente conexa.*

*Demonstração.* Sejam $p = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $q = (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. A função a seguir, chamada de projeção estereográfica, é homeomorfismo entre $S^n - p$ e $\mathbb{R}^n$.

$$f : (S^n - p) \to \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Agora, sejam $U = S^n - p$ e $V = S^n - q$ abertos de $S^n$, a reflexão na última coordenada é um homeomorfismo entre $U$ e $V$.

Disso segue que $U$ e $V$ são conexos por caminhos, pois são homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, e, como possuem pontos em comum e $S^n = U \cup V$, então $S^n$ também é conexo por caminhos.

Além disso, $U$ e $V$ são simplesmente conexos e sua interseção $S^n - p - q$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n - 0$ pela projeção estereográfica, que é conexo por caminhos para $n \geq 2$. Portanto, pelo corolário anterior, $S^n$ é simplesmente conexo. □

**Lema 6.18.** *Dados $G$ e $H$ grupos com a operação $\cdot$, então $G \times H$ com a operação $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$ é um grupo.*

*Se $f : A \to G$ e $k : A \to H$ são homomorfismos, então $\varphi : A \to G \times H$ dada por $\varphi(g, h) = (f(g), k(h))$ é homomorfismo.*

**Teorema 10.5.** *Dados $X$ e $Y$ espaços topológicos e $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, então $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ é isomorfo à $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

*Demonstração.* Sejam $p$ e $q$ as projeções de $X \times Y$ em $X$ e $Y$, respectivamente. Elas induzem homomorfismos $p_*$ e $q_*$ de $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ em $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$, respectivamente.

Considere o homomorfismo $\Phi$ de $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ em $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ definido por $\Phi = (p_*, q_*)$. Vamos mostrar que é uma bijeção.

Para verificar que é sobrejetora tome um elemento de $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, ou seja, $([f], [g])$ onde $f$ é um ciclo em $x_0$ e $g$ é um ciclo em $y_0$. Note que $h : [0, 1] \to X \times Y$ dado por $h(s) = (f(s), g(s))$ é um ciclo em $(x_0, y_0)$ e

$$\Phi([h]) = (p_*([h]), q_*([h])) = ([p \circ h], [q \circ h]) = ([f], [g]).$$

Agora suponha que $\Phi([h])$ é a identidade de $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ para algum ciclo $h$ em $(x_0, y_0)$. Isso significa que $p \circ h$ é homotópico ao ciclo constante em $x_0$ e $q \circ h$ é homotópico ao ciclo constante em $y_0$.

Sejam $F$ e $G$ as respectivas homotopias de caminhos, defina $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X \times Y$ por $H = (F, G)$, então $H$ é homotopia de caminhos entre $h$ e o ciclo constante em $(x_0, y_0)$.

Portanto $[h]$ é o elemento neutro de $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ e $\Phi$ é injetora. $\square$

**Corolário 10.6.** *O grupo fundamental do toro $T = S^1 \times S^1$ é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

*Exemplo* 10.6. O plano projetivo $P^2$ é o espaço quociente obtido relacionando os pontos antipodais de $S^2$. É possível verificar que $P^2$ é uma superfície compacta e a função quociente $p : S^2 \to P^2$ é uma aplicação de recobrimento.

Como $S^2$ é simplesmente conexo, podemos usar a Proposição 10.5 e concluir que existe uma bijeção entre $\pi_1(P^2, x)$ e $p^{-1}(x)$, logo o grupo fundamental possui dois elementos. Ademais, um grupo de dois elementos é sempre isomorfo à $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

*Exemplo* 10.7. Considere o toro $T$ (Corolário 10.6) e $D_1, D_2 \subset T$ fechados homeomorfos a discos fechados de $\mathbb{R}^2$, seja $\phi : \partial D_1 \to \partial D_2$ homeomorfismo.

Vamos definir uma relação de equivalência no conjunto

$$(T - int\, D_1) \sqcup (T - int\, D_2) = \{(x, 1) \mid x \in T - int\, D_1\} \cup \{(x, 2) \mid x \in T - int\, D_2\}$$

de forma que $(a,i) \sim (b,j)$ se $(a,i) = (b,j)$ ou se $i = 1$, $j = 2$, $a \in \partial D_1$, $b \in \partial D_2$ e $\phi(a) = b$.

Dessa forma definimos o bitoro:

$$((T - intD_1) \sqcup (T - intD_2)) \,/\sim\, = T\#T.$$

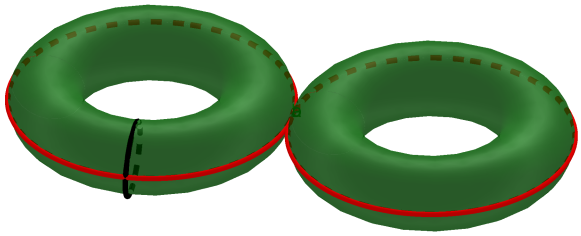


Figura 6.1: Bitoro

A construção independe da escolha de $D_1$ e $D_2$, pois quaisquer fechados homeomorfos a discos fechados do $\mathbb{R}^2$ serão homeomorfos. Podemos considerar esses fechados como dois pontos, daí seu interior é vazio.

O espaço destacado em vermelho (chamado de oito) é um retrato do bitoro, a retração pode ser obtida levando cada círculo transversal ao oito no ponto em que o intersecta. Além disso, o grupo fundamental do oito não é abeliano [1, Lema 60.5, p. 373]. Pelo Lema 6.13, o homomorfismo $j_*$ induzido pela inclusão do oito no bitoro é injetor, logo o grupo fundamental do bitoro também não é abeliano.

**Corolário 10.7.** *Os espaços $S^2$, $P^2$, o toro e o bitoro são topologicamente distintos.*

*Demonstração.* O grupo fundamental de $S^2$ é trivial, enquanto o grupo fundamental do toro é isomorfo à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e o de $P^2$ é isomorfo à $\mathbb{Z}_2$, esses três não são isomorfos pois possuem quantidades diferentes de elementos.

Além disso são todos abelianos, já o grupo fundamental do bitoro não. Pela Proposição 10.1 quaisquer dois desses espaços não podem ser homeomorfos. □

# 11 Teoremas de separação

**Lema 6.19.** *Seja $C \subset S^2$ um subespaço compacto e $x \in S^2 - C$. Tome $h : S^2 - \{x\} \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo e $U$ uma componente de $S^2 - C$. Se $x \notin U$, então $h(U)$ é uma componente limitada de $\mathbb{R}^2 - h(C)$. Se $x \in U$, então $h(U - \{x\})$ é uma componente ilimitada de*

*$\mathbb{R} - h(C)$. Em particular, se $S^2 - C$ possui $n$ componentes, então $\mathbb{R}^2 - h(C)$ possui $n$ componentes.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que $U - \{x\}$ é conexo, para qualquer componente $U$ de $S^2 - C$:

Se $x \notin U$, então $U - \{x\} = U$ que é conexo.

Se $x \in U$, suponha por absurdo que $A$ e $B$ formam uma separação por abertos de $U - \{x\}$. Como $U$ é aberto em $S^2$ (Proposição 6.6), existe uma vizinhança $W$ de $x$ contida em $U$ e portanto disjunta de $C$, tome $W$ homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^2$.

Com isso $W - \{x\}$ é homeomorfo a uma bola aberta de $\mathbb{R}^2$ sem um ponto, logo também é conexo, disso segue que está contido em $A$ ou em $B$, suponha $W - \{x\} \subset A$. Com isso obtemos que $A \cup \{x\}$ e $B$ formam uma separação por abertos de $U$, o que não pode ocorrer, logo $U - \{x\}$ é conexo.

Sejam $\{U_\alpha\}$ as componentes de $S^2 - C$ e $V_\alpha = h(U_\alpha - \{x\})$. Vale que $\{V_\alpha\}$ são as componentes de $\mathbb{R}^2 - h(C)$, pois são abertos em $\mathbb{R}^2 - h(C)$, disjuntos e conexos.

Agora, o homeomorfismo $h$ pode ser estendido num homeomorfismo $H$ de $S^2$ em $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ (compactificação), tomando $H(x) = \infty$. Dessa forma, se $x \in U_\alpha$ então $H(U_\alpha)$ é uma vizinhança de $\infty$ e portanto é da forma $V \cup \{\infty\}$ onde $V$ é aberto de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 - V$ é compacto. Como $V_\alpha = V$ então $V_\alpha$ é ilimitado. Todos os outros componentes de $\mathbb{R}^2 - h(C)$ estão contidos em $\mathbb{R}^2 - V_\alpha$ e portanto são limitados. $\square$

**Lema 6.20.** *Sejam $a, b \in S^2$, $A$ um espaço compacto e $f : A \to S^2 - \{a, b\}$ contínua. Se $a$ e $b$ estão na mesma componente de $S^2 - f(A)$, então $f$ é homotópica a uma função constante.*

*Demonstração.* Vamos considerar $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ no lugar de $S^2$ com $a$ correspondendo a origem $0 \in \mathbb{R}^2$ e $b$ correspondendo a $\infty$, assim podemos reescrever o lema como:

Seja $g : A \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ contínua, se $0$ está na componente ilimitada de $\mathbb{R}^2 - g(A)$, então $g$ é homotópica a uma função constante.

Denotando por $B$ uma bola centrada na origem contendo $g(A)$ e $p \notin B$ um ponto do plano. Então $p \in \mathbb{R}^2 - B \subset \mathbb{R}^2 - g(A)$, que é um conexo ilimitado, logo $p$ está na componente ilimitada de $\mathbb{R}^2 - g(A)$, que é a mesma onde está $0$.

Considere um caminho $\alpha$ em $\mathbb{R}^2 - g(A)$ entre $0$ e $p$. Vamos definir a função $G$ de $A \times [0, 1]$ em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ dada por $G(x, t) = g(x) - \alpha(t)$. A função está bem definida pois $\alpha$ não intersecta $g(A)$. Além disso $G$ é homotopia entre $g(x)$ e $k(x) = g(x) - p$.

Agora considere $H : A \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ dada por $H(x, t) = tg(x) - p$. A função $H$ está bem definida pois $tg(x)$ está sempre na bola $B$, enquanto $-p$ não está. E $H$ é homotopia entre $k$ e a função constante $-p$. Disso segue que $g$ é homotópica a função constante igual a $-p$. $\square$

**Definição 11.1.**

- Se $X$ é um espaço conexo e $Y \subset X$, dizemos que $Y$ separa $X$ se $X - Y$ não é conexo. Além disso, se $X - Y$ possui $n$ componentes, dizemos que $Y$ separa $X$ em $n$ componentes.

- Um arco $A$ é um espaço homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$, os limites de $A$ são os pontos $p$ e $q$ de $A$ de forma que $A - p$ e $A - q$ são conexos, os outros pontos de $A$ são ditos pontos interiores do arco.

- Uma curva simples fechada é um espaço homeomorfo a $S^1$.

Segue das definições que uma curva simples fechada pode ser escrita como união de dois arcos que se intersectam apenas nos seus pontos limites.

**Teorema 11.1** (Teorema da separação de Jordan)**.** *Seja $C$ uma curva simples e fechada em $S^2$, então $C$ separa $S^2$.*

*Demonstração.* Vamos supor que $S^2 - C$ é conexo por caminhos e chegar numa contradição.

Considere $C$ como união dos arcos $A_1$ e $A_2$ que se intersectam em $a$ e $b$. Vamos denotar $X = S^2 - \{a, b\}$, $U = S^2 - A_1$ e $V = S^2 - A_2$. Vale que $U$ e $V$ são abertos de $X$. Considere $x_0 \in U \cap V$ e $i$ e $j$ as inclusões de $U$ e $V$ em $X$, respectivamente. Vamos mostrar que os homomorfismos $i_*$ e $j_*$ em $\pi_1(X, x_0)$ são triviais.

Tome $f$ um ciclo em $U$ no ponto $x_0$ e seja $p : [0, 1] \to S^1$ a função que leva $x$ em $(\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$. Como $p$ só não é injetora em 0 e 1 e $f(0) = f(1)$, então $p$ induz uma função contínua $h : S^1 \to U$ de forma que $h \circ p = f$.

Agora considere a inclusão de $h$ em $X$: $i \circ h : S^1 \to X$, temos que $i(h(S^1)) = h(S^1)$ não intersecta $A_1$, que é um conexo contendo $a$ e $b$, logo esses pontos devem estar na mesma componente conexa de $S^2 - i(h(S^1))$. Pelo lema anterior, $i \circ h$ é homotópica a uma constante e portanto $i_* \circ h_*$ é o homomorfismo trivial, por outro lado:

$$(i_* \circ h_*)([p]) = [i \circ h \circ p] = i_*([f])$$

e com isso $i_*$ é trivial. O mesmo ocorre com $j_*$.

Agora, temos que $U \cap V = S^2 - C$, que é, por hipótese, conexo por caminhos, além disso $U \cup V = X$, logo a Proposição 10.12 se aplica e $i_*$ e $j_*$ geram o grupo $\pi_1(X, x_0)$. Porém, $X$ é homeomorfo ao plano sem um ponto, que não possui grupo trivial ($S^1$ é um retrato), uma contradição.

Portanto, concluímos que $S^2 - C$ não é conexo por caminhos. Por outro lado, como $S^2 - C$ é localmente conexo por caminhos, então suas componentes e suas componentes por caminhos são iguais (Proposição 6.8), do que segue que não é conexo. □

A demonstração pode ser generalizada no seguinte resultado.

**Proposição 11.1.** *Sejam $A, B \subset S^2$ fechados e conexos cuja interseção consiste em dois pontos $a$ e $b$, então $C = A \cup B$ separa $S^2$.*

**Lema 6.21.** *Sejam $X$ um espaço de forma que $X \times [0,1]$ é normal, $A \subset X$ fechado, $Y \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : A \to Y$ contínua. Se $f$ é homotópica a uma constante, então pode ser estendida a uma função $g : X \to Y$ homotópica a uma constante.*

**Lema 6.22** (Borsuk). *Sejam $a, b \in S^2$, $A$ compacto e $f : A \to S^2 - \{a, b\}$ contínua e injetora. Se $f$ é homotópica a uma constante, então $a$ e $b$ estão na mesma componente de $S^2 - f(A)$.*

*Demonstração.* Como $A$ é compacto e $S^2$ é um espaço de Hausdorff, $f(A)$ é um compacto homeomorfo a $A$ (Proposição 7.4).

Seja $F : A \times [0,1] \to S^2 - \{a, b\}$ homotopia entre $f$ e uma constante, defina $G$ de $f(A) \times [0,1]$ em $S^2 - \{a, b\}$ de forma que, dado $d = f(c) \in f(A)$ temos

$$G(d, t) \coloneqq F(c, t).$$

Com isso, $G$ é homotopia entre a inclusão $j$ de $f(A)$ e uma constante, pois $G(d, 0) = F(c, 0) = f(c) = j(d)$. Dessa forma basta provar o caso em que $f$ é uma inclusão. Além disso, substituindo $S^2$ por $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ e $a$ por $0$ e $b$ por $\infty$, temos que provar o seguinte:

Seja $A$ um compacto de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Se a inclusão $j : A \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ é homotópica a uma constante, então $0$ está na componente ilimitada de $\mathbb{R}^2 - A$.

Suponha, por absurdo, que a componente $C$ que contém $0$ é limitada. Denote por $D$ a união das outras componentes, então $C$ e $D$ são abertos disjuntos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 - A = C \cup D$.

Temos que $A$ e $C \cup A = \mathbb{R}^2 - D$ são fechados e $(C \cup A) \times [0,1]$ é normal, pois ambos são compactos e Hausdorff, logo o seu produto também o é, daí podemos aplicar a Proposição 8.5. Com isso, o lema anterior nos diz que $j$ pode ser estendida em uma função $h : C \cup A \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ que é igual a identidade em $A$. Podemos ainda estender $h$ em $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ fazendo $k(x) = x$ para todo $x \in D \cup A$, que é contínua pelo Lema da colagem.

Seja $B$ uma bola fechada centrada na origem de raio $M$ que contém $C \cup A$ em seu interior. Fazendo a restrição de $k$ em $B$ temos uma função $g$ de $B$ em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ onde $g(x) = x$ para todos os pontos na fronteira de $B$, aplicando a retração $x \mapsto \dfrac{Mx}{||x||}$ após $g$ temos uma retração de $B$ na fronteira de $B$, que não existe (Exemplo 10.4). Portanto $C$ deve ser ilimitado. □

**Lema 6.23.** *Seja $G$ um grupo cíclico infinito, $H$ subgrupo de $G$ não trivial, então $G/H$ é finito.*

*Demonstração.* $G$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$, enquanto $H$ é isomorfo a $k\mathbb{Z}$, para $k \neq 0$, logo $G/H$ é da forma $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, que é finito. □

**Proposição 11.2.** *Seja $X$ um espaço que pode ser escrito como união de dois abertos $U$ e $V$. Suponha que $U \cap V$ é a união de dois abertos disjuntos $A$ e $B$ e que existem um caminho $\alpha$ em $U$ entre um ponto $a \in A$ e um ponto $b \in B$ e um caminho $\beta$ em $V$ entre $b$ e $a$. Definindo $f = \alpha * \beta$ vale que:*

1. *A classe $[f]$ gera um subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$.*
2. *Se $\pi_1(X, a)$ é cíclico e infinito, então é gerado por $[f]$.*
3. *Suponha que existe um caminho $\gamma$ em $U$ entre $a$ e $a' \in A$ e um caminho $\delta$ em $V$ entre $a'$ e $a$. Definindo $g = \gamma * \delta$, os subgrupos de $\pi_1(X, a)$ gerados por $[f]$ e $[g]$ se intersectam apenas no elemento neutro.*

*Demonstração.* Primeiro vamos encontrar um espaço $E$ que cobre $X$.

Considere o subconjunto de $X \times \mathbb{Z}$:

$$Y = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U \times \{2n\} \right) \bigcup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V \times \{2n+1\} \right).$$

Identificando os pontos $(x, 2n)$ com $(x, 2n-1)$ para $x \in A$ e $(x, 2n)$ com $(x, 2n+1)$ para $x \in B$, obtemos o espaço quociente $E$. Seja $\pi : Y \to E$ a função quociente.

A função $\rho$ de $Y$ em $X$ que leva $(x, n)$ em $x$ induz uma função $p : E \to X$, que é contínua e sobrejetora em $E$ com a topologia quociente. Vamos verificar que $p$ é aplicação de recobrimento.

Seja $W \times \{2n\}$ um aberto de $U \times \{2n\}$, onde $W$ é aberto de $U$, vale que

$$\pi^{-1}(\pi(W \times \{2n\})) = (W \times \{2n\}) \cup ((W \cap B) \times \{2n+1\}) \cup ((W \cap A) \times \{2n-1\}).$$

Que é a união de três abertos de $Y$, logo $\pi^{-1}(\pi(W \times \{2n\}))$ é aberto e, como $\pi$ é a função quociente, $\pi(W \times \{2n\})$ é aberto de $E$. De maneira análoga, $\pi$ restrita a $V \times \{2n+1\}$ é aberta, portanto $\pi$ é aplicação aberta, dado que $Y$ é união dos abertos disjuntos da forma $U \times \{2n\}$ e $V \times \{2n+1\}$.

Agora, note que $p^{-1}(U)$ é a união dos disjuntos $\pi(U \times \{2n\})$, que são abertos.

Se $\pi_2 : U \times \{2n\} \to \pi(U \times \{2n\})$ é a restrição de $\pi$, então ela é contínua, bijetora e aberta, logo é homeomorfismo. Dessa forma podemos escrever $p$ restrita a $\pi(U \times \{2n\})$ como a composta dos homeomorfismos $\rho \circ \pi_2^{-1}$, com $\rho : U \times \{2n\} \to U$.

Ou seja, $p$ restrita a cada um dos abertos disjuntos que formam $p^{-1}(U)$ é homeomorfismo, portanto $U$ é uniformemente coberto. De maneira análoga, $V$ também é, com isso $p$ é aplicação de recobrimento.

Agora vamos encontrar levantamentos do ciclo $f$.

Para cada $n$, seja $e_n = \pi(a, 2n) \in E$, com isso, os $e_n$ são distintos e formam o conjunto $p^{-1}(a)$, pois os pontos de $p^{-1}(a)$ são as classes dos pontos $(a, m)$, mas, pela construção de $E$, cada uma dessas classes também contém um elemento da forma $(a, 2n)$.

Vamos definir um levantamento $\tilde{f}_n$ de $f$ que começa em $e_n$ e termina em $e_{n+1}$. Sejam

$$\tilde{\alpha}_n(s) = \pi(\alpha(s), 2n)$$

$$\tilde{\beta}_n(s) = \pi(\beta(s), 2n+1).$$

Estes caminhos são levantamentos de $\alpha$ e $\beta$ respectivamente, dado que

$$p(\pi(\alpha(s), 2n)) = \alpha(s) \quad \text{e} \quad p(\pi(\beta(s), 2n+1)) = \beta(s).$$

Como $\tilde{\alpha}_n(1) = \pi(b, 2n) = \pi(b, 2n+1) = \tilde{\beta}_n(0)$, então está bem definido o produto $\tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$.

Definindo $\tilde{f}_n = \tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$, temos um levantamento de $f$ que começa em

$$\tilde{f}_n(0) = \tilde{\alpha}_n(0) = \pi(\alpha(0), 2n) = \pi(a, 2n) = e_n$$

e termina em

$$\tilde{f}_n(1) = \tilde{\beta}_n(1) = \pi(\beta(1), 2n+1) = \pi(a, 2n+1) = \pi(a, 2n+2) = e_{n+1}.$$

Para mostrar que o grupo gerado por $[f]$ é cíclico infinito, basta mostrar que, para cada $m$ inteiro positivo, o elemento $[f]^m$ não é a identidade.

Note que, o produto $\tilde{h} = \tilde{f}_0 * \cdots * \tilde{f}_{m-1}$ é levantamento de $f^m$. Mas $\tilde{h}(0) = \tilde{f}_0(0) = e_0$ e $\tilde{h}(1) = \tilde{f}_{m-1}(1) = e_m$. Se $[f]^m$ for igual a identidade, então o levantamento de $f^m$ é homotópico ao levantamento do ciclo constante em $e_0$, logo tem $e_0$ como ponto final. Porém vimos que $\tilde{h}(1) = e_m$, portanto $[f]^m$ não é a identidade.

Agora, suponha que $\pi_1(X, a)$ é cíclico infinito. Seja $\phi : \pi_1(X, a) \to p^{-1}(a)$ a correspondência de levantamentos, que leva um ciclo em torno de $a$ no ponto final do levantamento desse elemento que começa em $e_0$, vimos acima que $\phi([f]^m) = e_m$ e podemos ver que $\phi([f]^{-m}) = e_{-m}$, basta notar que $\tilde{f}_{-1}^{-1} * \cdots * \tilde{f}_{-m}^{-1}$ é levantamento de $f^{-m}$ que começa em $e_0$ e termina em $e_{-m}$. Portanto $\phi$ é sobrejetora.

Pela Proposição 10.6, $\phi$ induz uma função injetora $\Phi : \pi_1(X, a)/H \to p^{-1}(a)$, onde $H = p_*(\pi_1(E, e_o))$. Como $\phi$ é sobrejetora, $\Phi$ é bijetora. Como $p^{-1}(a)$ é infinito, então $H$ deve ser trivial, pelo lema anterior.

Com isso, $\phi$ é uma bijeção, mas como $\phi(\{[f]^m\}) = p^{-1}(a)$, então $\pi_1(X, a) = \{[f]^m\}$.

Para o último item, vamos definir um levantamento de $g$: considere $\tilde{\gamma}(s) = \pi(\gamma(s), 0)$

e $\tilde{\delta}(s) = \pi(\delta(s), -1)$, eles estão bem definidos, pois $\gamma$ está em $U$ e $\delta$ em $V$. Além disso,

$$\tilde{\gamma}(1) = \pi(\gamma(1), 0) = \pi(a', 0)$$

$$\tilde{\delta}(0) = \pi(\delta(0), -1) = \pi(a', -1) = \pi(a', 0).$$

Logo, $\tilde{g} = \tilde{\gamma} * \tilde{\delta}$ está definido, é um levantamento de $g$ e é um ciclo em $e_0$:

$$\tilde{g}(0) = \tilde{\gamma}(0) = \pi(\gamma(0), 0) = \pi(a, 0) = e_0$$

$$\tilde{g}(1) = \tilde{\delta}(1) = \pi(\delta(1), -1) = \pi(a, -1) = e_0.$$

Agora, dados $m, k \in \mathbb{Z}$, o levantamento de $f^m$ começando em $e_0$ termina em $e_m$, enquanto o levantamento de $g^k$ começando em $e_0$ é um ciclo em $e_0$, portanto $[f]^m \neq [g]^k$, sempre que $m \neq 0$, logo só são iguais quando ambos são o elemento neutro. $\square$

**Proposição 11.3.** *Seja $D$ um arco em $S^2$, então $D$ não separa $S^2$.*

*Demonstração.* Seja $f : D \to [0,1]$ um homeomorfismo, a função $F : D \times [0,1] \to [0,1]$ dada por $F(x,t) = f^{-1}((1-t)f(x))$ é homotopia entre a identidade de $D$ e uma constante. De fato, $F(x,0) = f^{-1}(f(x)) = x$ e $F(x,1) = f^{-1}(0)$.

Dados dois pontos $a, b$ de $S^2$ que não pertencem a $D$, seja $j : D \to S^2 - \{a,b\}$ a inclusão, então $G = j \circ F$, é homotopia entre $j$ e uma constante. Com isso podemos aplicar o Lema de Borsuk para concluir que $a$ e $b$ estão na mesma componente de $S^2 - D$. $\square$

**Teorema 11.2** (Teorema da curva de Jordan)**.** *Seja $C$ uma curva simples fechada em $S^2$. Então $C$ separa $S^2$ em exatamente duas componentes conexas, sendo que a fronteira de cada uma das componentes é igual a $C$.*

*Demonstração.* Parte 1: Vamos escrever $C$ como união de dois arcos $C_1$ e $C_2$, que se intersectam nos seus pontos limites $p$ e $q$. Sejam $X = S^2 - \{p,q\}$, $U = S^2 - C_1$ e $V = S^2 - C_2$, temos que $X = U \cup V$ e $U \cap V = S^2 - C$.

Pelo Teorema 11.1, $C$ separa $S^2$, ou seja, existem pelo menos duas componentes $A_1$ e $A_2$ em $S^2 - C$. Seja $B$ a união das outras componentes, vamos supor que $B \neq \emptyset$ e chegar numa contradição.

Tome $x \in S^2 - C$ e $W$ uma vizinhança de $x$, como $S_2 - C$ é aberto em $S^2$, existe um aberto $V \subset W$ de $S^2$ contido em $S^2 - C$ (consequentemente aberto em $S^2 - C$) contendo $x$, ou seja, $S^2 - C$ é localmente conexo. Disso segue que $A_1$, $A_2$ e $B$ são abertos em $S^2$ (Proposição 6.6). Tome $a \in A_1$, $a' \in A_2$ e $b \in B$.

A Proposição 11.3 garante que $C_1$ e $C_2$ não separam $S^2$, logo existem os caminhos em $U$: $\alpha$ entre $a$ e $b$ e $\gamma$ entre $a$ e $a'$. Assim como os caminhos em $V$: $\beta$ entre $b$ e $a$ e $\delta$ entre $a'$ e $a$. Sejam $f = \alpha * \beta$ e $g = \gamma * \delta$.

Note que $X = U \cup V$, vamos aplicar a Proposição 11.2 de diferentes formas:

Escrevendo $U \cap V$ como a união disjunta de $(A_1 \cup A_2)$ e $B$, temos que $a \in A_1 \cup A_2$, $b \in B$ e portanto $[f]$ gera um subgrupo cíclico infinito em $\pi_1(X, a)$, logo não é trivial.

Escrevendo $U \cap V$ como a união disjunta de $A_1$ e $(A_2 \cup B)$, temos que $a \in A_1$, $a' \in A_2 \cup B$ e portanto $[g]$ gera um subgrupo cíclico infinito em $\pi_1(X, a)$, logo não é trivial.

Ainda, fazendo $U \cap V = (A_1 \cup A_2) \cup B$, temos $a, a' \in (A_1 \cup A_2)$ e, pelo item 3, os subgrupos gerados por $[f]$ e $[g]$ se intersectam apenas no elemento neutro.

Por outro lado, $X = S^2 - \{p, q\}$, é homeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ e portanto seu grupo fundamental é $\mathbb{Z}$, que é cíclico infinito e, pelo item 2 da proposição, é gerado por $[f]$ e por $[g]$, ou seja, $[f] = [g]$, o que contradiz o parágrafo anterior.

Com isso mostramos que $C$ separa $S^2$ em exatamente duas componentes.

Parte 2: Vamos denominar estas componentes por $W_1$ e $W_2$. Como $S^2$ é localmente conexo, essas componentes são abertas em $S^2$. Dessa forma, a fronteira delas é dada por $\overline{W_i} - W_i$.

Sabemos que $W_1$ não pode conter nenhum ponto limite de $W_2$, caso contrário existiria um aberto contido em $W_1$ que intersecta $W_2$. Analogamente, $W_2$ não contem nenhum ponto limite de $W_1$.

Com isso $\overline{W_1} - W_1$ não pode intersectar $W_1$ nem $W_2$, portanto está contido em $C$, o mesmo vale para $\overline{W_2} - W_2$.

Vamos mostrar a outra inclusão. Tome $x \in C$ e $U$ uma vizinhança de $x$, como $C$ é homeomorfo a $S^1$, existe um arco em $C$ contendo $x$ que está contido em $U$. Vamos escrever $C$ como a união de dois arcos $C_1$ e $C_2$, sendo que $x \in C_1 \subset U$.

Tome $a \in W_1$ e $b \in W_2$, como $C_2$ não separa $S^2$, existe um caminho $\alpha$ entre $a$ e $b$ em $S^2 - C_2$.

Suponha que a imagem de $\alpha$ não intersecta $\overline{W_1} - W_1$, logo qualquer ponto dela ou está em $W_1$ ou, se não estiver em $W_1$, está em $S^2 - \overline{W_1}$. Ou seja: $Im\,(\alpha) \subset (W_1 \cup (S^2 - \overline{W_1}))$, o que não pode ocorrer, afinal $Im\,(\alpha)$ é um conexo e possui um ponto em $W_1$ e um ponto em $W_2 \subset S^2 - \overline{W_1}$, que são abertos disjuntos, ou seja, formam uma separação de $W_1 \cup (S^2 - \overline{W_1})$. Do Lema 6.5 podemos concluir que se $Im\,(\alpha)$ está contida na união deles, deveria estar inteiramente contida em apenas um.

Disso concluímos que existe $y \in Im\,(\alpha)$ com $y \in \overline{W_1} - W_1 \subset C$, mas como $\alpha$ está em $S^2 - C_2$, temos $y \in C_1 \subset U$, portanto $U$ interseta $\overline{W_1} - W_1$, do que segue que $x$ é está no fecho de $\overline{W_1} - W_1$, que é $\overline{W_1} - W_1$. Fazendo o mesmo com $\overline{W_2} - W_2$ obtemos que ambos contêm $C$, portanto a fronteira das componentes é igual a $C$. □

Podemos escrever $S^2$ como $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, dessa forma, se $C$ não contém $\infty$, ou seja, é uma curva simples fechada em $\mathbb{R}^2$, então uma das componentes de $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}) - C$ irá conter $\infty$ e portanto será ilimitada, pelo Lema 6.19, a outra será limitada, além disso, continua válido que a fronteira de cada uma delas será igual a $C$.

# 12 Agradecimentos

Agradeço à minha família por me apoiar em todas as situações, ao meu orientador Dr. Bruno Mendonça Rey dos Santos por todo o conhecimento transmitido, ao grupo PET-Matemática pela experiência adquirida e pelo companheirismo dos integrantes e à Secretaria de Educação Superior (SESu) do Ministério da Educação (MEC) e o Fundo Nacional de Desenvolvimento Estudantil (FNDE), pela Bolsa-PET, que financiaram o projeto.

# Referências Bibliográficas

[1] Munkres, J. R. Topology, Prentice Hall, 2000.

# MODELOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS APLICADOS ÀS EPIDEMIAS

Kalel Bispo Gimenez de Araujo
*Estudante*

Adeval Lino Ferreira
*Orientador(a)*

## RESUMO

O seguinte trabalho aborda o estudo matemático de modelos de Equações Diferenciais Ordinárias que descrevem uma epidemia, com o estudo desses modelos podemos ter uma noção de como a epidemia se propaga dentro de uma população, seus impactos e maneiras de combater a epidemia. O trabalho faz a análise de dois modelos, o modelo SIS e o modelo SIR, esse com algumas modificações, que são modelos muito utilizados para modelar a propagação de diversos tipos de doenças.
**Palavras-chave:** Equações diferencias ordinárias, análise, epidemias

## ABSTRACT

The following study approach the mathematical study of Ordinary Differential Equation models that describe an epidemic, with the study of these models we can get a sense of how the epidemic spreads within a population, its impacts and ways to combat the epidemic. The study analyzes two models, the SIS model and the SIR model, the last one with some modifications, which are models widely used to model the spread of different types of diseases.
**Keywords:** Ordinary differential equation, analysis, Epidemic

# 1 Modelos aplicados a epidemias

## 1.1 Introdução

As equações diferenciais são utilizadas para descrever diversos fenômenos da natureza, como crescimento populacional, decaimento radioativo, circuitos elétricos, entre outros, sendo assim utilizadas em diversas áreas como física, biologia, economia, entre outras. Em especial as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) podem descrever o processo de avanço de epidemias, ou pandemias, como as causadas pela gripe ou mais em evidencia agora a COVID-19.

Serão feitos estudos de modelos matemáticos como o SIS, SIR e outros que são utilizados para descrever como essas doenças podem passar por uma determinada população, começaremos pelos modelos mais simples e vamos avançando a medida que são adicionadas novas variáveis importantes.

# 2 Os Modelos

Os modelos de EDO para modelar a propagação de doenças infecciosas como a gripe, são os mais utilizados para antecipar e ter uma estimativa de como será o avanço da propagação dessas doenças e para estudar as medidas para o controle da doença. Esses modelos dividem uma população em categorias, que chamaremos de compartimentos e descrevem a evolução das frações de populações nos compartimentos ao longo do tempo. O número de compartimentos depende da complexidade do modelo, podendo haver apenas dois compartimentos, para infectados e não infectados, ou um número muito maior de compartimentos que dividem a população na forma mais convencional para o estudo desejado.

## 2.1 O modelo SIS

O modelo SIS é um modelo compartimental para o estudo de doenças infecciosas, como a gripe ou sarampo, que são doenças transmitidas de uma pessoa para outra, quando temos um individuo com a doença ele vai ser capaz ou não de transmiti-la, caso ele seja capaz ele é chamado de contagioso ou infeccioso.

Esse modelo é utilizado para uma doença infecciosa na qual ninguém adquire imunidade depois de ter a doença, ele é separado em dois compartimentos, o dos Suscetíveis, indivíduos que não tem a doença e os Infectados, que tem a doença e podem transmiti-la nesse caso. Como não se adquire imunidade após os indivíduos terem a doença eles voltam para o compartimento dos suscetíveis e podendo então se infectar novamente, por isso o nome SIS.

Abaixo temos um diagrama que representa os compartimentos do modelo SIS:

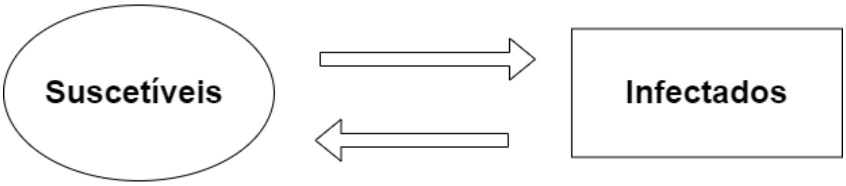



Figura 7.1: Diagrama SIS

Um individuo suscetível contrai a doença de um individuo infectado, assim ele torna-se infectado e se manterá infectado até ficar curado e voltar a ser suscetível já que essa é uma doença que não se adquire imunidade.

Assim, seja $S(t)$ a fração da população que é suscetível no instante $t$, e seja $I(t)$ a fração da população que está infectada no instante $t$, vamos ter que $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ as funções são não negativas, pois sempre teremos indivíduos em alguma delas e $S(t)+I(t) = 1$ pois representam toda uma população. Como já foi dito, um indivíduo suscetível torna-se infectado após um contato com um indivíduo infeccioso, esse contato precisa ter as características apropriadas para a transmissão da doença, que muda de acordo com a doença, essas características podem ser a duração do contato, a proximidade dos indivíduos durante o contato, se o indivíduo doente espirra, tosse, entre outros. Esses contatos podem ser chamados de contatos adequados, mas aqui apenas os denotaremos por contatos. Nota-se que existe um fator probabilístico no contato para que ele de fato infecte o indivíduo suscetível, mas isso será abordado mais a frente.

Agora vamos supor que se multiplicarmos $I(t)$ por um número $k$ então estaremos multiplicando a taxa com que os contatos ocorrem por $k$ e se multiplicarmos $S(t)$ por um número $k$ então multiplicaremos também a taxa com que tais contatos ocorrem por $k$, ou seja, a taxa que a doença é transmitida no momento $t$ é proporcional ao produto $S(t)I(t)$. Do mesmo modo, suponha que a taxa com que os infectados se recuperam e voltam a ser suscetíveis, no tempo $t$, é proporcional a $I(t)$. Com isso podemos fazer um novo diagrama para o modelo:

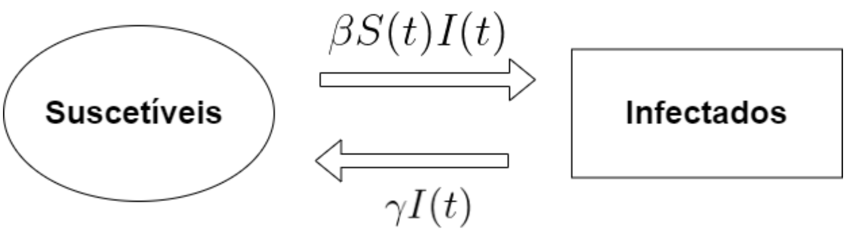



Figura 7.2: Diagrama SIS detalhado

onde, $\beta$ e $\gamma$ são contantes de proporcionalidade positiva. Com isso podemos formar o seguinte par de equações para essas as taxas de suscetíveis e infecciosos

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t)$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t),$$

ainda podemos reescrever as equações, simplificando a notação, como

$$S'(t) = -\beta SI + \gamma I$$
$$I'(t) = \beta SI - \gamma I,$$

Essa equações constituem o Modelo SIS.

As equações do modelo SIS nos dizem que se sabemos os valores de $S$ e $I$ no instante $t$, então saberemos as taxas de variação de $S$ e $I$ nesse mesmo instante $t$, de certo modo podemos dizer que as fórmulas descrevem em termos matemáticos o modo como a transmissão da doença funciona.

Mas as equações não nos dizem o que acontece ao longo do tempo, não conseguimos apenas olhando as equações saber quando a doença irá desaparecer, ou se espalhar até toda a população ficar infectada, ou tender para um valor intermédio ficando sempre presente na população.

**Noções de equações diferenciais**

Agora vamos enunciar algumas noções e fatos básicos sobre equações diferenciais de um ponto de vista geométrico.

Seja $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ um ponto que se move em $\mathbb{R}^n$, o vetor velocidade é desenhado a partir do ponto $x(t)$. Isso nos diz que se conhecemos o ponto $x$ que representa o estado do sistema, em um determinado instante, então conhecemos $x'$, ou seja, a variação do sistema nesse mesmo instante, ou seja, o vetor velocidade $x'$ é uma função de $x$, então podemos representa-la como

$$x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\vdots$$
$$x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Essa é uma representação de um sistema de equações diferenciais ordinárias, agora vamos definir formalmente essas equações.

**Definição 2.1.** Dada uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida em cada ponto $(t, x)$ de um aberto $U$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que

$$x' = f(t, x),$$

é a equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^n$ definida por $f$.

Essa é a definição geral de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, é chamada ordinária pois não temos derivadas parciais, e a ordem da equação é dada a partir da ordem de sua derivada.

**Definição 2.2.** Qualquer equação diferencial ordinária cuja expressão não dependa da variável $t \in \mathbb{R}$ é dita autônoma, ou seja, temos que

$$x' = f(x).$$

Iremos trabalhar apenas com equações autônomas.

Para realizar o estudo de uma equação diferencial que nos ajudará a realizar previsões sobre oque acontecerá com $x(t)$ será necessário resolver o Problema de Valor Inicial, ou problema de Cauchy, que é da forma.

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Temos que, dada uma equação diferencial $x' = f(x)$ e o estado $x_0$, a condição inicial no instante $t_0$, onde, resolver um P.V.I consiste em achar uma função $x(t)$, tal que $x(t_0) = x_0$ e para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $x'(t) = f(x(t))$.

Essa função $x(t)$ onde $\forall t \in \mathbb{R}$ temos $x'(t) = f(x(t))$ é a solução da equação diferencial, vamos defini-la formalmente para os casos autônomos.

**Definição 2.3.** Um caminho $x : I \to \mathbb{R}^n$ definido e derivável num intervalo $I$ de $\mathbb{R}$, com gráfico inteiramente contido em $U$ e velocidade determinada por $f$, tal que, para cada $t \in I$,

$$x(t) \in U \quad \text{e} \quad x'(t) = f(x(t)),$$

é uma solução dessa equação diferencial, que podemos chamar de curva integral da equação.

Agora vamos ter alguns resultados essenciais para nosso estudo sobre as equações diferenciais, que diz sobre a existência e unicidade das soluções das equações.

**Teorema 2.1.** *Sejam $U$ um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável e $x_0 \in U$. Então:*

1. *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

*tem solução única.*

2. *Se $x(t)$ permanece num subconjunto compacto (fechado e limitado) de $U$ quando $t$ aumenta (respectivamente, diminui), então $x(t)$ está definido para $t_0 \leq t < \infty$ (respectivamente, $-\infty < t \leq t_0$).*

*Demonstração.* Ver [2]. □

*Observação* 2.1. O conjunto $U$ é chamado de espaço de fase.

Trataremos apenas de funções continuamente diferenciáveis, portanto sempre poderemos aplicar o Teorema 2.1. Nem sempre poderemos explicitar a solução da equação diferencial, mas temos certeza de que ela exista e pode ser aproximada numericamente.

**Definição 2.4.** Um ponto $x_0$ no qual $x' = 0$ é chamado de equilíbrio da equação diferencial $x' = f(x)$ e desse modo também temos $f(x_0) = 0$.

**Corolário 2.1.** *Se $x_0$ é um equilíbrio de $x' = f(x)$, então a única solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

*é $x(t) = x_0$, para $-\infty < t < \infty$.*

**Corolário 2.2.** *Seja $x(t)$ uma solução de $x' = f(x)$, suponhamos que, no instante $t_0$, $x(t_0)$ não é um equilíbrio, isto é, $f(x(t_0)) \neq 0$. Então, $x(t)$ não é um equilíbrio para todos os valores de $t$, ou seja, $f(x(t)) \neq 0, \forall t$.*

### Linhas de fase

No sistema SIS,

$$S'(t) = -\beta SI + \gamma I$$
$$I'(t) = \beta SI - \gamma I,$$

temos que $S(t) + I(t) = 1$ para qualquer tempo $t$, com isso podemos reduzir esse sistema para apenas uma equação, do seguinte modo

$$S(t) = 1 - I(t)$$

com isso,

$$\begin{aligned} I' &= \beta(1-I)I - \gamma I \\ &= (\beta-\gamma)I - \beta I^2, \end{aligned}$$

assim reduzimos o sistema de equações diferenciais, para apenas uma equação diferencial.

Como nem sempre poderemos explicitar a solução para saber o que acontece com uma EDO, existe outra forma de ver o que acontece com essa equação, que é desenhar a linha de fase, onde temos o eixo $I$, com pontos onde se tem os equilíbrios e setas mostrando o crescimento e decrescimento da equação. Quando temos $I' > 0$, $I(t)$ é crescente, se $I' < 0$ então $I(t)$ é decrescente e se $I' = 0$ vamos ter um equilíbrio.

Para desenhar a linha de fase, pode ajudar se desenharmos primeiro o gráfico de $I'$ em função de $I$, ou seja, desenhar o gráfico da equação

$$I' = (\beta-\gamma)I - \beta I^2 = I(\beta-\gamma-\beta I),$$

onde temos uma parábola. Com isso já podemos determinar os equilíbrios e ver onde $I$ é positivo e negativo, vamos ter que

$$\begin{aligned} &I = 0 \\ &\beta-\gamma-\beta I = 0 \Rightarrow I = \frac{\beta-\gamma}{\beta} = 1 - \frac{\gamma}{\beta}, \end{aligned}$$

são os equilíbrios.

Como $I$ é uma fração de uma população, será importante apenas o intervalo onde $\mathcal{I} = \{I : 0 \leq I \leq 1\}$, esse intervalo será nosso espaço de fase e quando restringimos a linha de fase ao intervalo $\mathcal{I}$ obtemos o retrato de fase.

Podemos agora observar dois casos, como $\beta$ e $\gamma$ são positivos e desconsiderando o caso $\beta = \gamma$, vamos ter que

1. Se $\dfrac{\gamma}{\beta} > 1$, o equilíbrio não nulo não está em I.

2. Se $\dfrac{\gamma}{\beta} < 1$, o equilíbrio nulo está em $\mathcal{I}$.

Como estamos no espaço de fase $\mathcal{I} = \{I : 0 \leq I \leq 1\}$, o Teorema 2.1 nos diz que soluções limitadas estão definidas para tempos infinitos, e do Corolário 2.2 temos que soluções que começam fora de um equilíbrio nunca vão passar pelos equilíbrios. E quando estamos no caso unidimensional as soluções limitadas tem que se aproximar de equilíbrios. Abaixo temos o gráfico para $I'$:

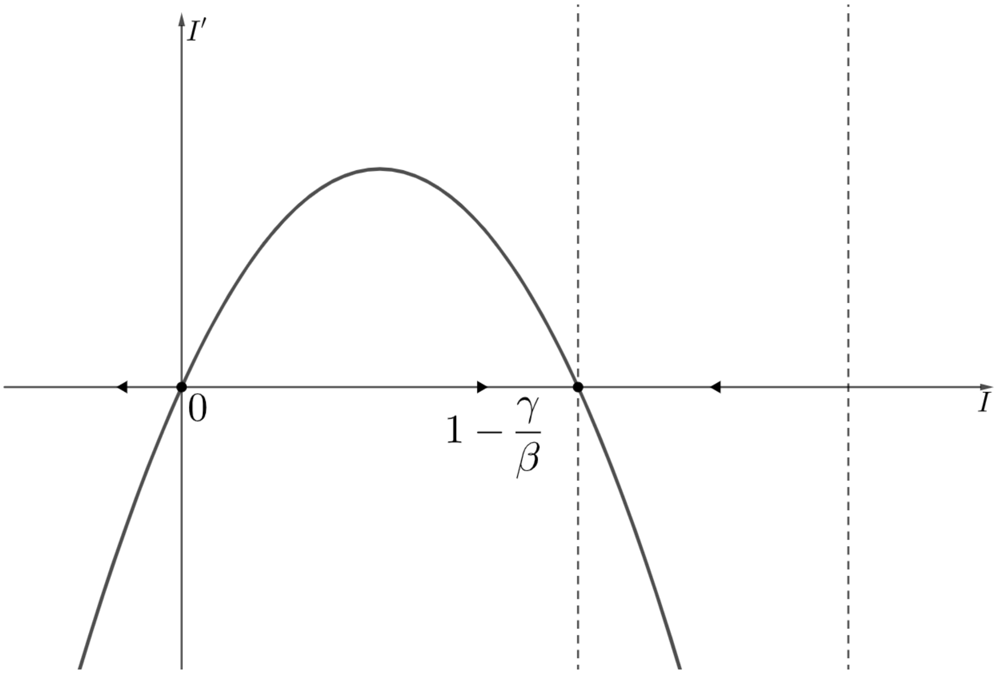



Figura 7.3: $\dfrac{\gamma}{\beta} < 1$

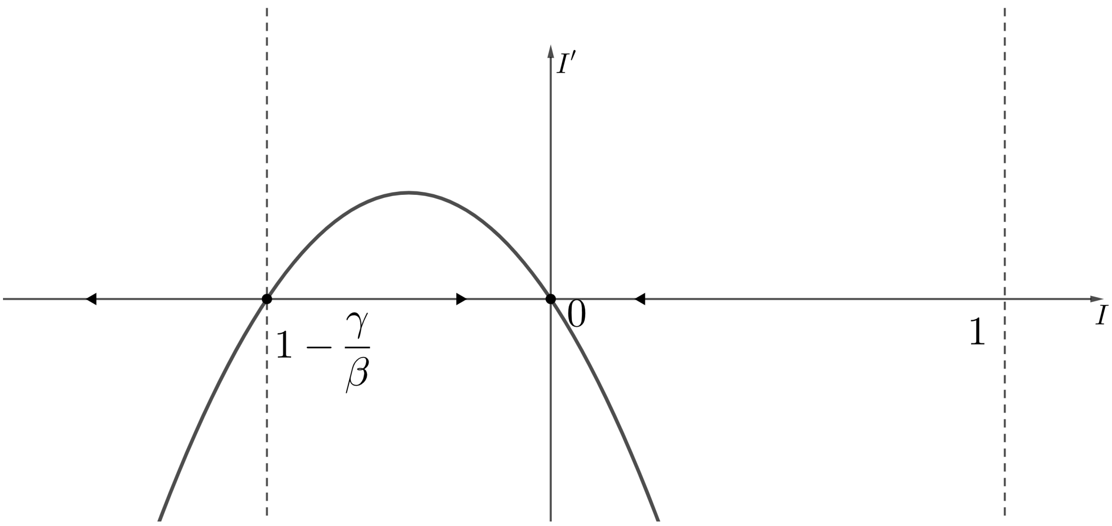



Figura 7.4: $\dfrac{\gamma}{\beta} > 1$

Esses dois gráficos são as linhas de fase da equação que podemos obter por meio da parábola, quando restringimos ao intervalo $\mathcal{I}$ obtemos o retrato de fase. Se olharmos apenas para a reta $I$ conseguimos ver para a equação unidimensional obtida do modelo. Com isso podemos ter as seguintes informações sobre o retrato de fase:

1. Se $\dfrac{\gamma}{\beta} < 1$, todas as soluções em $\mathcal{I}$ com $I(0) > 0$ tendem a $1 - \dfrac{\gamma}{\beta}$ quando $t \to \infty$. Agora quando $t \to -\infty$, as soluções com $0 < I(0) < 1 - \dfrac{\gamma}{\beta}$ tendem a 0.

2. Se $\dfrac{\gamma}{\beta} > 1$, todas a soluções em $\mathcal{I}$ tendem a 0 quando $t \to \infty$.

Podemos interpretar os retratos de fase do seguinte modo:

1. Para $\dfrac{\gamma}{\beta} < 1$, se a doença entra na população, a fração da população com a doença tende para o número positivo $I = 1 - \dfrac{\gamma}{\beta}$ e por fim prevalece na população.

2. Para $\dfrac{\gamma}{\beta} > 1$, se a doença entra na população, ela desaparece em decorrer do tempo.

No primeiro caso a doença é chamada de endêmica, e o equilíbrio $I = 1 - \dfrac{\gamma}{\beta}$ é chamado de equilíbrio endêmico.

Não consideramos o caso $\gamma = 0$, pois esse é um caso de uma doença onde as pessoas não se recuperam e neste caso $I(t) \to 1$.

Pode parecer confuso que as soluções de uma equação diferencial levem um tempo infinito para se aproximarem de um equilíbrio. Por exemplo no caso $\dfrac{\gamma}{\beta} > 1$, as soluções levam um tempo infinito para se aproximar de 0, mas na realidade o tamanho da população é finito, dessa forma assim que a fração da população for suficientemente pequena, não vão existir mais infectados e desse modo dizemos que a doença desaparece. Analogamente para o caso $\dfrac{\gamma}{\beta} < 1$ por vezes dizemos que a doença atingiu o equilíbrio endêmico.

Entretanto, os epidemiologistas não utilizam a fração $\dfrac{\gamma}{\beta}$ como utilizamos, eles utilizam a fração $\dfrac{\beta}{\gamma}$, dizem que se $\dfrac{\beta}{\gamma} < 1$, a doença desaparece e se $\dfrac{\beta}{\gamma} > 1$, a doença é endêmica. Para explicar isso melhor vamos discutir as constantes $\beta$ e $\gamma$.

### A constante $\beta$

Para entendermos o significa da constante $\beta$, vamos olhar para a dimensão real da população que estamos tratando e não apenas nas frações populacionais.

Considere então uma população de tamanho constante $N$, onde $N$ é um número bem grande e seja $s(t)$ o número de suscetíveis e $i(t)$ o número de infectados, de modo que $s(t) + i(t) = N$.

Como já vimos a doença irá se propagar devido aos contatos apropriados para sua transmissão, suponha que a taxa de contatos por pessoa infectada é constante e suponha também uma população homogeneamente misturada, multiplicando esta taxa por $\dfrac{s(t)}{N}$, que é a porcentagem de suscetíveis pela população, vamos obter a taxa de indivíduos suscetíveis contatados por pessoa infectada, se medirmos os tempo em dia, temos que:

$$\frac{\text{Pessoas contatadas}}{\text{Pessoa infectada} \cdot \text{dia}} \cdot \frac{s(t)}{N} = \frac{\text{Pessoas suscetíveis contatadas}}{\text{Pessoa infectada} \cdot \text{dia}}$$

multiplicando a taxa anterior pela probabilidade de cada pessoa suscetível de contrair a doença devido ao contato, vamos obter a taxa de novas pessoas infectadas por pessoa infectada,

$$\frac{\text{Novas pessoas infectadas}}{\text{Pessoa infectada} \cdot \text{dia}} = \frac{\text{Pessoas contatadas}}{\text{Pessoa infectada} \cdot \text{dia}} \cdot \frac{s(t)}{N} \cdot \text{probabilidade de transmissão},$$

e vamos definir o $\beta$ como sendo,

$$\beta = \frac{\text{Pessoas contatadas}}{\text{pessoa infectada} \cdot \text{dia}} \cdot \text{probabilidade de transmissão},$$

esse $\beta$ é o mesmo visto no sistema $SIS$, mas agora detalhado e mostramos como obtê-lo. Na epidemiologia essa constante é chamada de coeficiente de transmissão e é a taxa de novas infecções quando todas as pessoas contatadas são suscetíveis, ou seja, quando $s(t) = N$, o que ocorre no inicio de uma epidemia.

Por definição, $\beta$ é o produto de dois termos, onde o segundo termo em condições normais, quando a população não faz uso de medidas de prevenção, como usar mascaras e outros meios de prevenção, essa probabilidade de transmissão depende apenas da própria doença, isto é, o quão contagiosa ela é. Já o primeiro termo vai depender do modo de vida da população, por exemplo, em uma região urbana ele pode ser mais alto, já que as pessoas tem muito mais contato com outras pessoas ao decorrer do dia do que em uma zona rural.

Uma vez que $i(t)$ é o número de infectados no instante $t$, a taxa de novas infecções na população inteira, no momento $t$, será obtida quando, multiplicamos

$$\beta \cdot \frac{s(t)}{N} \cdot i(t) = \frac{\text{novas pessoas infectadas}}{\text{dia}},$$

A taxa com que os infectados se recuperam é proporcional a $i(t)$, com a mesma constante $\gamma$ vista anteriormente. E agora considere o sistema $SIS$ já apresentado,

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta SI + \gamma I \\ I'(t) &= \beta SI - \gamma I, \end{aligned}$$

como $S = \dfrac{s}{N}$ e $I = \dfrac{i}{N}$, pois são frações da população, nós temos que

$$\begin{aligned} S = \frac{s}{N} &\Rightarrow S' = \frac{s'}{N} \\ I = \frac{i}{N} &\Rightarrow I' = \frac{i'}{N}, \end{aligned}$$

e substituindo no sistema $SIS$ anterior segue que

$$\frac{s'}{N} = -\beta\frac{si}{N^2} + \gamma\frac{i}{N}$$
$$\frac{i'}{N} = \beta\frac{si}{N^2} - \gamma\frac{i}{N},$$

logo

$$s' = -\frac{\beta}{N}si + \gamma i$$
$$i' = \frac{\beta}{N}si - \gamma i.$$

É importante verificar as unidades desse sistema, se olharmos apenas para a primeira equação, se o tempo for medido em dias, por exemplo, então as unidades $\frac{ds}{dt}$ são $\frac{\text{pessoas}}{\text{dia}}$, já que $N, s$ e $i$ são todos unidades de pessoas, e a unidade $\beta$ deve ser $\frac{1}{dia}$, pois $\beta$ é

$$\beta = \frac{\text{Pessoas contatadas}}{\text{pessoa infectada} \cdot \text{dia}} \cdot \text{probabilidade de transmissão},$$

desse modo a unidade pessoa irá se cancelar, sobrando apenas a unidade dia.

**A constante $\gamma$**

Agora para deduzir a constante $\gamma$, vamos primeiro precisar do conceito de distribuição de probabilidade, uma distribuição de probabilidade num intervalo $J$ é uma função $g(t)$ definida em $J$ tal que $g(t) \geq 0$ e $\int_J g(t)dt = 1$. Se $K$ é um subintervalo de $J$, então a probabilidade de $t$ estar nesse subintervalo é $\int_K g(t)dt$. O valor médio de $t$ é $\int_J tg(t)dt$. Isto é análogo a como a média de uma distribuição de probabilidade discreta é calculada.

Então, vamos supor que a população inteira está infectada no instante $t = 0$, ou seja, $I(0) = 1$ e não há reinfecções, logo $\beta SI = 0$, desse modo conseguimos isolar o fenômeno da recuperação da equação,

$$I'(t) = \beta SI - \gamma I,$$

obtendo o problema de valor inicial,

$$\begin{cases} I' = -\gamma I \\ I(0) = 1, \end{cases}$$

e para obter a solução desse P.V.I fazemos

$$I' = -\gamma I \Rightarrow \frac{I'}{I} = -\gamma \Rightarrow [\ln I(t)]' = -\gamma,$$

e integrando em relação a $t$, vamos ter

$$\ln(I) = -\gamma t + c,$$

isolando $I(t)$,

$$\ln(I) = -\gamma t + c \Rightarrow I(t) = e^{-\gamma t + c},$$

e fazendo

$$e^{-\gamma t + c} = e^{-\gamma t} e^{c} = e^{-\gamma t} a,$$

como $I(0) = 1$, segue que

$$I(0) = e^0 a = 1 \Rightarrow a = 1,$$

portanto, a solução do P.V.I é $I(t) = e^{-\gamma t}$.

A taxa com que $I(t)$ varia é $I' = -\gamma e^{-\gamma t}$, esta taxa é negativa já que conforme as pessoas se curam $I(t)$ decresce e podemos expressar a taxa com que as pessoas se curam por $-I' = \gamma e^{-\gamma t}$, que é medida por uma fração da população por unidade de tempo, e ela será positiva.

E quando todos se curam, temos que

$$\int_0^\infty -I' dt = \int_0^\infty \gamma e^{-\gamma t} dt = e^{-\gamma t}\Big|_0^\infty = 1,$$

como a integral da 1, então $-I' = \gamma e^{\gamma t}$ é uma distribuição de probabilidade no intervalo $0 \leq t < \infty$. Desse modo o tempo médio em que as pessoas ficam doentes é dado pelo valor médio de $t$ no intervalo $0 \leq t < \infty$, esse valor é dado por

$$\int_0^\infty t I' dt = \int_0^\infty \gamma t e^{-\gamma t} dt,$$

utilizando integração por partes, temos

$$\int_0^\infty \gamma t e^{-\gamma t} dt = \left[ -t e^{-\gamma t} - \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} \right]_0^\infty = \frac{1}{\gamma}.$$

Desse modo, temos a nossa interpretação para $\gamma$, onde podemos ver que $\frac{1}{\gamma}$ é o tempo médio para o qual as pessoas ficam doentes, note que as unidade de $\gamma$ são $\frac{1}{\text{dia}}$.

### O número de reprodução básico, $R_0$

$R_0$ é o que chamamos de número básico de reprodução, e é o valor mais importante calculado em modelos epidemiológicos, ele é o número médio de indivíduos infectados por cada individuo infectado quando uma doença é introduzida numa população, partindo do pressuposto que toda a população é suscetível a doença. No modelo $SIS$, o $R_0$ é o número de novas infecções causadas por dia por cada infectado vezes o número médio de dias em que um individuo fica infectado, simbolicamente temos

$$R_0 = \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma},$$

ou seja, estamos olhando para cada infectado e calculando para quantas pessoas ele poderá transmitir a doença durante o tempo em que ele está infectado. Quando uma doença é introduzida em uma população, por um infectado $R_0$, ao final do tempo médio de recuperação, este individuo é substituído por outros $R_0$ que são as novas pessoas infectadas. Desse modo, se $R_0 > 1$, o número de infectados irá crescer e a doença irá se propagar; agora se $R_0 < 1$, o número de infectados decresce e a doença vai se extinguir.

Se olharmos novamente para os retratos de fase das figuras 7.3 e 7.4, considerando a solução $I(t)$ que começa perto de $I = 0$, podemos ver que nessa região poucas pessoas estão infectadas e quase todas as pessoas são suscetíveis, desse modo:

- Se $\frac{\gamma}{\beta} < 1$, então $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$, podemos ver que quando $I(t)$ começa perto de 0, $I(t)$ cresce para um valor de equilíbrio positivo, que é

$$I = 1 - \frac{\gamma}{\beta} = 1 - \frac{1}{R_0},$$

- Se $\frac{\gamma}{\beta} > 1$, então $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} < 1$, podemos ver que $I(t)$ diminui para 0.

### Lei de ação de massas

No modelo $SIS$ e em outros modelos que serão vistos, é feita a suposição de que a infecção se propaga a uma taxa proporcional ao produto entre as frações das populações de infectados e suscetíveis, isso é chamado de lei de ação das massas, que vem da química, onde uma solução bem agitada com dois reagentes, a lei de ação das massas diz que a taxa de reação é proporcional ao produto das concentrações dos dois reagentes. Analogamente a esse conceito visto na química, na epidemiologia uma solução bem misturada se equivale a uma população bem misturada, na qual as pessoas se encontram aleatoriamente.

## 2.2 Modelo SIR

Inicialmente para o estudo do modelo SIR vamos considerar uma doença infecciosa que não é fatal e que se adquire imunidade permanente às pessoas que a contraem. Com isso vamos dividir a população em três compartimentos, os Suscetíveis, Infectados e Recuperados que estão imunes e sejam $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ respectivamente, as frações da população em cada compartimento no instante $t$. Assim como no modelo SIS teremos

$$S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad S(t) + I(t) + R(t) = 1.$$

Agora considere a lei de ação de massas, e as constantes $\beta > 0$ e $\gamma > 0$ como vistas anteriormente, o sistema de equações diferenciais do modelo SIR será similar ao do modelo SIS, mas teremos uma linha a mais na equação que será a taxa dos recuperados e os infectados que se recuperam não voltam ao compartimento dos suscetíveis. A seguir temos um diagrama para o modelo,

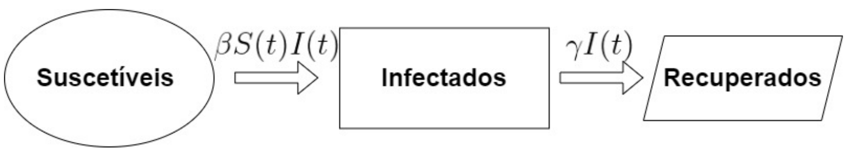



Figura 7.5: Diagrama SIR

E também temos o sistema de equações diferenciais para o modelo SIR,

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I \\ I' &= \beta S I - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$

Esse modelo pode também ser utilizado quando alguma fração da população não é suscetível a doença por um fator genético, comportamental, imunológico, entre outros meios com que faça com que essa parte da população não seja infectada pela doença, desse modo essa fração da população já é inserida desde o inicio no compartimento dos recuperados.

Como as constantes $\beta$ e $\gamma$ tem o mesmo significado nesse modelo, o número reprodutor básico $R_0$ para o modelo SIR também será dado por,

$$R_0 = \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

E temos também que

$$S + I + R = 1 \Rightarrow (S + I + R)' = 0 \Rightarrow S' + I' + R' = 0,$$

e como $S + I + R = 1$, podemos encontrar o $R(t)$ em função de $S(t)$ e $I(t)$, fazendo $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$, com isso podemos reduzir o sistema para apenas duas equações que serão,

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI \\ I' &= \beta SI - \gamma I, \end{aligned}$$

Não é possível encontrar soluções explicitas para esse sistema de equações e assim como foi feito para o modelo $SIS$, iremos estudar o retrato de fase, mas agora temos um sistema bidimensional, então vamos precisar de mais alguns conhecimentos sobre as equações diferenciais.

### Campo de vetores e isóclinas

Geometricamente, temos que uma equação diferencial $x' = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, define um campo de vetores no aberto $U$. E o vetor $f(x)$ no ponto $x$ é desenhado com sua cauda em $x$, no caso do sistema $SIR$, quando $n = 2$, não é difícil ter uma ideia de como será o seu campo vetorial, primeiro podemos encontrar as curvas em que $S' = 0$ ou $I' = 0$, que as chamaremos de nulóclinas (ou isóclinas verticais e horizontais)

Com isso do sistema $SIR$, podemos ver que se $S' = 0$, temos

$$S' = -\beta SI = 0 \Rightarrow S = 0 \quad \text{ou} \quad I = 0,$$

já que $\beta > 0$, e assim temos que o plano $SI$ está nos dois eixos. Agora se $I' = 0$, vamos ter que

$$\begin{aligned} I' = \beta SI - \gamma I = 0 &\Rightarrow I(\beta S - \gamma) = 0 \\ &\Rightarrow I = 0 \quad \text{ou} \quad S = \frac{\gamma}{\beta}. \end{aligned}$$

Teremos equilíbrios onde simultaneamente $S' = 0$ e $I' = 0$, desse modo podemos concluir que a linha $I = 0$, que será o eixo $S$ é formada por equilíbrios, e não existem outros equilíbrios.

O campo de vetores é vertical nas nulóclinas $S' = 0$ e horizontal nas $I' = 0$, menos onde eles se cruzam. As nulóclinas dividem o plano em regiões abertas onde $S'$ e $I'$ tem sinais constantes, os sinais em cada região determinam em que quadrante estão os vetores e podemos saber em qual quadrantes estão os vetores de uma região aberta se olharmos para a direção em que os vetores apontam nas nulóclinas que as delimitam.

Mas estamos interessados apenas no triangulo dado por

$$\mathcal{T} = \{(S, I) : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\},$$

que é nosso espaço de fase, desse modo existem dois casos para o $R_0$:

i) Se $R_0 = \dfrac{\beta}{\gamma} < 1$, temos que $\dfrac{\gamma}{\beta} > 1$, então a linha $S = \dfrac{\gamma}{\beta}$ não intersecta $\mathcal{T}$.

ii) Se $R_0 = \dfrac{\beta}{\gamma} > 1$, temos que $\dfrac{\gamma}{\beta} < 1$, então a linha $S = \dfrac{\gamma}{\beta}$ intersecta $\mathcal{T}$.

O campo de vetores em $\mathcal{T}$ nos dois casos é mostrado nas figuras abaixo:

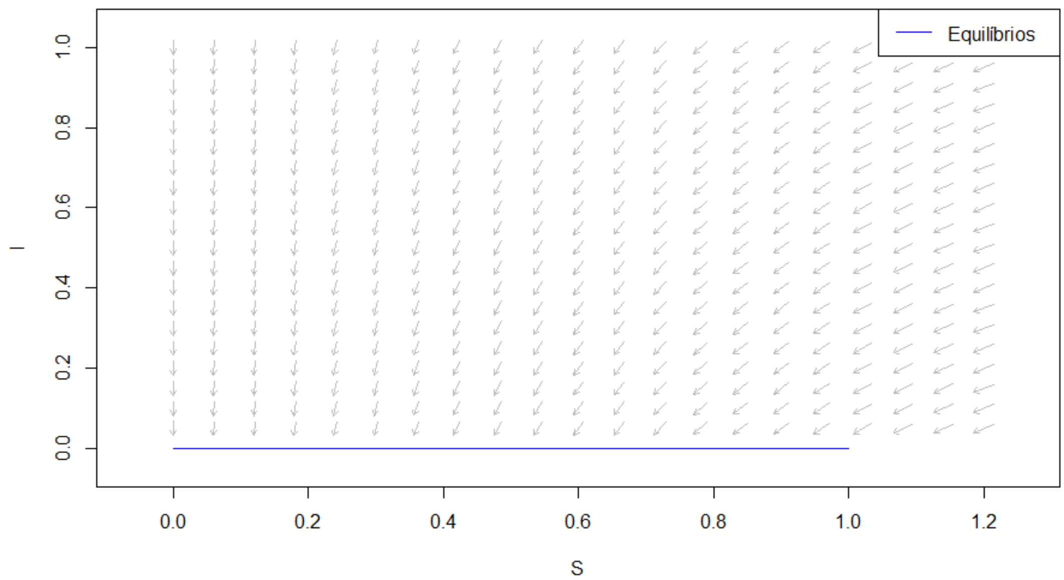



Figura 7.6: $R_0 < 1$

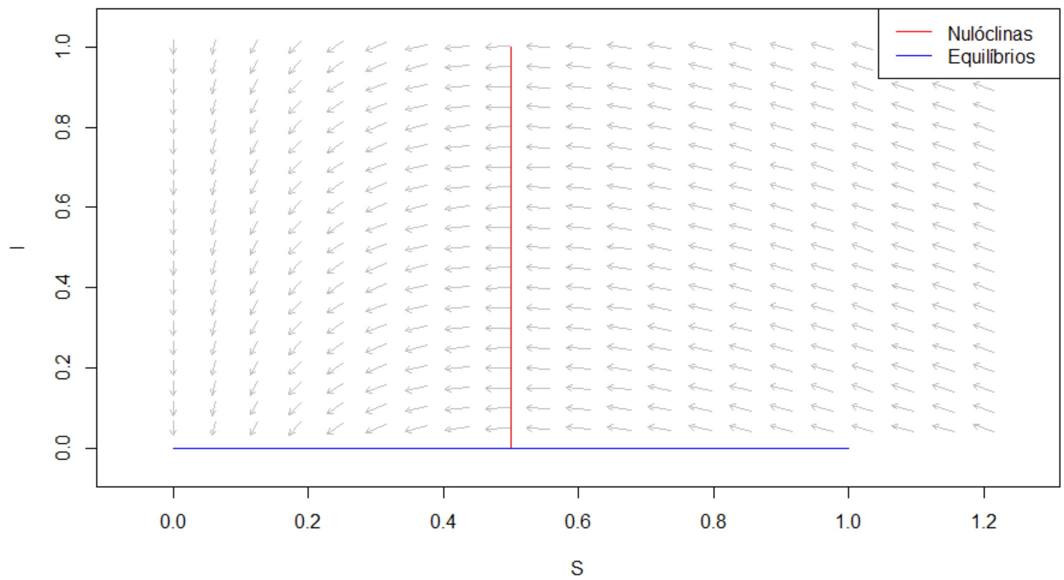



Figura 7.7: $R_0 > 1$

Observe que:

- Temos os equilíbrios ao longo do eixo $S$ nos dois casos.
- O eixo $I$, em ambos os casos temos que $S' = 0$ e $I' < 0$, então os vetores apontam diretamente para baixo.
- No caso de $R_0 < 1$, a parte positiva do triângulo

$$\mathcal{T}_+ = \{(S, I) : S > 0, I > 0, S + I \geq 1\}$$

está em uma única região pois nenhuma nulóclina a corta. Nesta região vamos ter que

$$S' = -\beta SI < 0$$

e

$$I' = \beta SI - \gamma I = I(\beta S - \gamma),$$

como $I > 0$ e $S > 0$, vamos olhar para $\beta S - \gamma > 0$, com isso

$$\beta S - \gamma > 0 \Rightarrow S > \frac{\gamma}{\beta},$$

mas como $S > \dfrac{\gamma}{\beta} > 1$ não está na região $\mathcal{T}_+$, vamos ter apenas que

$$S < \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \beta S - \gamma < 0,$$

portanto,

$$I' < 0.$$

Desse modo, os vetores apontam para a esquerda e para baixo.

- E no caso $R_0 > 1$, temos que $\mathcal{T}_+$ é cortado em dois pela nulóclina $S' = \dfrac{\gamma}{\beta}$, na qual $I' = 0$. Podemos usar a raciocinou análogo ao feito no item acima, temos que $S' < 0$ e podemos observar que,

$$I' = \beta SI - \gamma I > 0 \Leftrightarrow S > \frac{\gamma}{\beta}$$
$$I' = \beta SI - \gamma I < 0 \Leftrightarrow S < \frac{\gamma}{\beta}$$

ou seja, $I'$ é positivo quando $S > \dfrac{\gamma}{\beta}$ e negativo quando $S < \dfrac{\gamma}{\beta}$.

**Funções e equações diferenciais**

Considere a equação diferencial $x' = f(x)$ no $\mathbb{R}^n$ e seja $x(t)$ uma solução dessa equação e seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, temos que $V(x(t))$ dá o valor de $V$ ao longo da solução $x$ em função de $t$. Agora, como $x(t)$ é uma solução $V(x(t))$ terá a forma

$$V(x(t)) = V(x_1(t), \ldots, x_2(t)),$$

podemos obter a taxa de variação de $V$ ao longo da solução ao derivarmos essa função, logo

$$V'(x(t)) = (V(x_1(t), \ldots, x_2(t)))',$$

pela regra da cadeia vamos ter

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1(t))x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x_n(t))x_n'(t) \\ &= \langle \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1(t)) \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}(x_n(t)), x_1'(t), \ldots, x_n'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle, \end{aligned}$$

onde $f(x(t)) = x'(t)$, $\nabla V(x(t))$ é o gradiente de $V$ no ponto $x(t)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno.

Dessa fórmula temos que, se uma solução de $x' = f(x)$ passa por um ponto $x$, então a derivada de $V$ ao longo dessa solução nesse ponto $x$ é dada por

$$V'(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle,$$

Para melhor exemplificar, vamos pegar o sistema $SIR$ e no caso com $R_0 > 1$, disso temos que uma solução começa em $\mathcal{T}_+$ na linha $S + I = 1$ com $S > \dfrac{\gamma}{\beta}$, sabemos que esse vetor está no segundo quadrante, esse vetor não pode apontar para fora de $\mathcal{T}$, pois isso significaria que as soluções que começam em $S + I = 1$ uma hora estariam fora da região $\mathcal{T}$, ou seja, em $S + I > 1$ o que não faria sentido já que $S$ e $I$ são frações populacionais e assim nós teríamos um modelo ruim.

Para saber se isso pode ocorrer, vamos utilizar da fórmula acima e vamos reescrever o sistema $SIR$ na sua forma vetorial do seguinte modo

$$(S', I') = f(S, I) = (-\beta SI, \beta SI - \gamma I),$$

e considere a função $V(S, I) = S + I$, agora utilizando a fórmula, temos que calcular

$$\begin{aligned} &\nabla V(S, I) = (1, 1) \\ &f(S, I) = (-\beta SI, \beta SI - \gamma I). \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(S, I), f(S, I) \rangle &= \langle (1, 1), (-\beta SI, \beta SI - \gamma I) \rangle \\ &= -\beta SI + \beta SI - \gamma I \\ &= -\gamma I, \end{aligned}$$

e com isso temos que, $-\gamma I < 0$ quando $I > 0$, ou seja, a função $S + I$ está diminuindo ao longo das soluções do sistema onde $I > 0$, portanto temos certeza que se uma solução começar em $\mathcal{T}_+$ com $S + I = 1$, então, $S + I$ irá diminuir e a solução estará sempre no interior de $\mathcal{T}$.

Outra utilização para a fórmula encontrada, é o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.** *Suponhamos que, sempre que $V(c) = c$, temos que $\nabla V(x) \neq 0$ e $V'(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0$, Então, o conjunto $V(x) = c$ é invariante sob $x' = f(x)$, ou seja, uma solução de $x' = f(x)$ que começa no conjunto $V(x) = c$ permanece no conjunto $V(x) = c$.*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

### Órbitas e retrato de fase para o sistema SIR

Uma órbita de uma equação diferencial é a cuva no espaço de fase que é traçada por uma solução. Podemos encontrar a órbita do sistema $SIR$, primeiro escrevemos o sistema da seguinte forma

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I,$$

dividindo a segunda equação pela primeira obtemos

$$\frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} \Rightarrow \frac{dI}{dS} = \frac{\gamma}{\beta S} - 1,$$

com isso, podemos fazer

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\gamma}{\beta S} - 1 \Rightarrow dI = \frac{\gamma}{\beta S} dS - dS,$$

e integrando

$$\int dI = \int \frac{\gamma}{\beta S} dS - \int dS \Rightarrow I = \frac{\gamma}{\beta} \ln S - S + C,$$

obtemos assim a família de curvas,

$$I = \frac{\gamma}{\beta} \ln S - S + C,$$

derivando e igualando a zero, vamos ter que essas curvas atingem o ponto máximo em $S = \frac{\gamma}{\beta}$.

Abaixo temos um gráfico que retrata uma dessas curvas para o caso $R_0 > 1$:

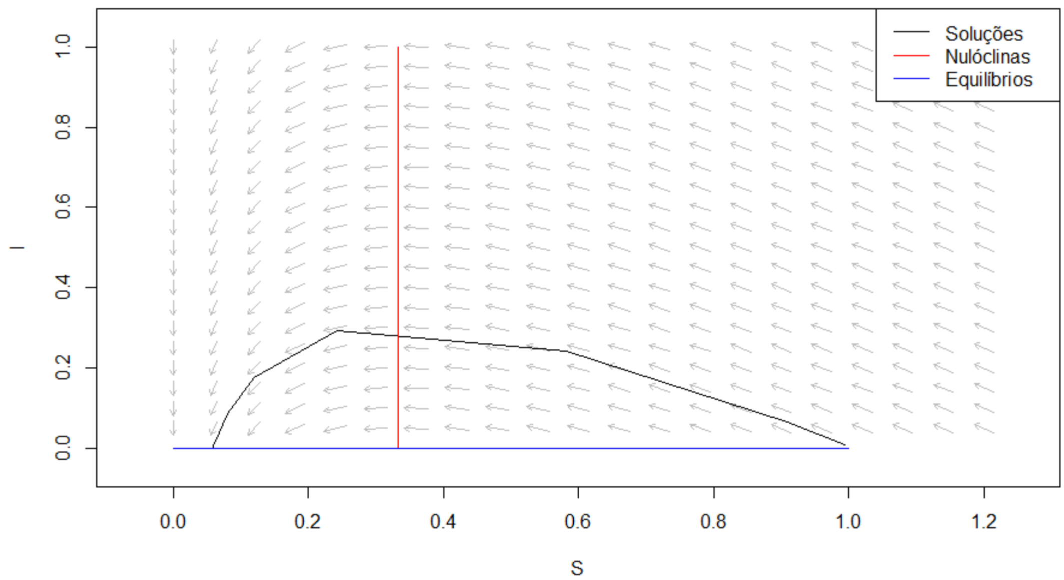



Figura 7.8: Uma órbita do modelo SIR iniciando em $S = 0,995$

A curva representada é uma solução $(S(t), I(t))$ que começa num ponto da curva que está em $\mathcal{T}_+$, a curva traçada pela solução não é a curva toda $I = \dfrac{\gamma}{\beta}\ln S - S + C$, pois temos pelo Corolário 2.2 que as soluções não passam através dos equilíbrios do eixo $S$.

A curva traçada pela solução é apenas a parte com $I > 0$ da curva $I = \dfrac{\gamma}{\beta}\ln S - S + C$, que é a parte que está em $\mathcal{T}_+$.

A curva $I = \dfrac{\gamma}{\beta}\ln S - S + C$ intersecta o eixo $S$ nos pontos $(S_-, 0)$ e $(S_+, 0)$, com $S_+ < \dfrac{\gamma}{\beta} < S_-$ e ainda

$$\lim_{t\to-\infty}(S(t), I(t)) = (S_-, 0) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty}(S(t), I(t)) = (S_+, 0).$$

Importante notar que as curvas encontradas acima, não são as órbitas do sistema $SIR$, elas são curvas invariantes, ou seja, se a solução começa na curva então ela permanece na curva e essas curvas invariantes podem ser uniões de órbitas.

Quando fazemos um retrato de fase de uma equação $x' = f(x)$, estamos fazendo apenas um esboço do espaço de fase, o retrato de fase que mostra todas as órbitas invulgares e exemplos de órbitas típicas, junto com as setas nas órbitas que indicam a direção do movimento.

No sistema $SIR$ os equilíbrios no eixo $S$ e a órbita $I$ se qualificam como invulgares, isto é, são órbitas especiais, as curvas encontradas pela solução $I = \dfrac{\gamma}{\beta}\ln S - S + C$ se qualificam como típicas. A fórmula que encontramos mostra que o retrato de fase do sistema $SIR$ depende apenas do $R_0$.

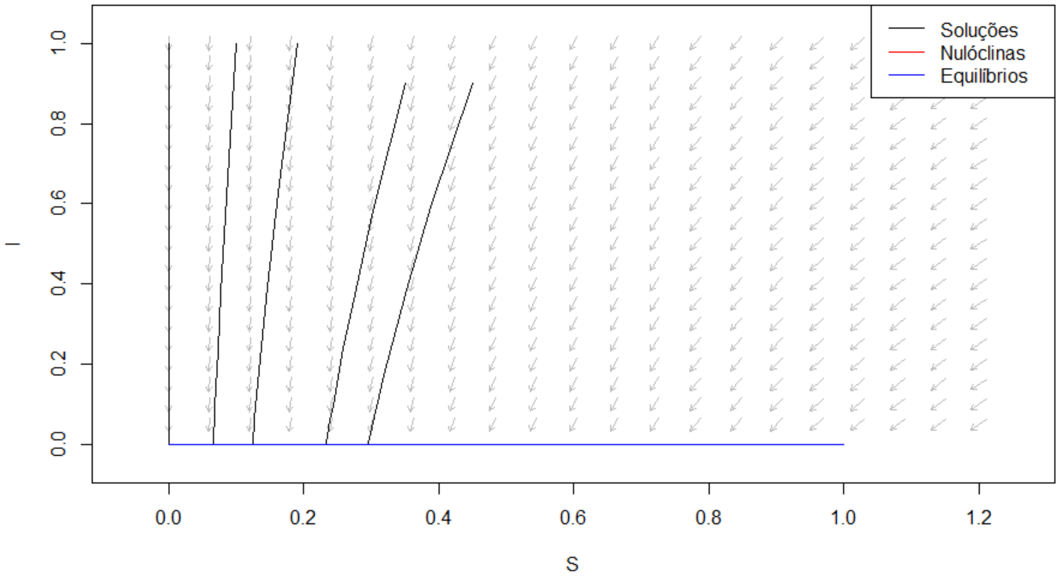



Figura 7.9: $R_0 = 0.4, \beta = 0.2, \gamma = 0.5$

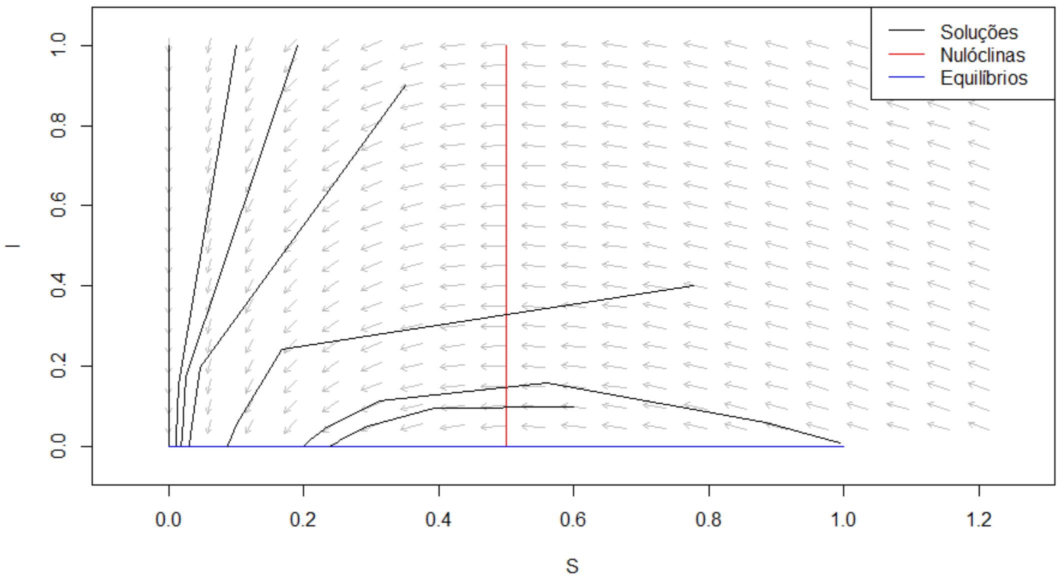



Figura 7.10: $R_0 = 2, \beta = 4, \gamma = 2$

### Interpretação das órbitas

Para $R_0 > 1$ a maioria das órbitas do sistema $SIR$ são similares a figura 7.8, elas conectam um equilíbrio no sentido negativo a um equilíbrio no sentido positivo.

Para o sentido epidêmico, as órbitas nos dizem que, uma epidemia começa num estado populacional perto de $(S, I) = (S_-, 0)$ com $\frac{\gamma}{\beta} < S_- \leq 1$, isto é, fração da população $S_-$ é suscetível e ninguém está infectado, a fração populacional $R_- = 1 - S_-$ não é suscetível a doença por razões já mencionadas. Quando a doença é introduzida, de modo que a $I$ se torne rapidamente positivo, o número de infectados irá aumentar e o número de suscetíveis diminui. Com o tempo o número de suscetíveis cai abaixo de $\frac{\gamma}{\beta}$ e assim o número de infectados também começa a cair, logo a doença começa a se extinguir. Quando estamos no final da epidemia, a fração suscetível da população é $S_+$ com $0 < S_+ < \frac{\gamma}{\beta}$, com isso temos que a fração da população que contraiu a doença é dada por $S_- - S_+$.

### Modelo SIR com mortes

Caso a doença seja fatal para uma pequena fração dos infectados, o modelo $SIR$ ainda pode ser usado.

Para isso considere uma população de tamanho inicial $N$ e no momento $t$ sejam $s(t)$ o número de suscetíveis, $i(t)$ o número de infectados, $w(t)$ o número de pessoas que se recuperaram ou são imunes e $d(t)$ o número de pessoas que morreram da doença. Essas são todas frações populacionais.

Agora vamos definir o coeficiente de transmissão $\beta$, a diferença dele para o visto anteriormente é que agora $\beta$ é definido de acordo com a população $N$, ele é exatamente $N$ quando ninguém ainda morreu pela doença, mas conforme a doença é introduzida e a população é reduzida em decorrer das mortes, isso faz com que o número de pessoas que os indivíduos podem ter contato vai diminuir. Vamos considerar que essa diminuição é dada pela fração da população ainda viva, desse modo o coeficiente de transmissão no momento $t$ será dado por

$$\beta(t) = \beta \frac{s(t) + i(t) + w(t)}{N},$$

isto é, multiplicamos $\beta$ pela fração da pulação que ainda está viva.

Assim como já foi visto a taxa que um indivíduo infectado vai infectar novas pessoas no tempo $t$ é $\beta(t)\frac{s(t)}{s(t) + i(t) + w(t)}$, isto é, o coeficiente de transmissão vezes a fração da população que é suscetível no tempo $t$. Agora para obtermos a taxa com que aparecem novos infectados na população inteira, temos que multiplicar por $i(t)$, portanto a diminuição dos suscetíveis é dada por

$$\begin{aligned}
s'(t) &= -\beta(t)\frac{s(t)}{s(t)+i(t)+w(t)}i(t) \\
&= -\beta\frac{s(t)+i(t)+w(t)}{N}\frac{s(t)}{s(t)+i(t)+w(t)}i(t) \\
&= -\frac{\beta}{N}s(t)i(t).
\end{aligned}$$

Consideramos agora que os infectados se recuperam a uma taxa $\mu i$ e morrem a uma taxa $\delta i$, assim

$$i'(t) = \frac{\beta}{N}si - \mu i - \delta i$$

importante ressaltar que os valores de $\mu$ e $\delta$ podem mudar de acordo com a disponibilidade de tratamentos e cuidados com a doença. Assim o sistema de equações diferenciais será dado por

$$\begin{aligned}
s' &= -\frac{\beta}{N}si \\
i' &= \frac{\beta}{N}si - \mu i - \delta i \\
w' &= \mu i \\
d' &= \delta i,
\end{aligned}$$

podemos juntar os compartimentos do mortes e recuperados, pois eles dependem apenas de $i$ e chamaremos esse novo compartimento de removidos e será $r = w + d$, assim

$$r' = w' + i' = \mu i + \delta i = (\mu + \delta)i,$$

e o novo sistema será

$$\begin{aligned}
s' &= -\frac{\beta}{N}si \\
i' &= \frac{\beta}{N}si - \mu i - \delta i \\
r' &= (\mu + \delta)i.
\end{aligned}$$

E por ultimo pegando $S, I, R$ e se elas denotam as frações populacionais, $S = \frac{s}{N}$,

$I = \dfrac{i}{N}, R = \dfrac{r}{N}$, vamos ter

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I \\ I' &= \beta S I - (\mu + \delta) I \\ R' &= (\mu + \delta) I, \end{aligned}$$

esse sistema é o modelo $SIR$ para uma doença que é fatal em alguns casos.

**Discussão sobre o modelo**

Do que sabemos sobre o modelo a doença a ser estudada vai se extinguir quando $R_0 < 1$ e ela vai se propagar e aumentar quando $R_0 > 1$. Analisando melhor quando temos $R_0 > 1$, vimos que o número de infectados vai crescer até que a fração suscetível da população caia para $\dfrac{1}{R_0} = \dfrac{\gamma}{\beta}$ e assim a fração populacional restante, que é a infectada mais a recuperada, é de $1 - \dfrac{1}{R_0}$ e assim o número de infectados começa a cair. A fração da população dada por $1 - \dfrac{1}{R_0}$ é a fração que chamamos de imunidade de rebanho, ou seja, quando essa fração populacional já não é mais suscetível a doença, então a doença começara a se extinguir. Por exemplo, para a Covid-19 tem se uma estimativa de $R_0 = 3$, assim a fração de imunidade de rebanho é de cerca de $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

A vacinação reduz a população suscetível e assim ajuda a alcançar a imunidade de rebanho mais rapidamente.

É importante ressaltar que a constante $\beta$ é algo que podemos modificar, pois por definição temos que

$$\beta = \frac{\text{Pessoas contatadas}}{\text{Pessoa infectada} \cdot \text{dia}} \cdot \text{Probabilidade de transmissão},$$

o primeiro fator, que é o número de Pessoas contatadas por Pessoa infectada por dia, pode ser reduzido se as pessoas infectadas que sabem que estão infectadas, por terem sintomas e as pessoas que podem estar infectadas, por terem tido contato com alguém infectado se isolarem, por escolha própria ou serem obrigadas a se submeterem a uma quarentena. Agora caso existam infectados que não apresentem sintomas então é necessário que existam outras medidas, como fazer com que toda a população fique em casa o máximo possível e quando não ficarem em casa que mantenham uma distância social maior. Isso tudo é feito para que se tenha um menor número de pessoas contatadas por pessoa infectada, para ajudar nisso também temos que levar em consideração que a doença só é transmitida com o contato ideal, que depende do ambiente e outros fatores, então para diminuir a probabilidade de contatos ideais pode ser necessário fechar comércio ou limitar o número de pessoas dentro deles.

Agora para o segundo fator, um meio de diminuir a probabilidade de transmissão é utilizando mascaras, tanto para infectados como para os suscetíveis e outras medidas de higiene que diminuem a chance do vírus de se transmitir.

E se temos uma doença onde $\gamma$ é constante, então $R_0$ só pode ser reduzido se reduzirmos $\beta$.

Abaixo temos uma simulação de como uma doença se propagaria, observando como as taxas de suscetíveis, infectados e recuperados se alteram ao longo do tempo. Nessa simulação é uma doença com $\beta = 0.6$, $\gamma = \dfrac{1}{10}$ e $R_0 = 6$, uma doença muito contagiosa.

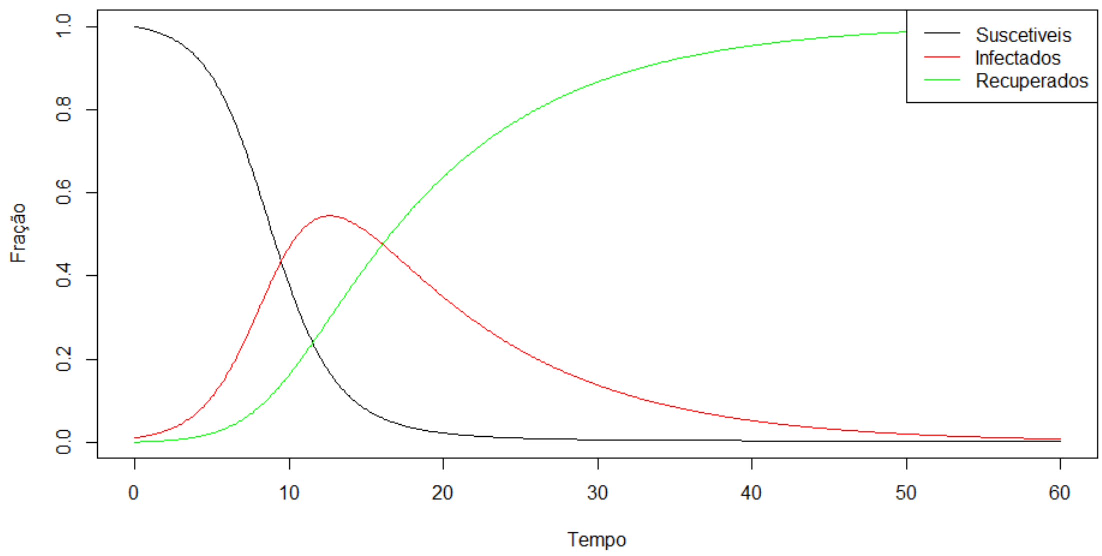



Figura 7.11: Condições iniciais: $S = 1, I = 0.01, R = 0$.

Podemos ver como rapidamente cresce o número de infectados e como essa é uma doença na qual se adquire imunidade permanente o número de recuperados ira crescer até passar o de infectados e fazendo com que os infectados e suscetíveis tendam a zero, fazendo com que a doença não exista mais na população.

## 2.3 Modelo SIR com perda de imunidade

Agora vamos considerar uma doença infecciosa na qual se perde a imunidade após um certo período de tempo. Utilizares o modelo SIR, mas agora vamos adicionar dois novos termos ele ficará do seguinte modo

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI + \rho R \\ I' &= \beta SI - \gamma I \\ R' &= \gamma I - \rho R, \end{aligned}$$

Esses termos indicam que os indivíduos saem do compartimento dos recuperados e voltam ao compartimento dos suscetíveis a uma taxa proporcional a $R$. A constante de proporcionalidade $R$ significa que o tempo médio antes da perda de imunidade é de $\frac{1}{\rho}$. Um diagrama com os compartimentos e como o sistema se comporta pode ser visto a seguir,

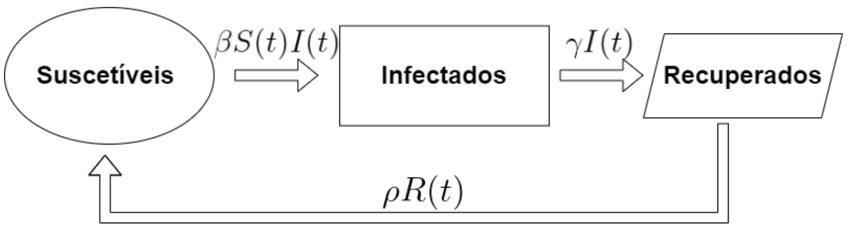



Figura 7.12: Diagrama modelo SIR com perda de imunidade

Como $S, I$ e $R$ são frações populacionais, temos que $S + I + R = 1$ inicialmente e ainda sabemos que $S' + I' + R' = 0$, então $S + R + I$ sempre será igual a 1. Com isso podemos obter $R(t)$ em função de $S(t)$ e $I(t)$, logo $R(t) = 1 - S(t) + I(t)$ e substituindo no sistema, obtemos

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI + \rho(1 - S - I) \\ I' &= \beta SI - \gamma I, \end{aligned}$$

assim reduzimos para um sistema de duas equações. O nosso espaço de fase será o mesmo do sistema $SIR$ já definido, ou seja, o triangulo $\mathcal{T}$ e $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.

### Retratos de fase

Primeiro vamos encontrar as nulóclinas, se $S' = 0$

$$\begin{aligned} S' = 0 &\Rightarrow -\beta SI + \rho(1 - S - I) = 0 \\ &\Rightarrow -\beta SI + \rho - \rho S - \rho I = 0 \\ &\Rightarrow -I(\beta S + \rho) = \rho S - \rho \\ &\Rightarrow I = \frac{\rho - \rho S}{\rho + \beta S} \end{aligned}$$

e se $I' = 0$,

$$\begin{aligned} I' = 0 &\Rightarrow \beta SI - \gamma I = 0 \\ &\Rightarrow I(\beta S - \gamma) = 0 \\ &\Rightarrow I = 0 \quad \text{ou} \quad S = \frac{\gamma}{\beta} \end{aligned}$$

com isso temos que as nulóclinas são:

- $S' = 0$ quando $I = \dfrac{\rho - \rho S}{\rho + \beta S}$ que é uma hipérbole com dois ramos
- $I' = 0$ quando $I = 0$ ou $S = \dfrac{\gamma}{\beta}$ que são duas retas.

Como estamos apenas interessados no triângulo $\mathcal{T}$, existem apenas dois casos, quando $\dfrac{\gamma}{\beta} > 1$ e $\dfrac{\gamma}{\beta} < 1$.

A figura abaixo mostra as nulóclinas em todo o plano $SI$.

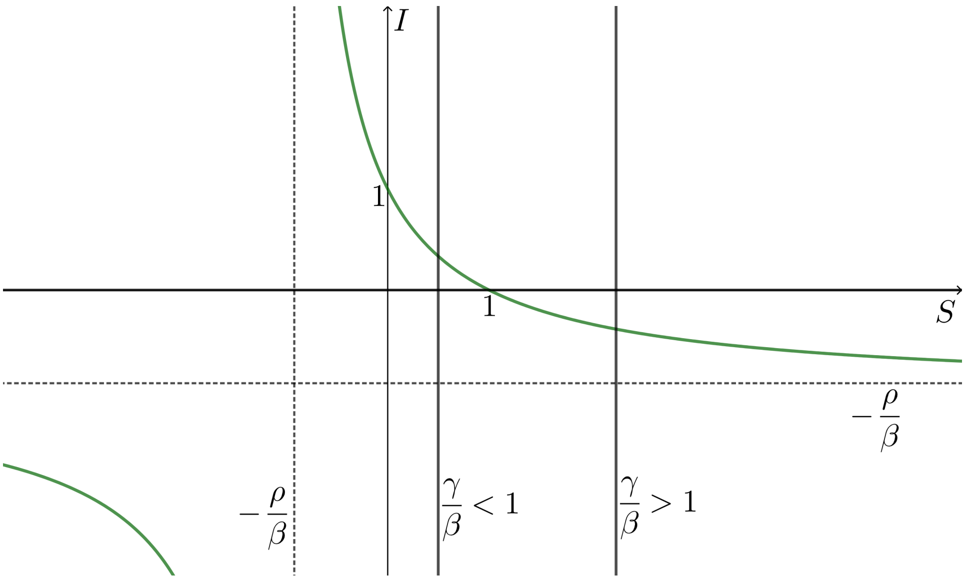



Figura 7.13: Nulóclinas do modelo SIR com perda de imunidade

Existem equilíbrios onde as nulóclinas $S'$ e $I'$ se cruzam, ou seja, onde $S' = I' = 0$, desse modo temos dois equilíbrios

- Se $I = 0$, então temos $I = \dfrac{\rho - \rho S}{\rho + \beta S} = 0 \Rightarrow S = 1$, assim temos um equilíbrio em $(S, I) = (1, 0)$.
- Agora se $S = \dfrac{\gamma}{\beta}$, temos que $I = \dfrac{\rho - \rho S}{\rho + \beta S} = \dfrac{\rho - \rho(\gamma/\beta)}{\rho + \beta(\gamma/\beta)} = \dfrac{\rho(\beta - \gamma)}{\beta(\rho + \gamma)}$, portanto temos um equilíbrio em $(S, I) = (S_*, I_*) = \left(\dfrac{\gamma}{\beta}, \dfrac{\rho(\beta - \gamma)}{\beta(\rho + \gamma)}\right)$. Esse equilíbrio só está em $\mathcal{T}$ quando $\dfrac{\gamma}{\beta} < 1$, isto é, $R_0 > 1$.

A figura abaixo mostra as nulóclinas, os equilíbrios e o campo vetorial no triângulo $\mathcal{T}$ nos casos $R_0 < 1$ e $R_0 > 1$.

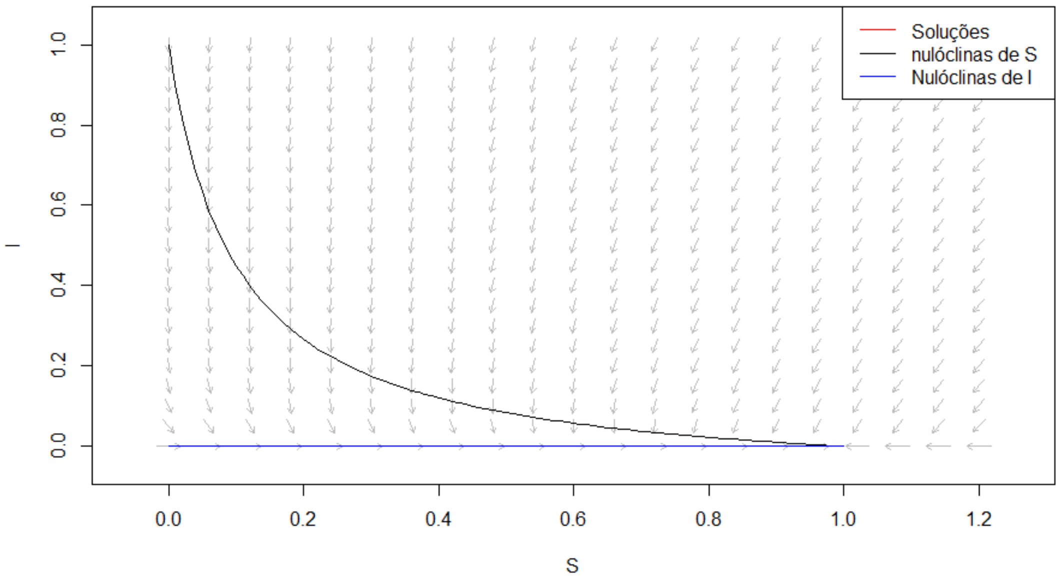



Figura 7.14: $R_0 < 1, \beta = 1, \gamma = 4, \rho = 0.10$

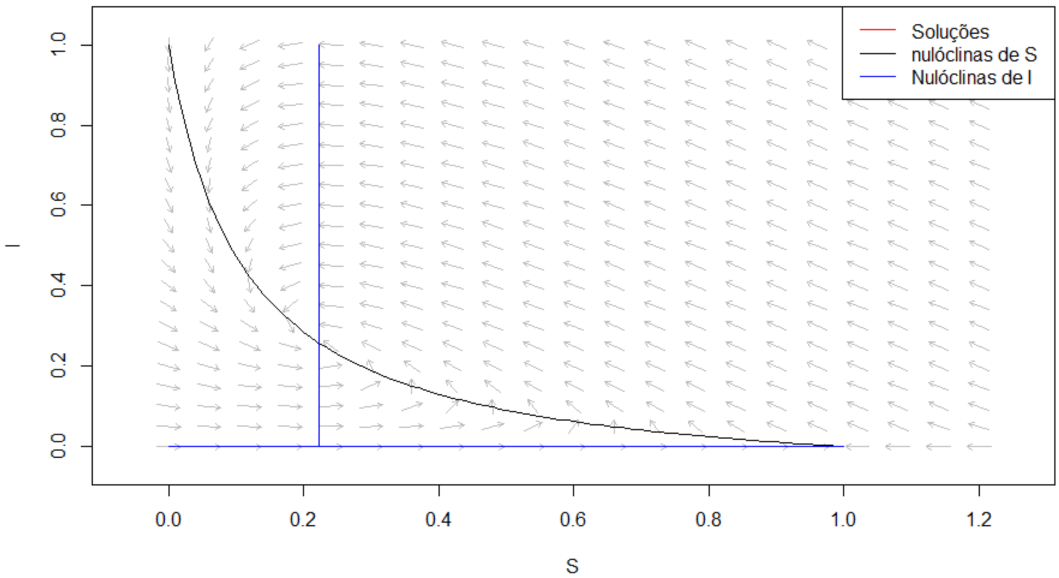



Figura 7.15: $R_0 > 1, \rho = 0.10, \beta = 0.9, \gamma = 0.2$

As imagens nos mostra que:

- No caso $R_0 < 1$, as soluções tem $I$ decrescente para todos os pontos de $\mathcal{T}$, podemos ver que elas parecem se aproximar do equilíbrio $(S, I) = (1, 0)$, o que confirmaremos mais a frente. Nesse equilíbrio toda a população é suscetível a doença por causa da perda de imunidade, mas não existem mais infectados, logo a doença não esta mais presente na população.

- No caso $R_0 > 1$ é mais complexo, pois as soluções parecem circular em torno do equilíbrio $(S_*, I_*)$, mas não é possível saber com certeza se elas estão indo em direção ao equilíbrio ou saindo do equilíbrio. Também é possível que algumas soluções possam se unir a si mesmas e formar soluções periódicas e outras podem se aproximar dessas soluções ou se afastar dessas soluções.

Podemos obter mais informações sobre o nosso sistema se fizermos uma linearização, isto é, vamos utilizar uma equação linear para aproximar nossa equação diferencial não linear, A linearização pode nos dizer se as soluções se aproximam ou se afastam de um equilíbrio.

**Equações diferenciais lineares**

Uma equação diferencial linear é um sistema da forma

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

onde $a_{ij}$ são constantes. Podemos escrever esse sistema em formato matricial, para isso considere

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{pmatrix}$$

com isso vamos ter o sistema escrito como a equação

$$x' = Ax.$$

Notemos que toda equação diferencial linear tem um equilíbrio em $x = 0$.

Agora estamos trabalhando sempre em $\mathbb{R}^n$, e para o caso de $n = 1$, vamos ter que o sistema se reduz a

$$x' = ax,$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $a$ uma constante, então podemos resolver essa equação de modo que

$$x' = ax \Rightarrow \frac{x'}{x} = a \Rightarrow x(t) = e^{at}C,$$

e sendo $x(0) = x_0$, temos que a solução agora com $x(0)$ será

$$x(0) = C = x_0,$$

desse modo

$$x(t) = e^{at}x_0.$$

Agora, se $a < 0$, então as soluções $x(t)$ se aproximam do equilíbrio $x = 0$ quando $t \to \infty$. Mas se $a > 0$ e $x_0 \neq 0$, as soluções crescem em módulo a medida que o $t$ aumenta, mas se $t \to -\infty$ então elas se aproximam do equilíbrio $x = 0$.

Para o caso do $\mathbb{R}^n$ é possível se perguntar se existe uma solução da mesma forma que vimos para o caso de $n = 1$. Sejam $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, considere $x_0 \neq 0$, $\lambda$ constante e a equação matricial

$$x' = Ax,$$

para saber se $x = x_0e^{\lambda t}$ é uma solução, vamos substituí-la em ambos os lados da nossa equação, assim

$$(x_0e^{\lambda t})' = A(x_0e^{\lambda t}) \Rightarrow \lambda x_0e^{\lambda t} = Ax_0e^{\lambda t} \Rightarrow Ax_0 - \lambda x_0 = 0,$$

agora seja $I$ a matriz identidade $n \times n$, onde $Ix = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ com isso

$$Ax_0 - \lambda x_0 = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x_0 = 0,$$

podemos ver que $x_0 = 0$ é uma solução, mas essa equação tem outras soluções se, e somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$. Os números $\lambda$ tais que $\det(A - \lambda I) = 0$ são os autovalores de $A$. Se $\lambda$ é um autovalor de $A$, os vetores não nulos $x_0$ tais que $(A - \lambda I)x_0 = 0$, isto é, $Ax_0 = x_0\lambda$ são chamados de autovetores associados a $\lambda$. E o conjunto de todas as soluções de $(A - \lambda I)x_0 = 0$, incluindo $x_0 = 0$, é chamado de autoespaço do autovalor $\lambda$.

A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é chamada de polinômio característico da matriz $A$, ela é um polinômio de grau $n$, portanto temos exatamente $n$ autovalores se contarmos com a multiplicidade. Os autovalores e autovetores do polinômio característico podem ser complexos.

*Exemplo* 2.1. Considere o sistema linear

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_1,$$

escrevendo na forma matricial temos

$$x' = Ax \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

para encontrar o polinômio característico vamos fazer $A - \lambda I$, assim

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

e fazendo o determinante e igualando a 0 temos

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

logo, os autovalores são $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

Agora para encontrar os autovetores, primeiro para o autovalor $\lambda = 1$, os autovetores são dados por

$$(A - \lambda I)x_0 = 0,$$

com isso vamos determinar o vetor $x_0$,

$$(A - (1)I)x_0 = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

disso temos o sistema

$$-x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0.$$

logo o vetor é $(x_1, x_1)$, portanto esse é o autovetor associado a $\lambda = 1$. Desse modo temos que todas as soluções dessa equação são múltiplos de $(1, 1)$, essas soluções constituem uma reta, ou seja, um espaço uni-dimensional de $\mathbb{R}^2$ e essa reta é o autoespaço do autovalor $\lambda = 1$. Se $x(0) = x_0$ é um ponto dessa reta, isto é, um múltiplo de $(1, 1)$, então, como

$\lambda = 1$ e as soluções serão do tipo $x(t) = x_0 e^{\lambda t} = x_0 e^t$. Esta formula implica que $x(t)$ é sempre um ponto dessa reta, $x(t) \to 0$ com $t \to -\infty$ e se $x_0 \neq 0$, temos que $||x(t)|| \to \infty$ com $t \to \infty$.

Agora para $\lambda = -1$, fazemos o mesmo processo para encontrar o seu autoespaço, primeiro encontrar o autovetor associado,

$$(A - \lambda I)x_0 = 0,$$

com isso vamos determinar o vetor $x_0$,

$$(A - (-1)I)x_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

disso temos o sistema,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0, \end{aligned}$$

assim temos, $(-x_2, x_2) = x_2(-1, 1)$, assim como vimos para o outro autovalor, vamos ter que as soluções desta equação diferencial são todas múltiplas do vetor $(-1, 1)$ e elas constituem uma reta, isto é, um espaço uni-dimensional do $\mathbb{R}^2$, essa reta é o autoespaço desse autovalor. E se $x(0) = x_0$ é um ponto dessa reta, então, $x(t) = x_0 e^{-t}$, com isso temos que $x(t)$ é um ponto dessa reta e $x(t) \to 0$ com $t \to \infty$ e se $x_0 \neq 0$, $||x(t)|| \to \infty$ com $t \to -\infty$.

Com essas informações podemos esboçar o retrato de fase do sistema e ele terá a seguinte cara

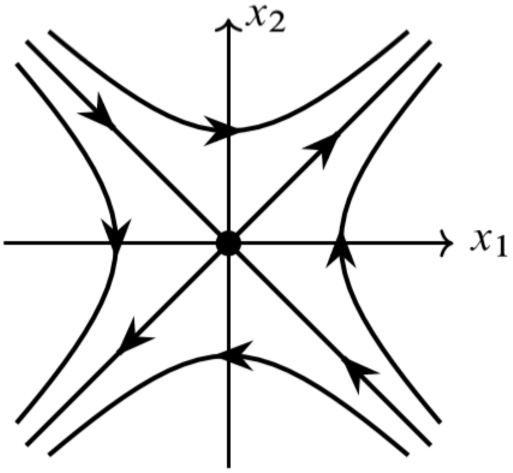



Figura 7.16: Retrato de fase exemplo 2.1.

A reta $x_2 = -x_1$ é o autoespaço do autovalor $\lambda = -1$ e podemos ver que nela o movimento é em direção à origem. A reta $x_2 = x_1$ é o autoespaço do autovalor $\lambda = 1$ e nela podemos ver que a direção do movimento é em se afastar da origem. Podemos também considerar outras condições iniciais que são combinações lineares de $(1, 1)$ e $(-1, 1)$, nessas combinações quando $t$ aumenta o componente de $(-1, 1)$ diminui, enquanto que o componente de $(1, 1)$ aumenta.

Uma equação diferencial linear $x' = Ax$ é dita hiperbólica se todos os autovalores de $A$ tiverem parte real não nula. Existem três tipos de equações diferenciais lineares hiperbólicas:

- Todos os autovalores têm uma parte real negativa, assim todas as soluções se aproximam da origem com $t \to \infty$.
- Todos os autovalores têm uma parte real positiva, assim todas as soluções se aproximam da origem com $t \to -\infty$.
- Contanto a multiplicidade, se $k$ autovalores têm parte real negativa e $n - k$ têm parte real positiva. Então, existem subespaços $E^s$ de dimensão $k$ e $E^u$ de dimensão $n - k$ de tal forma que:
  (a) Uma solução $x(t)$ de $x' = Ax$ se aproxima da origem com $t \to \infty$ se, e somente se, $x(0) \in E^s$.
  (b) Uma solução $x(t)$ de $x' = Ax$ se aproxima da origem com $t \to -\infty$ se, e somente se, $x(0) \in E^u$.

O espaço $E^s$ é chamado de subespaço estável e $E^u$ é chamado de subespaço instável, os dois de $x' = Ax$.

Dentro desses tipos de equações diferenciais hiperbólicas existem diversos casos para os autovalores, ainda que estamos apenas em duas dimensões. Alguns desses casos serão apresentados.

### Dois autovalores reais, negativos e distintos

Para o primeiro tipo de equações diferenciais lineares hiperbólicas, temos que todos os autovalores tem uma parte real negativa, mas eles podem ser iguais ou distintos. Abaixo temos um exemplo de quando eles são distintos.

*Exemplo* 2.2. Como um exemplo simples de um sistema com dois autovalores reais negativos e distintos, vamos considerar a seguinte equação diferencial linear na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

os autovalores serão $-1$ e $-2$. Vamos ter que $(x_1, 0)$ é o autoespaço do autovalor $-1$ e $(0, x_2)$ é o autoespaço de $-2$, com isso vamos ter no espaço de fase as retas que estão sobre os eixos $x_1$ e $x_2$ que apontam para a origem. E se pegarmos qualquer solução que é combinação linear de $x_1$ e $x_2$ teremos curvas invariantes que são tangentes ao eixo $x_1$, pois como $-2 < -1 < 0$, então a coordenada $x_2$ de qualquer solução irá decrescer mais rápido do que a coordenada $x_1$, visto que $e^{-2t}$ decresce mais rápido do que $e^{-t}$, assim as soluções acabam tangentes ao eixo $x_1$.

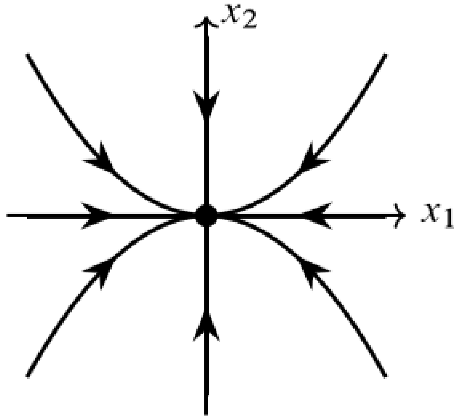



Figura 7.17: Retrato de fase exemplo 2.2.

Com isso, em geral para duas dimensões, se os autovalores são $-\lambda_1 < -\lambda_2 < 0$, então quase todas as soluções se aproximam da origem na direção do autoespaço do autovalor $-\lambda_1$.

### Dois autovalores complexos com parte real negativa

*Exemplo* 2.3. Como um exemplo simples de um sistema com dois autovalores complexos com parte real negativa, considere o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\omega \\ \omega & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

com $\alpha > 0$ e $\omega > 0$, os autovalores serão $-\alpha \pm \omega i$, então para encontrar os autovetores, primeiro para $\lambda = -\alpha + \omega i$, temos que

$$\begin{pmatrix} -\omega & -\omega \\ \omega & -\omega i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolvendo o sistema temos que os autovetores serão múltiplos de $(1, -i)$.

E como são autovalores conjugados, os autovetores associados a $\lambda = -\alpha - \omega i$ serão múltiplos de $(1, i)$. Com isso as soluções serão dadas por

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} = x_0 e^{(-\alpha \pm \omega i)t} = x_0 e^{-\alpha t}(\cos(t\omega) \pm i \operatorname{sen}(t\omega)).$$

Com $\alpha, \omega > 0$, vamos ter que as soluções, que começam fora da origem, ficam oscilando quando $t \to -\infty$ elas vão para $+\infty$ e vão para 0 quando $t \to \infty$. A curva dessa solução se parece com uma espiral, assim temos o retrato de fase como o da figura abaixo.

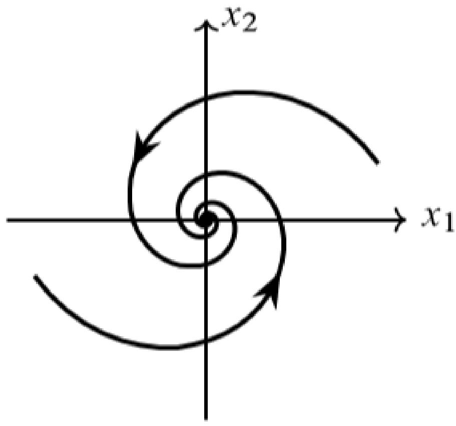



Figura 7.18: Retrato de fase exemplo 2.3.

**Estabilidade assintótica e linearização**

Definimos anteriormente o que é um equilíbrio e as órbitas das soluções, agora é importante analisarmos a estabilidade das trajetórias das soluções.

Um equilíbrio $x_0$ de $x' = f(x)$ é assintoticamente estável se as soluções que começam perto de $x_0$ permanecem perto de $x_0$ no decorrer do tempo e, além disso, elas se aproximam de $x_0$ com $t \to \infty$.

Equilíbrios assintoticamente estáveis são estados que se espera observar ocorrendo na natureza, se acontece alguma perturbação no sistema a uma pequena distancia de um equilíbrio assintoticamente estável, então o estado do sistema deve retornar ao equilíbrio, isso pode ser observado por exemplo em molas, ainda que ocorra uma perturbação grande quando o tempo vai ao infinito temos que o sistema das molas volta ao equilíbrio.

Agora, suponha que $x' = f(x)$ tenha um equilíbrio em $x_0$, para se estudar soluções próximas de $x_0$, fazemos uma substituição $x = x_0 + y$. Então, um pequeno $y$ corresponde a $x$ perto de $x_0$. Com isso obtemos $y' = f(x_0 + y)$ e pelo teorema de Taylor temos

$$y' = f(x_0 + y) = f(x_0) + Df(x_0)y + \cdots = Df(x_0)y + \cdots ,$$

pois $x_0$ é um equilíbrio. Aqui $Df(x_0)$ é a matriz de $n \times n$ cuja $ij$-ésima entrada é $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

avaliada no ponto $x_0$.

A linearização da equação diferencial $x' = f(x)$ no equilíbrio $x_0$ é a equação diferencial linear $y' = Df(x_0)y$ e podemos determinar seu retrato de fase se encontrarmos os autovalores e autovetores, já que $Df(x_0)$ é uma matriz quadrada.

O equilíbrio $x_0$ de $x' = f(x)$ é chamado de hiperbólico se a equação diferencial linear $y' = Df(x_0)y$ for hiperbólica.

Agora para o próximo teorema vamos primeiro introduzir o que é uma variedade. Uma variedade $k$-dimensional em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que, na vizinhança a cada um de seus pontos, temos um subespaço $k$-dimensional de $\mathbb{R}^n$. Uma variedade unidimensional é apenas uma curva e uma variedade bidimensional é apenas uma superfície.

**Teorema 2.3.** *(Teorema da Linearização) Se $x_0$ é um equilíbrio hiperbólico de $x' = f(x)$, então o retrato de fase de $x' = f(x)$ perto de $x_0$ se parece com o retrato de fase de $y' = Df(x_0)y$ perto da origem. Em particular:*

- *Se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa, então $x_0$ é um equilíbrio assintoticamente estável de $x' = f(x)$. O equilíbrio é chamado de atrator.*

- *Se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real positiva, então $x_0$ é um equilíbrio assintoticamente estável do sistema $x' = -f(x)$, onde invertemos o sinal de $f$. Para o sistema original, $x' = f(x)$, todas as soluções que estão perto de $x_0$ sempre estiveram perto de $x_0$ e tendem a $x_0$ com $t \to -\infty$. O equilíbrio $x_0$ é chamado de repulsor.*

- *Se $Df(x_0)$ tem $k$ autovalores com parte real negativa e $n-k$ autovalores com parte real positiva (onde $0 < k < n$), então existem duas variedades invariantes que se intersetam em $x_0$, $W^s(x_0)$ de dimensão $k$ e $W^u(x_0)$ de dimensão $n-k$, tais que*

  - *$W^s(x_0)$ contém todas as soluções que se aproximam de $x_0$ com $t \to \infty$;*
  - *$W^u(x_0)$ contém todas as soluções que se aproximam de $x_0$ com $t \to -\infty$.*

  *O equilíbrio $x_0$ é chamado de sela. $W^s(x_0)$ e $W^u(x_0)$ são chamados de variedade estável e instável de $x_0$, respectivamente. Em $x_0$, $W^s(x_0)$ e $W^u(x_0)$ são tangentes aos subespaços estável e instável de $y = Df(x_0)y$, transladados para $x_0$.*

*Demonstração.* Ver [2]. □

A figura abaixo mostra as variedades estável e instável de $x_0$.

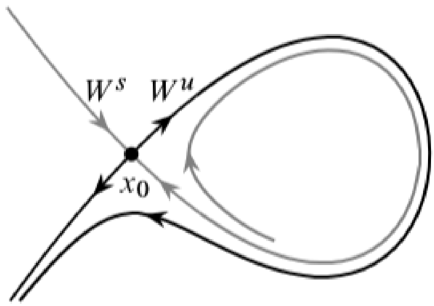



Figura 7.19: Gráfico de variedades.

*Exemplo* 2.4. Um exemplo particularmente simples é o modelo $SIS$, onde

$$I' = f(I) = (\beta - \gamma)I - \beta I^2,$$

e vimos que existem equilíbrios em $I = 0$ e $I = 1 - \dfrac{\gamma}{\beta}$. E temos,

$$f'(I) = \beta - \gamma - 2\beta I.$$

Para $I = 0$, obtemos

$$f'(0) = \beta - \gamma,$$

e para $I = 1 - \dfrac{\gamma}{\beta}$, temos

$$f'\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) = -(\beta - \gamma).$$

Desse modo, para o caso $R_0 = \dfrac{\beta}{\gamma} > 1$, temos que o equilíbrio $I = 0$ tem $f'(0) > 0$, isto é, ele é um repulsor e para $I = 1 - \dfrac{\gamma}{\beta}$, temos $f'\left(1 - \dfrac{\gamma}{\beta}\right) < 0$, logo, ele é um atrator. E no caso $R_0 < 1$, vamos ter o inverso, ou seja, o equilíbrio $I = 0$ é um atrator e $I = 1 - \dfrac{\gamma}{\beta}$ é um repulsor, mas como já foi visto, esse equilíbrio não está no intervalo $0 \leq I \leq 1$.

*Exemplo* 2.5. Estudaremos a estabilidade do modelo SIR, dado pelas equações

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI \\ I' &= \beta SI - \gamma I. \end{aligned}$$

A matriz linearizada desse sistema é dada por

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial S'}{\partial S} & \dfrac{\partial S'}{\partial I} \\ \\ \dfrac{\partial I'}{\partial S} & \dfrac{\partial I'}{\partial I} \end{pmatrix},$$

com isso temos a matriz

$$y' = \begin{pmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{pmatrix}.$$

Já vimos que um equilíbrio para esse sistema é em $(S, I) = (S, 0)$, então aplicando ele na matriz linear temos

$$Df(S, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta S \\ 0 & \beta S - \gamma \end{pmatrix},$$

agora encontrando o polinômio característico dessa matriz temos os autovalores $\lambda = 0$ e $\lambda = \beta S - \gamma$. Como temos um autovalor com a parte real negativa, então essa matriz não é hiperbólica, logo o equilíbrio $(S, 0)$ não é hiperbólico e não podemos usar o Teorema da Linearização.

Podemos ver apenas que o equilíbrio $(S, 0)$ é estável quando $\beta S - \gamma < 0$ e será instável quando $\beta S - \gamma > 0$.

### Equilíbrios do modelo SIR com perda de imunidade

Como já vimos o modelo SIR com perda de imunidade pode ser expresso pelas equações

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI + \rho(1 - S - I) \\ I' &= \beta SI - \gamma I, \end{aligned}$$

assim a sua matriz de linearização é

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial S'}{\partial S} & \dfrac{\partial S'}{\partial I} \\ \\ \dfrac{\partial I'}{\partial S} & \dfrac{\partial I'}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta I - \rho & -\beta S - \rho \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{pmatrix}.$$

Já vimos que existem equilíbrios em $(S, I) = (1, 0)$ e, quando $R_0 > 1$, em $(S_*, I_*) = \left(\dfrac{\gamma}{\beta}, \dfrac{\rho(\beta - \gamma)}{\beta(\rho + \gamma)}\right)$.

Substituindo o equilíbrio $(1,0)$ na matriz de linearização, temos que

$$\begin{pmatrix} -\rho & -\beta-\rho \\ 0 & \beta-\gamma \end{pmatrix},$$

os autovalores dessa matriz são $\lambda_1 = -\rho$ que é sempre negativo e $\lambda_2 = \beta - \gamma$ que é negativo quando $R_0 < 1$ e positivo quando $R_0 > 1$, logo o equilíbrio $(1,0)$ é um atrator quando $R_0 < 1$ e uma sela quando $R_0 > 1$. Em particular:

**Proposição 2.1.** *Para $R_0 < 1$, as soluções do modelo SIR que começam perto de $(1,0)$ se aproximam de $(1,0)$ quando $t \to \infty$.*

Agora para o equilíbrio $(S_*, I_*)$ temos a matriz de linearização

$$\begin{pmatrix} -\rho\dfrac{\beta-\gamma}{\rho+\gamma}-\rho & -\gamma-\rho \\ \rho\dfrac{\beta-\gamma}{\rho+\gamma} & 0 \end{pmatrix},$$

podemos ver que encontrar o polinômio característico dessa matriz pode dar um pouco de trabalho, então vamos ver a seguinte abordagem.

Seja uma matriz $2 \times 2$, dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

se fizemos o polinômio característico dessa matriz teremos a equação

$$\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad-bc) = 0,$$

e as soluções serão $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$, isto é,

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2,$$

portanto, se igualamos as equações temos que

$$\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad-bc) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2,$$

temos que

$$a + d = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{e} \quad ad - bc = \lambda_1\lambda_2,$$

e a expressão $a+d$ é o traço da matriz, que denotaremos por $T$ e $ad-bc$ é o determinante, que denotaremos por $D$. E como podemos ver o traço e o determinante podem nos ajudar a determinar os sinais dos autovalores, do seguinte modo

- Se $D < 0$, então um dos $\lambda_1, \lambda_2$ é positivo e o outro é negativo.
- Se $D = 0$, então pelo menos um $\lambda_1, \lambda_2$ é 0.
- Se $D > 0$ e $T < 0$, então $\lambda_1, \lambda_2$ são ambos negativos, ou $\lambda_1, \lambda_2$ são um par conjugado complexo $\alpha \pm \beta i$ com $\alpha < 0$.

Voltando a matriz linearizada no equilíbrio $(S_*, I_*)$

$$\begin{pmatrix} -\rho\dfrac{\beta-\gamma}{\rho+\gamma} - \rho & -\gamma - \rho \\ \rho\dfrac{\beta-\gamma}{\rho+\gamma} & 0 \end{pmatrix},$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} T &= -\rho\frac{\beta-\gamma}{\rho+\gamma} - \rho \\ D &= -(-\gamma-\rho)\rho\frac{\beta-\gamma}{\rho+\gamma} = (\gamma+\rho)\rho\frac{\beta-\gamma}{\rho+\gamma} = \rho(\beta-\gamma). \end{aligned}$$

Se $R_0 = \dfrac{\beta}{\gamma} > 1$, podemos ver que $T < 0$ e $D > 0$, logo, $\lambda_1, \lambda_2$ são ambos negativos ou são um par conjugado complexo da forma $\alpha \pm \beta i$ com $\alpha < 0$ e em ambos os casos o equilíbrio é um atrator. Então:

**Proposição 2.2.** *Para $R_0 > 1$ as soluções do modelo SIR que começam perto de $(S_*, I_*)$ se aproximam de $(S_*, I_*)$ com $t \to \infty$.*

Mas ainda temos soluções que se aproximam desses equilíbrios sem ser aquelas que começam perto deles, para encontrar essas soluções precisamos de mais informações sobre as equações diferenciais no plano.

### Teoria planar

Já vimos que para uma equação diferencial em uma dimensão as soluções que permanecem limitadas se aproximam dos equilíbrios. Agora para duas dimensões precisamos de alguns conceitos para explicar como isso funciona.

Se uma solução de uma equação diferencial é periódica no tempo, a órbita correspondente é chamada fechada porque é sempre uma curva fechada simples.

**Teorema 2.4** (Poincaré-Bendixson). *Considere $x' = f(x)$, uma equação diferencial definida num aberto $U$ de $\mathbb{R}^2$. Caso uma solução permaneça num subconjunto compacto de $U$ (fechado e limitado) conforme $t$ aumenta, então esta solução aproxima-se ou*

- *de um conjunto que contém um equilíbrio; ou*
- *de uma órbita fechada.*

*Demonstração.* Ver [2]. □

A equação diferencial $x' = f(x)$ é chamada polinomial se, quando escrita como um sistema da forma

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

todas as funções $f_1, \ldots, f_n$ são polinômios.

Para uma equação diferencial polinomial com $n = 2$, podemos dar mais detalhes do que no Teorema 2.4.

Pode ocorrer que uma ou mais órbitas se ligarem a equilíbrios para formarem, conjuntamente com os equilíbrios, uma curva fechada simples. Se a equação diferencial determina uma direção consistente de movimento à volta desta curva, ela é chamada de ciclo separatriz. Um gráfico é uma união convexa de dois ou mais ciclos separatriz. Veja na figura abaixo.

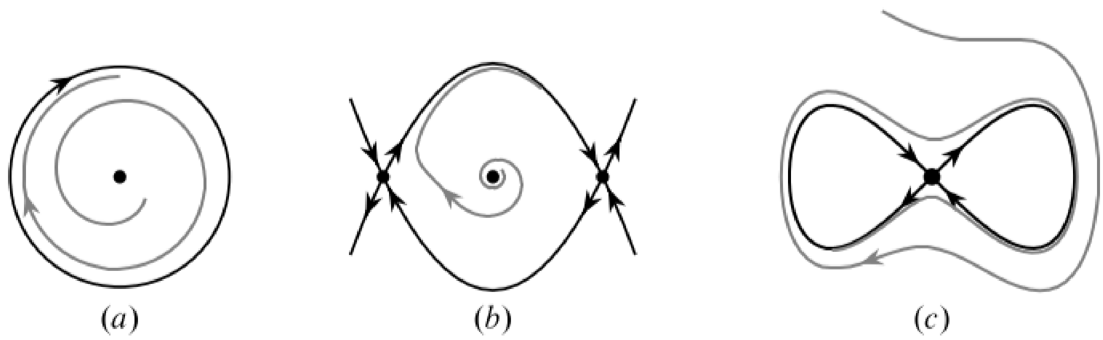



Figura 7.20: Representação de orbita fechada, ciclo separatriz e gráficos com equilíbrios.

(a) A solução se aproxima de uma órbita fechada

(b) A solução se aproxima de um ciclo separatriz que consiste em duas órbitas e dois equilíbrios.

(c) A solução se aproxima de um gráfico que consiste em dois ciclos separatriz.

Cada ciclo separatriz é composto de uma órbita e um equilíbrio.

**Teorema 2.5** (Poincaré-Bendixson Generalizado)**.** *Considere $x' = f(x)$ uma equação diferencial polinomial com $n = 2$ que tem apenas equilíbrios isolados. Caso uma solução de $x' = f(x)$ permaneça num subconjunto compacto (fechado e limitado) conforme $t$ aumenta, então esta solução aproxima-se ou*

- *de um equilíbrio; ou*
- *de uma órbita fechada; ou*
- *de um ciclo separatriz; ou*
- *de um gráfico.*

*Demonstração.* Ver [2]. □

A existência de ciclos separatriz e gráficos é muitas vezes fácil de descartar. Além disso, às vezes pode se descartar a existência de órbitas fechadas usando critério de Bendixson ou critério de Dulac, que ainda será discutido. Uma vez que sabemos que não há ciclos separatriz ou órbitas fechadas, uma solução que permaneça num conjunto compacto deve aproximar-se de um equilíbrio.

O critério de Bendixson ou o critério de Dulac são baseados no Teorema da Divergência 2D, que é uma versão do Teorema de Green.

Supomos que

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

está definido em um conjunto aberto $U$ no plano. Escrevemos $x' = f(x)$ para simplificar. Seja $C$ uma curva fechada simples em $U$, orientada no sentido anti-horário. Para cada $x \in C$, seja $n(x)$ o vetor unitário normal apontado para fora.

A divergência de $f$, $\nabla \cdot f$, é definida por

$$\nabla \cdot f(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2).$$

**Teorema 2.6** (Teorema da Divergência 2D)**.** *Suponha que uma curva fechada simples, $C$, e seu interior, $IntC$, estejam contidos em $U$. Então*

$$\iint_{IntC} \nabla \cdot f(x) dA = \int_C f(x) \cdot n(x) ds.$$

A primeira integral é uma integral dupla ordinária de uma função sobre uma região no plano. A segunda integral é a integral de uma função em torno de uma curva em relação ao comprimento de arco.

**Corolário 2.3** (Critério de Bendixson). *Suponha (1) o conjunto aberto $U$ não tem buracos e (2) $\nabla \cdot f$ é sempre positivo em $U$, ou $\nabla \cdot f$ é sempre negativo em $U$. Então, $x' = f(x)$ não tem órbitas fechadas em $U$.*

*Demonstração.* Se $x' = f(x)$ tivesse uma órbita fechada $C$ em $U$, então pelo Teorema da Divergência 2D teríamos

$$\iint_{IntC} \nabla \cdot f(x)\mathrm{d}A = \int_C f(x) \cdot n(x)\mathrm{d}s = \int_C 0\mathrm{d}s = 0,$$

dado que $f(x)$ é tangente a $C$ e $n(x)$ é perpendicular a $C$. No entanto, se $\nabla \cdot f$ é sempre positivo, então a integral dupla é positiva; e se $\nabla \cdot f$ é sempre negativo, então a integral dupla é negativa; dado que a integral conserva o sinal. O que é uma contradição. □

*Observação* 2.2. De mesmo modo podemos provar que nas mesmas condições não há ciclos separatrizes nem gráficos em $U$.

**Corolário 2.4** (Critério de Dulac). *Suponha (1) que o conjunto aberto $U$ não tem buracos, e (2) há uma função positiva $g(x)$ tal que $\nabla \cdot gf$ é sempre positivo em $U$, ou $\nabla \cdot gf$ é sempre negativo em $U$. Então $x' = f(x)$ não tem órbitas fechadas em $U$.*

*Demonstração.* Pelo critério de Bendixson, $x' = g(x)f(x)$ não tem órbitas fechadas em $U$. Mas $x' = f(x)$ e $x' = g(x)f(x)$ tem as mesmas órbitas. (Os vetores $f(x)$ e $g(x)f(x)$ apontam na mesma direção, eles apenas tem comprimentos diferentes). Logo, $x' = f(x)$ não tem órbitas fechadas em $U$. □

*Observação* 2.3. De modo análogo podemos provar que nas mesmas condições não há ciclos separatrizes nem gráficos em $U$.

### Estabilidade global do modelo SIR com perda de imunidade

Como já vimos, o modelo SIR com perda de imunidade é dado pelo sistema

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI + \rho(1 - S - I) \\ I' &= \beta SI - \gamma I, \end{aligned}$$

com o espaço de fase sendo o triangulo $\mathcal{T}$ dado por

$$\mathcal{T} = \{(S, I) : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\}.$$

e $R_0 = \dfrac{\beta}{\gamma}$.

O triângulo $\mathcal{T}$ é um subconjunto fechado e limitado no plano. E como já vimos as soluções que começam em $I = 0$ permanecem em $I = 0$ e se aproximam do equilíbrio

$(1,0)$. Ainda para verificar as soluções dos outros lados de $\mathcal{T}$ vamos pegar as funções continuamente diferenciáveis $V(S,I) = S$ e $V(S,I) = S + I$ e ver elas ao longo das soluções, desse modo

i) Com $V(S,I) = S$ e $(S', I') = (-\beta SI + \rho(1 - S - I), \beta SI - \gamma I)$, temos que

$$\begin{aligned}\nabla V(S,I) \cdot (S', I') &= (1,0) \cdot (-\beta SI + \rho(1 - S - I), \beta SI - \gamma I)\\ &= -\beta SI + \rho(1 - S - I) < 0,\end{aligned}$$

assim, podemos ver que ao longo da solução a função $V(S,I)$ decresce permanecendo dentro de $\mathcal{T}$.

ii) Para $V(S,I) = S + I$ e $(S', I') = (-\beta SI + \rho(1 - S - I), \beta SI - \gamma I)$, temos que

$$\begin{aligned}\nabla V(S,I) \cdot (S', I') &= (1,1) \cdot (-\beta SI + \rho(1 - S - I), \beta SI - \gamma I)\\ &= \rho(1 - S) - (\rho + \gamma)I < 0,\end{aligned}$$

ao longo da solução o valor de $V(S,I)$ decresce, logo a solução continua dentro de $\mathcal{T}$.

Podemos ver então que as soluções que começam em $\mathcal{T}$ permanecem nele.

Agora para mostrar que para quaisquer $\rho, \beta, \gamma$, o sistema não tem órbitas fechadas, ciclos separatrizes nem gráficos no conjunto aberto $I > 0$. Para isso considere a função $g(S,I) = \dfrac{1}{I}$, ela é positiva em $I > 0$ e se multiplicarmos o sistema por $g(S,I)$ vamos ter

$$\begin{aligned}S' &= -\beta S + \rho\frac{(1 - S - I)}{I}\\ I' &= \beta S - \gamma,\end{aligned}$$

e calculando a divergência disso, temos

$$\frac{\partial S'}{\partial S} + \frac{\partial I'}{\partial I} = -\beta - \frac{\rho}{I},$$

que é negativo em $I > 0$, então pelo Corolário 2.4 e pela Observação 2.3 temos que o sistema SIR não tem órbitas fechadas, ciclos separatrizes e nem gráficos no conjunto aberto $I > 0$.

Assim, pelo Teorema 2.4, todas as soluções em $\mathcal{T}$ se aproximam do equilíbrio, mais precisamente:

- Para $R_0 < 1$, só existe o equilíbrio $(1,0)$ em $\mathcal{T}$, então todas as soluções em $\mathcal{T}$ se aproximam de $(1,0)$ com $t \to \infty$

- Para $R_0 > 1$, vimos que o equilíbrio $(S, I) = (1, 0)$ é uma sela hiperbólica, assim as soluções que começam em $I > 0$ não vão se aproximar de $(1, 0)$. Mas como temos um outro equilíbrio em $\mathcal{T}$, que é $(S_*, I_*) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\rho(\beta-\gamma)}{\beta(\rho+\gamma)}\right)$, então todas as soluções em $\mathcal{T}$ com $I > 0$ se aproximam do equilíbrio $(S_*, I_*)$ com $t \to \infty$.

**Discussão do modelo SIR com perda de imunidade**

Para o modelo SIR com perda de imunidade vimos que:

1. Para $R_0 < 1$ existe um único equilíbrio no qual toda a população é suscetível e ninguém está infectado e todas as soluções se aproximam desse equilíbrio.

2. Para $R_0 > 1$ temos dois equilíbrios, mas um não é assintoticamente estável, já o outro equilíbrio esta no interior do espaço de fase e com ela temos que a doença está presente na população em um nível intermediário, esse equilíbrio é assintoticamente estável e quase todas as soluções se aproximam dele.

Modelos com essa propriedade são chamados de modelos endêmicos, e o equilíbrio interno é chamado de equilíbrio endêmico. Esse tipo de modelo surge por causa de algum mecanismo que reabastece o compartimento dos suscetíveis, seja por perda de imunidade ou no caso de nascimentos na população, esse tipo de processo é importante quando se estudamos uma pandemia a longo prazo.

Abaixo temos uma simulação de como uma doença se propagaria, observando como as taxas de suscetíveis, infectados e recuperados se alteram ao longo do tempo. Nessa simulação é uma doença com $\beta = 0.9$, $\gamma = 0.2$, $\rho = 0.10$ e $R_0 = 4.5$.

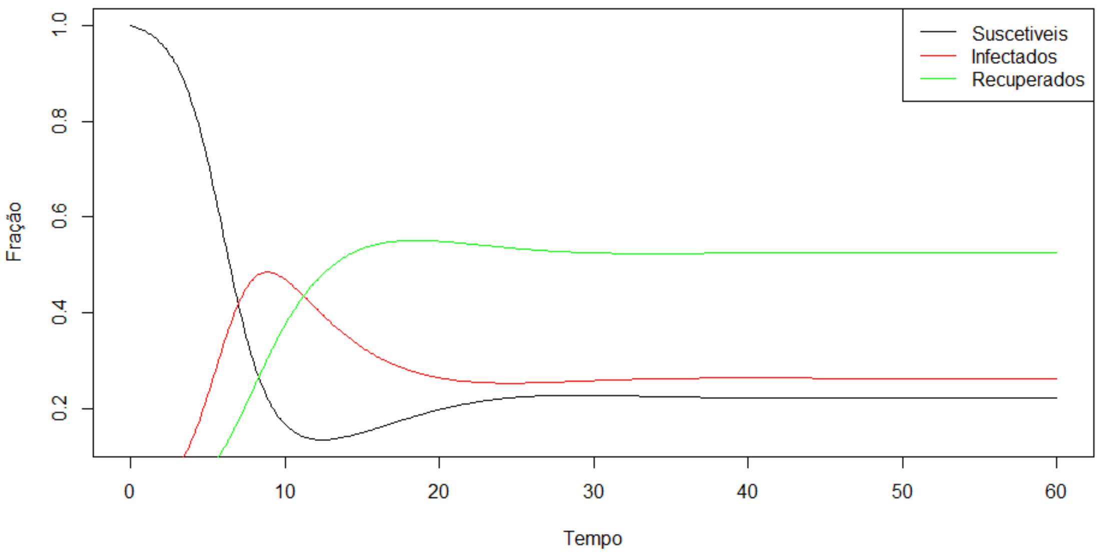



Figura 7.21: Condições iniciais: $S = 1, I = 0.01, R = 0.001$.

Nesse caso observamos um aumento rápido no número de recuperados, e um pico não tão grande de infectados, pois não temos um $\beta$ grande, e o tempo que se fica infectado é menor do que o tempo com que se adquire imunidade, tudo isso contribui para que o número de recuperados cresça rapidamente, mas como se trata de uma doença com perda de imunidade podemos ver que sempre teremos um número constante de infectados e suscetíveis na população.

# 3 Conclusão

Com o estudo matemático de diferentes modelos de Equações Diferenciais Ordinárias que descrevem epidemias podemos ter uma noção de como diferentes doenças podem se propagar em uma população, alem de conseguirmos analisar o impacto que ela terá dentro da população e como se comportará. A importância do estudo desses modelos é no combate e controle da propagação da epidemia, além de conseguirmos saber o quanto ela irá afetar a população em diferentes cenários, nos permitindo agir de maneira efetiva contra uma epidemia.

# 4 Apêndice

Os códigos utilizados no trabalho foram feitos na linguagem R e retirados de [5].

Código para os gráficos do campo de vetores do modelo SIR.

```
library(deSolve)
library(phaseR)
#definicao do sistema SIR bidimensional
sirm = function(t, y, parameters) {
  S = y[1]
  I = y[2]

  beta = parameters["beta"]
  gamma = parameters["gamma"]

  dS = -beta * S * I
  dI = beta * S * I - (gamma) * I
  res = c(dS, dI)
  list(res)
}
#parameters  = c(beta =  0.2, gamma = 0.5)
#parametros e condicoes iniciais
parameters  = c(beta =  4, gamma = 2)

y = c(S = 0.1, I = 1)
y = c(S = 0, I = 1)
y = c(S = 0.19, I = 0.999)
y = c(S = 0.35, I = 0.90)
y = c(S = 0.45, I = 0.90)
y = c(S = 0.995, I = 0.01)
y = c(S = 0.6, I = 0.1)
y = c(S = 0.777, I = 0.4)


#Plot campo de vetores
fld = flowField(sirm, xlim = c(0,1.2),
                ylim = c(0,1), parameters, system = "two.dim",
                add = FALSE, ylab = "I", xlab = "S")

#Add solucoes
out = as.data.frame(ode(y, times =  seq(0, 52*100, by = 1), func = sirm
   , parms = parameters))

lines(out$S, out$I, col = "black")

#Add S-isoclina

#Add I-isoclina
icline = (parameters["gamma"]/parameters["beta"])
lines(rep(icline, 2), c(0,1), col = "red")
```

```
curve(0*x, 0, 1, xlab = "S", ylab = "I", add = TRUE, col = "blue")

#legenda

legend("topright", legend = c("Solucoes", "Nuloclinas", "Equilibrios"),
       lty = c(1, 1, 1), col = c("Black", "red", "blue"))
```

Código para a simulação do modelo SIR

```
library(deSolve)

sirmod = function(t, y, parms) {
  # Pull state variables from y vector
  S = y[1]
  I = y[2]
  R = y[3]

  # Pull parameter values from parms vector

  beta = parms["beta"]
  gamma = parms["gamma"]

  #Define equations

  dS = -beta * S * I
  dI = beta * S * I - gamma * I
  dR = gamma * I
  res = c(dS, dI, dR)

  # Return list of gradients
  list(res)
}

times = seq(0, 60, by = 1/10)
parms = c(beta = 0.6, gamma = 0.1)
start = c(S = 1, I = 0.01, R = 0)

out = ode(y = start, times = times, func = sirmod,
          parms = parms)
out=as.data.frame(out)

#plota os suscetiveis
plot(x = out$time, y = out$S, ylab = "Fracao",
     xlab = "Tempo", type = "l")
#plota os infectados
lines(x = out$time, y = out$I, col = "red")
#plota os recuperados
```

```
lines(x = out$time, y = out$R, col = "green")

legend("topright", legend = c("Suscetiveis", "Infectados", "Recuperados
    "),
        lty = c(1, 1, 1), col = c("Black", "red", "green"))
```

Código para os gráficos do campo de vetores do modelo SIR com perda de imunidade.

```
library(deSolve)
library(phaseR)
#definicao do sistema SIR com perda de imunidade bidimensional
simod = function(t, y, parameters) {
  S = y[1]
  I = y[2]

  beta = parameters["beta"]
  rho = parameters["rho"]
  gamma = parameters["gamma"]

  dS = -beta * S * I + rho * (1 - S - I)
  dI = beta * S * I - (gamma) * I
  res = c(dS, dI)
  list(res)
}


parameters  = c(rho = 0.10, beta =  0.9,
                gamma = 0.2)

y = c(S = 0.999, I = 0.001)
y = c(S = 1, I = 0.5555)
y = c(S = 0.2, I = 0.1)
y = c(S = 0.6666, I = 0.999)


#Plot campo de vetores
fld = flowField(simod, xlim = c(0,1.2),
                ylim = c(0,1), parameters, system = "two.dim",
                add = FALSE, ylab = "I", xlab = "S")
#Add solucoes
out3 = as.data.frame(ode(y, times =  seq(0, 52*100, by = 1), func =
    simod, parms = parameters))

lines(out3$S, out3$I, col = "red")

#Add S-isoclina
curve((parameters["rho"] - parameters["rho"]*x)/(parameters["rho"] +
```

```
   parameters["beta"]*x), 0, 1,
      xlab = "S", ylab = "I", add = TRUE)

#Add I-isoclina
icline = (parameters["gamma"]/parameters["beta"])
lines(rep(icline, 2), c(0,1), col = "blue")
curve(0*x, 0, 1, xlab = "S", ylab = "I", add = TRUE, col = "blue")

#legenda
legend("topright", legend = c("Solucoes", "nuloclinas de S", "
   Nuloclinas de I"),
       lty = c(1, 1, 1), col = c("red", "black", "blue"))
```

Código para a simulação do modelo SIR com perda de imunidade

```
library(deSolve)
sirsmod = function(t, y, parms) {
  # Pull state variables from y vector
  S = y[1]
  I = y[2]
  R = y[3]

  # Pull parameter values from parms vector

  beta = parms["beta"]
  gamma = parms["gamma"]
  rho = parms["rho"]

  #Define equations

  dS = -beta * S * I + rho * R
  dI = beta * S * I - gamma * I
  dR = gamma * I - rho * R
  res = c(dS, dI, dR)

  # Return list of gradients
  list(res)
}

times = seq(0, 60, by = 1/10)
parms = c(rho = 0.10, beta = 0.9, gamma = 0.2)
start = c(S = 1, I = 0.01, R = 0.001)

out = ode(y = start, times = times, func = sirsmod,
          parms = parms)
out=as.data.frame(out)
```

```
#plota os suscetiveis
plot(x = out$time, y = out$S, ylab = "Fracao",
     xlab = "Tempo", type = "l")
#plota os infectados
lines(x = out$time, y = out$I, col = "red")
#plota os recuperados
lines(x = out$time, y = out$R, col = "green")

legend("topright", legend = c("Suscetiveis", "Infectados", "Recuperados
   "),
       lty = c(1, 1, 1), col = c("Black", "red", "green"))
```

# Referências Bibliográficas


[1] LÓPES-FLOREZ, Marlon; MARCHESIN, Dan; MATOS, Vitor e SCHECTER, Stephen. *Equações diferenciais e modelos epidemiológicos*, 33° Colóquio Brasileiro de Matemática: IMPA, 2021.

[2] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[3] Shil, Pratip. *Mathematical modeling of viral epidemics: A review*, Biomedical Research Journal 3.2 (2016): 195.

[4] Dr Julia Collins and Nadia Abdelal. *Spread of Disease,*. Disponível em:`https://calculate.org.au/wp-content/uploads/sites/15/2018/10/spread-of-disease.pdf`.

[5] Epirecipes. *A cookbook of epidemiological models in R, Python, Julia (and more)*. Disponível em: `http://epirecip.es/epicookbook/chapters/ob18/c2/r`.

[6] Hirsch, Morris W., Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.

# INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL

LEONARDO DE ALMEIDA CARVALHO
*Estudante*

PAULO ANTONIO LIBONI FILHO
*Orientador(a)*

## RESUMO

Estudar a teoria de sequências e séries, além de dedicar esforços nos estudos sobre topologia da reta e limites de funções reais. Mais especificamente, trabalhar com sequências e séries de Cauchy, sequências monótonas, convergentes e divergentes e as estruturas que compõem a reta dos reais. Como resultado, esperamos gerar uma base de aprendizado para que seja possível aplicar o conhecimento adquirido nos estudos e pesquisas posteriores.
**Palavras-chave:** Sequências e séries, topologia, funções reais e reta real.

## ABSTRACT

Studying the theory of sequences and series, in addition to dedicating efforts to studies on topology of the real line and limits of real functions. More specifically, working with sequences and Cauchy series, monotonic, converging and diverging sequences and the structures that make up the line of real numbers. As a result, we hope to generate a learning base so that it is possible to apply the knowledge acquired in the future studies.
**Keywords:** Sequences and series, topology, real functions and real line.

# 1 Sequências e Séries de Números Reais

## Introdução

Intuitivamente, devemos imaginar uma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de números reais como uma sequência de pontos da reta e seu limite como um ponto do qual os pontos $x_n$, tomados arbitrariamente, tornam-se e permanecem próximos, contanto que se tome o índice $n$ suficientemente grande.

Antes de dar continuidade no estudo de sequências e séries, é importante relembrar dois resultados, previamente estudados:

**Teorema 1.1.** *Sejam $x$, $a$ elementos de um corpo ordenado $K$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i)* $-a \leq x \leq a$;

*(ii)* $x \leq a$ e $-x \leq a$;

*(iii)* $|x| \leq a$.

*Demonstração.* $-a \leq x \leq a \Leftrightarrow [-a \leq x \text{ e } x \leq a] \Leftrightarrow [a \geq x \text{ e } a \geq -x] \Leftrightarrow a \geq |x|$. □

**Corolário 1.1.** *Dados $a, x, \epsilon \in \mathbb{R}$, com $\epsilon > 0$, tem-se $|x - a| < \epsilon$ se, e somente se, $a - \epsilon < x < a + \epsilon$.*

**Teorema 1.2.** *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado.*

*Demonstração.* $(\Rightarrow)$ Com efeito, seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto infinito, segue da definição de conjuntos infinitos que $X \neq \emptyset$ e, além disso, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \to X$. Isto é, dada $f : I_n \to X$ e seja $p = f(1) + \cdots + f(n)$. Então $p > f(x)$ para todo $x \in I_n$, donde $p \notin f(I_n)$. Em outras palavras, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe algum $p \in X$ tal que $p > n$ e, sendo assim, $X$ é ilimitado.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{N}$ ilimitado, segue da definição de conjuntos ilimitados que, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe sempre algum $x \in X$ tal que $x > n$. Desse modo, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \to X$ e, portanto, $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

□

## 1.1 Sequências

**Definição 1.1.** Uma *sequência de números reais* é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será indicado por $x_n$ e chamado o termo de ordem $n$, ou $n$-ésimo termo da sequência. Além disso, escreveremos $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente $(x_n)$, para indicar a sequência $x$.

Não se deve confundir a sequência $x$ com o conjunto $x(\mathbb{N})$ dos seus termos. Para este conjunto, usaremos a notação $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. A função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não é necessariamente injetiva, pois podemos ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$. Em particular, apesar da notação, o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ pode ser finito, ou até mesmo reduzir-se a um único elemento, como é o caso de uma sequência constante, em que $x_n = a \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando nós temos a sequência $(x_n)$ injetiva, isto é, $m \neq n$ implicar $x_m \neq x_n$, diremos que ela é uma sequência de termos dois a dois distintos.

Diz-se que uma sequência $(x_n)$ é *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existem reais $a, b$ tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que todos os termos da sequência devem pertencer ao intervalo $[a, b]$.

Todo intervalo $[a, b]$ está contido em um intervalo simétrico $[-c, c]$, com $c > 0$. Basta tomarmos $c = \max\{|a|, |b|\}$. Como $x_n \in [-c, c]$ é equivalente a $|x_n| \leq c$, segue-se que uma sequência $(x_n)$ é limitada se, e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $(x_n)$ é limitada se, e somente se, $(|x_n|)$ é limitada.

Quando uma sequência $(x_n)$ não é limitada, diz-se que ela é *ilimitada*.

Uma sequência $(x_n)$ diz-se *limitada superiormente* quando existe um número real $b$ tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que todos os termos $x_n$ pertencem à semi-reta $(-\infty, b]$. Analogamente, diz-se que $(x_n)$ é *limitada inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$ (ou seja, $x_n \in [a, +\infty)$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Evidentemente, uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma *subsequência* $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ é a restrição da função $x$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$.

*Exemplo* 1.1. Dada a sequência $x_n = \dfrac{1}{n}$, temos as seguintes subsequências:

- $(x_{2n}) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \dots, \dfrac{1}{2n}, \dots\right)$;
- $(x_{2n-1}) = \left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \dots, \dfrac{1}{2n-1}, \dots\right)$.

*Observação* 1.1. Estritamente falando, uma subsequência $x'$ não é uma sequência, pois seu domínio $\mathbb{N}'$ não é necessariamente igual a $\mathbb{N}$. Mas é trivial considerar $x'$ como uma função definida em $\mathbb{N}$, o que nos permite usar a notação $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$.

Uma sequência $(x_n)$ é denominada *crescente* se, para todo número natural $n$, $x_n < x_{n+1}$, isto é, $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$. Se valer $x_n \leq x_{n+1}$, a sequência diz-se *não-decrescente*.

Analogamente, uma sequência $(x_n)$ é denominada *decrescente* se, para todo natural $n$, $x_n > x_{n+1}$, ou seja, $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$. Se valer $x_n \geq x_{n+1}$, a sequência diz-se *não-crescente*.

Sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são identificadas como sequências *monótonas*. Além disso, é importante notar que uma sequência não-decrescente é sempre limitada inferiormente pelo seu primeiro termo. Equivalentemente, uma sequência não-crescente é sempre limitada superiormente.

Para que uma sequência monótona seja limitada é necessário (e suficiente) que ela possua uma subsequência limitada. Com efeito, seja $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \cdots \leq x_{n_k} \leq \cdots \leq b$ uma subsequência limitada da sequência não-decrescente $(x_n)$, ou seja, a subsequência $x' \in (x_{n_1}, b)$. Sendo assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe um $n_k > n$ e, portanto, $x_n \leq x_{n_k} \leq b$. Logo, $x_n \leq b$ para todo $n$ e, consequentemente, a sequência $(x_n)$ é limitada.

*Exemplo* 1.2. Dada a sequência $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ e seja $x_{n_k}$ a subsequência tal que $x_{n_k} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ para todo $n$ ímpar, isto é, $x_{n_k} = \left(0, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{8}{9}, \dots\right)$. Note que esta é uma subsequência limitada, pois $x_{n_k} \in (0,1)$. E como, para todo $n \in \mathbb{N}$, existirá sempre um $n_k > n$, segue que $x_n < x_{n_k} < 1$. Logo, $x_n < 1$ para todo $n$ e, consequentemente, a sequência $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ é limitada.

*Exemplo* 1.3. A sequência constante $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ é limitada, pois $x(\mathbb{N}) = \{1\}$, não-decrescente e também não-crescente.

*Exemplo* 1.4. $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é a aplicação de inclusão. Obtém-se a sequência $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$ que é limitada inferiormente, ilimitada superiormente e monótona crescente.

*Exemplo* 1.5. $x_n = 0$ para $n$ par e $x_n = 1$ para $n$ ímpar. A sequência assim definida é $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. Seu conjunto de valores é $x(\mathbb{N}) = \{0, 1\}$. Ela é limitada e não é monótona.

*Exemplo* 1.6. $x_n = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos a sequência $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots\right)$, monótona decrescente e limitada.

*Exemplo* 1.7. Seja $x_n = \sqrt[n]{n}$. Trata-se de uma sequência de números positivos, portanto limitada inferiormente. Vejamos se é monótona: para que seja $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ é necessário e suficiente que $n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow n \cdot n^n > (n+1)^n \Leftrightarrow n > \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Isto de fato ocorre para todo $n \geq 3$, pois sabemos que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$, seja qual for $n$. Assim, concluímos que a sequência dada por $\sqrt[n]{n}$ é decrescente a partir do seu terceiro termo. Note que $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, logo ela cresce em seus três primeiros termos, só então começando a decrescer. Assim, $(\sqrt[n]{n})$ é limitada.

## 1.2 Limite de uma sequência

**Definição 1.2.** Um número real $a$ é *limite* da sequência $(x_n)$ de números reais, e escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, quando para cada número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \epsilon$.

Assim, dizer que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, significa (por definição) que, para todo número real $\epsilon > 0$, existe um número natural $n_0$ tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \epsilon$.

*Observação* 1.2. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, então qualquer intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ de centro $a$ e raio $\epsilon > 0$, contém todos os termos $x_n$ da sequência, com exceção, no máximo, de um número finito de índices $n$. Com efeito, dado o intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Ou seja, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Assim, fora do intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ só poderão estar, no máximo, os termos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Reciprocamente, se qualquer intervalo de centro $a$ contém todos os $x_n$, salvo talvez para um número finito de índices $n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Com efeito, dado qualquer $\epsilon > 0$, o intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ conterá todos os $x_n$, exceto para um número finito de índices $n$. Seja $n_0$ o maior índice $n$ tal que $x_n \notin (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Então $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$, ou seja, $|x_n - a| < \epsilon$. Isto mostra que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Quando $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, afirma-se que a sequência $(x_n)$ *converge* para $a$, ou *tende* para $a$ e escrevemos $x_n \to a$. Uma sequência que possui limite chama-se *convergente*. Caso contrário, ela se chama *divergente*.

**Teorema 1.3** (Unicidade do limite). *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$*, então* $a = b$*.*

*Demonstração.* Seja $\lim x_n = a$ e suponha que $b \neq a$. Tomemos $\epsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$, segue que $\epsilon > 0$ e os intervalos $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ e $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ são disjuntos. Ora, como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ e, portanto, $x_n \notin (b-\epsilon, b+\epsilon)$ para todo $n > n_0$. Logo, não é possível ter $\lim x_n = b$. E assim, dado qualquer número real $b \neq a$, não existe $\lim x_n = b$. $\square$

**Teorema 1.4.** *Se* $\lim x_n = a$*, então toda subsequência de* $(x_n)$ *converge para o limite* $a$*.*

*Demonstração.* Suponhamos que $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ seja uma subsequência de $(x_n)$. Como $\lim x_n = a$, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_{k_0} > n_0$. Então $n_k > n_{k_0} \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \epsilon$. Logo, segue-se que $\lim x_{n_k} = a$ $\square$

**Corolário 1.2.** *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$*, então, para todo* $k \in \mathbb{N}$*,* $\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = a$*. Com efeito,* $(x_{1+k}, x_{2+k}, \ldots, x_{n+k}, \ldots)$ *é uma subsequência de* $(x_n)$*.*

*Observação* 1.3. Há duas aplicações especialmente úteis dos Teoremas 1.3 e 1.4 (conjuntamente). Uma delas é para mostrar que uma certa sequência $(x_n)$ não converge: basta obter duas subsequências de $(x_n)$ com limites distintos. A outra é para determinar o limite de uma sequência $(x_n)$ que, a priori, se sabe que converge: basta determinar o limite de alguma subsequência.

**Teorema 1.5.** *Toda sequência convergente é limitada.*

*Demonstração.* Seja $\lim x_n = a$. Então, tomando $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Consideremos o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Sejam $c$ o menor e $d$ o maior elemento de $F$. Então todos os termos $x_n$ da sequência estão contidos no intervalo $[c, d]$ e, por isso, a sequência é limitada. $\square$

**Teorema 1.6.** *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência monótona não-decrescente limitada. Tomemos $a = \sup\{x_n; n = 1, 2, \ldots\}$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, como $a - \epsilon < a$, segue que o número $a - \epsilon$ não pode ser uma cota superior do conjunto dos $x_n$. Consequentemente, existe pelo menos um $x_n$ maior do que $a - \epsilon$. Em outras palavras, $a - \epsilon < x_n$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)$ é não-decrescente, segue que $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \epsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$ para todo $n$, é evidente que $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Desse modo, temos de fato $\lim x_n = a$, como queríamos demonstrar. $\square$

*Observação* 1.4. Se $(x_n)$ fosse não-crescente, o limite seria a maior das cotas inferiores e teríamos $\lim x_n = \inf\{x_n; n = 1, 2, \ldots\}$.

**Corolário 1.3.** *Se uma sequência monótona $(x_n)$ possui uma subsequência convergente, então $(x_n)$ é convergente. Com efeito, neste caso a sequência monótona $(x_n)$ é limitada porque possui uma subsequência limitada.*

*Exemplo* 1.8. Toda sequência constante $(a, a, \ldots, a, \ldots)$ é evidentemente convergente e tem limite $a$.

*Exemplo* 1.9. A sequência $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ não converge porque não é limitada.

*Exemplo* 1.10. A sequência $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ é divergente, pois admite duas subsequências (constantes) que convergem para limites diferentes.

*Exemplo* 1.11. A sequência $(1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots)$ não é convergente porque é ilimitada.

## 1.3 Propriedades aritméticas dos limites

**Teorema 1.7.** *Se* $\lim x_n = 0$ *e* $(y_n)$ *é uma sequência limitada, então* $\lim x_n y_n = 0$ *(mesmo que não exista* $\lim y_n$*).*

*Demonstração.* Existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, como $\lim x_n = 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \dfrac{\epsilon}{c}$ . Logo, $n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \dfrac{\epsilon}{c} \cdot c = \epsilon$. Isto mostra que $x_n y_n \to 0$. □

*Exemplo* 1.12. Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n} = 0$. Com efeito, $\dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n} = \operatorname{sen}(nx)\dfrac{1}{n}$, com $|\operatorname{sen}(nx)| \leq 1$ e $\dfrac{1}{n} \to 0$.

**Teorema 1.8.** *Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$.*

1. *$\lim x_n + y_n = a + b$, $\lim x_n - y_n = a - b$.*

2. *$\lim x_n \cdot y_n = a \cdot b$.*

3. *$\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ se $b \neq 0$.*

*Demonstração.*

1. Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$. Logo, $n > n_0$ implica: $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Isto prova que $\lim x_n + y_n = a + b$. Analogamente, prova-se que $\lim x_n - y_n = a - b$.

2. Veja, temos que $x_n \cdot y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$. Ora, $(x_n)$ é uma sequência limitada e $\lim(y_n - b) = 0$. Logo, $\lim[x_n(y_n - b)] = 0$. Pelo mesmo motivo, $\lim[(x_n - a)b] = 0$. Assim, segue de 1 que $\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a)b] = 0$, donde $\lim x_n \cdot y_n = a \cdot b$.

3. Primeiramente, observemos que $y_n b \to b^2$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n b > \dfrac{b^2}{2}$. (Basta tomar $\epsilon = \dfrac{b^2}{2}$ e achar o $n_0$ correspondente.) Segue-se que, para todo $n > n_0$, $\dfrac{1}{y_n b}$ é um número (positivo) inferior a $\dfrac{2}{b^2}$. Logo, a sequência $\dfrac{1}{y_n b}$ é limitada. Ora, temos $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{bx_n - ay_n}{y_n b} = (bx_n - ay_n)\dfrac{1}{y_n b}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty}(bx_n - ay_n) = ab - ab = 0$, segue do Teorema 1.7 que $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right) = 0$. Portanto, $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

□

*Exemplo* 1.13. Examinaremos a sequência dos números reais positivos $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, onde $a > 0$. Ela é decrescente se $a > 1$ e crescente se $0 < a < 1$, sendo limitada em qualquer hipótese. Existe portanto $l = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$. Podemos garantir que $l > 0$. (Com efeito, se $0 < a < 1$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $l = \sup\{a^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}\} \geq a$. Se for $a > 1$, então $a^{\frac{1}{n}} > 1$ para todo $n$, logo $l = \inf a^{\frac{1}{n}} \geq 1$.) Afirmamos que $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$. Para provar isto, basta considerar a subsequência $(a^{\frac{1}{n(n+1)}}) = (a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{6}}, a^{\frac{1}{12}}, \ldots)$. Podemos escrever

$$l = \lim a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{(n+1)}}} = \frac{\lim a^{\frac{1}{n}}}{\lim a^{\frac{1}{(n+1)}}} = \frac{l}{l} = 1.$$

**Teorema 1.9** (Permanência do sinal)**.** *Se* $\lim x_n = a > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$. *(Se uma sequência tem limite positivo, então a partir de um certo índice todos os seus termos são positivos.)*

*Demonstração.* Seja $\epsilon = \dfrac{a}{2} > 0$. Então $(a - \epsilon, a + \epsilon) = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$, ou seja, $x_n > \dfrac{a}{2}$. Assim $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$. $\square$

*Observação* 1.5. Analogamente, podemos demonstrar que se $\lim x_n = b < 0$, então a partir de uma certa ordem, todos os termos $x_n$ são negativos.

**Corolário 1.4.** *Sejam* $(x_n)$ *e* $(y_n)$ *sequências convergentes. Se* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim x_n \leq \lim y_n$. *Com efeito, se fosse* $\lim x_n > \lim y_n$, *então teríamos* $0 < \lim x_n - \lim y_n = \lim(x_n - y_n)$ *e, com isso, teríamos* $x_n - y_n > 0$ *para todo* $n$ *suficientemente grande.*

**Corolário 1.5.** *Seja* $(x_n)$ *convergente. Se* $x_n \geq a$ *para todo* $n$, *então* $\lim x_n \geq a$.

**Teorema 1.10** (Teorema do Confronto)**.** *Sejam* $x_n \geq z_n \geq y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lim x_n = \lim y_n = a$, *então* $\lim z_n = a$.

*Demonstração.* Dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $n > n_2 \Rightarrow y_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Pondo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, vemos que $n > n_0$ implica $a - \epsilon < x_n < z_n < y_n < a + \epsilon$, donde $\lim z_n = a$. $\square$

## 1.4 Subsequências

Podemos reescrever a definição de limite da seguinte maneira: um número $a$ é limite de uma sequência $x = (x_n)$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $x^{-1}(a-\epsilon, a+\epsilon) = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)\}$ tem complementar finito em $\mathbb{N}$. Equivalentemente, podemos dizer que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Será mostrado agora que $a \in \mathbb{R}$ é limite de uma subsequência de $(x_n)$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $x^{-1}(a - \epsilon, a + \epsilon) = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)\}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

**Teorema 1.11.** *A fim de que* $a \in \mathbb{R}$ *seja limite de uma subsequência de* $(x_n)$, *é necessário e suficiente que, para todo* $\epsilon > 0$, *exista uma infinidade de índices* $n$ *tais que* $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

*Demonstração.* De fato, seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$ um subconjunto dos números naturais tal que $a = \lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n$. Desse modo, para cada $\epsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i > i_0 \Rightarrow x_{n_i} \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Como há uma infinidade de índices $i > i_0$, segue-se que existem infinitos $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $x_{n_i} \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Reciprocamente, suponhamos que, para cada $\epsilon > 0$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)\}$ seja infinito. Tomando sucessivamente $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ vamos obter um conjunto $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \dots\}$ tal que $a = \lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n$. Com efeito, seja $n_1 \in \mathbb{N}'$ tal que $x_{n_1} \in (a-1, a+1)$. Supondo, por indução, que $n_1 < n_2 < \cdots < n_i$ foram definidos de modo que $x_{n_2} \in \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$, $x_{n_3} \in \left(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3}\right)$, $\dots$, $x_{n_i} \in \left(a - \frac{1}{i}, a + \frac{1}{i}\right)$, observamos que o conjunto $\left\{n \in \mathbb{N}; x_n \in \left(a - \frac{1}{i+1}, a + \frac{1}{i+1}\right)\right\}$ é infinito, logo contém algum inteiro $n_{i+1}$ maior do que $n_1, n_2, \dots, n_i$. Isto completa a definição indutiva de $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \dots\}$. Como $|x_{n_i} - a| < \frac{1}{i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{i \to +\infty} x_{n_i} = a$, ou seja, $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = a$. Vemos, assim, que $a$ é limite de uma subsequência de $(x_n)$. □

Dizemos que um número real $a$ é *valor de aderência* de uma sequência $(x_n)$ quando $a$ é limite de alguma subsequência de $(x_n)$.

*Exemplo* 1.14. Se $\lim x_n = a$, então $a$ é valor de aderência de $(x_n)$ e, segue do Teorema 1.4 que, $a$ é o único valor de aderência de $(x_n)$.

*Exemplo* 1.15. A sequência $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ tem 0 como seu único valor de aderência, embora não seja convergente.

*Exemplo* 1.16. A sequência $(0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ tem como valores de aderência 0 e 1.

*Exemplo* 1.17. Qualquer que seja o número real $a$, existem infinitos números racionais no intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Segue-se então do Teorema 1.9 que, dada uma enumeração arbitrária $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ dos números racionais, todo número real é valor de aderência da sequência $(r_n)$.

*Exemplo* 1.18. Seja $x_n = n$. A sequência $(x_n)$ não possui valores de aderência.

Imagine agora uma sequência $(x_n)$ limitada de números reais. Mostraremos que o conjunto dos valores de aderência de $(x_n)$ não é vazio, que entre eles há um valor que é o menor de todos e outro que é o maior, e que a sequência converge, se só se, possui apenas um único valor de aderência. Num sentido natural, o maior e o menor valor de aderência são generalizações do limite para o caso de sequências limitadas que podem não ser convergentes. Passemos à discussão formal.

Seja $(x_n)$ uma sequência limitada; digamos, com $\alpha \geq x_n \geq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Temos $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \dots$ Logo, pondo $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$, vem

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta.$$

Existem, portanto, os limites

$$a = \lim a_n = \sup a_n = \sup \inf X_n,$$
$$b = \lim b_n = \inf b_n = \inf \sup X_n.$$

Escrevemos $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$, dizemos que $a$ é o *limite inferior* e que $b$ é o *limite superior* da sequência $(x_n)$. Evidentemente, tem-se $\liminf x_n \geq \limsup x_n$.

*Exemplo* 1.19. Seja $x_n = (-1)^n$, isto é, a sequência $(-1, +1, -1, +1, -1, \dots)$. Logo, $a_n = \inf X_{2n-1} = -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $a = \lim a_n = \liminf x_n = -1$. De forma análoga, obtemos que $\limsup x_n = +1$.

**Teorema 1.12.** *Seja $(x_n)$ uma sequência limitada. Então $\liminf x_n$ é o menor valor de aderência e $\limsup x_n$ é o maior valor de aderência de $(x_n)$.*

*Demonstração.* Primeiramente, vamos provar que $a = \liminf x_n$ é valor de aderência de $(x_n)$. Para este fim, usaremos o Teorema 1.11. Dados arbitrariamente $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, mostraremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ e $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Como $a = \lim a_n$, existe $n_1 > n_0$ tal que $a - \epsilon < a_{n_1} < a + \epsilon$. Como $a_{n_1} = \inf X_{n_1}$, segue-se da última desigualdade que $a + \epsilon$ (sendo maior que $a_{n_1}$) não é cota inferior de $X_{n_1}$. Logo existe $n \geq n_1$ tal que $a_{n_1} \leq x_n < a + \epsilon$. Isto nos dá $n > n_0$ com $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, como queríamos. Resta mostrar, agora, que nenhum número $c < a$ pode ser valor de aderência de $(x_n)$. Ora, como $a = \lim a_n$, segue-se de $c < a$ que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c < a_{n_0} < a$. Como $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, concluímos que $n \geq n_0 \Rightarrow c < a_{n_0} \leq x_n$. Pondo $\epsilon = a_{n_0} - c$, vemos que $c + \epsilon = a_{n_0}$, logo o intervalo $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ não contém termo $x_n$ algum com $n \geq n_0$. Isto exclui a possibilidade de $c$ ser valor de aderência de $(x_n)$.

Seja agora $b = \lim b_n$, existe $n_1 > n_0$ tal que $b - \epsilon < b_{n_1} < b + \epsilon$. Como $b_{n_1} = \sup X_{n_1}$, segue-se da última desigualdade que $b - \epsilon$ (sendo menor que $b_{n_1}$) não é cota superior de $X_{n_1}$. Logo existe $n \geq n_1$ tal que $b - \epsilon < x_n \leq b_{n_1}$. Isto nos dá $n > n_0$ com $b - \epsilon < x_n < b + \epsilon$, como queríamos. Resta mostrar que nenhum número $d > b$ pode ser valor de aderência de $(x_n)$. Ora, como $b = \lim b_n$, segue-se de $d > b$ que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b \leq b_{n_0} < d$. Como $b_{n_0} = \sup X_{n_1}$, concluímos que $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \leq b_{n_0} < d$. Pondo $\epsilon = d - b_{n_0}$, vemos que $d - \epsilon = b_{n_0}$, logo o intervalo $(d - \epsilon, d + \epsilon)$ não contém termo $x_n$ algum e, por isso, $d$ não é valor de aderência da sequência $(x_n)$. □

**Corolário 1.6.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Com efeito, sendo $a = \limsup x_n$ um valor de aderência, alguma subsequência de $(x_n)$ converge para $a$.*

**Corolário 1.7.** *Uma sequência limitada de números reais $(x_n)$ é convergente se, e somente se, $\liminf x_n = \limsup x_n$, isto é, se, e somente se, possui um único valor de* *aderência. De fato, se* $(x_n)$ *é convergente, então* $\liminf x_n = \limsup x_n = \lim x_n$. *Reciprocamente, suponhamos* $\liminf x_n = \limsup x_n = a$. *Ou seja,* $\lim a_n = \lim b_n = a$. *Assim, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a \leq b_{n_0} < a + \epsilon$. *Ora,* $n > n_0$ *implica* $a_{n_0} \leq x_n \leq b_{n_0}$. *Logo,* $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ *e, portanto,* $\lim x_n = a$.

*Exemplo* 1.20. Dada a seguinte sequência: $x_n = (0, 2, 0, 2, 0, \dots)$, segue-se que $a_n = \inf X_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $b_n = \sup X_{2n} = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $a = \lim a_n = \liminf x_n = 0$ e $b = \lim b_n = \limsup x_n = 2$. Isto é, $a$ é o menor e $b$ é o maior valor de aderência da sequência $(x_n)$. Em outras palavras, $a$ é o limite inferior e $b$ é o limite superior.

Dada uma sequência limitada $(x_n)$, sejam $a = \liminf x_n$ e $b = \limsup x_n$. Isto significa que existem subsequências de $(x_n)$ convergindo para $a$ e para $b$, mas não para um valor menor do que $a$ nem maior do que $b$. Se $a = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} x_n$, a subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ pode possuir uma infinidade de termos menores do que $a$. Mas, dado um número qualquer menor do que $a$, digamos, $a - \epsilon$, (com $\epsilon > 0$) não pode existir uma infinidade de índices $n$ tais que $x_n < a - \epsilon$, pois, neste caso, esses índices originariam uma subsequência de $(x_n)$, a qual possuiria um valor de aderência $c \leq a - \epsilon$, o que seria absurdo (pois $a$ é limite inferior). Analogamente, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow x_n < b + \epsilon$. Em outras palavras, dado qualquer intervalo aberto $(a - \epsilon, b + \epsilon)$ contendo o intervalo $[a, b]$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$) tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < b + \epsilon$. Evidentemente, a regra não basta apenas para $a = \liminf x_n$ e $b = \limsup x_n$: se todos os termos $x_n$ da sequência estiverem contidos num intervalo $[\alpha, \beta]$, então $\alpha - \epsilon < x_n < \beta + \epsilon$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$. Mas $[a, b]$ é o menor intervalo que cumpre a condição acima.

**Teorema 1.13.** *Sejam* $a = \liminf x_n$ *e* $b = \limsup x_n$*, onde* $(x_n)$ *é uma sequência limitada. Dado qualquer* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < b + \epsilon$. *Além disso,* $a$ *é o maior e* $b$ *é o menor número com essa propriedade.*

*Demonstração.* Vejamos, a primeira afirmação já foi provada acima. Resta mostrar que o intervalo $[a, b]$ é o menor intervalo com esta propriedade. Suponhamos que $c$ seja um número maior do que $a$. Tomando $\epsilon = (c - a)/2$, temos $a + \epsilon = c - \epsilon$. Como $a$ é valor de aderência de $(x_n)$, pois $a = \liminf x_n$, existe uma infinidade de índices $n$ tais que $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, e, portanto, $x_n < c - \epsilon$. Logo nenhum número $c > a$ goza da propriedade acima estipulada. Do mesmo modo, suponhamos agora $d < b$. Tomando $\epsilon = (b - d)/2$, segue que $d + \epsilon = b - \epsilon$. Como $b = \limsup x_n$, então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow b - \epsilon < x_n < b + \epsilon$ e, sendo assim, $d + \epsilon < x_n$. Logo, nenhum número $d < b$ goza da propriedade em questão. Isto conclui a demonstração. □

**Corolário 1.8.** *Se* $c < \liminf x_n$ *então existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_1 \Rightarrow c < x_n$. *Analogamente, se* $\limsup x_n < d$ *então existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < d$ *para todo* $n > n_2$.

*Com efeito, sendo* $a = \liminf x_n$, $c < a$ *significa* $c = a - \epsilon$, *com* $\epsilon > 0$. *Do mesmo modo,* $b = \limsup x_n$, *então* $b < d$ *significa* $d = b + \epsilon$, *com* $\epsilon > 0$.

**Corolário 1.9.** *Dada uma sequência limitada* $(x_n)$, *sejam* $a$ *e* $b$ *números com as seguintes propriedades: se* $c < a$ *então existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_1 \Rightarrow c < x_n$*; se* $b < d$ *então existe* $n_2$ *tal que* $n > n_2 \Rightarrow x_n < d$. *Nestas condições,* $a \leq \liminf x_n$ *e* $\limsup x_n \leq b$.

## 1.5 Sequências de Cauchy

Um resultado de grande importância é o Teorema 1.6, que nos enuncia o seguinte: "toda sequência monótona limitada é convergente", ou seja, podemos dizer, em certos casos, que uma sequência possui limite, ainda que não saibamos o valor desse limite. Mas é claro que muitas sequências convergentes não são monótonas, de modo que esse critério de convergência não é o melhor possível. Por exemplo, a sequência $\dfrac{(-1)^n}{n}$ não é monótona e converge para zero. Veremos a seguir o critério de Cauchy, que nos dará uma condição, não somente suficiente mas também necessária, para a convergência de uma sequência de números reais.

Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais. Ela se chama *sequência de Cauchy* quando admite a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real $\epsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \epsilon$.

Traduzindo em linguagem simples, a fim de que $(x_n)$ seja uma sequência de Cauchy, basta e exige-se que seus termos $(x_m)$ e $(x_n)$, para valores suficientemente grandes dos índices $m$, $n$, se aproximem arbitrariamente uns dos outros. É possível fazer uma comparação com a definição de limite, na qual se exige que os termos $(x_n)$ se aproximem arbitrariamente de um número real $a$ dado a priori. Aqui se impõe uma condição apenas sobre os termos da própria sequência.

**Teorema 1.14.** *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

*Demonstração.* Seja $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0 \Rightarrow |x_m - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Logo, $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$, o que mostra ser $(x_n)$ uma sequência de Cauchy. □

Intuitivamente, se $\lim x_n = a$, então, para valores grandes de $n$, é evidente que os termos $(x_n)$ se aproximam de $a$. Neste caso, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros.

**Teorema 1.15.** *Toda sequência de Cauchy de número reais é convergente.*

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que toda sequência de Cauchy é limitada. Vejamos, seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy. Então, tomando $\epsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$. Em particular, $n \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_0} - x_n| < 1$, ou seja, $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Sejam $\alpha$ o menor e $\beta$ o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0} - 1,\ x_{n_0} + 1\}$. Então $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo $(x_n)$ é limitada. Agora, dado $\epsilon > 0$, como $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Existe também, com suporte no Teorema 1.11, $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1} - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Isto mostra que $\lim x_n = a$. $\square$

*Exemplo* 1.21 (Método das aproximações sucessivas). Seja $0 \leq \gamma < 1$. Suponhamos que a sequência $(x_n)$ seja tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \gamma |x_{n+1} - x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy, e, portanto, converge. Com efeito, temos $|x_3 - x_2| \leq \gamma |x_2 - x_1|$, $|x_4 - x_3| \leq \gamma^2 |x_2 - x_1|$, e, em geral, $|x_{n+1} - x_n| \leq \gamma^{n-1} |x_2 - x_1|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que, para, $n, p \in \mathbb{N}$ arbitrários, vale:

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq (\gamma^{n+p-2} + \gamma^{n+p-3} + \cdots + \gamma^{n-1}) |x_2 - x_1| \\
&= \gamma^{n-1} (\gamma^{p-1} + \gamma^{p-2} + \cdots + \gamma + 1) |x_2 - x_1| \\
&= \gamma^{n-1} \cdot \frac{1 - \gamma^p}{1 - \gamma} \cdot |x_2 - x_1| \leq \frac{\gamma^{n-1}}{1 - \gamma} \cdot |x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\gamma^{n-1}}{1 - \gamma} \cdot |x_2 - x_1| = 0$, segue-se que, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 \leq \frac{\gamma^{n-1}}{1 - \gamma} \cdot |x_2 - x_1| < \epsilon$. Daí resulta que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$. (Pois podemos sempre supor $m \geq n$ e escrever $m = n + p$.)

*Exemplo* 1.22 (Aplicação do método das aproximações sucessivas para raiz quadrada). Seja $a > 0$. Definiremos uma sequência $(x_n)$ tomando $x_1 = c > 0$ arbitrariamente e pondo $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. Se conseguirmos provar que existe $b = \lim x_n$ e $b \neq 0$, deve ser necessariamente $b = \sqrt{a}$. De fato, fazendo $n \to \infty$ na igualdade que define $x_{n+1}$ em função de $x_n$, obtemos $b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right)$, ou seja, $b = \frac{a}{b}$ e, portanto, $b^2 = a$. Antes vejamos um resultado que nos será útil.

*Lema* 8.1. *Para todo $x > 0$, tem-se* $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$.

*Demonstração.* Multiplicando-se ambos os membros dessa desigualdade por 2 e elevando-a ao quadrado, é possível identificar que ela é equivalente a $x^2 + 2a + \frac{x^2}{a^2} > 2a$, o que é óbvio. $\square$

Segue-se do Lema que, para todo $n > 1$, temos $x_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$. Portanto $x_n \cdot x_{n+1} > \frac{a}{2}$, ou seja, $\frac{a}{2 \cdot x_n \cdot x_{n+1}} < 1$ para todo $n > 1$. Usaremos este fato para mostrar que a sequência

$(x_n)$ cumpre a condição $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$ para todo $n > 1$. Decorrerá então, do Exemplo 1.20, que existe $b = \lim x_n$ e, como $x_n \geq \sqrt{\dfrac{a}{2}}$ para todo $n > 1$, teremos $b \neq 0$. Ora, é claro que

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) + \frac{a}{2} \cdot \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n \cdot x_{n+1}}.$$

Logo, $\left|\dfrac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}\right| = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{2x_n \cdot x_{n+1}}\right| \leq \dfrac{1}{2}$, pois $0 < \dfrac{a}{2x_n \cdot x_{n+1}} < 1$. A fórmula de recorrência $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ fornece, portanto, aproximações sucessivas para $\sqrt{a}$.

## 1.6 Limites infinitos

Entre as sequências divergentes, é possível destacar um tipo que se comporta com certa regularidade, a saber, aquelas cujos valores se tornam e se mantém arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente.

Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais. Diremos que "$x_n$ tende para mais infinito", e escreveremos $\lim x_n = +\infty$ quando, para todo número real $A > 0$ dado arbitrariamente, pudermos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$. (Ou seja, para qualquer $A > 0$ dado, existe apenas um número finito de índices $n$ tais que $x_n \leq A$.)

*Exemplo* 1.23. Se $x_n = n$, então evidentemente $\lim x_n = +\infty$.

*Exemplo* 1.24. Seja $x_n = a^n$, com $a > 1$. Então $a = 1 + h, h > 0$. Dado $A > 0$, vemos que $a^n = (1 + h)^n > 1 + nh > A$ desde que se tome $n > \dfrac{A-1}{h}$. Assim, se escolhermos um inteiro $n_0 > \dfrac{A-1}{h}$, teremos $n > n_0 \Rightarrow a^n > A$. Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ se $a > 1$.

*Observação* 1.6. Mais geralmente, dada uma sequência não-decrescente $(x_n)$, ou ela é convergente (se for limitada) ou então, se for ilimitada, deve-se ter $\lim x_n = +\infty$. Com efeito, sendo $(x_n)$ ilimitada, dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} > A$. Como $(x_n)$ é não-decrescente, $n > n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0} > A$.

Evidentemente, se $\lim x_n = +\infty$, então $(x_n)$ é ilimitada superiormente mas é limitada inferiormente. Além disso, se $\lim x_n = +\infty$, então toda subsequência de $(x_n)$ também tende para $+\infty$.

De modo análogo, diz-se que $\lim x_n = -\infty$ quando dado arbitrariamente $A > 0$ pode-se encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$.

Como se vê facilmente, tem-se $\lim x_n = -\infty$ se, e somente se, $\lim -(x_n) = +\infty$. Portanto, se $\lim x_n = -\infty$, então $(x_n)$ é ilimitada inferiormente mas limitada superiormente. Assim, por exemplo, $x_n = (-1)^n \cdot n$ não tem limite $+\infty$ nem $-\infty$, pois é ilimitada nos dois sentidos. Por outro lado, a sequência $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots)$ é limitada inferiormente, ilimitada superiormente mas não tem limite igual a $+\infty$ porque possui uma subsequência constante.

Deve-se observar com toda ênfase que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais. As sequências $(x_n)$ para as quais $\lim x_n = +\infty$ ou $\lim x_n = -\infty$ não são convergentes. Estas notações servem apenas para dar informações sobre o comportamento das sequências para valores grandes de $n$.

**Teorema 1.16** (Operações aritméticas com limites infinitos)**.**

1. *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e* $(y_n)$ *é limitada inferiormente, então* $\lim(x_n + y_n) = +\infty$*.*

2. *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim x_n \cdot y_n = +\infty$*.*

3. *Seja* $x_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Então* $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$*.*

4. *Sejam* $(x_n)$ *e* $(y_n)$ *sequências de números positivos. Então:*

   (a) *Se existe* $c > 0$ *tal que* $x_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e se* $\lim y_n = 0$*, tem-se* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$*.*

   (b) *Se* $(x_n)$ *é limitada e* $\lim y_n = +\infty$*, então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$*.*

*Demonstração.*

1. Dado $A > 0$. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A - c$. Segue-se que $n > n_0 \Rightarrow x_n + y_n > A - c + c = A$, donde $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

2. Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > \dfrac{A}{c}$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow x_n \cdot y_n > (\dfrac{A}{c})c = A$ e, portanto, $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$.

3. Suponhamos $\lim x_n = 0$. Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < x_n < \dfrac{1}{A}$ e, portanto, $\dfrac{1}{x_n} > A$. Logo, $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$. Reciprocamente, se $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} > \dfrac{1}{\epsilon}$ e, portanto, $0 < x_n < \epsilon$. Segue-se que $\lim x_n = 0$.

4. (a) Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < y_n < \dfrac{c}{A}$. Então $n > n_0 \Rightarrow \dfrac{x_n}{y_n} > \dfrac{c}{\frac{c}{A}} = A$. Logo, $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$.

(b) Existe $k > 0$ tal que $x_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n > \frac{k}{\epsilon}$. Então $n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{x_n}{y_n} < \frac{k}{\frac{k}{\epsilon}} = \epsilon$, e assim, $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

□

Se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$, nada se pode dizer a respeito de $\lim(x_n + y_n)$. Dependendo do caso, pode ocorrer que a soma $x_n + y_n$ convirja, tenha limite $+\infty$, limite $-\infty$ ou não tenha limite algum. (Diz-se então que $\infty - \infty$ é indeterminado.)

*Exemplo* 1.25. Se $x_n = \sqrt{n+1}$ e $y_n = -\sqrt{n}$, então temos que $\lim x_n = +\infty$, $\lim y_n = -\infty$, enquanto

$$\lim(x_n + y_n) = \lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

*Exemplo* 1.26. Se $x_n = n^2$ e $y_n = -n$, temos $\lim(x_n + y_n) = \lim(n^2 - n) = \lim n(n-1) = +\infty$. Já $\lim(n - n^2) = -\infty$.

*Exemplo* 1.27. Seja $x_n = n$ e $y_n = (-1)^n - n$, temos $\lim x_n = +\infty$, $\lim y_n = -\infty$, enquanto $\lim(x_n + y_n) = \lim(-1)^n$ não existe.

Também $\frac{\infty}{\infty}$ é indeterminado. Isto quer dizer que se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = +\infty$, nada se pode dizer a respeito de $\lim \frac{x_n}{y_n}$. Dependendo do caso, o quociente $\frac{x_n}{y_n}$ pode convergir, pode-se ter $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$, ou pode não existir o limite.

*Exemplo* 1.28. Se $x_n = n + 1$ e $y_n = n - 1$, então $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{n+1}{n-1} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1$.

*Exemplo* 1.29. Se $x_n = n^2$ e $y_n = n$, temos $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim n = +\infty$.

*Exemplo* 1.30. Sejam $x_n = [2 + (-1)^n]n$ e $y_n = n$. Temos $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, mas $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim[2 + (-1)^n]$ não existe.

## 1.7 Séries numéricas

Nesta seção, estenderemos a operação da adição (até agora definida para um número finito de número reais) de modo a atribuir significado a uma igualdade do tipo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$, na qual o primeiro membro é uma "soma" com uma infinidade de parcelas. É claro que não tem sentido somar uma sequência infinita de números reais, o que o primeiro membro da igualdade acima exprime é o limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n})$.

Esta igualdade significa então que, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, a soma $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ difere de 1 por menos de $\epsilon$.

Definiremos, portanto, somas infinitas através de limites. Consequentemente, é de se esperar que algumas somas possam ser efetuadas (isto é, convirjam) e outras não, já que nem toda sequência possui limite. Em vez de "soma infinita" usaremos a palavra *série*.

**Definição 1.3.** Seja $(a_n)$ uma sequência de números reais, pensemos na soma de todos os seus termos, isto é, na soma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Como já visto previamente, chamamos essa soma infinita de série, e denotamos por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. A parcela $a_n$ é chamada o n-ésimo termo ou o termo geral da série. Entretanto, podemos entendê-la como o limite, caso exista, da sequência $s_1, s_2, s_3, \ldots$ em que

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Se esta sequência $(s_n)$, chamada de *sequência das reduzidas da série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, for convergente, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente (ou que ela converge) e denotamos

$$\lim s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nesse caso, dizemos, também, que o número $\lim s_n$ é a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Caso a sequência das reduzidas não seja convergente, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente (ou que diverge). Ainda nesse caso, se $\lim s_n = +\infty$ ou $\lim s_n = -\infty$, então escreveremos, respectivamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \text{ ou } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

*Tip.* As vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, que começam com $a_0$ em vez de $a_1$.

*Observação* 1.7. Toda sequência $(x_n)$ de números reais pode ser considerada como a sequência das reduzidas de uma série. Basta tomar $a_1 = x_1$ e $a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $a_1 + \cdots + a_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n$. A série $x_1 + \sum(x_{n+1} - x_n)$ assim obtida converge se, e somente se, a sequência $(x_n)$ é convergente. No caso afirmativo, a soma desta série é igual a $\lim x_n$. Assim falando, pode-se dar a impressão de que a teoria das séries coincide com a teoria dos limites de sequências. Isto não é verdade, pelo seguinte motivo: ao estudar a série cujas reduzidas são $s_n$, estaremos deduzindo suas propriedades a partir das diferenças $a_n = s_n - s_{n-1}$. Em vez de tomar como ponto de partida o comportamento dos números $s_n$, concentraremos a atenção sobre os termos $a_n$.

*Exemplo* 1.31. Seja $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$. Vamos definir $a_1 = x_1$, $a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, pensemos na série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots .$$

Calculando as primeiras reduzidas da série, isto é, $s_1, s_2, s_3, \ldots$, obtemos

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

ou ainda,

$$s_1 = x_1, s_2 = x_1 + (x_2 - x_1) = x_2, s_3 = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = x_3, \ldots, s_n = x_n.$$

Assim, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, a sequência $(x_n)$ é convergente. Mais estritamente, $\lim s_n$ converge se, e somente se, $\lim x_n$ converge, pois $\lim s_n = \lim x_n$.

**Teorema 1.17.** *Se* $\sum a_n$ *é uma série convergente, então* $\lim a_n = 0$.

*Demonstração.* Com efeito, seja $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, segue da definição de séries convergentes que existe $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Evidentemente, tem-se também $s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. Logo, $0 = s - s = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim s_n - s_{n-1} = \lim a_n$. $\square$

*Exemplo* 1.32. A recíproca do Teorema 1.17 é falsa. O contra-exemplo é dado pela série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Observe que o seu termo geral, $\dfrac{1}{n}$, tende para zero mas a série diverge. De fato, temos

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) > s, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} s &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $\lim s = +\infty$, segue-se que $\lim s_{2^n} = +\infty$ e, consequentemente, $\lim s_n = +\infty$.

*Exemplo* 1.33. Segue das propriedades aritméticas do limite de sequências que se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes, então a série $\sum(a_n + b_n)$ é convergente, com $\sum(a_n + b_n) =$

$\sum a_n + \sum b_n$. Se $\sum a_n$ converge, então, para todo $r$ real, tem-se $\sum(ra_n)$ convergente, com $\sum(ra_n) = r\sum a_n$. Finalmente, se $\sum a_n = s$ e $\sum b_n = t$ convergem, pondo $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + \cdots + b_n$, seque que $s \cdot t = \lim(s_n \cdot t_n) = \lim(a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_nb_n)$. Logo, a série $\sum c_n$, com $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_n b_j$, converge e vale a igualdade $\sum c_n = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$.

*Exemplo* 1.34. A série geral $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ é divergente, pois seu termo geral não tende a zero. Suas reduzidas de ordem ímpar são iguais a 1 e as de ordem par são iguais a zero.

*Exemplo* 1.35. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, onde $n_0 \in \mathbb{N}$ é fixado arbitrariamente. Com efeito, se as reduzidas da primeira série são $s_n$, as da segunda são $t_{n+1} = s_{n+n_0} - s_{n_0-1}$. Isto se exprime dizendo que o caráter de convergência de uma série não se altera se dela omitimos (ou a ela acrescentamos) um número finito de termos.

Uma série $\sum a_n$ pode divergir por dois motivos. Ou porque as reduzidas $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ são ilimitadas ou porque elas oscilam em torno de alguns valores de aderência. Quando os termos da série tem todos o mesmo sinal, esta última possibilidade não ocorre, pois, neste caso, as reduzidas forma uma sequência monótona.

**Teorema 1.18.** *Seja $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, as reduzidas $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ formam uma sequência limitada, isto é, se existe $k > 0$ tal que $a_1 + \cdots + a_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) De fato, suponhamos que $\sum a_n$ seja convergente, segue da definição que $\lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n) = s$ com $s \in \mathbb{R}$. Como $(s_n)$ é a sequência das reduzidas e aplicando a definição de limite, segue que existe $\epsilon > 0$ tal que $|s_n - s| < \epsilon$, ou ainda, $s - \epsilon < s_n < \epsilon + s$. Logo, existe $k = \epsilon + s > 0$ tal que $a_1 + \cdots + a_n < k$ e, por isso, a série converge.

($\Leftarrow$) Seja $s_n$ a sequência das reduzidas da série $\sum a_n$. Como, por hipótese, $s_n$ é limitada e $a_n \geq 0$, então a sequência $s_n$ é crescente e limitada, o que faz com que ela seja obrigatoriamente convergente para um número real s. Sendo assim, dada a definição de série, podemos escrever $\sum a_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n) = \lim s_n = s$. Logo, a série converge para uma soma de valor $s$.

$\square$

**Corolário 1.10** (Critério de comparação). *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c \cdot b_n$ para todo $n > n_0$, então a convergência de $\sum b_n$ implica a convergência de $\sum a_n$, enquanto que a divergência de $\sum a_n$ acarreta a de $\sum b_n$.*

*Exemplo* 1.36. Se $r > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^r}$ converge. Como os termos desta série são positivos, a sequência das suas reduzidas é crescente. Para provar que tal sequência é limitada, basta obter uma subsequência limitada. Tomaremos as reduzidas de ordem $m = 2^n - 1$. Para cada uma delas vale

$$s_m = 1 + (\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}) + (\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}) + \cdots + \frac{1}{2^{(n-1)r}}, \text{ e}$$

$$s_m < 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2^r}\right)^i.$$

Como $r > 1$, temos $\frac{2}{2^r} < 1$, logo a série geométrica $\sum \left(\frac{2}{2^r}\right)^n$ converge para uma soma $c$. Assim, $s_m < c$ para todo $m = 2^n - 1$. Concluímos que a série $\sum \frac{1}{n^r}$ é convergente quando $r > 1$.

Relembrando: seja $(x_n)$ uma sequência de números reais, ou seja, todos os seus termos pertencem ao conjunto $\mathbb{R}$. Ela se chama *sequência de Cauchy* quando admite a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real $\epsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \epsilon$.

**Teorema 1.19** (Critério de Cauchy para séries)**.** *A fim de que a série* $\sum a_n$ *seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada* $\epsilon > 0$, *exista* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$ *quaisquer que sejam* $n > n_0$ *e* $p \in \mathbb{N}$.

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, e que $(s_n)$ é a sequência das reduzidas de $\sum a_n$. Ora, basta aplicar o critério de Cauchy para sequências. Em outras palavras, a série dada satisfaz a desigualdade desejada se, e somente se, $(s_n)$ é de Cauchy. Conforme visto anteriormente no Teorema 1.14, uma sequência em $\mathbb{R}$ é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy. Nesse sentido, são equivalentes: a série $\sum a_n$ satisfaz a desigualdade desejada, a sequência $(s_n)$ é de Cauchy, $(s_n)$ converge e a série $\sum a_n$ converge. □

Uma série $\sum a_n$ chama-se *absolutamente convergente* quando $\sum |a_n|$ é uma série convergente.

*Observação* 1.8. Evidentemente, toda série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente. Mas nem toda série convergente é absolutamente convergente.

*Exemplo* 1.37. Um exemplo clássico de uma série $\sum a_n$ tal que $\sum |a_n| = +\infty$ é dado por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

Suas reduzidas de ordem par são:

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2}, s_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), s_6 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right), \ldots$$

Tem-se $s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2n} < \cdots$, pois cada par de parênteses encerra um número positivo. Enquanto isso, as reduzidas de ordem ímpar são

$$s_1 = 1, s_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), s_5 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right), \ldots$$

Portanto, $s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2n-1}$. Logo existem $s' = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ e $s'' = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}$. Como $s_{2n+1} - s_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} \to 0$, segue-se que $s' = s''$ ($= s$, digamos). Assim, $\lim s_n = s = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ . A série dada é convergente, mas não é absolutamente convergente, pois a série harmônica $\sum \dfrac{1}{n}$ é divergente.

Quando a série $\sum a_n$ é convergente, mas $\sum |a_n|$ é divergente, dizemos que $\sum a_n$ é *condicionalmente convergente.*

**Teorema 1.20.** *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

*Demonstração.* De fato, seja $\sum |a_n|$ convergente, segue da definição que dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$, para qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. Nestas condições, $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$ e, portanto, $\sum a_n$ converge, em virtude do Teorema 1.19. □

**Corolário 1.11.** *Seja $\sum b_n$ uma série convergente, com $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existem $k > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n| < k \cdot b_n$ para todo $n > n_0$, então a série $\sum a_n$ é (absolutamente) convergente.*

**Corolário 1.12.** *Se, para todo $n > n_0$, tem-se $|a_n| \leq k \cdot c^n$, donde $0 < c < 1$ e $k$ é uma constante positiva, então a série $\sum a_n$ é (absolutamente) convergente. Com efeito, sendo $0 < c < 1$, a série geométrica $\sum c^n$ converge.*

*Note que, tomando $k = 1$, a condição $|a_n| \leq c^n$ é equivalente a $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$. Além disso, dizer que esta condição é satisfeita para todo $n$ maior do que um certo $n_0$, significa afirmar que* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

**Corolário 1.13** (Teste da raiz)**.** *Se existe $c$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ para todo $n > n_0$, então $\sum a_n$ é (absolutamente) convergente. Em outras palavras, se* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *então a série $\sum a_n$ converge (absolutamente).*

*Às vezes acontece que existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Então vale o*

**Corolário 1.14.** *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *então a série $\sum a_n$ é (absolutamente) convergente.*

*Observação* 1.9. Se existe uma infinidade de índices $n$ para os quais $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, então a série $\sum a_n$ é evidentemente divergente porque seu termo geral não tende para zero. Em particular, isto ocorre quando $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Além disso, também existe o caso em que $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (juntamente com $a_n = 0$). Neste caso nada se pode dizer: a série talvez convirja, talvez não.

Resumindo, o **teste da raiz** possui as seguintes possibilidades:

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o teste da raiz é inconclusivo.

*Exemplo* 1.38. Consideremos $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$. Em ambos os casos $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. No entanto, a primeira destas séries é divergente e a segunda é convergente.

*Exemplo* 1.39. Consideremos a série $\sum n \cdot a^n$, onde $a$ é um número real tomado arbitrariamente. Temos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n \cdot a^n|} = |a| \cdot \lim \sqrt[n]{n} = |a|$. Logo esta série converge (absolutamente) quando $|a| < 1$. O mesmo resultado valeria se tomássemos $\sum n^2 \cdot a^n$ ou, mais geralmente, $\sum n^r \cdot a^n$, onde $r$ é qualquer constante. Evidentemente, se $|a| \geq 1$, a série diverge porque seu termo geral não tende para zero.

**Teorema 1.21** (Teste da razão)**.** *Sejam $\sum a_n$ uma série de termos todos não-nulos e $\sum b_n$ uma série convergente com $b_n > 0$ para todo $n$. Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n > n_0$, então $\sum a_n$ é (absolutamente) convergente.*

*Demonstração.* Tomando-se de maneira arbitrária $n > n_0$, multipliquemos membro a membro as desigualdades

$$\frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|} \leq \frac{b_{n_0+3}}{b_{n_0+2}}, \dots, \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Obteremos $\frac{|a_n|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{b_n}{b_{n_0+1}}$, ou seja, $|a_n| \leq k \cdot b_n$, onde $k = \frac{|a_{n_0+1}|}{b_{n_0+1}}$. Sendo assim, segue-se do Corolário 1.11 que $\sum a_n$ é (absolutamente) convergente. $\square$

**Corolário 1.15.** *Se existe uma constante $c$ tal que $0 < c < 1$ e $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c$ para todo $n \geq n_0$, então a série $\sum a_n$ é (absolutamente) convergente. Em outras palavras, se $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, a série $\sum a_n$ converge (absolutamente). Com efeito, a série geométrica $\sum c^n$ sendo convergente, basta tomar $b_n = c^n$ no Teorema 1.20.*

*Se acontecer de existir o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, então temos o*

**Corolário 1.16.** *Se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, então a série $\sum a_n$ é (absolutamente) convergente.*

Resumindo, o **teste da razão** possui as seguintes possibilidades:

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, o teste da razão é inconclusivo.

*Exemplo* 1.40. Consideremos a série $\sum n \cdot a^n$, onde $a$ é um número real tomado arbitrariamente. Temos $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|(n+1)a^{n+1}|}{|n \cdot a^n|} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}|a| = |a|$. Logo a série $\sum n \cdot a^n$ converge quando $|a| < 1$. Vemos que o limite do quociente $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ coincide com o limite da raiz n-ésima de $|a_n|$. Neste caso, o teste da razão e o teste da raiz levam ao mesmo resultado.

*Exemplo* 1.41. Seja a série $\sum \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$ onde $x$ é um número real (fixado arbitrariamente). Temos $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{x}{n+1} \to 0$, logo a série converge absolutamente, seja qual for $x$.

*Observação* 1.10. Novamente aqui, quando $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, nada se pode concluir (a série pode divergir ou convergir). É o que ocorre com as séries $\sum \dfrac{1}{n}$ e $\sum \dfrac{1}{n^2}$ A primeira diverge, a segunda converge e em ambas $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Quando $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ para todo $n > n_0$, então, evidentemente, a série diverge porque seu termo geral não tende para zero. Note-se porém que, ao contrário do teste da raiz, não se pode pode concluir a divergência da série $\sum a_n$ apenas pelo fato de ser ter $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ para uma infinidade de valores de $n$. Com efeito, dada qualquer série convergente de termos positivos $\sum a_n$, a série $a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + \cdots$ ainda é convergente mas, se indicarmos com $\sum b_n$ esta nova série, teremos $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ para todo n ímpar.

**Teorema 1.22.** *Seja $(a_n)$ uma subsequência limitada de números reais positivos. Tem-se*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

*Em particular, se existir $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existirá também $\lim \sqrt[n]{a_n}$ e os limites serão iguais.*

*Demonstração.* Primeiramente , vamos provar que $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Com efeito, se não fosse assim, existiria um número real $c$ tal que $\limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < c < \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Analisemos separadamente as desigualdades. Segue da primeira desigualdade que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < c$ para todo $n \geq p$. Sendo assim, para todo $n > p$, temos

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} < c, \ \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} < c, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} < c.$$

Multipliquemos membro a membro estas $n-p$ desigualdades, obtemos $\dfrac{a_n}{a_p} < c^{n-p}$, ou seja, $a_n < (\frac{a_p}{c^p}) \cdot c^n$. Pondo $k = \frac{a_p}{c^p}$, podemos escrever que $n > p \Rightarrow a_n < k \cdot c^n$. Ora, conforme foi demonstrado no Exemplo 1.13, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, logo $\lim\limits_{n\to+\infty} c \cdot \sqrt[n]{k} = c$ e, desse modo, $\lim \sqrt[n]{a_n} < \lim c\sqrt[n]{k} = c$.

Segue-se então da última desigualdade que

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup c\sqrt[n]{k} = c, \text{ um absurdo.}$$

Resta agora provar que $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n}$. Analogamente, se não valesse tal desigualdade, existiria um número real $b$ tal que $\liminf \sqrt[n]{a_n} < b < \liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Analisemos separadamente as desigualdades. Segue da segunda desigualdade que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b < \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ para todo $n \geq m$. Consequentemente, para todo $n > m$, obtemos

$$b < \frac{a_{m+1}}{a_m}, b < \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}, \ldots, b < \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Multipliquemos membro a membro estas $n-m$ desigualdades, obtemos $b^{n-m} < \dfrac{a_n}{a_m}$, ou seja, $(\frac{a_m}{b^m}) \cdot b^n < a_n$. Pondo $k = \frac{a_m}{b^m}$, podemos escrever que $n > m \Rightarrow k \cdot b^n < a_n$. Ora, conforme foi demonstrado no Exemplo 1.13, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, logo $\lim\limits_{n\to+\infty} b \cdot \sqrt[n]{k} = b$ e, desse modo, $\lim b\sqrt[n]{k} < \lim \sqrt[n]{a_n}$, ou ainda, $b < \lim \sqrt[n]{a_n}$.

Segue-se então da última desigualdade que

$$b = \liminf b \leq \liminf \sqrt[n]{a_n}, \text{ um absurdo.}$$

$\square$

*Exemplo* 1.42. Pois bem; tomemos dois números reais positivos $a < b$ e formemos uma sequência $(x_n)$ começando com $a$ e multiplicando cada termo, alternadamente, por $b$ ou por $a$, para obter o termo seguinte. A sequência então obtida é $(a, ab, a^2b, a^2b^2, a^3b^2, \ldots)$. Temos $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = b$ se $n$ é ímpar e $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a$ se $n$ é par. Segue-se então que não existe $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. No entanto, por outro lado, existe $\lim \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}$. Pode, então, ocorrer realmente que exista o limite da raiz sem que exista o limite da razão.

*Exemplo* 1.43. Provaremos agora que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. Ora, escrevendo $x_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, temos $x_n = \sqrt[n]{y_n}$, onde $y_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Logo, $\lim x_n = \lim \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$ (se este último existir). Vejamos,

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

**Teorema 1.23** (Critério de Dirichlet)**.** *Seja* $\sum a_n$ *uma série (não necessariamente convergente) cujas reduzidas* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *formam uma sequência limitada. Seja* $(b_n)$ *uma sequência não-crescente de números positivos com* $\lim b_n = 0$*. Então a série* $\sum a_n b_n$ *é convergente.*

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) \\ &\quad + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_n)bn \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n \\ &= \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + s_nb_n. \end{aligned}$$

Vejamos, existe $k > 0$ tal que $|s_n| \leq k$ para todo $n$ e, além disso, $\sum_{n=2}^{\infty}(b_{n-1} - b_n)$ é uma série convergente de números reais positivos (soma: $b_1$). Logo, pelo Corolário 1.11, temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} |s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)| \leq k \sum_{n=2}^{\infty}(b_{n-1} - b_n) = k \cdot b_1,$$

donde segue que a série $\sum_{n=2}^{\infty} s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Como $\lim s_nb_n = 0$, segue-se que existe $\lim(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)$, isto é, a série $\sum a_nb_n$ converge. □

**Corolário 1.17** (Abel)**.** *Se $\sum a_n$ é convergente e $(b_n)$ é uma sequência não-crescente de números positivos (não necessariamente tendendo para zero), então a série $\sum a_nb_n$ converge.*

*Observe que, neste Corolário, afrouxamos a hipótese sobre $b_n$ mas, em contrapartida, exigimos que a série $\sum a_n$ seja convergente. Para prová-lo, basta escrevermos $\lim b_n = c$. Então $(b_n - c)$ é uma sequência não-crescente com limite zero, isto é, $\lim(b_n - c) = 0$. Pelo critério de Dirichlet, a série $\sum a_n(b_n - c)$ converge para uma soma $s$. Como $\sum a_n$ é convergente, temos que $\sum a_nb_n = s + c\sum a_n$ também converge.*

**Corolário 1.18** (Leibniz)**.** *Se $(b_n)$ é uma sequência não-crescente com $\lim b_n = 0$, então a série $\sum(-1)^n b_n$ é convergente. Com efeito, embora a série $\sum(-1)^n$ não convirja, suas reduzidas formam uma sequência limitada.*

*Exemplo* 1.44. Se o número real $x$ não é um múltiplo inteiro de $2\pi$, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{cos(nx)}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{sen(nx)}{n}$ convergem. Com efeito, sabendo que $\dfrac{1}{n}$ tende monotonamente para zero, basta verificar que as sequências $s_n = cos(x) + cos(2x) + \cdots + cos(nx)$ e $t_n = sen(x) + sen(2x) + \cdots + sen(nx)$ são limitadas. Vejamos, aplicando a fórmula de Euler, isto é, $e^{ix} = cos(x) + i \cdot sen(x)$ e considerando $1 + s_n$ e $t_n$, respectivamente, a parte real e a parte imaginária, obtemos a soma $1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \cdots + (e^{ix})^n = \dfrac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}}$. Ora, sendo $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos $e^{ix} \neq 1$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}\right| = \left|\frac{1}{1-e^{ix}} - \frac{(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}\right| &\leq \left|\frac{1}{1-e^{ix}}\right| + \left|\frac{(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}\right| \\ &= \frac{1}{|1-e^{ix}|} + \frac{\left(\sqrt{cos^2(x)+sen^2(x)}\right)^{n+1}}{|1-e^{ix}|} \\ &= \frac{1}{|1-e^{ix}|} + \frac{1^{n+1}}{|1-e^{ix}|} \\ &= \frac{1+1}{|1-e^{ix}|} = \frac{2}{|1-e^{ix}|}.\end{aligned}$$

A sequência de números complexos $1+e^{ix}+(e^{ix})^2+\cdots+(e^{ix})^n$ é, desse modo, limitada e daí resulta que as sequências de suas partes reais e imaginárias também são limitadas.

Dada uma série $\sum a_n$, para $n \in \mathbb{N}$ ponhamos $p_n = a_n$ se $a_n > 0$ e $p_n = 0$ se $a_n \leq 0$. O número $p_n$ é a *parte positiva* de $a_n$. Do mesmo modo, podemos escrever $q_n = 0$ se $an \geq 0$ e $q_n = -a_n$ se $a_n < 0$ e, assim, obteríamos a *parte negativa* de $a_n$. Segue que $a_n = p_n - q_n$, $|a_n| = p_n + q_n$, $|a_n| = a_n + 2q_n$, $p_n \geq 0$ e $q_n \geq 0$ para todo $n$.

Quando a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, para todo $k \in \mathbb{N}$ vale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geq \sum_{n=1}^{k} |a_n| = \sum_{n=1}^{k} p_n + \sum_{n=1}^{k} q_n$. Logo, as séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são ambas convergentes (pois suas reduzidas formam sequências monótonas, limitadas pelo número $\sum |a_n|$). Evidentemente, se $\sum p_n$ e $\sum q_n$ convergem, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Se, porém, $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, então tanto $\sum p_n$ como $\sum q_n$ são séries divergentes. Com efeito, se pelo menos uma dessas duas séries fosse realmente convergente (por exemplo, $\sum q_n = c$), então, usando o fato $|a_n| = a_n + 2q_n$, teríamos, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{k} |a_n| = \sum_{n=1}^{k} a_n + 2\sum_{n=1}^{k} q_n.$$

Fazendo $k \to \infty$ na igualdade acima teríamos $\sum |a_n| = \sum a_n + 2c$ e, portanto, $\sum a_n$ convergiria absolutamente.

*Exemplo* 1.45. Observe a série $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots$. Trata-se de uma série condicionalmente convergente, na qual a série das partes positivas é $1+0+\dfrac{1}{3}+0+\dfrac{1}{5}+0+\ldots$ enquanto a série das partes negativas é $0+\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{4}+0+\dfrac{1}{6}+\ldots$. Isto nos dá essencialmente as séries $\sum \dfrac{1}{2n-1}$ e $\sum \dfrac{1}{2n}$, ambas divergentes. De fato, a segunda diverge por ser equivalente a $\dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{n}$ e a primeira em função de $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{2n-1}$.

Iniciaremos neste momento uma abordagem investigativa sobre as propriedades aritméticas, tais como associatividade, comutatividade, entre outras, com o intuito de avaliar se estas propriedades oriundas da soma finita se estendem para as séries.

Vamos começar analisando a *associatividade*. Seja $\sum a_n$ uma série convergente, o que acontece se inserirmos parênteses entre seus termos? Por exemplo, que alteração ocorre ao passarmos da série $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \ldots$ para a série $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \ldots$?

Ora, ao inserirmos parênteses entre os termos de $\sum a_n$ obteremos uma nova série cuja sequência das reduzidas é uma subsequência de $(s_n)$. Por exemplo, no caso acima, passaremos da sequência $(s_n)$ para a sequência $(s_{2n})$, pois a segunda série tem como reduzidas $a_1+a_2 = s_2, (a_1+a_2)+(a_3+a_4) = s_4, \ldots, (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n}) = s_{2n}$.

Vejamos, se a série $\sum a_n$ converge, segue da definição que $(s_n)$ converge e, portanto, toda subsequência de $(s_n)$ converge também para o mesmo limite. Logo, inserindo parênteses entre os termos de uma série convergente, obtemos ainda uma série convergente, com a mesma soma que a original. Esta é a propriedades *associativa* das séries.

Por outro lado, o mesmo não ocorre se *dissociamos* os termos de uma série convergente. Neste caso poderemos obter uma série divergente. O exemplo mais comum é dado pela série $0+0+\ldots$ que é, evidentemente, convergente. Escrevendo $0 = 1-1$, obtemos, por dissociação, a série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, que é divergente. Mais geralmente, dada qualquer série convergente $\sum a_n$, podemos escrever $a_n = a_n + 1 - 1$. A série $\sum a_n$ resulta então, por associatividade, da série $a_1 + 1 - 1 + a_2 + 1 - 1 + a_3 + 1 - 1 + \ldots$, a qual é divergente, pois seu termo geral não tende para zero.

No entanto, existe uma situação em que podemos garantir que a dissociação de termos de uma série convergente não afeta sua convergência nem o valor da soma. É o caso de uma série absolutamente convergente $\sum a_n$, na qual se decompõem seus termos como somas finitas de parcelas com o mesmo sinal.

Analisemos primeiro o caso de uma série convergente $\sum a_n$, com $a_n \geq 0$ para todo $n$. Se escrevermos cada $a_n$ como soma (finita) de números não-negativos, obteremos uma nova série $\sum b_n$, com $b_n \geq 0$ para todo $n$, cuja sequência $(t_n)$ das reduzidas é não-decrescente e possui a subsequência $(s_n)$ das reduzidas de $\sum a_n$. Se $(s_n)$ converge, então $(t_n)$ converge para o mesmo limite e, consequentemente, $\sum b_n$ é convergente e tem a mesma soma que $\sum a_n$.

De modo geral, se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, escreveremos $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$, onde $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são, respectivamente, a parte positiva e a parte negativa de $a_n$. Toda decomposição dos $a_n$ em somas finitas de parcelas com o mesmo sinal determina uma dissociação em $\sum p_n$ e outra em $\sum q_n$. Pelo que vimos acima, isto preserva a convergência de $\sum p_n$, de $\sum q_n$ e o valor de cada soma. Logo, a nova série é convergente e tem a mesma soma que $\sum a_n$.

*Exemplo* 1.46. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes, com somas $s$ e $t$ respectivamente. Sabemos que $\sum(a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots$ converge e sua soma é

$s+t$. Afirmamos que vale a dissociatividade $s+t=a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3+\ldots$. Note que não estamos supondo a convergência absoluta. Mas, chamando $s_n$ as reduzidas de $\sum a_n$ e $t_n$ as reduzidas de $\sum b_n$, a série $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3+\ldots$ tem como reduzidas de ordem par $r_{2n}=s_n+t_n$ e como reduzidas de ordem ímpar $r_{2n-1}=s_{n-1}+t_{n-1}+a_n$. Como $\lim a_n=0$, segue-se que $\lim r_{2n}=\lim r_{2n-1}=s+t$. Logo, existe $\lim r_n=s+t$.

Abordaremos agora o problema da *comutatividade*. Dada uma série $\sum a_n$, alterar a ordem de seus termos significa tomar uma bijeção $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ e considerar a série $\sum b_n$, onde $b_n=a_{\varphi(n)}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. O problema é, então, o seguinte: supondo que $\sum a_n$ é convergente, será ainda $\sum b_n$ convergente? No caso afirmativo, vale $\sum a_n=\sum b_n$?

Será demonstrado a seguir que $\sum a_n$ é comutativamente convergente se, e somente se, é absolutamente convergente. Mas antes, veremos um bom exemplo de como uma mudança da ordem nos termos de uma série pode alterar a soma.

*Exemplo* 1.47. Sabemos que $s=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\cdots$ é convergente. Multiplicando os termos desta série por $\dfrac{1}{2}$, obtemos

$$\frac{s}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots.$$

Podemos escrever, evidentemente,

$$\begin{aligned} s&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots, \\ \frac{s}{2}&=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots. \end{aligned}$$

Bom, agora, somando termo a termo as duas séries convergentes acima, temos que

$$\frac{3s}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots.$$

Observe que os termos da série acima, cuja soma é $\dfrac{3s}{2}$, são os mesmos da série inicial, cuja soma é $s$, apenas com uma mudança de ordem. Logo, um rearranjo na ordem dos termos de uma série convergente pode alterar o valor da sua soma.

**Teorema 1.24.** *Toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente.*

*Demonstração.* Suponhamos, para começar, que $\sum a_n$ é uma série convergente e também que $a_n\geq 0$ para todo $n$. Seja $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma bijeção e ponhamos $b_n=a_{\varphi(n)}$. Afirmamos que $\sum b_n=\sum a_n$. Com efeito, sejam $s_n=a_1+\cdots+a_n$ e $t_n=b_1+\cdots+b_n$. Além disso, para cada $n\in\mathbb{N}$, vamos chamar de $m$ o maior dos números $\varphi(1),\varphi(2),\ldots,\varphi(n)$, ou equivalentemente, $m=\max\{\varphi(1),\varphi(2),\varphi(3),\ldots,\varphi(n)\}$. Sendo assim, podemos escrever que $\{\varphi(1),\ldots,\varphi(n)\}\subset[1,m]$. Segue-se que $t_n=\sum_{i=1}^{n}a_{\varphi(i)}\leq\sum_{j=1}^{m}a_j=s_m$. (Para $n=3$, por exemplo, temos $t_3 = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)}$ e $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, e supondo $m = \varphi(3) = 7$, então $\sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_7 \leq \sum_{j=1}^{7} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_7$.) Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \leq s_m$. De modo análogo, considerando-se $\varphi^{-1}$ em vez de $\varphi$, é fácil ver que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $s_m \leq t_n$. Logo, podemos concluir que $\lim s_n = \lim t_n$, ou seja, $\sum a_n = \sum b_n$.

No caso geral, temos que $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$, onde $p_n$ e $q_n$ são respectivamente a parte positiva e a parte negativa de $a_n$. Toda reordenação $(b_n)$ dos termos $a_n$ origina uma reordenação $(\upsilon_n)$ para os $p_n$ e uma reordenação $(\kappa_n)$ dos $q_n$, de tal modo que cada $\upsilon_n$ é a parte positiva e cada $\kappa_n$ é a parte negativa de $b_n$. Pelo que acabamos de ver, $\sum \upsilon_n = \sum p_n$ e $\sum \kappa_n = \sum q_n$. Logo $\sum a_n = \sum \upsilon_n - \sum \kappa_n = \sum b_n$, o que prova o Teorema. □

**Teorema 1.25.** *Seja $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente. Dado qualquer número real $c$, existe uma reordenação $(b_n)$ dos termos de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n = c$.*

*Demonstração.* Vejamos, sejam $p_n$ a parte positiva e $q_n$ a parte negativa de $a_n$. Como $\sum a_n$ converge condicionalmente, segue que $\lim a_n = 0$, donde $\lim p_n = \lim q_n = 0$, mas $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$. Agora, fixando $c \in \mathbb{R}$, definiremos uma nova série $\sum b_n$, obtida por uma reordenação dos termos de $\sum a_n$ do seguinte modo: começamos tomando como primeiros termos $p_1, p_2, \ldots, p_{n_1}$, onde $n_1$ é o menor índice tal que $p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > c$. Em seguida, tomando os termos negativos $-q_1, -q_2, \ldots, -q_{n_2}$, onde $n_2$ é o menor índice tal que $p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} < c$. Observe que as escolhas de $n_1$ e $n_2$ são lícitas, pois $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$. Seguimos assim: escolhendo o menor índice $n_3$ tal que $p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} > c$ e depois o menor índice $n_4$, de modo que $p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} - q_{n_2+1} - \cdots - q_{n_4} < c$. Prosseguindo desta maneira, obteremos uma reordenação de $\sum a_n$ tal que as reduzidas $t_n$ da nova série tendem para $c$, visto que a sucessão de $t_n$ oscila em torno de $c$ e verifica a propriedade, a partir do termo obtido ao somar $p_{n_1}$, $|t_n - c| \leq |a_{n_k}|$, onde $|a_{n_k}|$ é o termo que originou a última oscilação em torno de $c$. Como $\lim a_{n_k} = 0$ (porque a série $\sum a_n$ é convergente), temos que $\lim t_n = c$. □

*Observação* 1.11. Um raciocínio análogo (mais simples) permite demonstrar que uma conveniente mudança na ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente é suficiente para que suas reduzidas tendam para $+\infty$ (ou $-\infty$).

**Teorema 1.26.** *Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ $(n \geq 0)$ são absolutamente convergentes, isto é, se $\lim |a_n|$ e $\lim |b_n|$ convergem, então $(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum c_n$ onde, para todo $n \geq 0$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.*

*Demonstração.* De fato, para cada $n \geq 0$, temos que

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j = x_0 + x_1 + \cdots + x_n,$$

onde $x_n = a_0 b_n + a_1 b_n + \cdots + a_n b_n + \cdots + a_n b_0$. Tendendo $n$ para infinito, isto é, $n \to \infty$, obtemos $(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum x_n$ $(n \geq 0)$. Vejamos, por dissociação de termos de $\sum x_n$, vamos formar uma série $\sum a_i b_j$, cujos termos encontram-se ordenados do seguinte modo: $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, para todo $k \geq 0$, a reduzida de ordem $(k+1)^2$ da série $\sum |a_i b_j|$ é igual a

$$\sum_{i,j=0}^{k} |a_i||b_j| = \left(\sum_{i=0}^{k} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{k} |b_j|\right) \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\right).$$

Assim, a sequência (não-decrescente) das reduzidas da série $\sum |a_i b_j|$ é limitada, visto que possui uma subsequência limitada. Logo $\sum a_i b_j$ converge absolutamente. Sua convergência e o valor de sua soma não se alteram se agruparmos num único termo $c_n$ todas as parcelas $a_i b_j$ com $i + j = n$. Portanto, $(\sum a_n) \cdot (\sum b_n) = \sum x_n = \sum a_i b_j = \sum c_n$. □

## 1.8 Exercícios

*Exercício* 1.1. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Se $a \leq x_n \leq n^k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.

*Solução.* Primeiramente, vamos ver um resultado útil para a resolução do exercício:

*Teorema* 1.27. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Seja $f : D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nestas condições, $\lim f(n) = \lim a_n$, se existirem.*

*Demonstração.* De fato, seja $f : D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vamos supor que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$. Assim, segue da definição que, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(n) - L| < \epsilon$ sempre que $n > \delta$. Consequentemente, como $f(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue então que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$. (Basta considerar $n_0 = \delta$.) □

Vejamos,

$$a \leq x_n \leq n^k \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{n^k}.$$

Aplicando o limite, temos

$$\lim \sqrt[n]{a} \leq \lim \sqrt[n]{x_n} \leq \lim \sqrt[n]{n^k} \Leftrightarrow \lim a^{\frac{1}{n}} \leq \lim \sqrt[n]{x_n} \leq \lim (n^k)^{\frac{1}{n}}.$$

Evidentemente,

$$\lim a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1.$$

Mas

$$\lim (n^k)^{\frac{1}{n}} = \lim (n)^{\frac{k}{n}} = \infty^0, \text{ uma indeterminação.}$$

Para resolvermos essa indeterminação, precisamos aplicar o Teorema 1.27 e, em seguida, aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim(n)^{\frac{k}{n}} = \lim e^{\ln(n)^{\frac{k}{n}}} = \lim e^{\frac{k}{n}\ln(n)} = e^{\lim \frac{k}{n}\ln(n)}.$$

Observe que

$$\lim \frac{k}{n}\ln(n) = \frac{\infty}{\infty},$$

ou seja, devemos aplicar novamente a regra de L'Hôpital:

$$\lim \frac{k\ln(n)}{n} = \lim \frac{k}{n} = 0.$$

Sendo assim,

$$e^{\lim \frac{k}{n}\ln(n)} = e^0 = 1.$$

Por fim, como

$$1 \leq x_n \leq 1,$$

segue do Teorema 1.10 que $\lim x_n = 1$.

*Exercício* 1.2. Sejam $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = \left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)^{n+1}$. Mostre que $\lim x_n y_n = 1$ e deduza daí que $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

*Solução.* Com efeito,

$$\begin{aligned}
x_n y_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)-1}{n+1} \\
&= \left(1-\frac{1}{(n+1)}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim x_n y_n = \lim\left(1-\frac{1}{(n+1)}\right) = 1.$$

Sabemos também que

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim x_n = e, \text{ pois é um limite fundamental.}$$

Sendo assim,

$$\lim\left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)^{n+1}=\lim y_n=\lim\frac{x_n y_n}{x_n}=\frac{1}{e}=e^{-1}.$$

Consequentemente,

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}=e^{-1}.$$

*Exercício* 1.3. Seja $a\geq 0$, $b\geq 0$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\}$.

*Solução.* De fato, se $a=b$, então

$$\lim\sqrt[n]{a^n+a^n}=\lim\sqrt[n]{2a^n}=\lim a\sqrt[n]{2}=\lim a\cdot 2^{\frac{1}{n}}=a.$$

Em contrapartida, sem perda de generalidade, suponha que seja $a>b$. Assim, para todo $n\in\mathbb{N}$, segue que

$$\lim\sqrt[n]{a^n+b^n}=\lim\sqrt[n]{a^n\left(1+\frac{b^n}{a^n}\right)}=\lim a\sqrt[n]{\left(1+\frac{b^n}{a^n}\right)}=\lim a\sqrt[n]{1}=a.$$

*Exercício* 1.4. Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $0\leq t_n\leq 1$. Se $\lim x_n=\lim y_n=a$, prove que $\lim[t_n x_n+(1-t_n)y_n]=a$.

*Solução.* Vejamos,

$$\lim(x_n-y_n)=a-a=0,$$

e como $t_n$ é limitada, segue que

$$\lim t_n(x_n-y_n)=0.$$

Assim, concluímos que

$$\lim[t_n x_n+(1-t_n)y_n]=\lim t_n(x_n-y_n)+\lim y_n=0+a=a.$$

*Exercício* 1.5. Seja $(x_n)$ uma sequência limitada. Se $\lim a_n=a$ e cada $a_n$ é um valor de aderência de $(x_n)$, então $a$ é um valor de aderência de $(x_n)$.

*Solução.* Bom, segue do enunciado que $\lim a_n=a$ e, para todo $n\in\mathbb{N}$, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a_n$. Sendo assim, dado $\epsilon>0$, existem $n_0,k_0$ tais que

$$n>n_0\Rightarrow|a_n-a|<\frac{\epsilon}{2}\text{ e }k>k_0\Rightarrow|x_{n_k}-a_n|<\frac{\epsilon}{2}.$$

Mas $|x_{n_k}-a| = |x_{n_k}-a_n+a_n-a| \leq |a_n-a|+|x_{n_k}-a_n| < \dfrac{\epsilon}{2}+\dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Logo, $k > k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \epsilon$, ou seja, a subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $a$ e, consequentemente, $a$ é um valor de aderência de $(x_n)$.

*Exercício* 1.6. Seja $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\sum y_n = +\infty$. Se $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$, então segue que $\lim \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n} = a$.

*Solução.* Vejamos, como $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$, então para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tem-se $a - \epsilon < \dfrac{x_n}{y_n} < a + \epsilon$. Como $y_n > 0$, então podemos escrever

$$(a-\epsilon)y_n < x_n < (a+\epsilon)y_n.$$

Tomando o somatório $\sum_{i=1}^{n}$ em ambos os lados, temos

$$(a-\epsilon)\cdot\sum_{i=1}^{n} y_n < \sum_{i=1}^{n} x_n < (a+\epsilon)\cdot\sum_{i=1}^{n} y_n,$$

e como $\sum_{i=1}^{\infty} y_n = +\infty$, segue que

$$(a-\epsilon) < \frac{\sum_{i=1}^{n} x_n}{\sum_{i=1}^{n} y_n} < (a+\epsilon).$$

Logo, temos que $n > n_0 \Rightarrow \lim \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_n}{\sum_{i=1}^{n} y_n} = a$.

*Exercício* 1.7. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge. Se $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = c \neq 0$, então $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

*Solução.* No primeiro caso, como $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, segue que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tem-se

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < \epsilon,$$

ou ainda,

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < \epsilon.$$

Como $b_n > 0$, podemos escrever daí

$$0 < a_n < \epsilon \cdot b_n.$$

Aplicando o somatório $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}$, obtemos

$$0 < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n < \epsilon \cdot \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n$$

.

Segue da última desigualdade, por comparação, que a convergência de $\sum b_n$ implica a convergência de $\sum a_n$.

No segundo caso, de maneira análoga, como $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = c \neq 0$, segue da definição que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tem-se

$$0 < c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon.$$

Como $b_n > 0$ tem-se

$$(c-\epsilon)b_n < a_n < (c+\epsilon)b_n.$$

Aplicando a soma $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}$, segue que

$$(c-\epsilon)\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n < (c+\epsilon)\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n.$$

Por fim, usando essa última desigualdade, temos por comparação que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

*Exercício* 1.8. Seja $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se $\sum b_n = +\infty$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n > n_0$, então $\sum a_n = +\infty$.

*Solução.* Vejamos, para todo $n > n_0$, temos que

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \geq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}, \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Multiplicando membro a membro estas $n - n_0$ desigualdades, segue que

$$\frac{a_n}{a_{n_0+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n_0+1}},$$

ou equivalentemente,

$$b_n \leq \frac{b_{n_0+1}}{a_{n_0+1}} a_n.$$

De $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, segue que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n = +\infty$. Sendo assim, tomando o somatório $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}$ em ambos os lados, temos

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n \leq \frac{b_{n_0+1}}{a_{n_0+1}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \frac{b_{n_0+1}}{a_{n_0+1}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Portanto, segue do teste de comparação que $\dfrac{b_{n_0+1}}{a_{n_0+1}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = +\infty$ e, consequentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

*Exercício* 1.9. Prove que, para todo $a \in \mathbb{R}$, a série $a^2 + \dfrac{a^2}{1+a^2} + \dfrac{a^2}{(1+a^2)^2} + \ldots$ é convergente e calcule sua soma.

*Solução.* Se $a = 0$, a série tende à 0 trivialmente. Suponhamos que $a \neq 0$. Então segue que $0 < \dfrac{1}{1+a^2} < 1$ e, portanto, temos uma série geométrica

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \cdots &= a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+a^2} \right)^n \\ &= a^2 \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+a^2}} \\ &= 1 + a^2. \end{aligned}$$

*Exercício* 1.10. Se $\sum a_n$ converge e $a_n > 0$, então $\sum (a_n)^2$ e $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ convergem.

*Solução.* Como $\sum a_n$ é convergente, temos que seu termo geral tende para zero, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. E como também temos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < a_n < 1$$

para todo $n > n_0$. Consequentemente, temos que

$$0 < (a_n)^2 < a_n.$$

Desse modo, aplicando o somatório $\sum_{n=n_0+1}^{n}$, segue-se que

$$\sum_{n=n_0+1}^{n} (a_n)^2 < \sum_{n=n_0+1}^{n} a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, como $\sum a_n$ converge, temos então que $\sum_{n=n_0+1}^{n} a_n$ converge e, consequentemente, $\sum_{n=n_0+1}^{n} (a_n)^2$ converge, ou seja, a série $\sum (a_n)^2$ converge.

Agora, com o intuito de provar a convergência da série $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$, como $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\frac{a_n}{1+a_n} < a_n.$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{a_n}{1+a_n} < \sum_{n=1}^{n} a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, como a série $\sum a_n$ converge, segue que $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ também converge.

# 2 Topologia da Reta

## Introdução

Iniciaremos, neste momento, os estudos sobre as principais propriedades topológicas dos subconjuntos da reta. Definimos assim as propriedades que se baseiam nas noções de proximidade e limite, intimamente ligadas ao comportamento de funções contínuas.

O objetivo dessa seção é fornecer uma base para os estudos referentes a noção de funções contínuas. A fim de dar sentido nas determinações de limite e também nas indagações sobre a continuidade de funções, é necessário que o domínio e o contradomínio da mesma tenham um certo tipo de estrutura, nesse caso, “espaço topológico”.

É importante evidenciar a introdução de uma linguagem mais geométrica. Veja:

- Chamaremos o corpo $\mathbb{R}$ de “reta”.
- Diremos “ponto” em vez de “número real”.
- Se $a < b$, diremos que “a está à esquerda de b”.
- Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ é a “distância do ponto $x$ ao ponto $y$”.
- O intervalo $[a, b]$ é o segmento de reta cujos extremos são $a$ e $b$.

## 2.1 Conjuntos abertos

Iniciaremos esta seção com uma observação que visa anteceder algumas ideias que definiremos formalmente posteriormente.

*Observação* 2.1. Imagine um número real $a$ tal que $a > 2$. Dessa maneira, perceba que é possível escolher um número $x \in \mathbb{R}$ de modo que $x > 2$, basta tomar $x$ como um número real suficientemente próximo de $a$. Por exemplo, se $a = 4 > 2$, poderíamos tomar $x = 3,5 > 2$. Já o mesmo não ocorre se tomarmos um número racional $p$, pois deslocando um pouquinho para a esquerda ou um pouquinho para a direita, podemos encontrar um número irracional. Assim, dizemos que a primeira propriedade é *estável* (pequenos deslocamentos não a destroem) e a propriedade de ser racional é *instável*.

Os conjuntos definidos por meio de propriedades estáveis são os que chamamos de *abertos*. Passemos agora à definição formal:

Seja $X$ um conjunto tal que $X \subset \mathbb{R}$. Um ponto $x \in X$ chama-se *ponto interior* de $X$ se existe um intervalo aberto $(a, b)$ tal que $x \in (a, b) \subset X$. (Isto significa que todos os pontos suficientemente próximos de $x$ ainda pertencem ao conjunto $X$.)

Para que $x \in X$ seja um ponto interior do conjunto $X$, basta que exista $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset X$. De fato, suponha que $x \in (a, b) \subset X$ e seja $\epsilon$ o menor dos números positivos $x - a$ e $b - x$. Então $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$, isto é, $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset X$. Equivalentemente, $x$ é um ponto interior de $X$ se, e somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que $|y - x| < \epsilon \Rightarrow y \in X$. Com efeito, $|y - x| < \epsilon$ significa que $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$.

Dado $X \subset \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos interiores de $X$ será representado por int(X) e chamado o *interior do conjunto* $X$. Consequentemente, int(X) $\subset$ X e, evidentemente, $X \subset Y \Rightarrow$ int(X) $\subset$ int(Y).

*Exemplo* 2.1. Qualquer conjunto $X$ que possui que possui algum ponto interior deve, pelo menos, ter um intervalo aberto, logo é infinito. Desse modo, dado um conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, nenhum dos seus pontos é um ponto interior. ou seja, temos int(X) $= \emptyset$.

*Exemplo* 2.2. Nos casos em que $X = (a, b)$, ou $X = (-\infty, b)$ ou $X = (a, +\infty)$, temos int(X) = X. No primeiro caso, para todo $x \in X$ temos que $x \in (a, b) \subset X$. No segundo caso, dado arbitrariamente $x \in X$, basta escolher $a < x$ e teremos $x \in (a, b) \subset X$. E no último caso, análogo ao segundo, basta tomarmos $b > x$ para que $x \in (a, b) \subset X$.

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se *conjunto aberto* se todos os seus pontos são interiores, ou seja, int(A) = A.

Desso modo, $A$ é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um intervalo aberto $(a, b)$ tal que $x \in (a, b) \subset A$. Note que podemos interpretar o intervalo $(a, b)$ como uma "margem de segurança" do ponto $x$, dentro da qual ele pode se movimentar sem correr o risco de destruir o conjunto $A$.

*Exemplo* 2.3. O conjunto vazio é aberto. De fato, um conjunto $X$ só pode deixar de ser aberto se existir em $X$ algum ponto que não seja interior. Como não existe ponto algum em $\emptyset$, somos forçados a admitir que $\emptyset$ é aberto. Evidentemente, a reta $\mathbb{R}$ inteira é um conjunto aberto.

*Exemplo* 2.4. Seja $A = (0, 1) \cup (2, 5)$. Então $A$ é um subconjunto aberto da reta. Com efeito, para todo $x \in A$ tem-se $x \in (0, 1)$ ou $x \in (2, 5)$. Em qualquer caso, existe um intervalo aberto que contém $x$ e está contido em A.

**Teorema 2.1.** *a) Se $A_1 \subset \mathbb{R}$ e $A_2 \subset \mathbb{R}$ são abertos, então $A_1 \cap A_2$ é aberto.*

*b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}$. A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.*

*Demonstração.* a) Suponhamos que $x \in A_1 \cap A_2$, ou seja, $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Deste modo, existem intervalos tais que $x \in (a_1, b_1) \subset A_1$ e $x \in (a_2, b_2) \subset A_2$. Tomando $a = \max\{a_1, a_2\}$ e $b = \min\{b_1, b_2\}$, segue que $x \in (a, b) = (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \subset A_1 \cap A_2$. Logo, todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é interior e, sendo assim, esta interseção é um conjunto aberto.

*b*) Suponha que $x \in A = \bigcup A_\lambda$, desse modo, segue que existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como, por hipótese, $A_\lambda$ é um conjunto aberto, podemos obter um intervalo $(a, b)$ tal que $x \in (a, b) \subset A_\lambda$. Como $A_\lambda \subset A$, temos $x \in (a, b) \subset A$. Portanto, todo ponto $x \in A$ é interior e, por conseguinte, $A$ é aberto.

□

**Corolário 2.1.** *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, então $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto. Em palavras mais simples, a interseção de um número infinito de conjuntos abertos também é um conjunto aberto. De fato, aplicando-se $n - 1$ vezes o Teorema obtemos $A_1 \cap A_2$ aberto, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$ aberto, $\ldots$, $A_1 \cap \cdots \cap A_n = (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n$ aberto.*

*Observação* 2.2. É importante mencionar que nem sempre a interseção de uma infinidade de conjuntos abertos gera um conjunto aberto. Por exemplo, se considerarmos os conjuntos abertos $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, segue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$, mas o conjunto $\{0\}$ é fechado (pois é finito). Para ver que $\bigcap A_n = \{0\}$, basta observar que $0 \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo é evidente que $0 \in \bigcap A_n$. Por outro lado, se $x \neq 0$, então $|x| > 0$ e, sendo assim, existe $n$ tal que $0 < \frac{1}{n} < |x|$. Assim, $x \notin (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = A_n$ e $x \neq 0 \Rightarrow x \notin \bigcap A_n$. Em resumo, temos $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, onde cada $A_n = (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$ é aberto mas a interseção $[a, b]$ não é um conjunto aberto.

*Exemplo* 2.5. Seja $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito de números reais. Suponha que os elementos de F estão dispostos de tal modo que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Sendo assim, $\mathbb{R} - F = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \cdots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, +\infty)$. Podemos concluir, então, que o conjunto $\mathbb{R} - F$ é aberto, isto é, o complementar de todo conjunto finito de números reais é aberto. Analogamente, $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ é aberto, visto que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ é uma reunião infinita de conjuntos abertos.

*Exemplo* 2.6. Todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ é uma reunião de intervalos abertos. Com efeito, para cada $x \in A$, podemos escolher um intervalo aberto $I_x$ tal que $x \in I_x \subset A$. Em símbolos, temos $\{x\} \subset I_x \subset A$. Tomando reuniões, obtemos $\bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} I_x \subset A$, isto é, $A \subset \bigcup_{x \in A} I_x \subset A$, donde $A = \bigcup_{x \in A} I_x$.

**Teorema 2.2** (Estrutura dos conjuntos abertos da reta.). *Todo subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ se exprime, de modo único, como uma reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.*

Convém demonstrarmos os seguintes resultados antes da demonstração do Teorema acima:

**Lema 8.2.** *Seja $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de intervalos abertos, todos contendo o ponto $p \in \mathbb{R}$. Então $I = \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$ é um intervalo aberto.*

*Demonstração.* Definimos $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ para todo $\lambda \in L$. Vale destacar que $a_\lambda < b_\mu$ sejam quais forem $\lambda, \mu \in L$, pois $a_\lambda < p$ e $p < b_\mu$. Nesse sentido, se tomarmos $a = \inf\{a_\lambda; \lambda \in L\}$ e $b = \sup\{b_\lambda; \lambda \in L\}$, sempre teremos $a < b$. (Pode ocorrer que seja $a = -\infty$ e $b = +\infty$.) Afirmamos que $(a, b) = \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$. A inclusão $\bigcup I_\lambda \subset (a, b)$ é clara. Reciprocamente, se $a < x < b$, segue das definições de sup e de inf que existem $\lambda, \mu \in L$ tais que $a_\lambda < x < b_\mu$. Se valer $x < b_\lambda$, então evidentemente teremos $x \in I_\lambda$. Se, porém, tivermos $b_\lambda \leq x$ isto trará $a_\mu < b_\lambda \leq x$, donde $a_\mu < x < b_\mu$, ou seja, $x \in I_\mu$. Em qualquer hipótese, $x \in \bigcup I_\lambda$. Desse modo, $(a, b) \subset \bigcup I_\lambda$, o que completa a nossa demonstração. □

**Lema 8.3.** *Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

*Demonstração.* De fato, seja $A$ um conjunto enumerável e $B \subset A$. Se $B$ for um subconjunto finito, então evidentemente é enumerável. Se não, se $B$ for um subconjunto infinito, como $A$ é enumerável, podemos colocar seus elementos em uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de termos dois a dois distintos ($a_i \neq a_j$ se $i \neq j$). Vamos construir uma sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ da seguinte maneira: defina $n_1$ como o primeiro natural $a_{n_1} \in B$. Tome $n_2$ como sendo o menor natural que é maior do que $n_1$ tal que $a_{n_2} \in B$. Tendo encontrado $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, tome agora $n_k$ como sendo o menor natural que é maior do que $n_{k-1}$ tal que $a_{n_k} \in B$. Como $B$ é infinito, podemos interpretá-lo como uma sequência $B = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots)$. É claro que esses termos são dois a dois distintos. Assim, obtemos uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to B$ dada por $f(k) = a_{n_k}$. Logo, $B$ é enumerável. □

Agora, retornando para a demonstração do Teorema 2.2, temos:

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente que, para todo $x \in A$, $I_x$ é a reunião dos intervalos abertos que contêm $x$ e estão contidos em $A$. Pelo Lema 8.2, cada $I_x$ é um intervalo aberto e, evidentemente, $x \in I_x \subset A$. Vejamos, se $I$ é um intervalo aberto qualquer contendo $x$ e contido em $A$, então automaticamente $I$ é membro da família cuja reunião deu $I_x$. Isto é, $I \subset I_x$. Em outras palavras, $I_x$ é o maior intervalo aberto que contêm $x$ e está contido em $A$. Afirmamos também que, dados $x, y \in A$, ou se tem $I_x = I_y$ ou então $I_x \cap I_y = \emptyset$. Com efeito, se existir algum $z \in I_x \cap I_y$, então $I = I_x \cup I_y$ é um intervalo contendo $x$ e contido em $A$, donde $I \subset I_x$ e, daí, $I_y \subset I_x$. Por motivo análogo, $I_x \subset I_y$. Portanto, $I_x = I_y$. Isto nos permite afirmar que os intervalos $I_x$ são dois a dois disjuntos. Evidentemente, temos $A = \bigcup I_x$, uma vez que $x \in I_x \subset A$ para todo $x \in A$. Assim definimos que todo conjunto aberto $A$ pode ser decomposto como uma reunião de intervalos abertos dois a dois disjuntos, que chamaremos os *intervalos componentes* de $A$. Afirmamos, ainda, que a coleção dos intervalos componentes de $A$ é enumerável. Com efeito, basta escolher, em cada componente $J$, um número racional $r(J)$. A função $J \mapsto r(J)$ é injetiva porque $J \neq J' \Rightarrow J \cap J' = \emptyset \Rightarrow r(J) \neq r(J')$. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, segue do resultado do Lema 8.3 que a coleção dos intervalos componentes de $A$ é enumerável. Resta agora provar a unicidade. Para isto, vamos supor que se tenha $A = \bigcup J_m$, donde $J_m$ são os intervalos abertos, dois a dois disjuntos. Afirmamos que, nestas condições, para cada $J_m = (a_m, b_m)$, suas extremidades não pertencem ao conjunto $A$. De fato, se tivéssemos, por exemplo, $a_m \in A$, seria $a_m \in J_p = (a_p, b_p)$ para algum $J_p \neq J_m$. Então, pondo $b = \min\{b_m, b_p\}$ teríamos $J_m \cap J_p \supset (a_m, b) \neq \emptyset$, um absurdo. Segue-se daí que, para cada $m$ e para cada $x \in J_m$, $J_m$ é o maior intervalo aberto que contém $x$ e está contido em $A$. Logo, $J_m = I_x$. □

**Corolário 2.2.** *Seja $I$ um intervalo aberto. Se $I = A \cup B$, onde $A$ e $B$ são conjuntos abertos disjuntos, então um desses conjuntos é igual a $I$ e o outro é vazio. Com efeito, se $I = A \cup B$ fosse possível com $A$ e $B$ disjuntos e ambos não-vazios, as decomposições de $A$ e $B$ em seus intervalos componentes dariam, pelo menos, dois intervalos componentes para $I$, o que é um absurdo, em virtude da unicidade do Teorema 2.2.*

## 2.2 Conjuntos fechados

Definimos que um ponto $a$ é *aderente* a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando $a$ for limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$.

Observe que todo ponto $a \in X$ é aderente a $X$, basta tomar a sequência de pontos $x_n = a$. No entanto, podemos ter também $a$ aderente a $X$ sem que $a$ pertença a $X$. Por exemplo, se $X = (0, +\infty)$, segue que $0 \notin X$, mas $0$ é aderente a $X$, pois $0 = \lim \frac{1}{n}$, com $\frac{1}{n} \in X$ para todo $n$.

*Observação* 2.3. Todo valor de aderência de uma sequência $(x_n)$ é um ponto aderente do conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Mas o contrário não ocorre, isto é, a recíproca é falsa. Nem todo ponto aderente a $X$ é valor de aderência de $(x_n)$. Por exemplo, se $\lim x_n = a$, o único valor de aderência de $(x_n)$ é $a$, mas todos os pontos $x_n$, por pertencerem a $X$, são pontos aderentes a $X$.

**Teorema 2.3.** *Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ tem-se $X \cap (a - \epsilon, a + \epsilon) \neq \emptyset$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Vejamos, seja $a$ ponto aderente a $X$, segue da definição de pontos aderentes que $a = \lim x_n$, com $x_n \in X$ para todo $n$. Assim, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, temos que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ para todo $n$ suficientemente grande. Logo, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, supondo satisfeita a condição $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \in X$ tal que $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$. Isto define uma sequência de pontos $x_n \in X$ tais que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Logo, $\lim x_n = a$ e, assim, $a$ é um ponto aderente a $X$.

□

**Corolário 2.3.** *Um ponto $a$ é aderente ao conjunto $X$ quando, para todo intervalo aberto $I$ contendo $a$, vale $I \cap X \neq \emptyset$. De fato, todo intervalo aberto contendo $a$ contém também um intervalo do tipo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$.*

**Corolário 2.4.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e $Y \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Então $a = \inf X$ é aderente a $X$ e $b = \sup Y$ é aderente a $Y$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $a \leq x < a+\epsilon$ e $b-\epsilon < y \leq b$. Isto nos dá $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(b-\epsilon, b+\epsilon) \cap Y \neq \emptyset$.*

Definimos *fecho* do conjunto $X$, e denotamos por $\overline{X}$, o conjunto formado pelos pontos aderentes a $X$. Ora, é evidente que $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$. Tem-se também $X \subset \overline{X}$ para qualquer que seja $X$. Se ocorrer $X = \overline{X}$, diremos que o conjunto $X$ é *fechado*.

Dessa maneira, definimos assim: um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, todo ponto aderente a $X$ pertence a $X$. Ou equivalentemente, para que um conjunto $X$ seja fechado é necessário e suficiente que cumpra a seguinte condição: se $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, então $a \in X$.

Por fim, sempre que $X \subset \mathbb{R}$ é não-vazio, limitado e fechado, tem-se $\sup X \in X$ e $\inf X \in X$.

*Exemplo* 2.7. Seja $(a, b)$ um intervalo aberto, seu fecho é o intervalo fechado $[a, b]$. De fato, se tomarmos $a = \lim\limits_{n\to\infty}(a+\frac{1}{n})$ e $b = \lim\limits_{n\to\infty}(b-\frac{1}{n})$, então $a$ e $b$ são aderentes ao intervalo aberto $(a, b)$. Desse modo, o fecho de $(a, b)$ inclui pelo menos o intervalo fechado $[a, b]$. Entretanto, se $a < x_n < b$ e $\lim x_n = c$, segue que $a \leq c \leq b$. Portanto, seja $x$ um ponto aderente ao intervalo $(a, b)$, temos também que $x \in [a, b]$.

*Exemplo* 2.8. O fecho do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é a própria reta $\mathbb{R}$. E também, o fecho do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais é $\mathbb{R}$. Particularmente, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não são conjuntos fechados.

**Teorema 2.4.** *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Vejamos, seja $F$ um conjunto fechado, segue da definição que todo ponto aderente a $F$ pertence a $F$, ou seja, $F = \overline{F}$. Evidentemente, se $a \in \mathbb{R} - F$, então $a \notin F$ e, por isso, não é aderente a $F$. Logo, existe um intervalo aberto $I$ tal que $a \in I$ e $I \cap F = \emptyset$. Podemos afirmar ainda que $a \in I \subset \mathbb{R} - F$, ou seja, todos os pontos do conjunto $\mathbb{R} - F$ são interiores e, por isso, $\mathbb{R} - F$ é aberto.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $\mathbb{R} - F$ é um conjunto aberto e considere $a$ um ponto aderente ao conjunto $F$, segue da definição de ponto aderente que toda vizinhança de $a$ contém pontos de F, logo $a$ não é ponto interior do conjunto $\mathbb{R} - F$. E como, por hipótese, $\mathbb{R} - F$ é aberto, temos que $a \notin \mathbb{R} - F$, ou seja, $a \in F$. Sendo assim, todo ponto $a$ aderente a $F$ pertence a $F$ e, por isso, $F$ é fechado.

$\square$

**Corolário 2.5.** *a) $\mathbb{R}$ e o conjunto vazio são fechados.*

*b) Se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são fechados, então $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado.*

*c) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados, então a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.*

*De fato, $\mathbb{R}$ é o complementar do aberto $\emptyset$, enquanto o $\emptyset$ é o complementar do aberto $\mathbb{R}$. Ainda, sejam $F_1, \ldots, F_n$ fechados, segue que $\mathbb{R} - F_1, \ldots, \mathbb{R} - F_n$ são abertos e, desse modo, $\mathbb{R} - (F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ é aberto. Consequentemente, $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado. E finalmente, para cada $F_\lambda$ fechado, temos que $\mathbb{R} - F_\lambda$ é aberto. Consequentemente, $\mathbb{R} - (\cap F_\lambda)$ é aberto e, sendo assim, $\cap F_\lambda$ é fechado.*

*Observação* 2.4. Nem sempre a reunião de uma família arbitrária de conjuntos fechados gera um conjunto fechado. De fato, seja o subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}$, temos que $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$. (Como todo conjunto, $X$ é a reunião dos seus pontos; cada ponto $x \in X$ forma um conjunto fechado $\{x\}$, mas a reunião $X$ não é um conjunto fechado.)

**Teorema 2.5.** *O fecho de todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado, isto é, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*

*Demonstração.* Seja $x \in \mathbb{R} - \overline{X}$, segue do Corolário 2.3 que existe $I = (a, b)$ tal que $x \in I$ e $I \cap X = \emptyset$. Além disso, para todo $y \in I$ vale $y \in R - \overline{X}$. Logo, $I \subset \mathbb{R} - \overline{X}$. Isto mostra que todo ponto $x \in \mathbb{R} - \overline{X}$ é um ponto interior, ou seja, $\mathbb{R} - \overline{X}$ é aberto. Pelo Teorema 2.4, $\overline{X}$ é fechado. $\square$

*Exemplo* 2.9. Todo conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é fechado, pois seu complementar é aberto. Por motivo análogo, $\mathbb{Z}$ é fechado.

*Exemplo* 2.10. Existem conjuntos que não são fechados nem abertos, como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ou um intervalo do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$.

*Exemplo* 2.11. Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são ao mesmo tempo fechados e abertos.

*Observação* 2.5. O *conjunto de Cantor* $K$ é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo: primeiro, vamos subtrair do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Em seguida, retiraremos o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes (os intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$). O que sobra então? Ora, temos $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Agora, repetimos o mesmo processo e retiramos o terço médio aberto de cada um desses intervalos. Repetindo-se o mesmo processo indefinidamente, o conjunto $K$ dos pontos não retirados é o famoso conjunto de *Cantor*. Se indicarmos com $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos abertos omitidos, segue que $K = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, ou seja, $K = [0,1] \cap (\mathbb{R} - \bigcup I_n)$. Logo, $K$ é um conjunto fechado, interseção dos fechados $[0,1]$ e $\mathbb{R} - \bigcup I_n$. Observe que os extremos dos intervalos que foram omitidos, tais como $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$, etc. são elementos do conjunto de Cantor. De fato, cada etapa da construção de $K$ retira apenas os pontos interiores dos intervalos restantes da etapa anterior. Esses pontos extremos acabam formando um subconjunto infinito enumerável de $K$. Entretanto, veremos mais adiante que $K$ não é enumerável. Por enquanto, nos contentemos apenas com o fato de que $K$ não contém intervalo aberto algum e portanto nenhum ponto $x \in K$ é ponto interior. Com efeito, depois da $n$-ésima etapa da construção do conjunto de Cantor, restam-nos apenas os intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Isto quer dizer que, dado qualquer intervalo aberto $J \subset [0,1]$, cujo comprimento é $l > 0$, ele não será o mesmo após a $n$-ésima etapa, desde que tenhamos $\frac{1}{3^n} < l$. Dessa maneira, não se pode ter $J \subset K$.

Geometricamente, temos:

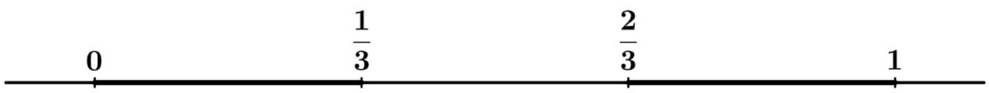



Figura 8.1: Primeira etapa


Figura 8.2: Segunda etapa

Sejam $X, Y$ conjuntos de números reais, com $X \subset Y$. Dizemos que $X$ é *denso* em $Y$ quando todo ponto de $Y$ for aderente a $X$. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Também $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Mais ainda, dado qualquer intervalo não-degenerado $J$, o conjunto dos números racionais pertencentes a $J$ e o conjunto dos números irracionais que estão em $J$ são ambos conjuntos densos em $J$.

Se $X \subset Y$ e $X$ é denso em $Y$, as seguintes afirmações são equivalentes:

*a*) Todo ponto de $Y$ é limite de uma sequência de pontos de $X$.

*b*) $Y \subset \overline{X}$.

*c*) Para todo $y \in Y$ e todo $\epsilon > 0$, tem-se $(y - \epsilon, y + \epsilon) \cap X \neq \emptyset$.

*d*) Todo intervalo aberto que contenha um ponto de $Y$ deve conter também algum ponto de $X$.

**Teorema 2.6.** *Todo conjunto $X$ de números reais contém um subconjunto enumerável $E$, denso em $X$.*

*Demonstração.* Vejamos, podemos interpretar a reta $\mathbb{R}$ como uma reunião enumerável de intervalos de comprimento $\dfrac{1}{n}$, isto é, $\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\dfrac{p}{n}, \dfrac{p+1}{n}\right)$, seja qual for $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$, escolhamos um ponto $x_{pn} \in X \cap \left[\dfrac{p}{n}, \dfrac{p+1}{n}\right)$ e consideremos esta interseção não-vazia (se for vazia, $x_{pn}$ não existirá). Desse modo, o conjunto $E$ dos pontos $x_{pn}$ assim obtidos é enumerável. Afirmamos que $E$ é denso em $X$. De fato, seja $I = (a, b)$ e suponha que $I$ contenha um ponto qualquer $x \in X$. Se tomarmos $n$

suficientemente grande, então o comprimento $\frac{1}{n}$ de cada intervalo $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ será menor do que a distância de $x$ ao extremo superior de $I$. Isto nos permite concluir que existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \subset I$. Portanto, $x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \cap X \neq \emptyset$. Assim, segue que existe $x_{pn} \in I \cap E$. Ou seja, todo intervalo aberto $I$ que contém um ponto $x \in X$ contém também um ponto $x_{pn} \in E$. Logo $E$ é denso em $X$. □

## 2.3 Pontos de acumulação

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação* do conjunto $X$ quando todo intervalo aberto $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, com $\epsilon > 0$ e de centro $a$, contém algum ponto $x \in X$ diferente de $a$. Denotamos por $X'$ o conjunto dos pontos de acumulação.

A condição $a \in X'$ ($a$ é ponto de acumulação de $X$) exprime-se em símbolos da seguinte maneira:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ x \in X; 0 < |x-a| < \epsilon.$$

**Teorema 2.7.** *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$a \in X'$ ($a$ é ponto de acumulação de $X$);*

2. *$a = \lim x_n$, onde $(x_n)$ é uma sequência de elementos de $X$, dois a dois disjuntos;*

3. *Todo intervalo aberto contendo $a$ possui uma infinidade de elementos de $X$.*

*Demonstração.* Partiremos de (1) e provaremos (2) e (3). Suponha que $a \in X'$. Existe $x_1 \in X$ tal que $0 < |x_1 - a| < 1$. Agora, tomando $\epsilon_2 = \min\left\{|x_1 - a|, \frac{1}{2}\right\}$, segue que existe $x_2 \in X$ tal que $0 < |x_2 - a| < \epsilon_2$. Ainda, seja $\epsilon_3 = \min\left\{|x_2 - a|, \frac{1}{3}\right\}$, segue que existe também $x_3 \in X$ tal que $0 < |x_3 - a| < \epsilon_3$. Se prosseguirmos dessa maneira sucessivamente, obteremos uma sequência de elementos $x_n \in X$ com $|x_{n+1} - a| < |x_n - a|$ e $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Deste modo, os $x_n$ são dois a dois distintos, pertencem a $X$ e $\lim x_n = a$. Evidentemente, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). □

**Corolário 2.6.** *Se $X' \neq \emptyset$, então $X$ é infinito.*

*Exemplo* 2.12. Seja $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, segue que $X' = \{0\}$. Em geral, se acontecer de $\lim x_n = a$ e $a \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, pondo $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, temos $X' = \{a\}$. No entanto, se $a \in X$, daí podemos ter $X' = \{a\}$ ou $X' = \emptyset$.

Se um ponto $a \in X$ não é ponto de acumulação, então $a$ é um ponto *isolado* de $X$.

Para que $a \in X$ seja um ponto isolado é necessário e suficiente que exista $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X = \{a\}$.

**Teorema 2.8.** *Para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Ou equivalentemente, o fecho de um conjunto $X$ é obtido acrescentando-se a $X$ os seus pontos de acumulação.*

*Demonstração.* Vejamos, é evidente que $X \subset \overline{X}$ e $X' \subset \overline{X}$. Isto é, $X \cup X' \subset \overline{X}$. Reciprocamente, se $a \in \overline{X}$, todo intervalo aberto contendo $a$ deve conter também algum ponto $x \in X$. Caso $a \notin X$, segue que $x \neq a$, donde $a \in X'$. Assim $a \in \overline{X}$ implica que $a \in X$ ou $a \in X'$ e, consequentemente, $\overline{X} \subset X \cup X'$. □

**Corolário 2.7.** *$X$ é fechado se, e somente se, $X' \subset X$. De fato, dados dois conjuntos $A, B$, temos que $A = A \cup B$ se, e somente se, $B \subset A$.*

**Corolário 2.8.** *Se todos os pontos do conjunto $X$ são pontos isolados, então $X$ é enumerável. Com efeito, seja $E \subset X$ um conjunto enumerável denso em $X$. Dessa maneira, para todo ponto $x \in X$, temos também que $x \in \overline{E}$ mas, como $x \notin X'$, segue que $x$ não pode ser ponto de acumulação de $E$. Logo $x \in E$ e, sendo assim, $E = X$. Concluímos que $X$ é enumerável.*

É comum dizermos que $a$ é *ponto de acumulação à direita* do conjunto $X$ quando todo intervalo $[a, a + \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, contém algum ponto de $X$ diferente de $a$. Em resumo, o ponto $a$ é ponto de acumulação à direita de $X$ se, e somente se, todo intervalo aberto $(a, b)$ contém algum ponto de $X$.

Denotaremos pelo símbolo $X'_+$ o conjunto dos pontos de acumulação à direita de $X$. De maneira análoga, definimos *ponto de acumulação à esquerda* do conjunto $X$: todo intervalo $(a - \epsilon, a]$, com $\epsilon > 0$, deve conter algum ponto de $X$ diferente de $a$. Isto é, $a \in X'_-$ se, e somente se, para todo intervalo aberto $(c, a)$ vale $(c, a) \cap X \neq \emptyset$

*Exemplo* 2.13. Seja o conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, temos que $0$ é ponto de acumulação à direita, mas não à esquerda de $X$.

**Teorema 2.9.** *Seja $F \subset \mathbb{R}$ não-vazio tal que $F = F'$. (Isto é, $F$ é um conjunto fechado não-vazio sem pontos isolados.) Então $F$ é não enumerável.*

Antes de demonstrarmos o Teorema 2.9, faz-se necessário apresentar o seguinte resultado:

**Lema 8.4.** *Seja $F$ fechado, não-vazio, sem pontos isolados. Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $F_x$ limitado, fechado, não-vazio, sem pontos isolados, tal que $x \notin F_x \subset F$.*

*Demonstração.* Vejamos, como $F$ é infinito, existe $y \in F$, $y \neq x$. Seja $[a, b]$ um intervalo fechado tal que $x \notin [a, b]$ e $y \in (a, b)$. O conjunto $G = (a, b) \cap F$ é, então, limitado, não-vazio e nenhum dos seus pontos é isolado. Se $G$ é um conjunto fechado, definimos $F_x = G$ e o Lema estará demonstrado. Se, porém, $G$ é um conjunto aberto, então pelo menos um dos $a, b$ será ponto de acumulação de $G$. Neste caso, acrescentaremos esses(s) ponto(s) a $G$ para obter $F_x$. Ou seja, em ambas as hipóteses, temos $F_x = \overline{G}$. □

A seguir, segue a demonstração do Teorema 2.9.

*Demonstração.* Será demonstrado que, dado qualquer subconjunto enumerável (nesse caso, subconjunto infinito enumerável) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset F$, podemos sempre encontrar um ponto $y \in F$ tal que $y \neq x_n$ para todo $n$. Aplicando repetidamente o Lema 8.4 a $x_1$ e $F$, a $x_2$ e $F_1$, etc., obtemos uma sequência de conjuntos fechados limitados e não-vazios $F_n$ tais que $F \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ e $x_n \notin F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora, escolhendo, para cada $n$, um ponto $y_n \in F_n$, segue que a sequência $(y_n)$ é limitada, logo possui uma subsequência convergente $y'_n \to y$. Assim, dado arbitrariamente $k \in \mathbb{N}$, temos $y'_n \in F_k$ para todo $n \geq k$. Como $F_k$ é fechado, segue-se que $y = \lim y'_n \in F_k$. Portanto, $y \in F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde concluímos que $y \in F$ e $y \neq x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto completa a demonstração. $\square$

**Corolário 2.9.** *Todo conjunto fechado enumerável não-vazio possui algum ponto isolado.*

**Corolário 2.10.** *O conjunto de Cantor não é enumerável.*

*De fato, o conjunto de Cantor é não-vazio, fechado, sem pontos interiores (pois não contém intervalo aberto algum) e sem pontos isolados (ou seja, todos os seus pontos são pontos de acumulação). Para ajudar a enxergar melhor esse resultado, o leitor deve considerar o subconjunto infinito enumerável formado pelos pontos extremos dos intervalos omitidos durante as etapas de construção do conjunto de Cantor.*

## 2.4 Conjuntos compactos

Dado um conjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}$, chamaremos de *cobertura* do conjunto $X$ uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}$ tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, ou seja, para todo $x \in X$ existe algum $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Seguindo esse raciocínio, chamaremos de *subcobertura* de $\mathcal{C}$ uma subfamília $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, com $L' \subset L$, tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

*Exemplo* 2.14. Vamos começar com um exemplo numérico. Para $C_1 = (0, 2)$, $C_2 = \left(\dfrac{1}{2}, 5\right)$ e $C_3 = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$, segue que estes conjuntos constituem uma cobertura $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ do intervalo $[1, 4]$. Observe que, nesse exemplo, $L = \{1, 2, 3\}$. De fato, é evidente que $[1, 4] \subset C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (0, 5)$. Em particular, se tomarmos $L' = \{1, 3\}$, teremos uma subfamília $\mathcal{C}' = (C_1, C_3)$, a qual é uma subcobertura de $\mathcal{C}$, pois ainda valerá $[1, 4] \subset C_1 \cup C_3 = \left(0, \dfrac{9}{2}\right)$.

*Exemplo* 2.15. Para $X = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$ e seja $X$ um conjunto infinito sem pontos de acumulação, isto é, todos os seus pontos são pontos isolados ($X \cap X' = \emptyset$). Desse modo, para todo $x \in X$, é possível sempre encontrar um intervalo aberto $I_x$, de centro $x$, tal que $I_x \cap X = \{x\}$. Sendo assim, a família $\mathcal{C} = (I_x)_{x \in X}$ é uma cobertura do conjunto $X$. No entanto, não há nenhuma subcobertura de $\mathcal{C}$. De fato, se omitirmos qualquer $I_x$, teríamos um ponto $x$ sem cobertura.

**Teorema 2.10** (Borel-Lebesgue)**.** *Se $[a, b]$ é um intervalo limitado e fechado, e dada uma família $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ de intervalos abertos tais que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$, então existe um número finito dos intervalos $I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}$ tais que $[a, b] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$. Em palavras mais simples: toda cobertura de $[a, b]$ constituída por intervalos abertos admite uma subcobertura finita.*

*Demonstração.* Seja $X$ o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que o intervalo $[a, x]$ pode ser coberto por um número finito dos intervalos $I_\lambda$, ou seja, $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$. Desse modo, $X \neq \emptyset$, pois $a \in X$. E seja $c = \sup X$, é evidente que $c \in [a, b]$. Vamos provar agora que $c \in X$. De fato, existe algum $I_{\lambda_0} = (\alpha, \beta)$ tal que $c \in I_{\lambda_0}$. Como $\alpha < c$, certamente existe $x \in X$ tal que $\alpha < x \leq c$. Isto é, $x \in I_{\lambda_0}$. Mas como $x \in X$, segue que $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$ e daí $[a, c] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$, donde podemos concluir que $c \in X$. Resta mostrar agora que $c = b$. Se valesse $c < b$, teríamos algum $c' \in I_{\lambda_0}$ e valeria $c < c' < b$. Dessa maneira, $[a, c'] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$ e, consequentemente, $c' \in X$, um absurdo, pois $c' > c$ e $c$ é o sup de $X$. Conclusão: o intervalo $[a, b]$ está, de fato, contido numa reunião finita dos $I_\lambda$, o que prova o Teorema. □

*Observação* 2.6 (Extensão do Teorema acima). Veja que podemos expandir o Teorema acima para o seguinte resultado: suponhamos $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, uma cobertura de $[a, b]$ por conjuntos abertos quaisquer $A_\lambda$, e ainda existirá uma cobertura finita:

$$[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

De fato, cada ponto $x \in [a, b]$ pertence a um aberto $A_\lambda$. Portanto, para cada $x$ podemos tomar um intervalo aberto $I_x$ tal que $x \in I_x \subset A_\lambda$. Isto nos fornece uma cobertura de $[a, b]$ pelos intervalos $I_x$, da qual extraímos uma subcobertura finita $[a, b] \subset I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \cdots \cup I_{x_n}$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, existe $\lambda_j \in L$ tal que $I_{x_j} \subset A_{\lambda_j}$: assim, $[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

**Teorema 2.11** (Forma definitiva do Teorema Borel-Lebesgue)**.** *Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado e fechado. Toda cobertura $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de $F$ por meio de abertos admite uma subcobertura finita:*

$$F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

*Demonstração.* Como $F$ é fechado, segue que $A = \mathbb{R} - F$ é aberto. E sendo $F$ limitado, existe um intervalo limitado $[a, b]$ que contém $F$. Assim, temos $[a, b] \subset (\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) \cup A$. Daí podemos extrair uma subcobertura finita $F \subset [a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup A$. E como nenhum ponto de $F$ está em $A$, obtemos $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$, como queríamos demonstrar. □

*Exemplo* 2.16. Até mesmo a reta $\mathbb{R}$, sendo um conjunto fechado, porém ilimitado, possui a cobertura $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, +n)$, a qual não admite subcobertura finita. De fato, a reunião de um número finito de intervalos $(-n, n)$ é igual ao maior deles e, portanto, não pode ser $\mathbb{R}$. Por outro lado, o intervalo $(0,1]$, sendo limitado, mas não fechado, possui a cobertura $(0,1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 2\right)$, da qual não se pode extrair uma subcobertura finita, pois a reunião de um número finito de intervalos da forma $\left(\frac{1}{n}, 2\right)$ é o maior deles e, portanto, não pode conter $(0,1]$.

**Teorema 2.12.** *As seguintes afirmações a respeito de um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:*

1. *$K$ é limitado e fechado;*
2. *Toda cobertura aberta de $K$ possui subcobertura finita;*
3. *Todo subconjunto infinito de $K$ possui ponto de acumulação pertencente a $K$;*
4. *Toda sequência de pontos de $K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de $K$.*

*Demonstração.* Vejamos, observe que, pelo Teorema 2.11 (Forma definitiva do Teorema Borel-Lebesgue), podemos concluir que (1) $\Rightarrow$ (2). Na sequência, para provar que (2) $\Rightarrow$ (3), suponha um subconjunto $X \subset K$ sem ponto de acumulação em $K$. Dessa maneira, para todo $x \in K$, é possível encontrar um intervalo aberto $I_x$, de centro $x$, que não possui ponto algum de $X - \{x\}$. Em símbolos, temos que $I_x \cap X = \{x\}$ se $x \in X$ e $I_x \cap X = \emptyset$ se $x \notin X$. Consequentemente, temos uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x\in X} I_x$, da qual podemos extrair uma subcobertura finita $K \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$. Em particular, esta reunião finita contém $X$. Afinal, para cada $x \in X$, o único intervalo da cobertura original que continha $x$ era o próprio $I_x$. Sendo assim, para cada $x \in X$, o intervalo $I_x$ faz parte da coleção de intervalos $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}$. Logo $X$ é finito. Então, quando se supõe que $K$ cumpre a condição (2), os únicos subconjuntos de $K$ que não possuem ponto de acumulação em $K$ são os finitos. Segue-se que (2) $\Rightarrow$ (3).

Vamos provar agora que (3) $\Rightarrow$ (4). De fato, dada uma sequência de pontos $x_n \in K$, há duas possibilidades: ou o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ é finito ou é infinito. No primeiro caso, isto é, $X$ é finito, temos que algum valor $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots$ certamente se repetirá uma infinidade de vezes, o que nos dá uma sequência constante (e convergente) de $(x_n)$. No segundo caso, ou seja, $X$ é infinito, segue da hipótese (3) que existe um ponto $a$ de acumulação de $X$ tal que $a \in K$. Todo intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ contém uma infinidade de pontos de $X$ e, portanto, contém termos $x_n$ com índices arbitrariamente grandes. Assim, segue do Teorema 1.11 que $a$ é limite de uma subsequência de $(x_n)$.

Finalmente, vamos mostrar que (4) $\Rightarrow$ (1). Com efeito, se $K$ fosse um conjunto ilimitado superiormente, poderíamos tomar $x_1 \in K$ e verificar que existe $x_2 \in K$ tal que $x_2 > x_1 + 1$. Prosseguindo dessa maneira, obteríamos uma sequência de pontos $x_n \in K$

com $x_{n+1} > x_n + 1$. Toda subsequência $(x_n)$ seria, então, ilimitada e, portanto, não-convergente. Por outro lado, se $K$ não fosse fechado, existiria uma sequência de pontos $x_n \in K$ com $\lim x_n = x \notin K$. Qualquer subsequência de $(x_n)$ convergiria para $x$ e, sendo assim, estaria violada a condição (4). Isto conclui a demonstração. □

**Corolário 2.11** (Bolzano-Weierstrass)**.** *Todo conjunto infinito limitado $X \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação.*

*Observação* 2.7. Note que o Teorema 2.12 fornece uma outra maneira de como demonstrar o Corolário 1.6, segundo o qual toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Seja um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ tal que $K$ cumpre uma das (ou seja, todas as) condições do Teorema 2.12, então diremos que $K$ é um conjunto *compacto*.

*Exemplo* 2.17. O intervalo $[a, b]$ é um conjunto compacto. O conjunto de Cantor e o conjunto $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ também são conjuntos compactos. Em geral, todo conjunto finito é compacto. Ainda, a reta $\mathbb{R}$, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e $\mathbb{Z}$ não são compactos.

**Teorema 2.13.** *Seja $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \ldots$ uma sequência descendente de compactos não-vazios. Então $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é não-vazio (e compacto).*

*Demonstração.* Naturalmente, $K$ é fechado (pois é interseção dos fechados $K_n$) e limitado (está contido em $K_1$). Desse modo, concluímos que $K$ é compacto. Agora, a fim de demonstrar que $K$ não é vazio, devemos escolher, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in K_n$. Observe que todos os pontos da sequência $(x_n)$ assim obtida pertencem ao compacto $K_1$. Ou seja, ela possui uma subsequência convergente, digamos $x_{n_i} \to x$. Afirmamos que $x \in K$, ou equivalentemente, $x \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, dado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$, existe $n_{i_0} > n$ e, para todo $n_i \geq n_{i_0}$, temos $x_{n_i} \in K_{n_i} \subset K_{n_{i_0}} \subset K_n$. Portanto, a partir de um certo índice $n_{i_0}$, todos os termos da sequência $(x_{n_i})$ pertencem ao fechado $K_n$ e, sendo assim, $x = \lim x_{n_i} \in K_n$, como queríamos demonstrar. □

*Apêndice* 2.1. Com o intuito de aplicar o Teorema 2.10 (Teorema de Borel-Lebesgue), serão demonstrados a seguir alguns fatos sobre comprimentos de intervalos. Somado a isso, usaremos tais resultados para dar exemplos interessantes.

**Proposição 2.1.** *Se $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$, então $b - a < \sum_{i=i}^{n} (b_i - a_i)$.*

*Demonstração.* Considere, sem perca de generalidade, que todos os intervalos abertos $(a_i, b_i)$ intersectam $[a, b]$. Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_k$ os números $a_i$ e $b_i$ em ordem crescente. Bom, evidentemente, nenhum intervalo $(c_j, c_{j+1})$ contém um ponto $a_i$ ou um ponto $b_i$. Além disso, $c_1 < a$ e $b < c_k$. Logo, $b - a < c_k - c_1$, ou seja,

$$b - a < (c_k - c_{k-1}) + \cdots + (c_3 - c_2) + (c_2 - c_1).$$

Será mostrado agora que cada intervalo do tipo $(c_j, c_{j+1})$ está contido em algum $(a_i, b_i)$. Para isto, iremos examinar todas as três possíveis posições do ponto $c_j$ em relação ao intervalo $[a, b]$.

1. $c_j \in [a, b]$. Neste caso, $c_j \in (a_i, b_i)$, para algum $i$ conveniente. Como $b_i$ não pode estar entre $c_j$ e $c_{j+1}$, segue-se então que $(c_j, c_{j+1}) \subset (a_i, b_i)$.

2. $c_j < a$. Vejamos, $c_j$ não pode ser um $b_i$, pois caso contrário teríamos que $(a_i, b_i)$ é disjunto de $[a, b]$. Sendo assim, $c_j = a_i$, para algum $i$ conveniente. Como $b_i$ não pode estar entre $c_j$ e $c_{j+1}$, segue-se então que $(c_j, c_{j+1}) \subset (a_i, b_i)$.

3. $c_j > b$. Naturalmente, isto implica $c_{j+1} > b$ e, como já vimos, obriga $c_{j+1} = b_i$, para algum $i$ conveniente. Como $a \notin (c_j, c_{j+1})$, podemos concluir que $a_i \leq c_j$, donde $(c_j, c_{j+1}) \subset (a_i, b_i)$.

Ora, dessa maneira, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, temos $a_i = c_p$ e $b_i = c_{p+q}$, o que nos permite escrever:

$$b_i - a_i = (c_{p+q} - c_{p+q-1}) + \cdots + (c_{p+1} - c_p).$$

A soma $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ pode, portanto, ser decomposta em parcelas do tipo $c_{j+1} - c_j$, de modo que todas as parcelas (quando $j$ assume valores $1, 2, \ldots, k-1$) compareçam pelo menos uma vez pois, como vimos, cada intervalo $(c_j, c_{j+1})$ está contido em algum $(a_i, b_i)$. Segue-se que $\sum(b_i - a_i) \geq \sum(c_{j+1} - c_j) > b - a$. □

**Proposição 2.2.** *Se $[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, então $b - a < \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.10 (Teorema de Borel-Lebesgue), existem $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tais que

$$[a, b] \subset (a_{n_1}, b_{n_1}) \cup \cdots \cup (a_{n_k}, b_{n_k}).$$

Pela Proposição 2.1, $b - a < (b_{n_1} - a_{n_1}) + \cdots + (b_{n_k} - a_{n_k})$. Com maior razão, $b - a < \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$. □

**Proposição 2.3.** *Se $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < b - a$, então o conjunto $X = [a, b] - \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ é não-enumerável.*

*Demonstração.* Seja $c = (b - a) - \sum(b_n - a_n) > 0$. Se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ fosse enumerável, então tomaríamos para cada $n$ um intervalo $J_n$, de centro $x_n$ e comprimento $\dfrac{c}{2^{n+1}}$. Os intervalos $(a_n, b_n)$ e mais os $J_n$ formariam uma coleção enumerável cuja reunião certamente conteria $[a, b]$. Por outro lado, a soma dos comprimentos dos $(a_n, b_n)$ mais os comprimentos dos $J_n$ seria igual a $\dfrac{c}{2} + \sum(b_n - a_n)$ e, portanto, ainda inferior a $b - a$. Mas isto contradiz a Proposição 2.2 □

*Exemplo* 2.18. Vejamos agora uma coleção de intervalos abertos cujos centros incluem todos os números racionais de $[a,b]$, mas que não é uma cobertura de $[a,b]$. Para obtê-la, seja $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ uma enumeração dos racionais do intervalo $[a,b]$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $(a_n, b_n)$ o intervalo aberto de centro $r_n$ e cujo comprimento é $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$. Então $\sum(b_n - a_n) = \dfrac{b-a}{2}$ e, portanto, o intervalo $[a,b]$ não está contido na reunião dos $(a_n, b_n)$.

*Exemplo* 2.19. Um conjunto fechado não-enumerável, formado apenas por números irracionais. Tal é o conjunto $F = [a,b] - \bigcup(a_n, b_n)$, onde os intervalos $(a_n, b_n)$ são os do exemplo acima.

## 2.5 Exercícios

*Exercício* 2.1. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, tem-se $\mathrm{int(X \cap Y) = int(X) \cap int(Y)}$ e $\mathrm{int(X \cup Y) \supset int(X) \cup int(Y)}$. Dê um exemplo em que a inclusão não se reduza a uma igualdade.

*Solução.* Seja $w \in \mathrm{int(X \cap Y)}$, segue da definição de pontos interiores que existe um intervalo aberto $(a,b)$ tal que $w \in (a,b) \subset X \cap Y$. Daí temos a certeza que $w \in (a,b) \subset X$ e $w \in (a,b) \subset Y$. Logo, $w \in \mathrm{int(X) \cap int(Y)}$. Por outro lado, seja $w \in \mathrm{int(X) \cap int(Y)}$, segue da definição que $w \in \mathrm{int(X)}$ e $w \in \mathrm{int(Y)}$, ou equivalentemente, existem intervalos abertos $(a,b)$, $(c,d)$ tais que $w \in (a,b) \subset X$ e $w \in (c,d) \subset Y$. Agora, tomando $a_1 = \max\{a,c\}$ e $b_1 = \min\{b,d\}$, podemos garantir que $w \in (a_1, b_1) \subset X \cap Y$. Logo, $\mathrm{int(X) \cap int(Y) \subset int(X \cap Y)}$. Portanto, $\mathrm{int(X \cap Y) = int(X) \cap int(Y)}$.

Resta provar que $\mathrm{int(X \cup Y) \supset int(X) \cup int(Y)}$. De fato, seja $w \in \mathrm{int(X) \cup int(Y)}$, segue da definição que $w \in \mathrm{int(X)}$ ou $w \in \mathrm{int(Y)}$, isto é, $w \in (a,b) \subset X$ ou $w \in (c,d) \subset Y$. Assim, seja $a_1 = \min\{a,c\}$ e $b_1 = \max\{b,d\}$, é possível garantir que $w \in (a_1, b_1) \subset X \cup Y$. Logo, $\mathrm{int(X) \cup int(Y) \subset int(X \cup Y)}$, ou ainda, $\mathrm{int(X \cup Y) \supset int(X) \cup int(Y)}$.

Por fim, tome como exemplo $X = [-1, 0)$ e $Y = [0, 1]$. Temos

1. $\mathrm{int(X)} = (-1, 0)$;

2. $\mathrm{int(Y)} = (0, 1)$;

3. $\mathrm{int(X) \cup int(Y)} = (-1, 1) - \{0\}$;

4. $\mathrm{int(X \cup Y)} = (-1, 1)$.

*Exercício* 2.2. Se $X \subset F$ e $F$ é fechado, então $\overline{X} \subset F$.

*Solução.* Ora, se $F$ é fechado, então $F = \overline{F}$. Segue da definição de fecho de um conjunto que $X \subset F \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{F}$. E como $F = \overline{F}$, então $\overline{X} \subset F$.

*Exercício* 2.3. Se $\lim x_n = a$ e $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, então $\overline{X} = X \cup \{a\}$.

*Solução.* Suponha $b \neq a$ tal que $b \in \overline{X}$ e $b \notin X$. Desse modo, existe uma sequência $y_n$ em $X$ tal que $\lim y_n = b$. Se tomarmos $0 < \epsilon < |b - a|$, então teremos $b < a - \epsilon$ ou $b > \epsilon + a$, ou seja, $b \notin (a - \epsilon, a + \epsilon)$, o que é um absurdo. De fato, como $x_n \to a$, segue que existe $n_0$ tal que $n > n_0$ implica que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, ficando apenas um número finito de termos da sequência fora do intervalo, o que prova que é impossível uma subsequência de $x_n \to b$. Portanto, $\overline{X} = X \cup \{a\}$.

*Exercício* 2.4. Para $X, Y \subset \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê um exemplo no qual a inclusão não se reduz a igualdade.

*Solução.* Seja $a \in \overline{X} \cup \overline{Y}$, segue da definição de fecho de um conjunto que existe uma sequência $(x_n)$ em $X$ ou $(y_n)$ em $Y$ que tende à $a$. Em ambos os casos, temos uma sequência em $X \cup Y$ que tende à $a$. Logo, $\overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$. Por outro lado, seja $a \in \overline{X \cup Y}$, segue da definição que existe uma sequência $(z_n)$ em $X \cup Y$ que tende à $a$. E, sendo assim, esta sequência possui uma subsequência em $X$ ou uma subsequência em $Y$. No primeiro caso, $a \in \overline{X}$, e no segundo caso, $a \in \overline{Y}$. Em ambos os casos, $a \in \overline{X} \cup \overline{Y}$. Logo, $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$. Portanto, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Resta provar que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. De fato, seja $a \in \overline{X \cap Y}$, segue da definição que existe uma sequência $(z_n)$ em $X \cap Y$ que tende à $a$ e, consequentemente, $a \in \overline{X}$. De modo análogo, podemos concluir que $a \in \overline{Y}$. Logo, $a \in \overline{X} \cap \overline{Y}$. Ou seja, $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Por fim, tome como exemplo $X = [-1, 0)$ e $Y = (0, 1]$. Temos

1. $\overline{[-1, 0) \cap (0, 1]} = \overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $\overline{[-1, 0)} \cap \overline{(0, 1]} = [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}$.

*Exercício* 2.5. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$.

*Solução.* ($\Rightarrow$) Seja $A$ um conjunto aberto. Dado $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in A \cap \overline{X}$, segue que existe uma sequência $(x_n)$ em $X$ que tende à $a$. Como $A$ é aberto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in A$. Daí podemos dizer que existe uma sequência em $A$ que tende à $a$. Ou seja, $a \in \overline{A}$. Logo, $a \in \overline{A} \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$.

($\Leftarrow$) Agora, seja $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cup X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$. Assim, dado $a \in A$, suponhamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) - A$. Seja $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Desse modo, $\{a\} = A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X} = \overline{\emptyset} = \emptyset$. O que é uma contradição. Logo, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \subset A$. E, assim, $a \in \mathrm{int(A)}$.

*Exercício* 2.6. Um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, satisfaz a condição seguinte: "$a, b \in X, a < x < b \Rightarrow x \in X$".

*Solução.* ($\Rightarrow$) Seja $X$ um intervalo não-vazio e defina $\alpha = \inf X$ e $\beta = \sup X$. Assim, dados $a, b \in X$, com $a < b$, e $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$, segue que

$$x \in (a, b) \subset (\alpha, \beta) \subset X.$$

($\Leftarrow$) Agora, seja $X$ um conjunto que satisfaz a condição "$a, b \in X, a < x < b \Rightarrow x \in X$". Sejam $\alpha = \inf X$ e $\beta = \sup X$. Temos então que $(\alpha, \beta) \subset X$. De fato, dado $x \in (\alpha, \beta)$, existem $a, b \in X$ tais que

$$\alpha \leq a < x < b \leq \beta.$$

Logo, pela propriedade, $x \in X$. Por outro lado, $X - \{\alpha, \beta\} \subset (\alpha, \beta)$ pela definição de $\alpha$ e $\beta$. Portanto,

$$X = [\alpha, \beta] \text{ ou } X = [\alpha, \beta) \text{ ou } X = (\alpha, \beta] \text{ ou } X = (\alpha, \beta).$$

*Exercício* 2.7. Para todo $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $\sup X$ é aderente a $X$. Resultado análogo para inf.

*Solução.* Pela definição de supremo, para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $\sup X - \epsilon < x \leq \sup X$. Assim, para $n \geq 1$ em $\mathbb{N}$, e tomando $x_n \in X$ tal que $\sup X - \dfrac{1}{n} < x_n \leq \sup X$. Temos, assim, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \sup X| < \dfrac{1}{n}$. Logo, a sequência $(x_n)$ em $X$ tende à $\sup X$ e $\sup X \in \overline{X}$.

Analogamente, pela definição de ínfimo, para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $\inf X \leq x < \inf X + \epsilon$. Assim, para $n \geq 1$ em $\mathbb{N}$, e tomando $x_n \in X$ tal que $\inf X \leq x_n < \inf X + \dfrac{1}{n}$. Temos, assim, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \inf X| < \dfrac{1}{n}$. Logo, a sequência $(x_n)$ em $X$ tende à $\inf X$ e $\inf X \in \overline{X}$.

*Exercício* 2.8. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, $X'$ é fechado.

*Solução.* Seja $a \in \overline{X'}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X'$ tal que $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. E como $x \in X'$, existem infinitos elementos de $X$ em $(x - \sigma, x + \sigma)$ donde $\sigma = \min\{|x - (a - \epsilon)|, |x - (a + \epsilon)|\}$. Assim, infinitos elementos de $X$ pertencem à $(a - \epsilon, a + \epsilon) \supset (x - \sigma, x + \sigma)$. Isso implica que $a \in X'$. Concluímos então que $X \supset \overline{X'}$ e, portanto, $\overline{X'} = X'$.

*Exercício* 2.9. Um número $a$ é ponto de acumulação de $X$ se, e somente se, é também ponto de acumulação de $\overline{X}$.

*Solução.* ($\Rightarrow$) Seja $a$ um ponto de acumulação de X. Então, para todo $\epsilon > 0$ existem infinitos elementos de $X$ em $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. E como $X \subset \overline{X}$, existem infinitos elementos de $\overline{X}$ em $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, ou seja, a é ponto de acumulação de $\overline{X}$.

($\Leftarrow$) Agora, seja $a$ um ponto de acumulação de $\overline{X}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\overline{x} \in X$ tal que $\overline{x} \in (a-\epsilon, a+\epsilon)-\{a\}$. Tomando-se $\delta = \min\{|\overline{x}-a|, |\overline{x}-(a-\epsilon)|, |\overline{x}-(a+\epsilon)|\}$, temos que existe $x \in X$ tal que $|\overline{x}-x| < \delta$. Assim, $x \in (\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta) \subset (a-\epsilon, a+\epsilon)-\{a\}$. Segue daí que $a$ é ponto de acumulação de $X$.

*Exercício* 2.10. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto cujos pontos, com exceção de $a = \inf X$ e $b = \sup X$, são pontos de acumulação à direita e à esquerda. Então $X = [a, b]$ ou $X = \{a, b\}$.

*Solução.* Bom, segue do enunciado que $X$ é um conjunto compacto, isto nos permite afirmar que $X$ também é um conjunto limitado e fechado. Desse modo, podemos definir $a = \inf X$ e $b = \sup X$. Agora, suponhamos $X \neq \{a, b\}$. Então, existe $c \in X$ tal que $a < c < b$. Mais ainda, pela definição imposta no enunciado, temos que $c$ é um ponto de acumulação do conjunto $X$. Seja $x \in (a, b)$. Temos os seguintes casos:

- Se $c \leq x$, segue que $s = \sup([a, x] \cap X)$ é tal que

  $$a < c \leq s \leq x.$$

  Se $s = x$, então evidentemente $s = x \in X - \{a, b\}$ e todo intervalo aberto contendo $s$ possui uma infinidade de elementos de $X$. Caso contrário, se $s \neq x$, então $s \in X - \{a, b\}$ mas $[s, x) \cap X = \{s\}$ (pois $s = \sup([a, x] \cap X)$). Logo, $s$ não seria um ponto de acumulação à direita, um absurdo.

- Se $x \leq c$, segue que $s = \inf([x, b] \cap X)$ é tal que

  $$x \leq s \leq c < b.$$

  Se $s = x$, então evidentemente $s = x \in X - \{a, b\}$ e todo intervalo aberto contendo $s$ possui uma infinidade de elementos de $X$.

  Se $s \neq x$, então $s \in X - \{a, b\}$ mas $(x, s] \cap X = \{s\}$ (pois $s = \inf([x, b] \cap X)$). Logo, $s$ não seria um ponto de acumulação à esquerda, um absurdo.

Em ambos os casos, $x \in X$. Sendo assim, para qualquer que seja $x \in (a, b)$, segue que $x$ é um ponto de acumulação de $X$ e, portanto, $X = [a, b]$.

# 3 Limites de Funções

## Introdução

Iremos retomar nessa seção a noção de limite, mas desta vez sob uma forma mais geral. Por exemplo, durante os estudos sobre sequências e séries, foi definido o limite de uma sequência. Consideremos agora funções reais $f : X \to \mathbb{R}$, definidas em subconjuntos arbitrários $X \subset \mathbb{R}$.

Bom, é bem verdade que a maioria das funções de uma variável encontradas em Análise são definidas em intervalos ou em reuniões finitas de intervalos. Nosso argumento aqui, para se levar em consideração maior generalidade, é baseado em dois pontos principais: em primeiro lugar, o esforço adicional é pouco e compensado por uma visão mais ampla; em segundo lugar, será de profundo desfruto para os estudos posteriores (funções de várias variáveis, integral de Lebesgue, cálculo das variações, análise funcional, etc.)

## 3.1 Definição e propriedades do limite

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. E seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $X$, ou seja, $a \in X'$.

Então diremos que o número real $L$ é o *limite* quando $x$ tende à $a$, e denotamos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

para significar o seguinte: dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Dessa maneira, sempre que $a \in X'$, a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = L$ é uma abreviatura para a seguinte afirmação:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

É importante entender que $0 < |x - a| < \delta$ quer dizer que $x \in (a - \delta, a + \delta)$ e é diferente de $a$. Dessa maneira, escrever $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que, para todo intervalo aberto $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, existe um intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ tal que, pondo-se $V_\delta = (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$, vale $f(V_\delta) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Em palavras mais simples, é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próxima de $L$, contanto que se tome $x \in X$ suficientemente próximo de $a$ (e diferente de $a$).

*Observação* 3.1. Cabe aqui um conjunto de pequenas observações incumbidas de guiar melhor o leitor para os estudos sobre limite de funções:

1. Em concordância com a definição dada, só tem sentido escrever $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quando $a$ é ponto de acumulação do domínio $X$ da função $f$. Se fossemos adotar

a mesma definição no caso em que $a \notin X'$, então todo número real $L$ seria limite de $f(x)$ quando $x$ tende à $a$. De fato, sendo $a \notin X'$, existe $\delta > 0$, tal que $V_\delta = (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) = \emptyset$ (isto é, $0 < |x - a| < \delta, x \in X$, não se verifica para $x$ algum). Assim, dado qualquer $\epsilon > 0$, escolheríamos este $\delta$. Seria sempre verdade que $\emptyset = f(V_\delta) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon)$, seja qual fosse $L$. Logo teríamos $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

2. Quando escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, isto não quer dizer que $a$ pertence ao domínio da função f. Nos casos mais interessantes de limite, tem-se $a \notin X$.

3. Ainda que tenhamos $a \in X$, nada podemos concluir a respeito do valor $f(a)$. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ descreve apenas o comportamento dos valores $f(x)$ para $x$ suficientemente próximo de $a$, com $x \neq a$.

4. Quando usamos a função $f$, seu domínio deve ser evidente, nesse caso: o conjunto $X$. Em outras palavras, dar $f$ implica em dar $X$. Dessa maneira, sempre que escrevermos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, está subentendido que $x$ varia em $X$.

5. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então o ponto $L$ é aderente ao conjunto $f(X - \{a\})$, pois cada intervalo aberto de centro $L$ contém pontos deste conjunto. Mais ainda (e pelo mesmo motivo): para cada $\delta > 0$, pondo $V_\delta = (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$, temos $L \in \overline{f(V_\delta)}$.

**Teorema 3.1** (Unicidade do limite)**.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.*

*Demonstração.* Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que para $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$ e $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}$. Agora, tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como $a \in X'$, podemos obter $\overline{x} \in X$, tal que $0 < |\overline{x} - a| < \delta$. Então $|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Isto nos dá $|L_1 - L_2| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Se $L_1 \neq L_2$, e definindo $\epsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2}$, então teríamos $|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - L_2| < 2\epsilon = |L_2 - L_1|$, um absurdo. Logo $L_1 = L_2$. $\square$

**Teorema 3.2.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Dado $Y \subset X$ tal que $a \in Y'$, ponhamos $g = f|Y$. Então:*

1. *Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.*

2. *Se $Y = I \cap X$ onde $I$ é um intervalo aberto contendo $a$, então $\lim_{x \to a} g(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$.*

*Demonstração.*

1. Vejamos, por hipótese, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ou seja,

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

   Além disso, segue do enunciado que $Y \subset X$ tal que $a \in Y'$. Desse modo,

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_2 > 0; y \in Y, 0 < |y - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(y) - L| < \epsilon.$$

   Como $g = f|Y$, ou seja, a função $g$ está definida no conjunto $Y$ e, para cada $y$ em $Y$, $g(y) = f(y)$, e tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0; y \in Y, 0 < |y - a| < \delta \Rightarrow |g(y) - L| < \epsilon.$$

2. Suponhamos que $\lim_{x \to a} g(x) = L$, ou seja,

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0; x \in Y, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L| < \epsilon.$$

   E como $g = f|Y$, isto é, a função $g$ está definida no conjunto $Y$ e, para cada $x$ em $Y$, $g(x) = f(x)$, então

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0; x \in Y, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

   Segue do enunciado que $Y \subset X$. E como $Y = I \cap X$ tal que $a \in I$, tomando $\delta_2 = \delta_1$, temos que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_2 > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

□

**Teorema 3.3.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então $f$ é limitado numa vizinhança de $a$, isto é, existem $A > 0$, $\delta > 0$ tais que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow |f(x)| < A$.*

*Demonstração.* Defina $L = \lim_{x \to a} f(x)$. Para $\epsilon = 1$, e aplicando a definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$. Da desigualdade triangular, segue que $|f(x) - L| \leq |f(x)| - |L| < 1$, donde $|f(x)| < |L| + 1$. Tomemos este $\delta$ e ponhamos $A = |L| + 1$. □

**Teorema 3.4** (Teorema do Confronto)**.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se, para todo $x \in X$, $x \neq a$, for $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e, além disso, tivermos $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.*

*Demonstração.* Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ e $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, dado $x \in X$, segue que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$, donde $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$. □

**Teorema 3.5.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, com $L < M$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.*

*Demonstração.* Defina $\epsilon = \dfrac{M-L}{2} > 0$. Note que $L + \epsilon = \dfrac{L+M}{2} = M - \epsilon$. Aplicando a definição de limite, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ e $g(x) \in (M-\epsilon, M+\epsilon)$, donde $f(x) < \dfrac{L+M}{2} < g(x)$. □

**Corolário 3.1.** *Se $\lim\limits_{x\to a} = L > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$.*

**Corolário 3.2.** *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, $x \neq a$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então $L \leq M$.*

**Teorema 3.6.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Para que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, é necessário e suficiente que se tenha $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$ para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

*Demonstração.* Suponha por hipótese que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, com $x_n \in X - \{a\}$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$. Segue-se então que $n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Reciprocamente, suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_n \in X$ com $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Então $x_n \to a$, mas não se tem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$. □

**Corolário 3.3.** *Para que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é necessário que exista $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ e independa da sequência de números de $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

**Corolário 3.4.** *Para que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, basta que exista $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ para toda sequência de números $x_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

*De fato, se tal limite existe para toda sequência dessa natureza, então $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ não dependerá de sequência $(x_n)$, pois se fosse $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = M$, com $x_n, y_n \in X - \{a\}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ e $L \neq M$. Daí formaríamos a sequência $(z_n)$ com $z_{2k} = x_k$, $z_{2k-1} = y_k$ e teríamos $z_n \in X - \{a\}$, $z_n \to a$, mas $(f(z_n))$ não convergiria.*

**Teorema 3.7.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$. Temos:*

*1 Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.*

*2 Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*, então* $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$*.*

*3 Se* $M \neq 0$*, então* $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$*.*

*4 Se* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e existe uma constante* $A$ *tal que* $|g(x)| \leq A$ *para todo* $x \in X - \{a\}$*, então* $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = 0$*, mesmo que não exista* $\lim_{x\to a} g(x)$*.*

*Demonstração.* Observe que, no Teorema 3.6, foi provado que o limite de uma função real é equivalente ao limite de uma sequência $x_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Sendo assim, aplicando o Teorema 3.6, em conjunto com as propriedades aritméticas do limite de sequências definidas nos Teoremas 1.7 e 1.8, podemos provar de maneira trivial os itens do Teorema 3.7. □

*Observação* 3.2. Muito bem, conforme foi definido em Sequências (1), observe que, se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então o quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ só admitirá limite (com $x \to a$) se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, pois daí teremos $f(x) = g(x)\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Se ocorrer ainda de $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ mas não ocorrer de $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, o quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ não pode sequer ser limitado na vizinhança de $a$.

**Teorema 3.8** (Critério de Cauchy para funções)**.** *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$*,* $a \in X'$ *e* $f : X \to \mathbb{R}$*. Para que exista* $\lim_{x\to a} f(x)$ *é necessário e suficiente que, dado arbitrariamente* $\epsilon > 0$*, se possa obter* $\delta > 0$*, tal que* $x, y \in X$*,* $0 < |x-a| < \delta$*,* $0 < |y-a| < \delta$ *impliquem* $|f(x) - f(y)| < \epsilon$*.*

*Demonstração.* Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então, dado $\epsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$, tal que $x, y \in X$, $0 < |x-a| < \delta$, $0 < |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \dfrac{\epsilon}{2}, |f(y) - L| < \dfrac{\epsilon}{2} \Rightarrow$ $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-L| + |f(y)-L| < \epsilon$. Reciprocamente, se esta condição é satisfeita, então, dada uma sequência arbitrária de números reais $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, a sequência $(f(x_n))$ é de Cauchy. Logo, pelo Teorema 1.15, $(f(x_n))$ é convergente. Pelo Corolário 3.4, existe $\lim_{x\to a} f(x)$. □

Vamos discutir agora o que ocorre com o limite de uma função composta.

Vamos imaginar a seguinte situação: $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, $b \in Y'$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = c$.

Para que tenha sentido falar em $g(f(x))$, $x \in X$, supomos que $f(X) \subset Y$. Gostaríamos de poder concluir, nestas condições, que

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

De fato, $a$ é ponto de acumulação do domínio da função $g \circ f : X \to \mathbb{R}$. Assim, faz sentido considerar $\lim_{x\to a} g(f(x))$. Além disso, como $g(y)$ tende para $c$ quando $y$ tende para

$b$, é plausível imaginar que isto ocorre, em particular, para $y$ da forma $y = f(x)$. Há, entretanto, uma dificuldade: para que $g(y)$ se aproxime de $c$ é necessário que $y$ fique próximo de $b$, mas sempre seja $y \neq b$! E nada garante que $f(x) \neq b$.

Vejamos um exemplo simples: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função identicamente nula, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = 1$ se $x \neq 0$, $g(0) = 0$. Então $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} g(x) = 1$, mas $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 0$ (e não 1).

Pode ocorrer ainda que, quando $x \to a$, $f(x)$ assuma infinitas vezes o valor $b$ para valores de $x$ diferentes. Neste caso, se $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ for diferente de $g(b)$, então não existirá $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$ embora existam $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$.

Por exemplo, sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas assim: $f(x) = 0$ se $x$ é irracional, e $f(x) = x$ se $x$ é racional; $g(y) = 0$ se $y \neq 0$ e $g(0) = 1$. Então $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$, mas não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 0$ enquanto $x \neq 0$ irracional dá $g(f(x)) = 1$.

Exposta a dificuldade, a solução é simples. Basta impor que $\lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)$. Temos o seguinte Teorema:

**Teorema 3.9.** *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$. Sejam $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$ tem-se $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$, desde que seja $c = g(b)$.*

*Demonstração.* Dado $\epsilon > 0$, existe $n > 0$ tal que $y \in Y$, $|y - b| < n \Rightarrow |g(y) - c| < \epsilon$. (Não requeremos que seja $y \neq b$, porque $g(b) = c$ fornece automaticamente $|g(b) - c| < \epsilon$.) A partir de $n$, obtemos $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < n$. Então, $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - c| < \epsilon$, o que dá o resultado procurado. $\square$

*Exemplo* 3.1. Sejam $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \dfrac{c \cdot x}{x}$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Tem-se $f(x) = c$ para todo $x \neq 0$ e $g(x) = x + 1$ para todo $x \neq 1$. Desse modo, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = c$ e $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$. (Observe que $f(0)$ e $g(1)$ não estão definidos.) Por outro lado, não existe $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, pois $h$ é o quociente de duas funções, das quais o denominador tem limite zero e numerador tem limite 1.

*Exemplo* 3.2. Um dos exemplos mais populares de uma função sem limite é dado por $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Tomando-se $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, temos $x_n \to 0$ e $\lim f(x_n) = 0$. Por outro lado, para $x_n = \left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)^{-1}$, vale $x_n \to 0$ e $\lim f(x_n) = 1$. Na realidade, para todo número $c \in [-1, +1]$, podemos obter uma sequência de pontos $x_n \neq 0$, com $x_n \to 0$ e $f(x_n) = c$ para todo $n$. Basta tomar um número $b$ tal que $\operatorname{sen}(b) = c$ e por $x_n = (b + 2\pi n)^{-1}$. Assim não existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Mas esta função é limitada. Logo vale $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ para toda função $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim\limits_{x\to 0} x^n \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

## 3.2 Limites laterais

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Note que a notação $X'_+$ quer dizer o conjunto dos pontos de acumulação à direita de $X$, notação essa que já estudamos anteriormente. Temos que $a \in X'_+$ se, e somente se, para todo $\delta > 0$ vale $X \cap (a, a+\delta) \neq \emptyset$. Por exemplo, 0 é ponto de acumulação à direita de $[0, 1]$.

Vamos considerar, portanto, $a$ ponto de acumulação à direita do domínio da função $f : X \to \mathbb{R}$.

Diremos que o número real $L$ é o *limite à direita* de $f(x)$ quando $x$ tende para $a$, e denotaremos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

quando, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$.

Em símbolos, temos:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0; x \in X, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ou ainda, tem-se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (a, a+\delta) \cap X \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

De modo análogo, definimos o *limite à esquerda*. Isto é, se $a$ é um ponto de acumulação à esquerda ($a \in X'_-$) do domínio da função $f : X \to \mathbb{R}$, diremos que o limite à esquerda de $f(x)$, quando $x$ tende para $a$, é o número $L$, e escreveremos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, for possível obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$, ou seja, $x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

**Teorema 3.10.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Definamos $Y = X \cap (a, +\infty)$ e $g = f|Y$. Então $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = L$. Desse modo, segue da definição de limite à direita de $f(x)$ que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0; x \in X, x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Como $Y = X \cap (a, +\infty)$, segue que $x \in X \cap (a, a+\delta) \Rightarrow x \in Y$. Além disso, $g = f|Y$, isto é, a função $g$ está definida no conjunto $Y$ e, para cada $x$ em $Y$, $g(x) = f(x)$. Logo, podemos escrever

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0; x \in Y, x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow g(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\lim_{x\to a} g(x) = L$. Desse modo, segue da definição de limite que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0, x \in Y, x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow g(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon).$$

Como $X \cap (a, a+\delta) \subset X \cap (a, +\infty)$, ou seja, $X \cap (a, a+\delta) \subset Y$ e, além disso, $g = f|Y$, então, tomando $\delta_1 = \delta$, temos que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0, x \in X, x \in (a, a+\delta_1) \Rightarrow f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon).$$

□

**Teorema 3.11.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_-$. Definamos $Y = (-\infty, a) \cap X$ e $g = f|Y$. Então $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to a} g(x) = L$.*

*Demonstração.* A demonstração desse Teorema é análoga à anterior. □

**Teorema 3.12.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$. Então existe $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Aplicando os Teoremas 3.2 e 3.10, conseguimos provar que os limites laterais existem e coincidem com o primeiro.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} = L$, então, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X \cap (a, a+\delta_1) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ e $x \in X \cap (a-\delta_2, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Desse modo, seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue que $x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Portanto, $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

□

*Exemplo* 3.3. Para a função $f : \mathbb{R} - 0 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$, temos os limites laterais $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, pois $f$ coincide com $x+1$ em $(0, +\infty)$ e com $x-1$ em $(-\infty, 0)$. Já a função $g : \mathbb{R} - 0 \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ não possui limite lateral à esquerda nem à direita no ponto 0.

Seja $X \subset \mathbb{R}$, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *crescente* se $x, y \in X, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Se $x < y$ implica apenas $f(x) \leq f(y)$, então $f$ é *não-decrescente*. Analogamente, definimos uma função *decrescente* e uma função *não-crescente*. Essas funções são categorizadas como funções monótonas.

**Teorema 3.13.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Existem os limites laterais*

$$L = \lim_{x\to a^+} f(x) \text{ e } M = \lim_{x\to b^-} f(x).$$

*Demonstração.* Para fixar as ideias, vamos supor inicialmente que a função $f$ seja não-decrescente. Seja $L = \inf\{f(x); x \in X, x > a\}$. Afirmamos que $L = \lim_{x\to a^+} f(x)$. Com efeito, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, temos que $L + \epsilon$ não é cota inferior do conjunto $\{f(x); x \in X, x > a\}$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $a+\delta \in X$ e $L \leq f(a+\delta) < L+\delta$. Como $f$ é não-decrescente, se $x \in X$ e $a < x < a+\delta$, então $L \leq f(x) < L+\epsilon$, o que prova a afirmação feita. Pondo $M = \sup\{f(x); x \in X, x < b\}$, verificaríamos de modo análogo que $M = \lim_{x\to b^-} f(x)$. □

## 3.3 Limites no infinito, limites infinitos, expressões indeterminadas

Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitada superiormente. Definindo $f : X \to \mathbb{R}$, podemos escrever

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

quando o número real $L$ satisfaz a seguinte condição:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ A > 0; x \in X, x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

O que equivale a: dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, pode-se encontrar $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x > A$.

Analogamente, define-se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$. Nesse caso, $X$ é ilimitado inferiormente. Daí definimos: para todo $\epsilon > 0$ deve existir $A > 0$ tal que $x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ são, de certo modo, limites laterais. Portanto, vale o resultado do Teorema 3.13: se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função monótona limitada e $X$ é ilimitado inferior e superiormente, segue que existem os limites laterais

$$L = \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ e } M = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

*Observação* 3.3. Um limite muito especial no infinito é o limite de uma sequência, definido no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Trata-se de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, onde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Em primeiro lugar, seja $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Afirmamos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ se, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow f(x) > A$.

De modo análogo, podemos definir $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Isto é, para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$.

*Exemplo* 3.4. $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^2} = +\infty$. De fato, dado $A > 0$, podemos tomar $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ e, assim, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < (x-a)^2 < \dfrac{1}{A} \Rightarrow \dfrac{1}{(x-a)^2} > A$.

Bom, é evidente que as definições de $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^-} = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} = -\infty$

e $\lim\limits_{x\to a^-} = -\infty$ não exigem maior dificuldade. Também será omitido as definições de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$.

*Observação* 3.4. É importante salientar que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais. Mais especificamente, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} = -\infty$ não exprimem valores reais mas sim o comportamento da função em torno de um determinado ponto $a$.

Na sequência, estudaremos resumidamente as modificações que devem sofrer os teoremas acima demonstrados para que continuem válidos no caso de limite infinito. São elas:

1. Unicidade do limite: se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então não se pode ter $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, pois $f$ será ilimitada numa vizinhança de $a$. Tampouco pode-se ter $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, pois $f$ será positiva numa vizinhança de $a$.

2. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então, para todo $Y \subset X$ com $a \in Y'$, pondo-se $g = f|Y$, ainda, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Se $Y = X \cap (a-\delta, a+\delta)$, então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

3. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então $f$ não é limitada em vizinhança alguma de $a$.

4. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

5. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.

6. Para que se tenha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ é necessário e suficiente que seja também $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ sempre que $x_n \in X - \{a\}$ e $\lim x_n = a$.

7. Os enunciados sobre $\lim(f+g)$, $\lim(f\cdot g)$ e $\lim\left(\dfrac{f}{g}\right)$ são análogos aos do Teorema 1.16, sobre limites infinitos de sequências.

8. Não há nada semelhante ao critério de Cauchy para limites infinitos.

9. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = L$ (ou $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$), segue-se então $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = L$ (ou $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = +\infty$).

10. Quando admitimos limites infinitos, sempre existem os limites laterais de uma função monótona $f : X \to \mathbb{R}$ em todos os pontos $a \in X'$. (Ou mesmo quando $x \to \pm\infty$.) Tem-se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para algum $\delta > 0$, $f$ é limitada no conjunto $X \cap (a, a+\delta)$. No caso contrário (isto é, se $f$ é ilimitada – digamos superiormente – em $X \cap (a, a+\delta)$ para todo $\delta > 0$), então $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

Estudaremos agora sobre as "expressões indeterminadas". Expressões como $\dfrac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$ e $1^\infty$ são indeterminadas. Sempre que um limite resulta em uma expressão indeterminada, pois bem; nada se pode dizer, em geral, sobre este limite. Veja, por exemplo, a expressão indeterminada $\dfrac{0}{0}$. Evidentemente essa expressão não tem sentido aritmético pois a divisão por zero não está definida. Afirmar que $\dfrac{0}{0}$ é indeterminada quer dizer, mais precisamente:

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ e que, pondo $Y = \{x \in X; g(x) \neq 0\}$, se tenha ainda $a \in Y'$. Sendo assim, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ está definida no conjunto $Y$, e é claro que faz sentido indagar se existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dependendo das funções $f, g$, o limite pode assumir qualquer valor real ou mesmo não existir.

Pelo mesmo motivo, $\infty-\infty$ é indeterminado. Em outras palavras: podemos encontrar funções $f, g : X \to \mathbb{R}$, tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, enquanto $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$, dependendo das nossas escolhas para $f$ e $g$, pode ter tanto um valor arbitrário $c \in \mathbb{R}$ quanto pode nem existir este valor.

*Exemplo* 3.5. Dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, tomando $f(x) = cx$ e $g(x) = x$, temos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, enquanto $\lim\limits_{x\to} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$.

*Exemplo* 3.6. Seja $f(x) = x\cdot\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $(x \neq 0)$ e $g(x) = x$, tem-se $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, mas não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

*Exemplo* 3.7. Sejam $f, g : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = c + \dfrac{1}{(x-a)^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = c$.

Estes exemplos bastam para que se entenda o significado de "expressões indeterminadas". O instrumento mais eficaz para o cálculo do limite de expressões indeterminadas é a famosa "Regra de L'Hôpital", ferramenta utilizada em infindáveis exercícios de Cálculo.

*Observação* 3.5. É importante observar que os limites mais interessantes da Análise não podem ser calculados diretamente a partir de teoremas gerais como o Teorema 3.7, ou seja, são limites de expressões indeterminadas. Por exemplo, $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ se origina de uma indeterminação do tipo $1^\infty$. Outro exemplo é a derivada $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, que vem de uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

## 3.4 Valores de aderência de uma função; lim sup e lim inf

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Para todo $\delta > 0$, indicaremos com a notação $V_\delta$ o conjunto

$$\{x \in X; 0 < |x - a| < \delta\} = (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Pois bem; $f$ é *limitada numa vizinhança de* $a$ quando existir algum $\delta > 0$, tal que $f|V_\delta$ seja limitada. (Ou seja, tem-se $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in V_\delta$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante conveniente.)

Um número real $c$ chama-se *valor de aderência* de $f$ no ponto $a$ quando existe uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

O Teorema 3.6 assegura que se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então $L$ é o único valor de aderência de $f$ no ponto $a$. Mostraremos que a recíproca é verdadeira quando $f$ é limitada numa vizinhança de $a$. Sem esta hipótese de limitação, pode ocorrer que $L \in \mathbb{R}$ seja o único valor de aderência de $f$ no ponto $a$ sem que valha $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ se $x$ é racional e $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se $x$ é irracional. Então 1 é o único valor de aderência de $f$ no ponto 0 mas não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

**Teorema 3.14.** *Um número real $c$ é valor de aderência de $f$ no ponto $a$ se, e somente se, para todo $\delta > 0$ tem-se $c \in \overline{f(V_\delta)}$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $c$ é um valor de aderência de $f$ no ponto $a$, daí $c = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, $x_n \in X - \{a\}$, $x_n \to a$. Dado arbitrariamente $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V_\delta$. Ora, tem-se $c = \lim\limits_{n > n_0} f(x_n)$. Assim, $c$ é limite de uma sequência de pontos pertencentes a $f(V_\delta)$, isto é, $c \in \overline{f(V_\delta)}$. Reciprocamente, se $c \in \overline{f(V_\delta)}$, para todo $\delta > 0$, então $c \in \overline{f(V_{\frac{1}{n}})}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in V_{\frac{1}{n}}$ tal que $|f(x_n) - c| < \dfrac{1}{n}$. Segue-se que $x_n \in X - \{a\}$, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = c$. Logo $c$ é um valor de aderência de $f$ no ponto $a$.

□

Vamos indicar com $\mathcal{VA}(f; a)$ o conjunto dos valores de aderência de $f$ no ponto $a$. O corolário abaixo é, na realidade, uma forma equivalente de enunciar o Teorema 3.14.

**Corolário 3.5.** $\mathcal{VA}(f; a) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{f(V_\delta)}$.

**Corolário 3.6.** $\mathcal{VA}(f; a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(V_{\frac{1}{n}})}$.

*Com efeito, se $c \in \overline{f(V_\delta)}$, para cada $\delta > 0$, então, em particular, $c \in \overline{f(V_{\frac{1}{n}})}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo vale a inclusão $\mathcal{VA}(f; a) \subset \cap \overline{f(V_{\frac{1}{n}})}$. Reciprocamente, se $c \in \overline{f(V_{\frac{1}{n}})}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então, dado arbitrariamente $\delta > 0$, achamos $n$, tal que $\dfrac{1}{n} < \delta$. Então $c \in \overline{f(V_{\frac{1}{n}})} \subset \overline{f(V_\delta)}$. Logo $c \in \overline{f(V_\delta)}$ para cada $\delta > 0$, ou seja, $c \in \mathcal{VA}(f; a)$. Isto demonstra o Corolário 3.6.*

**Corolário 3.7.** *O conjunto dos valores de aderência de $f$ é fechado. Se $f$ é limitada numa vizinhança de $a$, então esse conjunto é compacto e não-vazio.*

*De fato, $\mathcal{VA}(f;a)$ é sempre fechado, como interseção de fechados. Escrevamos $K_n = \overline{f(V_{\frac{1}{n}})}$. Se $f$ é limitada numa vizinhança de $a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $f(V_{\frac{1}{n_0}})$ é limitado e, portanto, seu fecho $K_{n_0}$ é compacto. Ora, é claro que $\mathcal{VA}(f;a) = \bigcap_{n \geq n_0} K_n$, logo $\mathcal{VA}(f;a)$ é compacto e não-vazio, em virtude do Teorema 2.13.*

Bom, pelo Corolário 3.7 acima, desde que se tenha $f$ limitada numa vizinhança de $a$, segue que o conjunto dos valores de aderência de $f$ no ponto $a$ é compacto e não-vazio. Sendo assim, possui um maior elemento e um menor elemento.

Diz-se *limite superior* de $f$ no ponto $a$ o maior valor de aderência de $f$ no ponto $a$. Em linguagem matemática, temos

$$\lim_{x \to a} \sup f(x) = L.$$

De modo análogo, define-se o menor valor de aderência de $f$ no ponto $a$ como o *limite inferior* de $f$ no ponto $a$. Matematicamente, temos

$$\lim_{x \to a} \inf f(x) = l.$$

O limite superior e o limite inferior de $f$ no ponto $a$ existem somente quando a condição de limitação em torno de $a$ é satisfeita, ou seja, apenas quando $f$ é limitada numa vizinhança de $a$.

É importante considerarmos também valores de aderência de $f$ quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. As definições são análogas. Veja, $c \in \mathcal{VA}(f;+\infty)$ significa que $c = \lim f(x_n)$, donde $x_n \in X$, $x_n \to +\infty$. Os fatos já provados e a provar sobre $\mathcal{VA}(f;a)$ se estendem aos valores de aderência no infinito com adaptações evidentes. Neste caso, diz-se que $f$ é limitada num vizinhança de $+\infty$ (por exemplo) quando existem $A > 0$ e $k > 0$ tais que $x \in X$, $x > A \Rightarrow |f(x)| \leq k$.

*Exemplo* 3.8. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Então o conjunto dos valores de aderência de $f$ no ponto $0$ é o intervalo $[-1,+1]$. Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \sup \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \inf \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -1$.

Seja $f$ limitada numa vizinhança de $a$. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que $f(V_{\delta_0})$ é um conjunto limitado. Com maior razão, para todo $\delta \in (0, \delta_0]$, $f(V_\delta)$ é limitado. Definamos no intervalo $(0, \delta_0]$ as funções $\delta \mapsto L_\delta$ e $\delta \mapsto l_\delta$ pondo, para $0 < \delta \leq \delta_0$,

$$l_\delta = \inf f(V_\delta) = \inf_{x \in V_\delta} f(x);$$

$$L_\delta = \sup f(V_\delta) = \sup_{x \in V_\delta} f(x).$$

Tem-se $l_{\delta_0} \leq l_\delta \leq L_\delta \leq L_{\delta_0}$ para todo $\delta \in (0, \delta_0]$. Se $0 < \delta' \leq \delta'' \leq \delta_0$, então, $V_{\delta'} \subset V_{\delta''}$ e, portanto, $l_{\delta''} \leq l_{\delta'}$ e $L_{\delta'} \leq L_{\delta''}$. Assim, $l_\delta$ é uma função monótona não-crescente de $\delta$, enquanto $L_\delta$ é uma função não-decrescente de $\delta$. Segue-se do Teorema 3.13 que existem os limites $\lim_{\delta \to 0} l_\delta$ e $\lim_{\delta \to 0} L_\delta$. De fato, como tais funções se acham definidas apenas para $\delta > 0$, esses são limites laterais (à direita). Vale então o

**Teorema 3.15.** *Seja $f$ limitada numa vizinhança de $a$. Então*

$$\limsup_{x \to a} f(x) = \lim_{\delta \to 0} L_\delta \ \ e \ \ \liminf_{x \to a} f(x) = \lim_{\delta \to 0} l_\delta.$$

*Demonstração.* Sejam $L = \limsup_{x \to a} f(x)$ e $L_0 = \lim_{\delta \to 0} L_\delta$. Como $L$ é valor de aderência, temos que $L \in \overline{f(V_\delta)}$ para todo $\delta > 0$ e, portanto, $L \leq L_\delta$ para todo $\delta$. Segue-se que $L \leq L_0$. Para mostrar que $L_0 \leq L$, basta provar que $L_0$ é valor de aderência de $f$ no ponto $a$. Por simplicidade, escrevamos $L_n$ em vez de $L_{\frac{1}{n}}$. É claro que $L_0 = \lim_{n \to \infty} L_n$. Segue-se da definição de sup que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $x_n \in V_{\frac{1}{n}}$, isto é, $x_n \in X$, $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, tal que $L_n - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq L_n$. Segue-se que $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = \lim L_n = L_0$. Logo $L_0$ é valor de aderência, donde $L_0 \leq L$. Concluímos que $L = L_0$. Resta mostrar que $\liminf_{x \to a} f(x) = \lim_{\delta \to 0} l_\delta$.

Sejam $l = \liminf_{x \to a} f(x)$ e $l_0 = \lim_{\delta \to 0} l_\delta$. Como $l$ é valor de aderência, temos que $l \in \overline{f(V_\delta)}$ para todo $\delta > 0$ e, portanto, $l_\delta \leq l$ para todo $\delta$. Segue-se que $l_0 \leq l$. Para mostrar que $l \leq l_0$, basta provar que $l_0$ é valor de aderência de $f$ no ponto $a$. Por simplicidade, escrevamos $l_n$ em vez de $l_{\frac{1}{n}}$. É claro que $l_0 = \lim_{n \to \infty} l_n$. Segue-se da definição de inf que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $x_n \in V_{\frac{1}{n}}$, isto é, $x_n \in X$, $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, tal que $l_n \leq f(x_n) < l_n + \dfrac{1}{n}$. Segue-se que $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = \lim l_n = l_0$. Logo $l_0$ é valor de aderência, donde $l \leq l_0$. Concluímos que $l = l_0$.

Portanto, $\limsup_{x \to a} f(x) = \lim_{\delta \to 0} L_\delta$ e $\liminf_{x \to a} f(x) = \lim_{\delta \to 0} l_\delta$, como queríamos demonstrar. $\square$

**Teorema 3.16.** *Seja $f$ limitada numa vizinhança de $a$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$, onde $l = \liminf_{x \to a} f(x)$ e $L = \limsup_{x \to a} f(x)$.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.14 que $l = \lim_{\delta \to 0} l_\delta$ e $L = \lim_{\delta \to 0} L_\delta$. Logo, dado $\epsilon > 0$, podemos obter $\delta_1 > 0$, e $\delta_2 > 0$, tais que $0 < \delta < \delta_1 \Rightarrow l - \epsilon < l_\delta$ e $0 < \delta < \delta_2 \Rightarrow L_\delta < L + \epsilon$. Seja $\delta$ um número positivo menor do que $\delta_1$ e $\delta_2$. Então $l - \epsilon < l_\delta \leq L_\delta < L + \epsilon$. Assim sendo, $x \in V_\delta \Rightarrow l - \epsilon < l_\delta \leq f(x) \leq L_\delta < L + \epsilon$. Está verificada a tese do Teorema. $\square$

**Corolário 3.8.** *Seja $f$ limitada numa vizinhança de $a$. Então existe $\lim_{x\to a} f(x)$ se, e somente se, $f$ possui um único valor de aderência no ponto $a$.*

*Com efeito, se $f$ possui um único valor de aderência no ponto $a$ então $L = l$. O Teorema 3.16 nos diz que $L = l$ é o limite de $f$ no ponto $a$. A recíproca está contida no Teorema 3.6.*

## 3.5 Exercícios

*Exercício* 3.1. Seja $X = Y \cup Z$, com $a \in Y' \cap Z'$. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, tomemos $g = f|Y$ e $h = f|Z$. Se $\lim_{x\to a} g(x) = L$ e $\lim_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

*Solução.* Bom, segue-se do enunciado que a função $g$ é a restrição de $f$ no conjunto $Y$ e a função $h$ é a restrição de $f$ no conjunto $Z$. Sendo assim, se $\lim_{x\to a} g(x) = L$ e $\lim_{x\to a} h(x) = L$, segue da definição de limite de funções reais que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1$ e $\delta_2$ positivos tais que

$$x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap Y \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap Z \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Pois bem, fixemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Seja

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X.$$

Por hipótese, temos que $X = Y \cup Z$. Segue-se então que $x \in Y$ ou $x \in Z$. No primeiro caso,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Y \subset (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap Y \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Analogamente, no segundo caso,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Z \subset (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap Z \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Concluímos, portanto, que em ambos os casos,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ou ainda, $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

*Exercício* 3.2. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$. Então $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{0^-} f(x) = 1$.

*Solução.* Primeiramente, vamos relembrar o resultado do Teorema 3.9, que nos diz o seguinte:

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$. Sejam $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = c$ tem-se $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$, desde que seja $c = g(b)$.

Observe que, podemos escrever a função $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ como uma composição de funções. Pois bem, seja $f_1 : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$. Temos então que

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^-} f_1(x) = -\infty.$$

Seja $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ dada por $f_2(y) = 1 + e^y$. Então,

$$\lim_{y\to +\infty} f_2(y) = +\infty \text{ e } \lim_{y\to -\infty} f_2(y) = 1.$$

Por fim, seja $f_3 : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f_3(z) = \dfrac{1}{z}$. Então

$$\lim_{z\to +\infty} f_3(z) = 0 \text{ e } \lim_{z\to 1} f_3(z) = 1.$$

Pelo Teorema 3.9, segue que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = 1.$$

*Exercício* 3.3. Seja $f(x) = x + 10 \cdot \text{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

*Solução.* Pois bem, da relação

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que

$$x - 10 \leq f(x) \leq x + 10.$$

Aplicando-se o limite com $x \to +\infty$ em todos os termos, temos que

$$\lim_{x\to +\infty} x - 10 \leq \lim_{x\to +\infty} f(x) \leq \lim_{x\to +\infty} x + 10.$$

Resolvendo os limites dos extremos, segue-se então que

$$+\infty \leq \lim_{x\to +\infty} f(x) \leq +\infty.$$

Por fim, aplicando o Teorema 3.4, concluímos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

O raciocínio é análogo para o limite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

*Exercício* 3.4. Enuncie e mostre para funções o análogo do Teorema 1.16.

*Solução.* 1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $g$ é limitada inferiormente e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$.

De fato, sejam $c \in \mathbb{R}$ um limitante inferior de $g$ e $A > 0$ um número real positivo tal que $A - c > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$, então $f(x) > A - c$.

Assim, se $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$, segue que

$$f(x) + g(x) > (A - c) + c = A.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$.

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se existe um limitante inferior $c > 0$ de $g$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

De fato, seja $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$, então $f(x) > \dfrac{A}{c}$.

Assim, se $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$, segue que

$$f(x) \cdot g(x) > \frac{A}{c} \cdot c = A.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

3. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$ e $a \in X'$. Nestas condições, segue que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

De fato,

($\Rightarrow$) Seja $A > 0$ um número real positivo. Existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$, então $0 < f(x) < \dfrac{1}{A}$.

Assim, dado $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$, então $\dfrac{1}{f(x)} > A$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

($\Leftarrow$) Seja $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$ implica $\dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{\epsilon}$.

Assim, para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$, temos que $0 < f(x) < \epsilon$. Segue-se daí que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

4. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ tais que $f$ e $g$ são funções positivas e $a \in X'$.

   (i) Se existe $c > 0$ tal que $f(x) > c$ para todo $x \in X$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

   (ii) Se $f$ é limitada e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

   De fato,

   (i) Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, segue do item (c) que $\lim \dfrac{1}{g(x)} = +\infty$. Daí, aplicando-se o item (b) às funções $f$ e $\dfrac{1}{g}$, temos que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

   (ii) Seja $k > 0$ tal que $0 < f(x) < k$. Então, $\dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{k}$ para todo $x \in X$. Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, segue do item (c) que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = 0$.
   Assim, aplicando-se o item (i), temos que

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)}} = +\infty.$$

   .
   Finalmente, segue do item (c) que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\dfrac{g(x)}{f(x)}} = 0$.

*Exercício* 3.5. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, um polinômio real. Se o coeficiente do termo de grau mais elevado de $p$ é positivo, então $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)$ é igual a $+\infty$ ou a $-\infty$, conforme o grau de $p$ seja par ou ímpar.

*Solução.* Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Provaremos por indução em $n$ que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$. O caso $n = 1$ é trivial. Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para o polinômio de grau $n - 1$ (hipótese de indução). Seja $p(x)$ o polinômio tomado inicialmente, podemos escrever

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = x(a_n x^{n-1} + \cdots + a_1) + a_0.$$

Pela hipótese de indução, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 = +\infty$. Portanto, aplicando-se os resultados do Exercício 3.4, segue que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$.

Suponhamos agora $n = 2k-1$. Provaremos por indução sobre $k$ que $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$. Para $k = 1$, o resultado é trivial. Além disso, podemos escrever

$$p(x) = a_{2k-1}x^{2k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = x^2 \left[(a_{2k-1}x^{2k-3} + \cdots + a_2) + \frac{a_1}{x}\right] + a_0.$$

Assim, sabendo que $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{a_1}{x}=0$ e supondo que $\lim_{x\to-\infty}(a_{2k-1}x^{2k-3}+\cdots+a_2)=-\infty$, temos novamente pelos resultados do Exercício 3.4 que $\lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$.

Suponhamos agora que $n=2k$. Então,

$$p(x)=a_{2k}x^{2k}+\cdots+a_1x+a_0=x(a_{2k}x^{2k-1}+\cdots+a_1)+a_0.$$

E, pelo resultado anterior, temos que

$$\lim_{x\to-\infty}(a_{2k}x^{2k-1}+\cdots+a_1)=-\infty.$$

Assim, pelos resultados do Exercício 3.4, segue que $\lim_{x\to-\infty}p(x)=+\infty$.

*Exercício* 3.6. Determine o conjunto dos valores de aderência da função $f:\mathbb{R}-0\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{sen(1/x)}{1+e^{1/x}}$, no ponto $x=0$.

*Solução.* Primeiramente, vamos relembrar a definição de valor de aderência. Pois bem, sejam $X\subset\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$ e $a\in X'$, um número real $c$ chama-se *valor de aderência* de $f$ no ponto $a$ quando existe uma sequência de pontos $x_n\in X-\{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ e $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=c$.

Temos que

$$e^{1/x}>0 \text{ e } -1\leq sen(1/x)\leq 1$$

para todo $x\in\mathbb{R}-0$. Então,

$$-1\leq-\frac{1}{1+e^{1/x}}\leq\frac{sen(1/x)}{1+e^{1/x}}\leq\frac{1}{1+e^{1/x}}\leq 1.$$

Assim, podemos dizer que o conjunto $A$ dos pontos de aderência de $f$ no ponto 0 é tal que $A\subset[-1,1]$.

Seja $\lambda\in[-1,1]$. Tomemos $\theta=\text{arcsen}(\lambda)$, ou seja, $sen(\theta)=\lambda$. Então, definindo $x_n=\dfrac{1}{\theta-2\pi n}$, segue que $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$ e $\lim e^{1/x_n}=0$, pois $\lim_{n\to+\infty}=\dfrac{1}{x_n}=-\infty$. Assim,

$$f(x_n)=\frac{\text{sen}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)}{1+e^{1/x_n}}=\frac{sen(\theta-2\pi n)}{1+e^{\theta-2\pi n}}=\frac{\lambda}{1+e^{\theta-2\pi n}}.$$

Portanto, $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\lambda}{1+e^{\theta-2\pi n}}=\lambda$. Daí, $\lambda\in A$. E segue que $A\supset[-1,1]$. Concluímos que $A=[-1,1]$.

# 4 Funções Contínuas

## Introdução

Até o momento, os estudos anteriores foram fundamentais para a construção de uma base necessária para se entender a definição de funções contínuas. Afinal, a noção de função contínua é o eixo central da Topologia. O estudo dessa categoria de funções tem dois principais propósitos: estabelecer os fatos e conceitos topológicos essenciais à Análise e fornecer ao leitor um primeiro contato com as noções básicas da Topologia.

Além de estudar a definição de funções contínuas, será demonstrado ainda as suas propriedades mais elementares, bem como um estudo analítico dos diferentes modos pelos quais uma função pode deixar de ser contínua. Na sequência, ainda neste capítulo, estudaremos as relações entre a continuidade e as propriedades topológicas dos subconjuntos da reta.

## 4.1 A noção de função contínua

**Definição 4.1.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Diz-se que $f$ é contínua no ponto $a \in X$ sempre que, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, for possível encontrar $\delta > 0$ tal que, $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Em palavras mais simples, $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ sempre que for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, contanto que se tome $x$ suficientemente próximo de $a$.

É comum dizermos que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua quando $f$ é contínua em todos os pontos de $X$.

*Observação* 4.1. Bom, neste momento, o leitor deve ter notado uma certa semelhança com a definição de limite, ou ainda, imaginado que ambas são as mesmas definições. Pois bem, veremos algumas observações com o intuito de entender as diferenças entre essas duas definições.

1. Diferente da definição de limite, aqui só faz sentido indagar se $f$ é contínua no ponto $a$ quando $a \in X$.

2. Se $a$ é ponto um ponto isolado (não é ponto de acumulação) de $X$, então toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$. (Qualquer que seja $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap X = \{a\}$. Então $|x - a| < \delta$ com $x \in X$ implica $x = a$ e, portanto, $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$.)

3. Seja agora $a \in X'$, isto é, $a$ é ponto de acumulação de $X$. Então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Isto reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite. Reciprocamente, poderíamos definir

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ pela condição de ser contínua no ponto de estudo, nesse caso $a$, a função $g : X \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, onde $g(a) = L$ e $g(x) = f(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$.

4. Ao investigar a continuidade de uma função $f$ num ponto ou num conjunto, é fundamental ter sempre em conta o domínio de $f$. Por exemplo, dada $f : X \to \mathbb{R}$, seja $Y \subset X$. Consideremos as duas afirmações:

   $(A)$ A função $f$ é contínua em cada ponto $a \in Y$;

   $(B)$ A restrição $f|Y$ é uma função contínua.

   Bom, é claro que $(A) \Rightarrow (B)$ mas a recíproca é falsa. De fato, seja $Y$ finito ou, mais geralmente, um conjunto $Y$ cujos pontos são todos isolados. A restrição $f|Y$ é sempre contínua mas $f : X \to \mathbb{R}$ pode ser descontínua em algum ponto de $Y$. Em resumo, $(A)$ se refere ao comportamento de $f(x)$ com $x$ próximo de $a$, para qualquer $x \in X$, enquanto $(B)$ é uma afirmação que diz respeito apenas aos pontos de $Y$.

*Exemplo* 4.1. Toda função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é contínua porque todo ponto de $\mathbb{Z}$ é isolado. Pela mesma razão, toda função definida no conjunto $X = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ é contínua. Por outro lado, se $Y = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, então uma função $f : Y \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, é contínua no ponto 0 (já que os demais pontos de $Y$ são todos isolados). Em outras palavras, $f : Y \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

**Teorema 4.1.** *Toda restrição de uma função contínua é contínua. Mais precisamente: seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$. Se $a \in Y \subset X$ e $g = f|Y$, então $g : Y \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$. Quando $Y = I \cap X$, onde $I$ é um intervalo aberto contendo $a$, então vale a recíproca: se $g = f|Y$ é contínua no ponto $a$ então $f : X \to \mathbb{R}$ também é contínua no ponto $a$.*

*Demonstração.* De fato, seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, segue da definição de função contínua que, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Além disso, seja $g = f|Y$, segue que $g$ é a restrição de $f$ no conjunto $Y$, ou seja, $g : Y \to \mathbb{R}$ e $g(x) = f(x)$ para todo $x \in Y$.

Como, por hipótese, $a \in Y \subset X$, segue que

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Y \subset (a - \delta, a + \delta) \cap X.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, basta tomar $\delta_1 = \delta > 0$, daí segue que

$$x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap Y \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ora, e como $g(x) = f(x)$ para todo $x \in Y$, então

$$x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap Y \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \epsilon.$$

Portanto, a função $g : Y \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$.

Reciprocamente, seja $g = f|Y$ contínua no ponto $a$, segue da definição de função contínua que, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Y \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \epsilon.$$

E como $g$ é a restrição de $f$ no conjunto $Y$, segue que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in Y = I \cap X$. Ou seja,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Y \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ora, mas como $Y = I \cap X$, onde $I$ é um intervalo aberto contendo $a$, segue que $a \in X$ e

$$x \in I \cap X \subset (a - \delta, a + \delta) \cap Y.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, basta tomar $\delta_1 > 0$ conveniente, tal que $a \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \subset I$, daí segue que

$$x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Portanto, a função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$. □

*Observação* 4.2. O Teorema anterior nos ensina que a continuidade de uma função $f$ é uma propriedade local, isto é, se $f$ coincide, nas proximidades do ponto $a$, com uma função que é contínua em $a$, então $f$ também é contínua nesse ponto.

**Teorema 4.2.** *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$, então $f$ é limitada numa vizinhança de $a$, isto é, existe $\delta > 0$ tal que, pondo $V_\delta = X \cap (a - \delta, a + \delta)$, o conjunto $f(V_\delta)$ é limitado.*

*Demonstração.* De fato, seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, segue da definição de função contínua que, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ou ainda,

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X \Rightarrow f(x) \in (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon).$$

Além disso, seja $V_\delta = X \cap (a-\delta, a+\delta)$. É evidente que o conjunto $f(V_\delta)$ é limitado. Ora, tomando $k = f(a)+\epsilon \in \mathbb{R}$, segue-se então que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in V_\delta$. □

**Teorema 4.3.** *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ e $f(a) < g(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $|x-a| < \delta$.*

*Demonstração.* De fato, sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, segue da definição de função contínua que, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que,

$$x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \cap X \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$$

e

$$x \in (a-\delta_2, a+\delta_2) \cap X \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \epsilon.$$

Bom, como $f(a) < g(a)$, então $g(a)-f(a) > 0$. Assim, seja $\epsilon = \dfrac{g(a)-f(a)}{2} > 0$. Então $f(a)+\epsilon = \dfrac{f(a)+g(a)}{2} = g(a)-\epsilon$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se que $x \in (a+\delta, a+\delta) \cap X$ implica

$$f(x) \in (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) \text{ e } g(x) \in (g(a)-\epsilon, g(a)+\epsilon).$$

E como $f(x) < f(a)+\epsilon = \dfrac{f(a)+g(a)}{2} = g(a)-\epsilon < g(x)$, segue-se que $f(x) < g(x)$.

Portanto, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $|x-a| < \delta$. □

**Corolário 4.1.** *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Se $f(a) < k$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo $x \in X$ com $|x-a| < \delta$.*

*Com efeito, se $f(a) < k$, basta tomar $\epsilon = k - f(a) > 0$. Pela definição de função contínua, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X \Rightarrow f(a)-\epsilon < f(x) < f(a)+\epsilon.$$

*Mas $f(a)+\epsilon = k$. Assim, todo ponto $x \in X$, cuja distância ao ponto $a$ seja menor do que $\delta$ cumpre $f(x) < k$.*

*Evidentemente, o resultado é análogo se $f(a) > k$.*

Pois bem, seja agora $f$ uma função contínua em todos os pontos de $X$ e considere o conjunto $A$ dos pontos $a \in X$ tais que $f(a) > k$, ou seja,

$$A = \{a \in X; f(a) > k\}.$$

Vejamos, o que podemos dizer a respeito de $A$? Ora, pelo que vimos, para cada ponto $a \in A$, existe um intervalo $I_a = (a - \delta, a + \delta)$ tal que $x \in I_a \cap X \Rightarrow f(x) > k$. Daí $a \in I_a \cap X \subset A$ para todo $a \in A$. Seja $\mathcal{U} = \bigcup_{a \in A} I_a$. Então $\mathcal{U}$ é um conjunto aberto e $a \in \mathcal{U} \cap X \subset A$ para todo $a \in A$, ou seja, $A \subset \mathcal{U} \cap X \subset A$. Daí então, $A = \mathcal{U} \cap X$.

Em particular, se $X$ é aberto, então o conjunto $A$ é aberto, como interseção $A = \mathcal{U} \cap X$ de dois abertos.

**Teorema 4.4.** *Para que $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$ para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Com efeito, suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ e que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Daí então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $x \in X$,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Além disso, existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta.$$

Ora, segue-se então que

$$|x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \epsilon.$$

Ou equivalentemente,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que não se tem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja, $f$ não é contínua no ponto $a$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, é possível obter $x_n \in X$ e

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon.$$

Daí segue que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, mas não se tem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

□

**Corolário 4.2.** *Para que $f$ seja contínua no ponto $a$ é necessário que exista $\lim f(x_n)$ e independa de sequência de números $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.*

**Corolário 4.3.** *A fim de que $f$ seja contínua no ponto $a$, é suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, exista $\lim f(x_n)$.*

*De fato, se tal limite existe para toda sequência dessa natureza, então $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ não dependerá de sequência $(x_n)$, pois se fosse $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ e $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = b$, com $x_n, y_n \in X$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ e $f(a) \neq b$. Daí formaríamos a sequência $(z_n)$ com $z_{2k} = x_k$, $z_{2k-1} = y_k$ e teríamos $z_n \in X$, $z_n \to a$, mas $(f(z_n))$ não convergiria, e não poderíamos garantir que $\lim f(z_n) = f(a)$.*

**Teorema 4.5.** *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$, então $f+g$, $f-g$ e $f \cdot g$ são contínuas nesse mesmo ponto. Se valer $g(a) \neq 0$, então $f/g$ também é contínua no ponto $a$.*

*Demonstração.* (i) De fato, sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a$, segue-se da definição de função contínua que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, $x \in X$,

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se que

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta_1 \text{ e } |x-a| < \delta_2.$$

Daí então, $|x-a| < \delta \Rightarrow |[f(x)+g(x)] - [f(a)+g(a)]| = |[f(x)-f(a)] + [g(x) - g(a)]| \leq |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Portanto, $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = f(a) + g(a)$ e $f+g$ é contínua no ponto $a$. A demonstração é análoga para o caso $f-g$.

(ii) Com efeito, sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a$, segue-se da definição de função contínua que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, $x \in X$,

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \text{ e } |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \epsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se que

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta \Rightarrow & |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \\ & = |[f(x)-f(a)][g(x)-g(a)] + f(a)[g(x)-g(a)] + g(a)[f(x)-f(a)]| \\ & \leq |f(x)-f(a)||g(x)-g(a)| + |f(a)||g(x)-g(a)| + |g(a)||f(x)-f(a)| \\ & \leq \epsilon \cdot \epsilon + |f(a)|\epsilon + |g(a)|\epsilon = \epsilon(\epsilon + |f(a)| + |g(a)|). \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = f(a) \cdot g(a)$ e $f \cdot g$ é contínua no ponto $a$.

(iii) Bom, resta mostrar agora que, se $g(a) \neq 0$, então $f/a$ também é contínua no ponto $a$. Vejamos, observe que

$$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Sendo assim, basta mostrarmos que $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(a)}$ e aplicarmos o item (ii).

Como $g : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$, segue que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, $x \in X$,

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{|g(a)|}{2} \text{ e } |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{|g(a)|^2}{2}\epsilon.$$

Observe que,

$$|g(a)| = |[g(a) - g(x)] + g(x)| \leq |g(a) - g(x)| + |g(x)|.$$

E como $|g(x) - g(a)| < \frac{|g(a)|}{2}$ sempre que $x \in X$, $|x - a| < \delta_1$.

Daí então, $|g(a)| < \frac{|g(a)|}{2} + g(x)$. Ora, subtraindo $\frac{|g(a)|}{2}$ em ambos os lados da desigualdade, segue-se que $\frac{|g(a)|}{2} < g(x)$, ou ainda, $\frac{1}{g(x)} < \frac{2}{|g(a)|}$. Então, podemos concluir que, existe $\delta_1 > 0$ tal que, $x \in X$,

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{|g(a)|}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se que $|x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} \right| = \left| \frac{g(a) - g(x)}{g(x) \cdot g(a)} \right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)| \cdot |g(a)|} = |g(x) - g(a)| \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot \frac{1}{|g(a)|} < \frac{|g(a)|^2}{2}\epsilon \cdot \frac{2}{|g(a)|^2} = \epsilon$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(a)}$ e, pelo item (ii), $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = f(a) \cdot \frac{1}{g(a)}$, ou seja, $f/g$ é contínua no ponto $a$.

□

Em particular, se $f$ é contínua no ponto $a$, então $c \cdot f$ é contínua no mesmo ponto, para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Também o mesmo ocorre com $1/f$ se $f(a) \neq 0$.

**Teorema 4.6.** *A composta de duas funções contínuas é contínua. Ou seja, se $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ são contínuas nos pontos $a \in X$, $b = f(a) \in Y$, respectivamente, e, além disso, $f(X) \subset Y$, então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$.*

*Demonstração.* De fato, seja $g : Y \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$, segue-se que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, $y \in Y$,

$$|y - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(b)| = |g(y) - g(f(a))| < \epsilon.$$

E como $f : X \to \mathbb{R}$ também é contínua no ponto $a \in X$, segue-se que, para todo $\epsilon = \delta_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $x \in X$,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1.$$

Bom, como $f(X) \subset Y$, então $|f(x) - f(a)| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$. Ou seja, a função composta $g \circ f$ é contínua no ponto $a$. □

A restrição de uma função contínua $g : Y \to \mathbb{R}$ a um subconjunto $X \subset Y$ é um caso particular de função composta: temos $g|X = g \circ f$, onde $f : X \to Y$ é a inclusão, isto é, $f(x) = x$ para todo $x \in X$.

*Exemplo* 4.2. A função $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ é contínua em toda a reta, em virtude do Teorema 4.5. Pelo mesmo resultado, segue-se que todo polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ é uma função contínua.

*Exemplo* 4.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ se $x \geq 5$ e $f(x) = 16 - 2x$ se $x \leq 5$. Bom, $f$ é contínua em todo ponto $a > 5$, pois coincide com a função contínua $g(x) = x + 1$ no intervalo aberto $(5, +\infty)$, o qual contém $a$. Por motivo análogo, $f$ é contínua em todo ponto $a < 5$. Em particular, $f$ também é contínua no ponto $a = 5$, pois $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 6 = f(5)$.

*Exemplo* 4.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$. Ou seja, $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ e $f(x) = -1$ quando $x < 0$. Então $f$ é contínua em todos os pontos $x \neq 0$, mas não é contínua no ponto $x = 0$, porque não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

**Teorema 4.7.** *Seja $X \subset F_1 \cup F_2$, onde $F_1$ e $F_2$ são fechados. Se a função $f : X \to \mathbb{R}$ é tal que suas restrições $f|(X \cap F_1)$ e $f|(X \cap F_2)$ são contínuas, então $f$ é contínua.*

*Demonstração.* Seja $a \in X$. Bom, temos três possibilidades:

(i) $a \in F_1 \cap F_2$.

Seja $\epsilon > 0$. Como $f|(X \cap F_1)$ e $f|(X \cap F_2)$ são contínuas, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X \cap F_1, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon,$$

$$x \in X \cap F_2, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ora, tomando $\delta = \min\{\delta_1.\delta_2\}$, segue que $x \in X$ e

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta_1 \text{ e } |x-a| < \delta_2.$$

Daí então, quer seja $x \in F_1$, quer seja $x \in F_2$, temos que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

(ii) $a \in F_1$ e $a \notin F_2$.

Seja $\epsilon > 0$. Como $f|(X \cap F_1)$ é contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que,

$$x \in X \cap F_1, |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Além disso, como $F_2$ é fechado e $a \notin F_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap F_2 = \emptyset$. Assim, seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; então $x \in X$ e

$$|x-a| < \delta \Rightarrow x \in F_1 \text{ e } |x-a| < \delta_1.$$

Ou ainda,

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

(iii) $a \notin F_1$ e $a \in F_2$.

O desenvolvimento desse caso é análogo ao caso anterior.

Em qualquer um dos casos, temos que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$. □

**Corolário 4.4.** *Seja $X = F_1 \cup F_2$, onde $F_1$ e $F_2$ são fechados. Se a função $f : X \to \mathbb{R}$ é tal que suas restrições $f|F_1$ e $f|F_2$ são contínuas, então $f$ é contínua.*

*Observação* 4.3. O Corolário 4.4 mostra um resultado cujo domínio da função $f$ é um conjunto fechado, o que não é comum. Bom, evidentemente, o Teorema 4.7 também é válido quando se tem um número finito de conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_n$. Mas o caso de uma infinidade de conjuntos fechados é falso, pois todo conjunto $X$ é reunião de fechados (a saber, seus pontos) e $f|\{x\}$ é sempre contínua, seja qual for $x \in X$, mas $f$ pode não ser contínua.

Agora é possível compreender melhor os resultados dos Exemplos 4.3 e 4.4. No primeiro caso, temos que $\mathbb{R} = F \cup G$, onde os conjuntos $F = (-\infty, 5]$ e $G = [5, +\infty)$ são fechados. Como $f|F$ e $f|G$ são contínuas, segue-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. Já no Exemplo 4.4, temos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que, pondo $A = (-\infty, 0)$ e $B = [0, +\infty)$, vale $\mathbb{R} = A \cup B$ e as restrições $f|A$ e $f|B$ são contínuas. Mas $A$ não é fechado. Este fato possibilita que $f$ seja descontínua.

Em particular, no caso de abertos, em vez de fechados, o resultado ainda é o mesmo. Mais ainda: é admissível cobrir $X$ com uma infinidade desses conjuntos.

**Teorema 4.8.** *Seja $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ uma cobertura de $X$ por meio dos abertos $A_\lambda$. Se uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é tal que, para todos os $\lambda \in L$, as restrições $f|(A_\lambda \cap X)$ são contínuas, então $f$ é contínua.*

*Demonstração.* Tomemos $a \in X$. Para mostrar que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$, suponhamos dado $\epsilon > 0$. Existe algum $\lambda \in L$, tal que $a \in A_\lambda$. Como $A_\lambda$ é aberto, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow x \in A_\lambda$. Como $f|(A_\lambda \cap X)$ é contínua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $x \in A_\lambda \cap X$, $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Seja $\delta$ o menor dos números $\delta_1, \delta_2$. Se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$, então $x \in A_\lambda \cap X$ e $|x - a| < \delta_2$. Logo $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Isto prova que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a$. □

**Corolário 4.5.** *Seja $X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, onde cada $A_\lambda$ é aberto. Se cada restrição $f|A_\lambda$ é contínua, então $f$ é contínua.*

*Exemplo* 4.5. Seja $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Definamos $f : X \to \mathbb{R}$, pondo $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$. Então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, pois $X = A \cup B$, onde $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$ são abertos, com $f|A$ e $f|B$ contínuas.

## 4.2 Descontinuidades

Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Um *ponto de descontinuidade* da função $f$ é um ponto $a \in X$ tal que $f$ não é contínua no ponto $a$. Desse modo, dizer que $a \in X$ é um ponto de descontinuidade de $f : X \to \mathbb{R}$ equivale a afirmar existência de um número $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, se pode encontrar um $x_\delta \in X$ com $|x_\delta - a| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \epsilon$.

*Exemplo* 4.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ para $x$ racional e $f(x) = 1$ quando $x$ é irracional. Então todo número real é ponto de descontinuidade de $f$, pois não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, seja qual for $a \in X$.

*Exemplo* 4.7. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$, $h(0) = 0$. Então o único ponto de descontinuidade de $h$ é o ponto 0.

Diz-se que $f : X \to \mathbb{R}$ possui uma descontinuidade de primeira espécie no ponto $a \in X$ quando $f$ é descontínua no ponto $a$ e, além disso, existem os limites laterais $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$. Em particular, se $a$ for ponto de acumulação de $X$ somente de um lado, exige-se que apenas o limite lateral correspondente exista.

Uma descontinuidade $a \in X$ da função $f : X \to \mathbb{R}$ é chamada de *segunda espécie* quando $a \in X'_+$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ não existe ou então quando $a \in X'_-$ mas não existe limite à esquerda de $f$ no ponto $a$.

*Exemplo* 4.8. No Exemplo 4.6, os pontos de descontinuidade são todos de segunda espécie. Já no Exemplo 4.7, temos uma descontinuidade de primeira espécie. O limite à esquerda é $-1$ e o limite à direita é $+1$ no único ponto de descontinuidade.

*Exemplo* 4.9. Um exemplo conhecido de descontinuidade de segunda espécie é o da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$. Seja qual for o valor atribuído a $f(0)$, o ponto 0 será uma descontinuidade de segunda espécie para $f$, pois não existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ nem $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

*Exemplo* 4.10. Já $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, define uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja única descontinuidade é o ponto 0. Aí o limite à direita é zero, enquanto o limite à esquerda é 1. Trata-se, portanto, de uma descontinuidade de primeira espécie.

**Teorema 4.9.** *Uma função monótona $f : X \to \mathbb{R}$ não admite descontinuidades de segunda espécie.*

*Demonstração.* Dado $a \in X$, como $f$ é monótona, se $a+\delta \in X$ (respectivamente $a-\delta \in X$) então $f$ é limitada no conjunto $[a, a+\delta] \cap X$ (respectivamente $[a-\delta, a] \cap X$). Logo existem os limites laterais que façam sentido no ponto $a$, pelo Teorema 3.13. □

**Teorema 4.10.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ monótona. Se $f(X)$ é um conjunto denso em algum intervalo $I$, então $f$ é contínua.*

*Demonstração.* Muito bem, para cada $a \in X'_+$, seja $f(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. De maneira análoga, se $a \in X'_-$, vamos definir $f(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$. Para fixar melhor as ideias, vamos supor $f$ não-decrescente, ou simplesmente, $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq \cdots \leq f(x_n)$ sempre que $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$. Tomemos então $a \in X$. Se tem sentido falar em $f(a^+)$, ou seja, $a \in X'_+$, mostraremos que $f(a) = f(a^+)$.

De fato, observe que

$$f(a^+) = \inf\{f(x); a < x\}.$$

Como $f$ é não-decrescente, sabemos que

$$a < x \Rightarrow f(a) \leq f(x).$$

Daí então, $f(a) \leq f(a^+)$. Em particular, admitamos que seja $f(a) < f(a^+)$. Como existem pontos $x \in X$ com $x > a$ (pois $a$ é ponto de acumulação à direita de $X$), inferimos que em $f(X)$ há pontos $f(x) \geq f(a^+)$. Ora, sendo assim, todo intervalo $I$ contendo $f(X)$ deve conter pelo menos o intervalo $(f(a), f(a^+))$, no qual não há pontos $f(X)$ pois $x \leq a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$ e $a < x \Rightarrow f(a^+) \leq f(x)$. Isto contradiz que $f(X)$ seja denso num intervalo $I$. Consequentemente, $f(a) = f(a^+)$. De modo análogo, podemos mostrar que $f(a^-) = f(a)$ para todo $a \in X'_-$. Portanto, $f$ é contínua. □

**Corolário 4.6.** *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona e $f(X)$ é um intervalo, então $f$ é contínua.*

*Exemplo* 4.11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é racional} \\ -x, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Então $f$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ mas é contínua apenas no ponto 0. Isto se dá porque $f$ não é monótona.

*Observação* 4.4. Seguiremos usando as notações

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ e } f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

**Teorema 4.11.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função cujas descontinuidades são todas de primeira espécie. Então o conjunto dos pontos de descontinuidade de $f$ é enumerável.*

Bom, antes de demonstrar o Teorema 4.11, vamos definir uma função $\sigma : X \to \mathbb{R}$, pondo, para cada $x \in X$,

$$\sigma(x) = \max\{|f(x) - f(x^+)|, |f(x) - f(x^-)|\},$$

se $x \in X'_+ \cap X'_-$. Se $x \in X'_+$ ou $x \in X'_-$ apenas, poremos, respectivamente,

$$\sigma(x) = |f(x) - f(x^+)| \text{ ou } \sigma(x) = |f(x) - f(x^-)|.$$

Finalmente, se $x$ for um ponto isolado de $X$, poremos $\sigma(x) = 0$.

A função $\sigma$ é definida quando $f$ não possui descontinuidades de segunda espécie. Seu valor $\sigma(x)$ chama-se salto de $f$ no ponto $x$.

Observe que, se $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in X$, então $0 \leq \sigma(x) \leq b - a$. O fato mais importante sobre $\sigma$ é que $\sigma(x) > 0$ se, e somente se, $x \in X$ é uma descontinuidade de $f$.

*Demonstração.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $D_n = \left\{x \in X; \sigma(x) \geq \dfrac{1}{n}\right\}$. O conjunto dos pontos de descontinuidade de $f$ é $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Basta mostrar que cada $D_n$ é enumerável. Afirmamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $D_n$ possui apenas pontos isolados. De fato, seja $a \in D_n$. Sendo $f$ descontínua no ponto $a$, segue-se que $a \in X'$. Suponhamos $a \in X'_+$. Aplicando a definição de $f(a^+)$, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a, a + \delta) \cap X \Rightarrow f(a^+) - \frac{1}{4n} < f(x) < f(a^+) + \frac{1}{4n}.$$

Assim, $\sigma(x) \leq \dfrac{1}{2n}$ sempre que $x \in (a, a+\delta) \cap X$. Se, porém, tivermos $a \notin X'_+$, escolhemos $\delta > 0$ tal que $(a, a + \delta) \cap X = \emptyset$. Em qualquer hipótese, para todo $a \in D_n$ existe um intervalo $(a, a+\delta)$ tal que $(a, a+\delta) \cap D_n = \emptyset$. De modo semelhante encontramos, para cada $a \in D_n$, um intervalo aberto $(a-\delta', a)$ tal que $(a-\delta', a) \cap D_n = \emptyset$. Isto mostra que nenhum ponto de $D_n$ é ponto de acumulação. Em outras palavras, todo ponto de $D_n$ é isolado. Assim, pelo Corolário 2.8, segue-se que $D_n$ é enumerável. □

**Corolário 4.7.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ monótona. O conjunto dos pontos de descontinuidade de $f$ é enumerável.*

*Com efeito, pelo Teorema 4.9, as descontinuidades de $f$ são todas de primeira espécie.*

## 4.3 Funções contínuas em intervalos

Há uma propriedade especial sobre funções contínuas de que um função contínua não pode passar de um valor $a$ para um outro valor $b$ sem passar antes por todos os valores intermediários entre $a$ e $b$. Mais especificamente,

**Teorema 4.12** (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

*Primeira demonstração.* Veja bem, como $f$ é contínua, então evidentemente $f$ é contínua no ponto $a$, isto é, dado $\epsilon = d - f(a) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $a \leq x \leq a + \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \epsilon = d$. Ou simplesmente, todos os pontos de $x$ suficientemente próximos de $a$ no intervalo $[a, b]$ são tais que $f(x) < d$. De modo análogo, como $f$ também é contínua no ponto $b$, dado $\epsilon = f(b) - d > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $b - \delta \leq y \leq b \Rightarrow d = f(b) - \epsilon < f(y)$. Ou simplesmente, todos os pontos de $y$ suficientemente próximos de $b$ no intervalo $[a, b]$ são tais que $d < f(y)$. Em particular, os conjuntos

$$A = \{x \in (a, b); f(x) < d\} \text{ e } B = \{y \in (a, b); d < f(y)\}$$

são ambos não-vazios. O Corolário do Teorema 4.3 nos diz que $A$ e $B$ são abertos. Se não existir um ponto $c$ com $a < c < b$ e $f(c) = d$, segue-se que $(a, b) = A \cup B$, o que é um absurdo dada a unicidade da decomposição de um aberto como reunião de intervalos. (Veja o Corolário do Teorema 2.2.) □

*Segunda demonstração.* Seja $A = \{x \in [a, b]; f(x) < d\}$. $A$ é não-vazio, pois $f(a) < d$. Afirmamos que nenhum elemento de $A$ é maior do que todos os outros. De fato, seja $\alpha \in A$. Como $f(\alpha) < d$, vemos que $\alpha \neq b$ e, portanto, $\alpha < b$. Tomando $\epsilon = d - f(\alpha) > 0$, a continuidade de $f$ no ponto $\alpha$ nos dá $\delta > 0$ (que tomaremos pequeno, de modo a ter $[\alpha, \alpha + \delta] \subset [a, b]$) tal que, para todo $x \in [\alpha, \alpha + \delta]$ tem-se $f(x) < f(\alpha) + \epsilon = d$. Assim, todos os pontos do intervalo $[\alpha, \alpha + \delta)$ pertencem a $A$. Agora ponhamos $c = \sup A$. Como $c$ é limite de uma sequência de pontos $x_n \in A$, temos $f(c) = \lim f(x_n) \leq d$. Como $A$ não possui maior elemento, não se tem $c \in A$. Logo não vale $f(c) < d$, o que nos obriga a concluir que $f(c) = d$. □

**Corolário 4.8.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo $I$ (que pode ser fechado ou não, limitado ou ilimitado). Se $a < b$ pertencem a $I$ e $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$. Com efeito, basta restringir $f$ ao intervalo $[a, b]$ e aplicar o Teorema 4.12.*

**Corolário 4.9.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo $I$. Então $f(I)$ é um intervalo. Com efeito, sejam $\alpha = \inf_{x \in I} f(x)$ e $\beta = \sup_{x \in I} f(x)$. (Esta notação é simbólica. Podemos ter $\alpha = -\infty$, se $f$ for ilimitada inferiormente em $I$, ou $\beta = +\infty$, no caso de $f$ ser ilimitada superiormente em $I$). Afirmamos que $f(I)$ é um intervalo, cujos extremos são $\alpha$ e $\beta$. Ou seja, dado $y$ com $\alpha < y < \beta$, deve existir $y \in I$ tal que $y = f(x)$. De fato, pelas definições de* inf *e de* sup *(ou pela definição de conjunto ilimitado) existem $a, b \in I$ tais que $f(a) < y < f(b)$. Pelo Teorema 4.12, existe um ponto $x$, entre $a$ e $b$, tal que $f(x) = y$.*

*Observação* 4.5. No Corolário 4.9, nada afirmamos sobre os extremos do intervalo $f(I)$ pertencerem ou não ao intervalo. Podemos ter $f(I) = [\alpha, \beta]$, ou $f(I) = (\alpha, \beta)$, ou $f(I) = [\alpha, \beta)$, ou $f(I) = (\alpha, \beta]$. Também o intervalo $I$ é completamente arbitrário. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Então, tomando $I = (-1, 3)$, temos $f(I) = [0, 9)$.

*Exemplo* 4.12. Se $I$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função que só assume valores inteiros, então $f$ é constante. Com efeito, $f(I)$ deve ser um intervalo contido em $\mathbb{Z}$. Logo é degenerado (reduz-se a um ponto). Mais geralmente, se $Y \subset \mathbb{R}$ tem interior vazio e $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(X) \subset Y$, então $f$ é constante em cada intervalo que porventura $X$ contenha.

**Teorema 4.13.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva, definida num intervalo $I$. Então $f$ é monótona, sua imagem é $J = f(I)$ é um intervalo e sua inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ é contínua.*

*Demonstração.* Como o leitor pode verificar sem dificuldade, para concluirmos que $f$ é monótona, basta verificar sua monotonicidade em cada subintervalo limitado e fechado $[a, b] \subset I$. Assim, podemos admitir que $I = [a, b]$. Sabemos que $f(a) \neq f(b)$. Para fixar as ideias, vamos supor que $f(a) < f(b)$. Mostraremos então que $f$ é crescente. Do contrário, existiriam pontos $x < y$ em $[a, b]$ tais que $f(x) > f(y)$. Há duas possibilidades: $f(a) < f(y)$ ou $f(a) > f(y)$. No primeiro caso, temos $f(a) < f(y) < f(x)$. Logo, pelo Teorema 4.12, existirá $c \in (a, x)$ com $f(c) = f(y)$, em contradição com a injetividade de $f$. No segundo caso, vem $f(y) < f(a) < f(b)$ e, novamente pelo Teorema 4.12, obteremos $c \in (y, b)$ com $f(c) = f(a)$, ainda contradizendo a injetividade de $f$. Isto prova que toda função real contínua e injetiva, definida num intervalo, é monótona. O Corolário 4.9 nos dá que $J = f(I)$ é um intervalo e o Teorema 4.10 nos garante que $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ é contínua porque evidentemente $f^{-1}(J) = I$ e a inversa de uma função monótona é monótona. $\square$

## 4.4 Exercícios

*Exercício* 4.1. Seja $X = Y \cup Z$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é tal que $f|Y$ e $f|Z$ são contínuas, então $f$ é contínua em todo ponto $a \in Y \cap Z$.

*Solução.* Bom, segue do enunciado que a restrição de $f$ no conjunto $Y$ e a restrição de $f$ no conjunto $Z$ são contínuas. Seja $a \in Y \cap Z$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$y \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap Y \Rightarrow |f(y) - f(a)| < \epsilon.$$

De modo análogo, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que,

$$z \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap Z \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \epsilon.$$

Pois bem, fixemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Seja $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$. Como $X = Y \cup Z$, segue-se então que $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Y$ ou $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Z$. No primeiro caso,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Y \subset (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap Y \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ora, no segundo caso,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Z \subset (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap Z \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Concluímos, assim, que em ambos os casos,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ou ainda, $f$ é contínua em todo ponto $a \in Y \cap Z$.

*Exercício* 4.2. Dê um exemplo de dois abertos $A$ e $B$ e uma função contínua $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ tal que $f|A$ e $f|B$ sejam uniformemente contínuas, mas $f$ não seja.

*Solução.* Primeiramente, vamos relembrara a definição de uma função uniformemente contínua. Pois bem, seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua, então, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Sejam $A$ e $B$ os subconjuntos abertos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, respectivamente, em $\mathbb{R}$. Podemos definir uma função $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x \in (-\infty, 0) = A \\ 1, \text{ se } x \in (0, +\infty) = B. \end{cases}$$

As restrições $f|A$ e $f|B$ são constantes e, por isso, são uniformemente contínuas.

Mostraremos, agora, que $f$ não é uniformemente contínua verificando que para todo

$\delta > 0$ existem $x$ e $y \in A \cup B$ tais que

$$|x - y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| > 1.$$

Seja $\delta > 0$. Para $x = \dfrac{\delta}{4}$ e $y = -\dfrac{\delta}{4}$, temos que

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} \text{ e } |f(x) - f(y)| = 2 > 1.$$

Portanto, concluímos que $f$ não é uniformemente contínua.

*Exercício* 4.3. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, suponha que para cada $\epsilon > 0$ se possa obter uma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$, tal que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ qualquer que seja $x \in X$. Então $f$ é contínua.

*Solução.* Seja $\epsilon > 0$. Pelo hipótese sobre $f$, existe uma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$, para todo $x \in X$.

Como $g$ é contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que $|g(x) - g(a)| < \dfrac{\epsilon}{3}$, para todo $x \in X$ tal que $|x - a| < \delta$.

Assim,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon \text{para todo } x \in X \text{ tal que } |x - a| < \delta.
\end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que $f$ é contínua em $a$.

# Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages, Curso de Análise, vol. 1, 11a. edição, Projeto Euclides, IMPA, 2004.

# INTRODUCTION TO REAL ANALYSIS

LEONARDO DE ALMEIDA CARVALHO
*Estudante*

PAULO ANTONIO LIBONI FILHO
*Orientador(a)*

## RESUMO

**Palavras-chave:**

## ABSTRACT

Studying the theory of sequences and series, in addition to dedicating efforts to studies on topology of the real line. More specifically, working with sequences and Cauchy series, monotonic, converging and diverging sequences and the structures that make up the line of real numbers. As a result, we hope to generate a learning base so that it is possible to apply the knowledge acquired in the future studies.
**Keywords:** Sequences and series, topology, real functions and real line.

# 1 Sequences and Series of Real Numbers

## Introduction

Intuitively, we must imagine a sequence $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ of real numbers as a sequence of points on a line and its limit as a point from which the points $x_n$, taken arbitrarily, become and remain close, as long as one takes the $n$ index large enough.

Before continuing the study of sequences and series, it is important to recall two previously studied results:

**Teorema 1.1.** *Let $x$, $a$ be elements of an ordered field $K$. The following statements are equivalent:*

*(i)* $-a \leq x \leq a$;

*(ii)* $x \leq a$ *and* $-x \leq a$;

*(iii)* $|x| \leq a$.

*Demonstração.* $-a \leq x \leq a \Leftrightarrow [-a \leq x \text{ and } x \leq a] \Leftrightarrow [a \geq x \text{ and } a \geq -x] \Leftrightarrow a \geq |x|$. □

**Corolário 1.1.** *Given $a$, $x$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, with $\epsilon > 0$, we have $|x - a| < \epsilon$ if, and only if, $a - \epsilon < x < a + \epsilon$.*

**Teorema 1.2.** *A subset $X \subset \mathbb{N}$ is infinite if, and only if, it is unlimited.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) In fact, let $X \subset \mathbb{N}$ be an infinite set, it follows from the definition of infinite sets that $X \neq \varnothing$ and, furthermore, for whatever $n \in \mathbb{N}$, there is not any bijection $f : I_n \to X$. What means that, given any $f : I_n \to X$, with $n > 1$, and set $p = f(1) + \cdots + f(n)$. So $p > f(x)$ for all $x \in I_n$, whence $p \notin f(I_n)$. In other words, given $n \in \mathbb{N}$, there is some $p \in X$ such that $p > n$ and, therefore, $X$ é unlimited.

($\Leftarrow$) Reciprocally, let $X \subset \mathbb{N}$ be unlimited, it follows from the definition of unlimited sets that, given any $n \in \mathbb{N}$, there is always some $x \in X$ such that $x > n$. Therefore, for whatever $n \in \mathbb{N}$, there is not any bijection $f : I_n \to X$ and $X \subset \mathbb{N}$ is an infinite subset of $\mathbb{N}$.

□

## 1.1 Sequences

**Definição 1.1.** A *sequence of real numbers* is a function $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, defined in the set $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ of natural numbers and taking values in the set $\mathbb{R}$ of real numbers.

The value $x(n)$, for all $n \in \mathbb{N}$, will be indicated by $x_n$ and called term of order $n$, or *nth* term of the sequence. In addition, we will write $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, or simply $(x_n)$, to indicate the $x$ sequence.

The $x$ sequence should not be confused with the set $x(\mathbb{N})$ of its terms. For this set, we will use the notation $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. The function $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ is not necessarily injective, because we can have $x_m = x_n$ with $m \neq n$. In particular, despite the notation, the set $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ can be finite, or even reduced to a single element, as is the case of a constant sequence, on what $x_n = a \in \mathbb{R}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

When we have the $(x_n)$ injective sequence, that is, $m \neq n$ imply $x_m \neq x_n$, we say that it is a sequence of terms two by two distinct.

It is said that a sequence $(x_n)$ is *bounded* when the set of its terms is limited, that is, when there are real $a$, $b$ such that $a \leq x_n \leq b$ for all $n \in \mathbb{N}$. This implies that all terms of the sequence must belong to the interval $[a, b]$.

When a $(x_n)$ sequence is not bounded, it is said to be *unbounded*.

Evidently, a $(x_n)$ sequence is said to be *bounded above* when there is a real number $b$ such that $x_n \leq b$ for all $n \in \mathbb{N}$. This means that all terms $x_n$ belong to the semi-straight $(-\infty, b]$. Similarly, a $(x_n)$ sequence is said to be *bounded below* when there is $a \in \mathbb{R}$ such that $a \leq x_n$, that is, $x_n \in [a, +\infty]$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Of course, a sequence is said to be bounded if it is both bounded above and bounded below.

Given a sequence $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a *subsequence* $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ is the restriction of function $x$ to an infinite subset $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\}$ of $\mathbb{N}$.

A $(x_n)$ sequence is called *increasing* if, for every natural number $n, x_n < x_{n+1}$, that is, $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$ If it is true that $x_n \leq x_{n+1}$, the sequence is said *non-decreasing*.

Similarly, a $(x_n)$ sequence is called *decreasing* if, for all natural $n, x_n > x_{n+1}$, that is, $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots$ If it is true that $x_n \geq x_{n+1}$, the sequence is said *non-increasing*.

Increasing, non-decreasing, decreasing, and non-increasing sequences are identified as *monotonic* sequences.

A non-decreasing sequence has always a lower bound (its first term). Similarly, a non-increasing sequence has always an upper bound.

For a monotonic sequence to be bounded, it is necessary (and sufficient) that it has a bounded subsequence. In fact, let $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \dots \leq x_{n_k} \leq \dots \leq b$ be a bounded subsequence of the non-decreasing sequence $(x_n)$, that is, the subsequence $x' \in (x_{n_1}, b)$. Therefore, for any $n \in \mathbb{N}$, there is a $n_k > n$ and, thus, $x_n \leq x_{n_k} \leq b$. So $x_n \leq b$ for all $n$. Consequently, the sequence $(x_n)$ is bounded.

## 1.2 Limit of a sequence

**Definição 1.2.** A real number $a$ is the *limit* of the sequence $(x_n)$ of real numbers, and we write $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, when for each real number $\epsilon > 0$, given arbitrarily, it is possible to obtain a $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $n > n_0$ implies $|x_n - a| < \epsilon$.

Therefore, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ means (by definition) that for every real number $\epsilon > 0$, there is a natural number $n_0$ such that $n > n_0$ implies $|x_n - a| < \epsilon$.

When $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, it is declared that the sequence $(x_n)$ *converges* to $a$, or *tends* to $a$, and we write $x_n \to a$. A sequence that has limit is called *convergent*. Otherwise, it is called *divergent*.

**Teorema 1.3.** *Let* $\lim x_n = a$*, so every subsequence of* $(x_n)$ *converges to the limit* $a$*.*

*Demonstração.* Let $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ be a subsequence of $(x_n)$. As $\lim x_n = a$, given $\epsilon > 0$, there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. As the indexes of the subsequence form an infinite subset, between them there is a $n_{k_0} > n_0$. So $n_k > n_{k_0} \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \epsilon$. Therefore, $\lim x_{n_k} = a$ □

**Teorema 1.4.** *Every convergent sequence is bounded.*

*Demonstração.* Let $\lim x_n = a$. So, taking $\epsilon = 1$, there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Considering the finite set $F = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Let $c$ be the smallest and $d$ the largest element of $F$. So all terms $x_n$ of the sequence are contained in the interval $[c, d]$ and, therefore, the sequence is bounded. □

**Teorema 1.5.** *Every bounded monotonic sequence is convergent.*

*Demonstração.* Let $(x_n)$ be a bounded non-decreasing monotonic sequence. Let us take $a = \sup\{x_n; n = 1, 2, \dots\}$. We affirm that $a = \lim x_n$. In fact, given arbitrarily $\epsilon > 0$, as $a - \epsilon < a$, it follows that the number $a - \epsilon$ can not be an upper quota of the set of $x_n$ elements. Consequently, there is, at least, a $x_n$ higher than $a - \epsilon$. In other words, $a - \epsilon < x_n$ for some $n_0 \in \mathbb{N}$. As $(x_n)$ is non-decreasing, it follows that $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \le x_n$ and, thus, $a - \epsilon < x_n$. As $x_n \le a$ for all $n$, it is evident that $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Finally, we have $\lim x_n = a$, as we wanted to demonstrate. □

**Corolário 1.2.** *If a monotonic sequence* $(x_n)$ *has a convergent subsequence, so* $(x_n)$ *is convergent. In fact, in this case, the monotonic sequence* $(x_n)$ *is bounded because has a subsequence bounded.*

## 1.3 Arithmetic properties of limits

**Teorema 1.6** (Signal permanence)**.** *If* $\lim x_n = a > 0$*, there is* $n_0 \in \mathbb{N}$ *such that* $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$*. (If a sequence has a positive limit, then from a certain index, all its terms are positive.)*

*Demonstração.* Let $\epsilon = \dfrac{a}{2} > 0$. So $(a-\epsilon, a+\epsilon) = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$. There is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $n > n_0 \Rightarrow x_n \in \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$, that is, $x_n > \dfrac{a}{2}$. Therefore, $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$. □

*Observação* 1.1. Similarly, we can demonstrate that if $\lim x_n = b < 0$, then from a certain order, all terms $x_n$ are negative.

**Corolário 1.3.** *Let $(x_n)$ and $(y_n)$ be convergent sequences. If $x_n \leq y_n$ for all $n \in \mathbb{N}$, then $\lim x_n \leq \lim y_n$. In fact, if it was $\lim x_n > \lim y_n$, then we would have $0 < \lim x_n - \lim y_n = \lim(x_n - y_n)$ and, consequently, we would have $x_n - y_n > 0$ for all $n$ large enough.*

**Corolário 1.4.** *Let $(x_n)$ be a convergent sequence. If $x_n \geq a$ for all $n$, then $\lim x_n \geq a$.*

**Teorema 1.7.** *Let $x_n \geq z_n \geq y_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. If $\lim x_n = \lim y_n = a$, then $\lim z_n = a$.*

*Demonstração.* Given $\epsilon > 0$ arbitrarily, there are $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ such that $n > n_1 \Rightarrow x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ and $n > n_2 \Rightarrow y_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Putting $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, we have that $n > n_0$ implies $a - \epsilon < x_n < z_n < y_n < a + \epsilon$, from where we can conclude that $\lim z_n = a$. □

## 1.4 Subsequences

We can rewrite the definition of limit as follows: a number $a$ is the limit of a $x = (x_n)$ sequence if, and only if, for all $\epsilon > 0$, the set $x^{-1}(a-\epsilon, a+\epsilon) = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)\}$ has finite complement in $\mathbb{N}$. Equivalently, we can say that there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.

It will be shown now that $a \in \mathbb{R}$ is limit of a $(x_n)$ sequence if, and only if, for all $\epsilon > 0$, the set $x^{-1}(a-\epsilon, a+\epsilon) = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a-\epsilon,\ a+\epsilon)\}$ is an infinite subset of $\mathbb{N}$.

**Teorema 1.8.** *For $a \in \mathbb{R}$ to be a limit of a subsequence of $(x_n)$, it is necessary and sufficient that, for all $\epsilon > 0$, there is a multitude of indexes $n$ such that $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.*

*Demonstração.* Well, let $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$ be a subset of natural numbers such that $a = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} x_n$. Therefore, for each $\epsilon > 0$, there is $i_0 \in \mathbb{N}$ such that $i > i_0 \Rightarrow x_{n_i} \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. As there is a multitude of indexes $i > i_0$, it follows that there are infinite $n_i \in \mathbb{N}$ such that $x_{n_i} \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Reciprocally, let us suppose that for each $\epsilon > 0$, the set $\{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)\}$ be infinite. Taking successively $\epsilon = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots$ we will get a set $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \dots\}$ such that $a = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} x_n$. In fact, set $n_1 \in \mathbb{N}'$ such that $x_{n_1} \in (a-1,\ a+1)$. Assuming, by induction, that $n_1 < n_2 < \cdots < n_i$ were defined such that $x_{n_2} \in \left(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2}\right)$, $x_{n_3} \in \left(a - \dfrac{1}{3}, a + \dfrac{1}{3}\right)$, $\dots$, $x_{n_i} \in \left(a - \dfrac{1}{i}, a + \dfrac{1}{i}\right)$, we can observe that the set $\left\{n \in \mathbb{N}; x_n \in \left(a - \dfrac{1}{i+1}, a + \dfrac{1}{i+1}\right)\right\}$

is infinite, then it contains some integer $n_{i+1}$ bigger than $n_1, n_2, \dots, n_i$. This completes the inductive definition of $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\}$. As $|x_{n_i} - a| < \dfrac{1}{i}$ for every $i \in \mathbb{N}$, we have that $\lim\limits_{i\to+\infty} x_{n_i} = a$, that is, $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}'} x_n = a$. We can see, therefore, that $a$ is limit of a subsequence of $(x_n)$. $\square$

We say that a real number $a$ is an *adherent value* of a sequence $(x_n)$ when $a$ is limit for some subsequence of $(x_n)$, that is, if exists a subsequence of $(x_n)$, denoted by $(x_{n_k})$, such that $\lim x_{n_k} = a$.

Imagine now a $(x_n)$ bounded sequence of real numbers. We will show that the set of adherence values of $(x_n)$ is not empty, that between the elements there is a value that is the smallest of all and another that is the largest, and that the sequence converges if, and only if, has only a single adherence value. In a natural sense, the smallest and largest adherence value are generalizations of the limit for the case of bounded sequences that may not be convergent. Let us move on to a formal discussion.

Let $(x_n)$ be a bounded sequence with $\alpha \geq x_n \geq \beta$ for all $n \in \mathbb{N}$. Let us write $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. We have that $[\alpha,\beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ Therefore, putting $a_n = \inf X_n$ and $b_n = \sup X_n$, we have

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta.$$

There are, thus, the limits

$$a = \lim a_n = \sup a_n = \sup \inf X_n,$$

$$b = \lim b_n = \inf b_n = \inf \sup X_n.$$

We write $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$, and we say that $a$ is the *lower limit* and $b$ is the *upper limit* of the sequence $(x_n)$. Evidently, we have that $\liminf x_n \geq \limsup x_n$.

**Teorema 1.9.** *Let $(x_n)$ be a bounded sequence. So $\liminf x_n$ is the smallest adherence value and $\limsup x_n$ is the largest adherence value of $(x_n)$.*

*Demonstração.* First of all, let us prove that $a = \liminf x_n$ is an adherence value of $(x_n)$. To this end, we will use the Theorem 1.8. Given arbitrarily $\epsilon > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$, we will show that there is $n \in \mathbb{N}$ such that $n > n_0$ and $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. As $a = \lim a_n$, there is $n_1 > n_0$ such that $a - \epsilon < a_{n_1} < a + \epsilon$. And as $a_{n_1} = \inf X_{n_1}$, it follows by the last inequality that $a+\epsilon$ (being higher than $a_{n_1}$) is not a lower quota of $X_{n_1}$. So there is $n \geq n_1$ such that $a_{n_1} \leq x_n < a + \epsilon$. This gives us $n > n_0$ with $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, as we wanted. It remains to show now that no number $c < a$ can be an adherence value of $(x_n)$. As $a = \lim a_n$, it follows from $c < a$ that there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $c < a_{n_0} < a$. And as $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, we can conclude that $n \geq n_0 \Rightarrow c < a_{n_0} \leq x_n$. Putting $\epsilon = a_{n_0} - c$, we see that $c+\epsilon = a_{n_0}$, then the interval $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ does not contain any $x_n$ term with $n \geq n_0$. This excludes the possibility of $c$ be an adherence value of $(x_n)$.

Let now $b = \lim b_n$, there is $n_1 > n_0$ such that $b-\epsilon < b_{n_1} < b+\epsilon$. As $b_{n_1} = \sup X_{n_1}$, it follows by the last inequality that $b-\epsilon$ (being smaller than $b_{n_1}$) is not an upper quota of $X_{n_1}$. So there is $n \geq n_1$ such that $b-\epsilon < x_n \leq b_{n_1}$. This gives us $n > n_0$ with $b-\epsilon < x_n < b+\epsilon$, as we wanted. It remains to show now that no number $d > b$ can be an adherence value of $(x_n)$. As $b = \lim b_n$, it follows from $d > b$ that there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $b \leq b_{n_0} < d$. And as $b_{n_0} = \sup X_{n_1}$, we can conclude that $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \leq b_{n_0} < d$. Putting $\epsilon = d - b_{n_0}$, we see that $d - \epsilon = b_{n_0}$, then the interval $(d-\epsilon, d+\epsilon)$ does not contain any $x_n$ term with $n \geq n_0$ and, thus, $d$ is not an adherence value of the sequence $(x_n)$. $\square$

**Corolário 1.5.** *Every bounded sequence of real numbers has a convergent subsequence. In fact, being $a = \limsup x_n$ an adherence value, some subsequence of $(x_n)$ converges to $a$.*

**Corolário 1.6.** *A bounded sequence of real numbers $(x_n)$ is convergent if, and only if, $\liminf x_n = \limsup x_n$, that is, if, and only if, has a single adherence value. In fact, if $(x_n)$ is convergent, then $\liminf x_n = \limsup x_n = \lim x_n$. Reciprocally, let us suppose that $\liminf x_n = \limsup x_n = a$. In other words, $\lim a_n = \lim b_n = a$. Therefore, given $\epsilon > 0$, there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $a-\epsilon < a_{n_0} \leq a \leq b_{n_0} < a+\epsilon$. Well, $n > n_0$ implies $a_{n_0} \leq x_n \leq b_{n_0}$. So $n > n_0 \Rightarrow a-\epsilon < x_n < a+\epsilon$ and, thus, $\lim x_n = a$.*

## 1.5 Cauchy sequences

A great important result is Theorem 1.5, which states the following: "every monotonic bounded sequence is convergent", that is, we can say, in certain cases, that a sequence has a limit, even thought we do not know the value of this limit. Well, many convergent sequences are not monotonics, so this convergence criterion of Theorem 1.5 is not the best possible. For example, the sequence $\dfrac{(-1)^n}{n}$ is not monotonic and converges to zero. We will see next the Cauchy criterion, which will give us a condition, not only sufficient but also necessary, for the convergence of a sequence of real numbers.

A $(x_n)$ sequence of real numbers is a *Cauchy sequence* when it admits the following condition: given arbitrarily a real number $\epsilon > 0$, it is possible to obtain $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $m > n_0$ and $n > n_0$ implies $|x_m - x_n| < \epsilon$.

In more simple words, in order to $(x_n)$ be a Cauchy sequence, it is sufficient and necessary that its terms $(x_m)$ and $(x_n)$, for sufficiently large values of the indexes $m$, $n$, approach each other arbitrarily. It is possible to make a comparison with the definition of limit, in which is necessary that the terms $(x_n)$ approximate arbitrarily to a real number $a$, given a priori. Here, the condition is imposed only on the terms of the sequence itself.

**Teorema 1.10.** *Every convergent sequence is a Cauchy sequence.*

*Demonstração.* Let $\lim x_n = a$. Given arbitrarily $\epsilon > 0$, there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $m > n_0 \Rightarrow |x_m - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ and $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Therefore, $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$, which shows that $(x_n)$ is a Cauchy sequence. □

Intuitively, if $\lim x_n = a$, then, for large values of $n$, it is evident that the terms $(x_n)$ approximate to $a$. In this case, they need to approximate ones each others.

**Teorema 1.11.** *Every Cauchy sequence of real numbers is convergent.*

*Demonstração.* First of all, let us show that every Cauchy sequence is bounded. Well, let $(x_n)$ be a Cauchy sequence and, taking $\epsilon = 1$, we get $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$. In particular, $n \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_0} - x_n| < 1$, that is, $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Let $\alpha$ the smallest and $\beta$ the largest element of the set $x = \{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n_0} - 1,\ x_{n_0} + 1\}$. So $x_n \in [\alpha, \beta]$ for all $n \in \mathbb{N}$, that is, $(x_n)$ is bounded. Now, given $\epsilon > 0$, as $(x_n)$ is a Cauchy sequence, then there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$. There is also, supported by Theorem 1.8, $n_1 > n_0$ such that $|x_{n_1} - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Thus, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq |x_m - x_n| + |x_{n_1} - a| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. This shows that $\lim x_n = a$. □

*Exemplo* 1.1 (Method of successive approximations). Let $0 \leq \gamma < 1$. Let us suppose that $(x_n)$ is a sequence such that $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \gamma |x_{n+1} - x_n|$ for all $n \in \mathbb{N}$. We affirm that $(x_n)$ is a Cauchy sequence and, thus, converges. In fact, we have $|x_3 - x_2| \leq \gamma |x_2 - x_1|$, $|x_4 - x_3| \leq \gamma^2 |x_2 - x_1|$ and, generally, $|x_{n+1} - x_n| \leq \gamma^{n-1} |x_2 - x_1|$ for all $n \in \mathbb{N}$. It follows that for $n, p \in \mathbb{N}$ arbitraries, we can say:

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq (\gamma^{n+p-2} + \gamma^{n+p-3} + \cdots + \gamma^{n-1}) |x_2 - x_1| \\
&= \gamma^{n-1} (\gamma^{p-1} + \gamma^{p-2} + \cdots + \gamma + 1) |x_2 - x_1| \\
&= \gamma^{n-1} \cdot \frac{1 - \gamma^p}{1 - \gamma} \cdot |x_2 - x_1| \leq \frac{\gamma^{n-1}}{1 - \gamma} \cdot |x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

As $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\gamma^{n-1}}{1 - \gamma} \cdot |x_2 - x_1| = 0$, it follows that, for whatever $\epsilon > 0$ given, there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $n > n_0 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{\gamma^{n-1}}{1 - \gamma} \cdot |x_2 - x_1| < \epsilon$. Finally, we have that $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$. (Because we can always assume $m \geq n$ and write $m = p$.)

## 1.6 Series

In this section, we will extend the addition operation (so far defined for a finite number of real numbers) in order to assign meaning to an equality of type $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$, in which the first member is a "sum" with a multitude of plots. Of course, it makes no sense to sum an infinite sequence of numbers real, what the first member of equality above expresses is the limit $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$. This equality then means that, given arbitrarily $\epsilon>0$, there is $n_0\in\mathbb{N}$ such that, for all $n>n_0$, the sum $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ differs from 1 by less than $\epsilon$.

We will define, therefore, infinite sums through limits. Consequently, it is expected that some sums can be made (that is, it converges) and others can not, once that not every sequence has a limit. Instead of "infinite sum" we will use the word *series*.

**Definição 1.3.** Let $(a_n)$ be a sequence of real numbers, let us think about the sum of all its terms, that is, in the infinite sum

$$a_1+a_2+a_3+\cdots .$$

As previously seen, we call this infinite sum by series, and we denote by $\sum_{n=1}^{+\infty}$. The parcel $a_n$ is called the *nth* term or the general term of the series. However, we can understand it as the limit, if there is, of the sequence $s_1,s_2,s_3,\ldots$ on what

$$s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ s_3=a_1+a_2+a_3,\ldots,\ s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

If this sequence $(s_n)$, which we call *partial sums* of series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, is convergent, we say that the series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ is convergent (or that it converges) and we denote by

$$\lim s_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

In this case, we also say that the number $\lim s_n$ is the sum of the series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

If the sequence of the partial sums is not convergent, we say that the series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ is divergent (or that it diverges). Still in this case, if $\lim s_n=+\infty$ or $\lim s_n=-\infty$, then we will write, respectively,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty \text{ or } \sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\infty.$$

*Tip.* Sometimes it is convenient to consider series of the type $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, that start with $a_0$ instead of $a_1$.

**Teorema 1.12.** *If $\sum a_n$ is a convergent series, then $\lim a_n=0$.*

*Demonstração.* In fact, let $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, it follows from the definition of convergent series that there is $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Evidently, there is also $s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. So $0 = s - s = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim s_n - s_{n-1} = \lim a_n$. □

*Exemplo* 1.2. The reciprocal of Theorem 1.12 is false. The classic counterexample is given by the harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Its general term, $\frac{1}{n}$, tends to zero but the series diverges. In fact, note that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Now, let us define a smaller series than the one given previously. Well, let us suppose by absurd that the harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is convergent and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots > s, \text{ from where}$$

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots.$$

So $s = 1 + n \cdot \frac{1}{2}$ and, therefore, it diverges. It follows that $\lim s = +\infty$ and, consequently, $\lim s_n = +\infty$.

A series $\sum a_n$ can diverge for two reasons. Either because the partial sums $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ are unbounded or because they oscillates around some adherent values. When the terms of the series all have the same sign, this last possibility does not occur because, in this case, the partial sums form a monotonic sequence.

**Teorema 1.13.** *Let $a_n \geq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. The series $\sum a_n$ converges if, and only if, the partial sums $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ form a bounded sequence, that is, if there is $k > 0$ such that $a_1 + \cdots + a_n < k$ for all $n \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) In fact, let $\sum a_n$ be convergent, it follows from definition that $\lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n) = s$, with $s \in \mathbb{R}$. As $(s_n)$ is the sequence of the partial sums and applying the limit definition, it follows that there is $\epsilon > 0$ such that $|s_n - s| < k$, that is, $-\epsilon + s < s_n < \epsilon + s$. So there is $k = \epsilon + s > 0$ such that $a_1 + \cdots + a_n < k$ and, therefore, the series converges.

($\Leftarrow$) Let $s_n$ be the sequence of the partial sums from the series $\sum a_n$. As, by hypothesis, $s_n$ é bounded and $a_n \geq 0$, then the sequence $s_n$ is increasing and bounded, which makes its convergence to a real number $s$ mandatory. Thus, given the definition of series, we can write $\sum a_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n) = \lim s_n = s$. So the series converges to a sum of value $s$.

$\square$

**Corolário 1.7** (Comparison criterion). *Let $\sum a_n$ and $\sum b_n$ be series of non-negative terms. If there is $c > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $a_n \leq c \cdot b_n$ for all $n > n_0$, so the convergence of $\sum b_n$ implies the convergence of $\sum a_n$, while the divergence of $\sum a_n$ result in the divergence of $\sum b_n$.*

Recalling: let $(x_n)$ be a sequence of real numbers. It is called *Cauchy sequence* when it admits the following condition: given arbitrarily a real number $\epsilon > 0$, can be obtained $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $m > n_0$ and $n > n_0$ implies $|x_m - x_n| < \epsilon$.

**Teorema 1.14** (Cauchy criterion for series). *In order for the $\sum a_n$ series to be convergent, it is necessary and sufficient that, for each $\epsilon > 0$, there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$ for whatever $n > n_0$ and $p \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Firstly, note that $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$ and $(s_n)$ is the sequence of partial sums of $\sum a_n$. Now, just apply the Cauchy criterion for sequences. Well, it is evident that $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$. Thus, the given series satisfies the desired inequality if, and only if, $(s_n)$ is a Cauchy sequence. As previously seen in Theorem 1.11, a real sequence is convergent if, and only if, it is a Cauchy sequence. In conclusion, we can say: the series $\sum a_n$ satisfies the desired inequality, the sequence $(s_n)$ is a Cauchy sequence, $(s_n)$ converges and the series $\sum a_n$ converges. $\square$

A series $\sum a_n$ is called *absolutely convergent* when $\sum |a_n|$ is a convergent series.

When the series $\sum a_n$ is convergent, but $\sum |a_n|$ is divergent, we say that $\sum a_n$ is *conditionally convergent.*

**Teorema 1.15.** *Every series absolutely convergent is also convergent.*

*Demonstração.* In fact, let $\sum |a_n|$ be a convergent series, it follows from definition that, given arbitrarily $\epsilon > 0$, there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$, for whatever $p \in \mathbb{N}$. In this conditions, $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$ and, thus, $\sum a_n$ converges, because of the Theorem 1.14. $\square$

**Corolário 1.8.** *Let $\sum b_n$ be a convergent series, with $b_n \geq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. If there are $k > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $|a_n| < k \cdot b_n$ for all $n > n_0$, so the series $\sum a_n$ is (absolutely) convergent.*

**Corolário 1.9.** *If, for all $n > n_0$, we have $|a_n| \leq k \cdot c^n$ with $0 < c < 1$ and $k$ is a positive constant, so the series $\sum a_n$ is (absolutely) convergent. In fact, being $0 < c < 1$, the geometric series $\sum c^n$ converges.*

*Note that, taking $k = 1$, the condition $|a_n| \leq c^n$ is equivalent to $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$. Furthermore, when we say that this condition is valid for every $n$ greater than a certain $n_0$, it means stating that $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.*

**Corolário 1.10** (Root test)**.** *If there is $c$ such that $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ for all $n > n_0$, then $\sum a_n$ is (absolutely) convergent. In other words, if $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so the series $\sum a_n$ converges (absolutely).*

*Sometimes it happens that there is $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. So we have the following Corollary:*

**Corolário 1.11.** *If $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so the series $\sum a_n$ is (absolutely) convergent.*

In resume, the **root test** has the following possibilities:

(i) If $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, so the series $\sum a_n$ is absolutely convergent.

(ii) If $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ or $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, so the series $\sum a_n$ is divergent.

(iii) If $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, the root test is inconclusive.

**Teorema 1.16** (Ratio test)**.** *Let $\sum a_n$ be a series of terms all non-nulls and $\sum b_n$ a convergent series with $b_n > 0$ for all $n$. If there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ for all $n > n_0$, so $\sum a_n$ is (absolutely) convergent.*

*Demonstração.* Taking arbitrarily $n > n_0$, and multiplying member by member the inequalities

$$\frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \ \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|} \leq \frac{b_{n_0+3}}{b_{n_0+2}}, \dots, \ \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

We will obtain $\dfrac{|a_n|}{|a_{n_0+1}|} \leq \dfrac{b_n}{b_{n_0+1}}$, that is, $|a_n| \leq k \cdot b_n$, in which $k = \dfrac{|a_{n_0+1}|}{b_{n_0+1}}$. Thus, it follows from Corollary 1.8 that $\sum a_n$ is (absolutely) convergent. $\square$

**Corolário 1.12.** *If there is a constant $c$ such that $0 < c < 1$ and $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c$ for all $n \geq n_0$, so the series $\sum a_n$ is (absolutely) convergent. In other words, if $\limsup \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, the series $\sum a_n$ converges (absolutely). In fact, with the geometrical series $\sum c^n$ being convergent, just take $b_n = c^n$ in the Theorem 1.15.*

*If happens the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, so we have the following Corollary*

**Corolário 1.13.** *If $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, so the series $\sum a_n$ is (absolutely) convergent.*

In resume, the **ratio test** has the following possibilities:

(i) If $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$, so the series $\sum a_n$ is absolutely convergent.

(ii) If $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L > 1$ or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$, so the series $\sum a_n$ is divergent.

(iii) If $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, the ratio test is inconclusive.

**Teorema 1.17** (Dirichlet's test)**.** *Let $\sum a_n$ be a series (not necessarily convergent) whose the partial sums $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ form a bounded sequence. Let $(b_n)$ be a non-increasing sequence of positive numbers with $\lim b_n = 0$. So the series $\sum a_n b_n$ is convergent.*

*Demonstração.* In fact, we have

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) \\ &\quad + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_n)bn \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + s_n b_n. \end{aligned}$$

Well, there is $k > 0$ such that $|s_n| \leq k$ for all $n$ and, moreover, $\sum_{n=2}^{\infty}(b_{n-1} - b_n)$ is a convergent series of real positive numbers (sum: $b_1$). So by Corollary 1.8, we have

$$\sum_{n=2}^{\infty} |s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)| \leq k \sum_{n=2}^{\infty} (b_{n-1} - b_n) = k \cdot b_1,$$

whence it follows that the series $\sum_{n=2}^{\infty} s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$ is absolutely convergent and, therefore, convergent. As $\lim s_n b_n = 0$, it follows that there is $\lim(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)$, that is, the series $\sum a_n b_n$ converges. □

**Corolário 1.14** (Abel)**.** *If $\sum a_n$ is convergent and $(b_n)$ is a non-increasing sequence of positive numbers (not necessarily tending to zero), then the series $\sum a_n b_n$ converges.*

*Note that, in this Corollary, we loosen the hypothesis about $b_n$ but, on the other hand, we demand that the series $\sum a_n$ be convergent. To prove it, just write $\lim b_n = c$. So $(b_n - c)$ is a non-increasing sequence with limit zero, that is, $\lim(b_n - c) = 0$. By the criterion of Dirichlet, the series $\sum a_n(b_n - c)$ converges to a sum $s$. As $\sum a_n$ is convergent, we have that $\sum a_n b_n = s + c \sum a_n$ also converges.*

**Corolário 1.15** (Leibniz)**.** *If $(b_n)$ is a non-increasing sequence with $\lim b_n = 0$, then the series $\sum(-1)^n b_n$ is convergent. In fact, although the series $\sum(-1)^n$ is not convergent, their partial sums form a bounded sequence.*

**Teorema 1.18.** *Every absolutely convergent series is commutatively convergent.*

*Demonstração.* Let us suppose, to begin, that $\sum a_n$ is a convergent series and also that $a_n \geq 0$ for all $n$. Let $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a bijection and put $b_n = a_{\varphi(n)}$. We affirm that $\sum b_n = \sum a_n$. In fact, set $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ and $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. In addition, for each $n \in \mathbb{N}$, let us call $m$ the biggest number between $\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n)$, or equivalently, $m = \max\{\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \ldots, \varphi(n)\}$. Therefore, we can write that $\{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\} \subset [1, m]$. It follows that $t_n = \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} \leq \sum_{j=1}^{m} a_j = s_m$. (For $n = 3$, for example, we have $t_3 = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)}$ and $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, and supposing $m = \varphi(3) = 7$, so $\sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_7 \leq \sum_{j=1}^{7} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_7$.) So for each $n \in \mathbb{N}$, there is $m \in \mathbb{N}$ such that $t_n \leq s_m$. Similarly, considering $\varphi^{-1}$ instead of $\varphi$, it is easy to see that, for each $m \in \mathbb{N}$, there is $n \in \mathbb{N}$ such that $s_m \leq t_n$. Thus, we can conclude that $\lim s_n = \lim t_n$, that is, $\sum a_n = \sum b_n$.

In the general case, we have that $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$, where $p_n$ and $q_n$ are respectively the positive and negative parts of $a_n$. All reordering $(b_n)$ of terms from $a_n$ originates a reordering $(\upsilon_n)$ for $p_n$ and a a reordering $(\kappa_n)$ for $q_n$, such that each $\upsilon_n$ is the positive part and each $\kappa_n$ is the negative part of $b_n$. From what we just saw, $\sum \upsilon_n = \sum p_n$ and $\sum \kappa_n = \sum q_n$. So $\sum a_n = \sum \upsilon_n - \sum \kappa_n = \sum b_n$, what proves the Theorem. □

**Teorema 1.19.** *Let $\sum a_n$ be a conditionally convergent series. Given any number real $c$, there is a reordering $(b_n)$ of terms of $\sum a_n$ such that $\sum b_n = c$.*

*Demonstração.* Well, let $p_n$ be the positive part and $q_n$ the negative part of $a_n$. As $\sum a_n$ converges conditionally, it follows that $\lim a_n = 0$, whence $\lim p_n = \lim q_n = 0$, but $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$. Now, fixing $c \in \mathbb{R}$, we will define a new series $\sum b_n$, obtained by a reordering of the terms of $\sum a_n$ as follows: we started by taking as first terms $p_1, p_2, ..., p_{n_1}$, in which $n_1$ is the smallest index such that $p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > c$. Then, take the negative terms $-q_1, -q_2, ..., -q_{n_2}$, in which $n_2$ is the smallest index such that $p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} < c$. Note that the choices of $n_1$ e $n_2$ are lawful, because $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$. We continue like this: choosing the lowest index $n_3$ such that $p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} > c$ and then the lowest index $n_4$, so that $p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} - q_{n_2+1} - \cdots - q_{n_4} < c$. Continuing this way, we will get a reordering of $\sum a_n$ such that the partial sums $t_n$ of the new series tends to $c$, once that the succession of $t_n$ oscillates around $c$ and verifies the property, using the term obtained when adding $p_{n_1}$, $|t_n - c| \leq |a_{n_k}|$, whence $|a_{n_k}|$ is the term that originated the last oscillation in around $c$. As $\lim a_{n_k} = 0$ (because the series $\sum a_n$ is convergent), we have that $\lim t_n = c$. □

*Observação* 1.2. A similar (simpler) reasoning shows that a convenient change in the order of terms of a conditionally convergent series is enough so that their partial sums tend to $+\infty$ (or $-\infty$).

# 2 Topology of the Real Line

## Introduction

We will start, at this moment, the studies about the main topological properties of subsets of the line. We define the properties based on the notions of proximity and limit, closely linked to behavior of continuous functions.

The purpose of this section is to provide a basis for the studies related to the notion of continuous functions. In order to make sense of limit determinations and also the inquiries about the continuity of functions, it is necessary that the domain and the codomain of the same have a certain type of structure, in this case, “topological space”.

It is also important to highlight the introduction of a more geometric language:

- We will call the field $\mathbb{R}$ of “line”.
- We will say “point” instead of “real number”.
- If $a < b$, we will say that “a is to the left of b”.
- Given $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ is the “distance from point $x$ to the point $y$”.
- The interval $[a, b]$ is the line segment whose extremes are $a$ and $b$.

## 2.1 Open sets

We will start this section with an observation that aims to predate some ideas that we will formally define later.

*Observação* 2.1. Imagine a real number $a$ such that $a > 2$. In this way, realize that it is possible to choose a number $x \in \mathbb{R}$ so that $x > 2$, just take $x$ as a real number sufficiently close to $a$. For example, if $a = 4$, we could take $x = 3.5$. The same does not happen if we take a rational number $p$, because shifting it a little to the left or a little to the right, we can find an irrational number. Thus, we say that the first property is *stable* (small shifts do not destroy it) and the property of being rational is *unstable*.

Sets defined through stable properties are what we call *open sets*. Now, let us move on to the formal definition:

Let $X$ be a set such that $X \subset \mathbb{R}$. A point $x \in X$ is called *interior point* of $X$ if there is an open interval $(a, b)$ such that $x \in (a, b) \subset X$. (This means that all points close enough to $x$ still belong to the $X$ set.)

For $x \in X$ to be an interior point of the set $X$, it is enough that there is $\epsilon > 0$ such that $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset X$. In fact, let us suppose that $x \in (a, b) \subset X$ and $\epsilon$ is the smallest of the positive numbers $x - a$ and $b - x$. Then $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$, that is,

$(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset X$. Equivalently, $x$ is an interior point of $X$ if, and only if, there is $\epsilon > 0$ such that $|y-x| < \epsilon \Rightarrow y \in X$. In fact, $|y-x| < \epsilon$ means that $y \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$.

Given $X \subset \mathbb{R}$, the set of interior points of $X$ will be represented by int(X) and called the *interior of set X*. Consequently, int(X) $\subset$ X and, evidently, $X \subset Y \Rightarrow$ int(X) $\subset$ int(Y).

**Teorema 2.1** (Structure of the open sets of the line.)**.** *Every open subset $A \subset \mathbb{R}$ is uniquely expressed as a countable reunion of open intervals two by two disjoint.*

We have to demonstrate the following results before proving the Theorem above:

**Lema 9.1.** *Let $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ be a family of open intervals, all containing the point $p \in \mathbb{R}$. So $I = \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$ is an open interval.*

*Demonstração.* Let us define $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ for every $\lambda \in L$. It is worth noting that $a_\lambda < b_\mu$ for whatever $\lambda, \mu \in L$, because $a_\lambda < p$ and $p < b_\mu$. In this sense, if we take $a = \inf\{a_\lambda \mid \lambda \in L\}$ and $b = \sup\{b_\lambda \mid \lambda \in L\}$, we will always have $a < b$. (It may happen that $a = -\infty$ and $b = +\infty$.) We affirm that $(a, b) = \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$. The inclusion $\bigcup I_\lambda \subset (a, b)$ is evident. Reciprocally, if $a < x < b$, it follows from the definitions of sup and inf that there are $\lambda, \mu \in L$ such that $a_\lambda < x < b_\mu$ . If it is true that $x < b_\lambda$, then we have $x \in I_\lambda$. If, however, we have $b_\lambda \leq x$, this will bring us $a_\mu < b_\lambda \leq x$, whence $a_\mu < x < b_\mu$, that is, $x \in I_\mu$. In any case, $x \in \bigcup I_\lambda$. Thus, $(a, b) \subset \bigcup I_\lambda$, which completes our demonstration. □

**Lema 9.2.** *Every subset of a countable set is countable.*

*Demonstração.* In fact, let $A$ be a countable set and $B \subset A$. If $B$ is a finite subset, then it is evidently enumerable. If not, if $B$ is an infinite subset, as $A$ is enumerable, we can place its elements in a sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ of two by two distinct terms ($a_i \neq a_j$ if $i \neq j$). Let us construct a sequence $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ as follows: define $n_1$ as the first natural $a_{n_1} \in B$. Take $n_2$ to be the natural smallest that is greater than $n_1$ such that $a_{n_2} \in B$. Having found $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, now take $n_k$ to be the natural smallest which is greater than $n_{k-1}$ such that $a_{n_k} \in B$. As $B$ is infinite, we can interpret it as a sequence $B = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots)$. Obviously, these terms are two by two distinct. So we have a bijector function $f : \mathbb{N} \to B$ given by $f(k) = a_{n_k}$, from where $B$ is countable. □

Now, returning to the proof of Theorem 2.1, we have:

*Demonstração.* Let us suppose initially that for every $x \in A$, $I_x$ is the collection of open intervals that contain $x$ and are contained in $A$. By the Lemma 9.1, each $I_x$ is an open interval and, evidently, $x \in I_x \subset A$. If $I$ is any open interval containing $x$ and contained in $A$, then automatically $I$ is a family member whose reunion gave $I_x$. That is, $I \subset I_x$.

In other words, $I_x$ is the largest open interval containing $x$ and contained in $A$. We also state that, given $x, y \in A$, either we have $I_x = I_y$ or we have $I_x \cap I_y = \emptyset$. In fact, if there is some $z \in I_x \cap I_y$, then $I = I_x \cup I_y$ is an interval containing $x$ and contained in $A$, whence $I \subset I_x$ and $I_y \subset I_x$. For an analogous reason, $I_x \subset I_y$. Therefore, $I_x = I_y$. This allows us to state that the intervals $I_x$ are two by two disjoint. Obviously, we have $A = \bigcup I_x$, once that $x \in I_x \subset A$ for every $x \in A$. Thus, we define that every open set $A$ can be decomposed as a collection of two by two disjoint open intervals, which we will call the *component intervals* of $A$. We further state that the collection of component intervals of $A$ is enumerable. In fact, just take, in each component $J$, a rational number $r(J)$. The function $J \mapsto r(J)$ is injective because $J \neq J' \Rightarrow J \cap J' = \emptyset \Rightarrow r(J) \neq r(J')$. As $\mathbb{Q}$ is enumerable, it follows from the result of Lemma 9.2 that the collection of component intervals of $A$ is enumerable. It remains now to prove the uniqueness. For this, let us suppose that we have $A = \bigcup J_m$, from where $J_m$ are the open intervals, two by two disjoint. We affirm that, under these conditions, for each $J_m = (a_m, b_m)$, its extremities do not belong to the set $A$. In fact, if we had, for example, $a_m \in A$, it would be $a_m \in J_p = (a_p, b_p)$ for some $J_p \neq J_m$. Then, putting $b = \min\{b_m, b_p\}$ we would have $J_m \cap J_p \supset (a_m, b) \neq \emptyset$, an absurd. Finally, $J_m = I_x$. $\square$

**Corolário 2.1.** *Let $I$ be an open interval. If $I = A \cup B$, from where $A$ and $B$ are disjoint open sets, then one of these sets is equal to $I$ and the other is empty. In fact, if $I = A \cup B$ were possible with $A$ and $B$ disjoint and both non-empty, the decompositions of $A$ and $B$ into their component intervals would give at least two intervals components for $I$, what is absurd, given the uniqueness of Theorem 2.1.*

## 2.2 Closed sets

We define that a point $a$ is *adherent* for a set $X \subset \mathbb{R}$ when $a$ is the limit of a sequence of points $x_n \in X$.

Note that every point $a \in X$ is adherent of $X$, just take the sequence of points $x_n = a$. However, we can also have $a$ adherent of $X$ without $a$ belonging to $X$. For example, if $X = (0, +\infty)$, it follows that $0 \notin X$, but $0$ is adherent of $X$, once that $0 = \lim \frac{1}{n}$, so $\frac{1}{n} \in X$ for every $n$.

*Observação* 2.2. Every adherence value of a sequence $(x_n)$ is an adherent point of the set $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. But the opposite does not happen, that is, the reciprocal is false. Not every adherent point of $X$ is an adherence value of $(x_n)$. For example, if $\lim x_n = a$, the only adherence value of $(x_n)$ is $a$, but all $x_n$ points, because they belong to $X$, are adherent points of $X$ .

We define *closure* of the set $X$, and we denote by $\overline{X}$, the set formed by the adherent points of $X$. Well, it is evident that $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$. We also have $X \subset \overline{X}$ for whatever $X$. If $X = \overline{X}$ occurs, we say that the set $X$ is *closed*.

Thus, we define as follows: a set $X \subset \mathbb{R}$ is closed if, and only if, every adherent point of $X$ belongs to $X$. Or equivalently, for a set $X$ to be closed it is necessary, and sufficient, that it fulfills the following condition: if $x_n \in X$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $\lim x_n = a$, then $a \in X$.

Finally, whenever $X \subset \mathbb{R}$ is non-empty, bounded and closed, we have $\sup X \in X$ and $\inf X \in X$.

**Teorema 2.2.** *A set $F \subset \mathbb{R}$ is closed if, and only if, its complement $\mathbb{R} - F$ is open.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) If $F$ is a closed set, it follows from the definition that every adherent point of $F$ belongs to $F$, that is, $F = \overline{F}$. Evidently, if $a \in \mathbb{R} - F$, then $a \notin F$ and, therefore, it is not an adherent point of $F$. So, there is an open interval $I$ such that $a \in I$ and $I \cap F = \emptyset$. We can also state that $a \in I \subset \mathbb{R} - F$, that is, all points of the set $\mathbb{R} - F$ are interior and, therefore, $\mathbb{R} - F$ is open.

($\Leftarrow$) Reciprocally, let us suppose that $\mathbb{R} - F$ is an open set and let us consider $a$ as an adherent point of the set $F$, it follows from the definition of adherent point that every neighborhood of $a$ contains points of F, so $a$ is not an interior point of the set $\mathbb{R} - F$. And as, by hypothesis, $\mathbb{R} - F$ is open, we have that $a \notin \mathbb{R} - F$, that is, $a \in F$. Therefore, every point $a$ adherent to $F$ belongs to $F$ and, thus, $F$ is closed. □

**Corolário 2.2.** *a) $\mathbb{R}$ and the empty set are closed.*

*b) If $F_1, F_2, \ldots, F_n$ are closed, then $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ is closed.*

*c) If $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ is any family of closed sets, then the intersection $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ is a closed set.*

*In fact, $\mathbb{R}$ is the complement of the open $\emptyset$, while the $\emptyset$ is the complement of the open $\mathbb{R}$. Still, if $F_1, \ldots, F_n$ are closed, it follows that $\mathbb{R} - F_1, \ldots, \mathbb{R} - F_n$ are open and, therefore, $\mathbb{R} - (F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ is open. Consequently, $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ is closed. And finally, for every $F_\lambda$ closed, we have that $\mathbb{R} - F_\lambda$ is open. Consequently, $\mathbb{R} - (\cap F_\lambda)$ is open and, therefore, $\cap F_\lambda$ is closed.*

*Observação* 2.3. The reunion of an arbitrary family of closed sets does not always generate a closed set. In fact, if the open subset is $X \subset \mathbb{R}$, we have that $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$. (Like any set, $X$ is the reunion of its points; each point $x \in X$ forms a closed set $\{x\}$, but the reunion $X$ is not a closed set.)

**Teorema 2.3.** *The closure of every set $X \subset \mathbb{R}$ is a closed set, that is, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*

*Demonstração.* Let $x \in \mathbb{R} - \overline{X}$, it follows that there is $I = (a, b)$ such that $x \in I$ and $I \cap X = \emptyset$. And also, for every $y \in I$ it is valid that $y \in R - \overline{X}$. So $I \subset \mathbb{R} - \overline{X}$. This shows that every point $x \in \mathbb{R} - \overline{X}$ is an interior point, that is, $\mathbb{R} - \overline{X}$ is open. By Theorem 2.2, $\overline{X}$ is closed. $\square$

*Observação* 2.4. The *Cantor set* $K$ is a closed subset of the interval $[0, 1]$, obtained as complement of a reunion of open intervals, as follows: first, let us subtract from the interval $[0, 1]$ its open middle third $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Then, we will take off the open middle third of each of the remaining intervals (the intervals $[0, \frac{1}{3}]$ and $[\frac{2}{3}, 1]$). What is left then? Well, we have $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Now, we repeat the same process and remove the open middle third of each of these intervals. Repeating the same process over and over again, the $K$ set of points not withdrawn is the famous set of *Cantor*. If we indicate with $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ the omitted open intervals, it follows that $K = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, that is, $K = [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \bigcup I_n)$. So, $K$ is a closed set, intersection of the closed $[0, 1]$ and $\mathbb{R} - \bigcup I_n$. Note that the extremes of the intervals that have been omitted, such as $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$, etc. they are elements of Cantor's set. In fact, each step of the $K$ construction takes only the interior points of the remaining intervals from the previous step. These extreme points end up forming an infinite countable subset of $K$. However, we will see later that $K$ is not countable. For now, let us just settle for the fact that $K$ contains no open interval and, therefore, no point $x \in K$ is an interior point. In fact, after the *nth* stage of the construction of Cantor's set, we are left with only the length intervals $\frac{1}{3^n}$. This means that, given any open interval $J \subset [0, 1]$, whose length is $1 > 0$, it will not be the same after the *nth* step, as long as we have $\frac{1}{3^n} < l$. In this way, you can not have $J \subset K$.

Geometrically, we have:

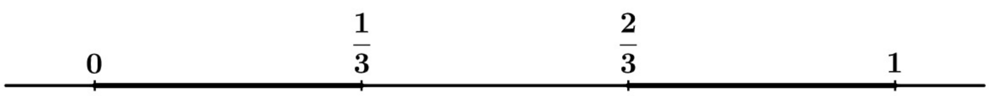



Figura 9.1: First step

Let $X, Y$ be sets of real numbers, with $X \subset Y$. We say that $X$ is *dense* in $Y$ when every point in $Y$ is adherent to $X$. For example, $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$. Also $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$. Furthermore, given any non-degenerate interval $J$, the set of rational numbers belonging to $J$ and the set of irrational numbers that are in $J$ are both dense sets in $J$.

If $X \subset Y$ and $X$ is dense in $Y$, the following statements are equivalent:

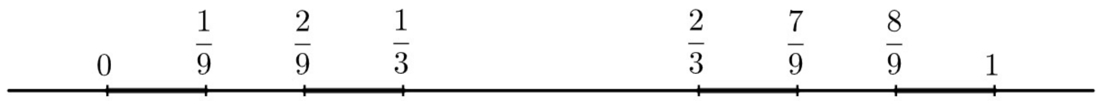



Figura 9.2: Second step

*a*) Every point of $Y$ is a limit of a sequence of points of $X$.

*b*) $Y \subset \overline{X}$.

*c*) For every $y \in Y$ and every $\epsilon > 0$, we have $(y-\epsilon, y+\epsilon) \cap X \neq \emptyset$.

*d*) Every open interval that contains a point of $Y$ must also contain some point of $X$.

**Teorema 2.4.** *Every set $X$ of real numbers contains a countable subset $E$, dense in $X$.*

*Demonstração.* We can interpret the line $\mathbb{R}$ as an enumerable reunion of intervals of length $\frac{1}{n}$, that is, $\mathbb{R} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$, for whatever $n \in \mathbb{N}$. For each $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{Z}$, we choose a point $x_{pn} \in X \cap \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ and let us consider this intersection non-empty (if it is empty, $x_{pn}$ will not exist). In this way, the set $E$ of the points $x_{pn}$ thus obtained is enumerable. We say that $E$ is dense in $X$. In fact, set $I = (a, b)$ and suppose that $I$ contains any point $x \in X$. If we take $n$ large enough, then the length $\frac{1}{n}$ of each interval $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ will be less than the distance from $x$ to the upper bound of $I$. This allows us to conclude that there is $p \in \mathbb{Z}$ such that $x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \subset I$. Therefore, $x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \cap X \neq \emptyset$. So it follows that there is $x_{pn} \in I \cap E$. That is, every open interval $I$ that contains a point $x \in X$ also contains a point $x_{pn} \in E$. Thus, $E$ is dense in $X$. □

## 2.3 Accumulation points

Set $X \subset \mathbb{R}$. We say that $a \in \mathbb{R}$ is an *accumulation point* of the set $X$ when every open interval $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, with $\epsilon > 0$ and center $a$, contains some point $x \in X$ other than $a$. We denote by $X'$ the set of accumulation points.

The condition $a \in X'$ ($a$ is the accumulation point of $X$) is expressed in symbols as follows:

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, x \in X;\ 0 < |x-a| < \epsilon.$$

**Teorema 2.5.** *Given $X \subset \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$, the following statements are equivalent:*

1. *$a \in X'$ (a is the accumulation point of $X$);*

2. *$a = \lim x_n$, whence $(x_n)$ is a sequence of elements of $X$, two by two disjoint;*

3. *Every open interval containing $a$ has an infinity of elements of $X$.*

*Demonstração.* We will start from (1) and then prove (2) and (3). Suppose $a \in X'$. There is $x_1 \in X$ such that $0 < |x_1 - a| <1$. Now, taking $\epsilon_2 = \min\left\{|x_1 - a|, \dfrac{1}{2}\right\}$, it follows that there is $x_2 \in X$ such that $0 < |x_2 - a| < \epsilon_2$. Still, let $\epsilon_3 = \min\left\{|x_2 - a|, \dfrac{1}{3}\right\}$, it follows that there is also $x_3 \in X$ such that $0 < |x_3 - a| < \epsilon_3$. If we proceed in this way successively, we get a sequence of elements $x_n \in X$ with $|x_{n+1} - a| < |x_n - a|$ and $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$. Thus, the $x_n$ are two by two distinct, belong to $X$ and $\lim x_n = a$. Evidently, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). □

**Corolário 2.3.** *If $X' \neq \emptyset$, then $X$ is infinite.*

If a point $a \in X$ is not an accumulation point, then $a$ is an *isolated* point of $X$.

For $a \in X$ to be an isolated point, it is necessary (and sufficient) that there is $\epsilon > 0$ such that $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X = \{a\}$.

**Teorema 2.6.** *For every $X \subset \mathbb{R}$, we have $\overline{X} = X \cup X'$. Or equivalently, the closure of a set $X$ is obtained by adding its accumulation points to $X$.*

*Demonstração.* It is evident that $X \subset \overline{X}$ and $X' \subset \overline{X}$. That is, $X \cup X' \subset \overline{X}$. Reciprocally, if $a \in \overline{X}$, every open interval containing $a$ must also contain some point $x \in X$. If $a \notin X$, it follows that $x \neq a$, whence $a \in X'$. Thus, $a \in \overline{X}$ implies that $a \in X$ or $a \in X'$ and, then, $\overline{X} \subset X \cup X'$. □

**Corolário 2.4.** *$X$ is closed if, and only if, $X' \subset X$. In fact, given two sets $A, B$, we have that $A = A \cup B$ if, and only if, $B \subset A$.*

**Corolário 2.5.** *If all points in the set $X$ are isolated points, then $X$ is countable. In fact, let $E \subset X$ be an enumerable set dense in $X$. Thus, for every point $x \in X$, we also have that $x \in \overline{E}$ but, as $x \notin X'$, it follows that $x$ can not be an accumulation point of $E$. So $x \in E$ and, thus, $E = X$. We conclude that $X$ is countable.*

It is common to say that $a$ is *accumulation point on the right* of the set $X$ when every interval $[a, a + \epsilon)$, with $\epsilon > 0$, contains some point of $X$ different from $a$. In summary, the point $a$ is an accumulation point on the right of $X$ if, and only if, every open interval $(a, b)$ contains some point of $X$.

We denote by the symbol $X'_+$ the set of accumulation points on the right of $X$. Similarly, we define *accumulation point on the left* of the set $X$: every interval $(a - \epsilon, a]$, with $\epsilon > 0$, contains some point of $X$ different from $a$. That is, $a \in X'_-$ if, and only if, for every open interval $(c, a)$ is valid that $(c, a) \cap X \neq \emptyset$

**Teorema 2.7.** *Let $F \subset \mathbb{R}$ be non-empty such that $F = F'$. (That is, $F$ is a non-empty closed set with no isolated points.) So $F$ is non-countable.*

Before we demonstrate the Theorem 2.7, it is necessary to present the following result:

**Lema 9.3.** *Let $F$ be closed, non-empty, without isolated points. For every $x \in \mathbb{R}$ there is $F_x$ bounded, closed, non-empty, without isolated points, such that $x \notin F_x \subset F$.*

*Demonstração.* As $F$ is infinite, there is $y \in F$, $y \neq x$. Let $[a, b]$ be a closed interval such that $x \notin [a, b]$ and $y \in (a, b)$. The set $G = (a, b) \cap F$ is then bounded, non-empty, and none of its points is isolated. If $G$ is a closed set, we define $F_x = G$ and the Lemma will be demonstrated. If, however, $G$ is an open set, then at least one of $a, b$ will be an accumulation point of $G$. In this case, we will add this (or these) point(s) to $G$ to get $F_x$. In other words, in both hypotheses, we have $F_x = \overline{G}$. □

The following is the proof of the Theorem 2.7

*Demonstração.* It will be shown that, given any enumerable subset (in this case, an infinite enumerable subset) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset F$, we can always find a point $y \in F$ such that $y \neq x_n$ for every $n$. Applying repeatedly the Lemma 9.3 to $x_1$ and $F$, to $x_2$ and $F_1$, etc., we obtain a sequence of bounded and non-empty closed sets $F_n$ such that $F \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ and $x_n \notin F_n$ for each $n \in \mathbb{N}$. Now, choosing, for each $n$, a point $y_n \in F_n$, it follows that the sequence $(y_n)$ is bounded, so it has a convergent subsequence $y'_n \to y$. Then, given arbitrarily $k \in \mathbb{N}$, we have $y'_n \in F_k$ for every $n \geq k$. As $F_k$ is closed, it follows that $y = \lim y'_n \in F_k$. Therefore, $y \in F_k$ for all $k \in \mathbb{N}$, from where we can conclude that $y \in F$ and $y \neq x_k$ for all $k \in \mathbb{N}$. This completes the demonstration. □

**Corolário 2.6.** *Every non-empty enumerable closed set has some isolated point.*

**Corolário 2.7.** *Cantor's set is not countable.*

*In fact, Cantor's set is non-empty, closed, with no interior points (once that it contains no open interval) and no isolated points (that is, all its points are accumulation points). To help better see this result, the reader should consider the countable infinite subset formed by the extreme points of the intervals omitted during the construction steps of the Cantor set.*

## 2.4 Compact sets

Given any set $X \subset \mathbb{R}$, we will call of *coverage* of the set $X$ a family $\mathsf{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ of sets $C_\lambda \subset \mathbb{R}$ such that $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, that is, for every $x \in X$ there is some $\lambda \in L$ such that $x \in C_\lambda$. Following this reasoning, we will call $\mathsf{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ a subfamily of $\mathsf{C}$, with $L' \subset L$, such that we still have $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

**Teorema 2.8** (Borel-Lebesgue). *If $[a, b]$ is a bounded and closed interval and given a family $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ of open intervals such that $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda$, so there is a finite number of intervals $I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}$ such that $[a, b] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$. In simpler words: every coverage of $[a, b]$ constituted of open intervals admits a finite subcoverage .*

*Demonstração.* Suppose that $X$ is the set of points $x \in [a, b]$ such that the interval $[a, x]$ can be covered by a finite number of intervals $I_\lambda$, that is, $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$. Thus, $X \neq \emptyset$, once that $a \in X$. And set $c = \sup X$, it is evident that $c \in [a, b]$. Let us now prove that $c \in X$. In fact, there is some $I_{\lambda_0} = (\alpha, \beta)$ such that $c \in I_{\lambda_0}$. Once that $\alpha < c$, there is certainly $x \in X$ such that $\alpha < x \leq c$. That is, $x \in I_{\lambda_0}$. But as $x \in X$, it follows that $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$ and, therefore, $[a, c] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$, from where we can conclude that $c \in X$. It remains to show now that $c = b$. If it were valid for $c < b$, we would have some $c' \in I_{\lambda_0}$ and it would be valid $c < c' < b$. Thus, $[a, c'] \subset I_{\lambda_1} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$ and, consequently, $c' \in X$, an absurd , because $c' > c$ and $c$ is the sup of $X$. Conclusion: the interval $[a, b]$ is, in fact, contained in a finite reunion of the $I_\lambda$, which proves the Theorem. □

**Teorema 2.9** (Definite form of the Borel-Lebesgue Theorem). *Let $F \subset \mathbb{R}$ be a bounded and closed set. Every coverage $F \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ of $F$ through open sets admits a finite subcoverage:*

$$F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

*Demonstração.* As $F$ is closed, it follows that $A = \mathbb{R} - F$ is open. And being $F$ bounded, there is a bounded interval $[a, b]$ that contains $F$. So we have $[a, b] \subset (\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) \cup A$. From where we can extract a finite subcoverage $F \subset [a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup A$. And as no point in $F$ is in $A$, we get $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$, as we wanted to demonstrate. □

**Teorema 2.10.** *The following statements about a set $K \subset \mathbb{R}$ are equivalent:*

1. *$K$ is limited and closed;*
2. *All open coverage of $K$ has finite subcover;*
3. *Every infinite subset of $K$ has accumulation point belonging to $K$;*
4. *Every sequence of points of $K$ has a subsequence that converges to a point of $K$.*

*Demonstração.* Note that, by the definitive form of the Borel-Lebesgue Theorem (2.9), we can conclude that (1) ⇒ (2). Then, to prove that (2) ⇒ (3), let us suppose a subset $X \subset K$ with no accumulation point in $K$. In this way, for every $x \in K$, it is possible to find an open interval $I_x$, centered in $x$, which has no point at all in $X - \{x\}$. In symbols, we have that $I_x \cap X = \{x\}$ if $x \in X$ and $I_x \cap X = \emptyset$ if $x \notin X$. Consequently, we have an open coverage $K \subset \bigcup_{x\in X} I_x$, from where we can extract a finite subcoverage

$K \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$. In particular, this finite reunion contains $X$. After all, for every $x \in X$, the only interval of the original coverage that contained $x$ was $I_x$ itself. Thus, for each $x \in X$, the interval $I_x$ is part of the collection of interval $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}$. Therefore, $X$ is finite. So, when we have that $K$ complies the condition (2), the only subsets of $K$ that have no accumulation point in $K$ are the finite ones. So it follows that (2) $\Rightarrow$ (3).

Let us now prove that (3) $\Rightarrow$ (4). In fact, given a sequence of points $x_n \in K$, there are two possibilities: either the set $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ is finite or it is infinite. If $X$ is finite, we have that some value $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots$ will certainly repeat an infinite number of times, which gives us a constant (and convergent) sequence of $(x_n)$. In the second case, that is, $X$ is infinite, it follows from the hypothesis (3) that there is an accumulation point $a$ of $X$ such that $a \in K$. Every interval $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ contains an infinity of $X$ points and, therefore, contains $x_n$ terms with arbitrarily large indices. Thus, it follows from Theorem 1.8 that $a$ is the limit of a subsequence of $(x_n)$.

Finally, let us show that (4) $\Rightarrow$ (1). In fact, if $K$ were a superiorly unlimited set, we could take $x_1 \in K$ and verify that there is $x_2 \in K$ such that $x_2 > x_1 + 1$. Continuing in this way, we would obtain a sequence of points $x_n \in K$ with $x_{n+1} > x_n + 1$. Every subsequence $(x_n)$ would then be unlimited and, therefore, non-converging. On the other hand, if $K$ were not closed, there would be a sequence of points $x_n \in K$ with $\lim x_n = x \notin K$. Any subsequence of $(x_n)$ would converge to $x$ and, therefore, the condition (4) would be violated. This concludes the demonstration. □

**Corolário 2.8** (Bolzano-Weierstrass)**.** *Every bounded infinite set $X \subset \mathbb{R}$ has some accumulation point.*

Let $K \subset \mathbb{R}$ a set such that $K$ complies one of (that is, all) conditions of the Theorem 2.10, then we will say that $K$ is a set *compact* .

**Teorema 2.11.** *Let $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \ldots$ a descendant sequence of non-empty compacts. So $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ is non-empty.*

*Demonstração.* Naturally, $K$ is closed (once that it is the intersection of the closed $K_n$) and limited (it is contained in $K_1$). Thus, we conclude that $K$ is compact. Now, in order to demonstrate that $K$ is not empty, we must choose, for every $n \in \mathbb{N}$, a point $x_n \in K_n$. Note that all points of the sequence $(x_n)$ thus obtained belong to the compact $K_1$. That is, it has a convergent subsequence, such as $x_{n_i} \to x$. We state that $x \in K$, or equivalently, $x \in K_n$ for every $n \in \mathbb{N}$. In fact, given arbitrarily $n \in \mathbb{N}$, there is $n_{i_0} > n$, and for every $n_i \geq n_{i_0}$ we have $x_{n_i} \in K_{n_i} \subset K_{n_{i_0}} \subset K_n$. Therefore, starting from a certain index $n_{i_0}$, all terms of the sequence $(x_n)$ belong to the closed $K_n$ and, thus, $x = \lim x_{n_i} \in K_n$, as we wanted to demonstrate. □

# Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages, Analysis Course, vol. 1, 11th. edition, Euclid Project, IMPA, 2004.

# O TEOREMA DE HAHN-BANACH E SUAS CONTRIBUIÇÕES NA TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Leonardo Gustavo Ronchin
*Estudante*

O presente trabalho tem como objetivo estudar o Teorema de Hahn-Banach e suas versões, além de aplica-lo para demonstrar que a aplicação que relaciona a dualidade entre os elementos de um espaço de Banach e seu espaço dual é não vazio, resultado este que é fundamental para a construção da teoria de semigrupos. Para tanto, serão enunciados e demonstrados os principais conceitos de espaços métricos, noções de espaços vetoriais e de Banach, e aspectos dos operadores lineares definidos nestes espaços. Este estudo será feito por meio de exemplos e da demonstração detalhada dos principais resultados.
*Orientador(a)*

## RESUMO

Análise funcional, Espaços de Banach, Teorema de Hahn-Banach, Semigrupos.
**Palavras-chave:** The current work aims to study the versions of the Hahn-Banach Theorem and applay it to demonstrate the duality map not is a empty set, that result is fundamental for the construction of Semigroup theory. Therefore, will be stated and demonstrated the fundamental spects of metrical spaces, vector and Banach spaces, and linear operators defined in this spaces. That study will be done by examples and detailed demonstrations of the mais results.

## ABSTRACT

Functional analysis, Banach spaces, Semigroup.
**Keywords:**

# 1 Introdução

O Teorema de Hahn-Banach, nome dado em homenagem aos matemáticos Hans Hahn e Stefan Banach, é um dos teoremas fundamentais da análise funcional e possui diversas versões e aplicações. No presente trabalho, serão enunciados e demonstrados as versões para espaços vetoriais reais, complexos e normados. Deste modo, serão revisados alguns dos principais aspectos de espaços métricos e espaços vetoriais, com o foco em espaços de Banach, operadores e funcionais lineares definidos nestes espaços.

Por fim, após provadas as três versões deste teorema, será demonstrado que a aplicação que relaciona a dualidade entre os elementos de um espaço de Banach e seu espaço dual é não vazio, resultado este que é fundamental para a construção da teoria de semigrupos.

# 2 Espaços Métricos

**Definição 2.1.** Diremos que um conjunto não vazio $M$ é um espaço métrico, caso exista uma aplicação $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $x, y, z \in M$, temos:

$(M_1)$ $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

$(M_2)$ Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$;

$(M_3)$ $d(x,y) = d(y,x)$;

$(M_4)$ $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

Nestas condições, podemos nos referir ao espaço métrico como o par $(M,d)$, onde $d$ é a métrica do conjunto $M$.

**Definição 2.2.** Seja $(M,d)$ um espaço métrico e $N \subset M$. Então, o par $(N,d')$ será um espaço métrico onde $d'$ é induzida por $d$, isto é

$$d' = d\,|_{N \times N} : N \times N \longrightarrow \mathbb{R}.$$

## 2.1 Propriedades e Exemplos de Espaços Métricos

*Exemplo* 2.1. A reta dos números reais é um espaço métrico cuja métrica usual é dada por $d(x,y) = |x-y|$, com $x, y \in \mathbb{R}$. De fato, sabemos que

$$|x-y| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$$

e caso $x \neq 0$, então $|x-y| > 0$, verificando $(M_1)$ e $(M_2)$. É claro que $|x-y| = |y-x|$ e segue da desigualdade triangular que para $z \in \mathbb{R}$, temos

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leqslant |x-z| + |z-y|,$$

ou seja, $d$ satisfaz $(M_3)$ e $(M_4)$. Portanto, $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

*Exemplo* 2.2. Vamos mostrar que $(\mathbb{C}, d)$ é um espaço métrico, onde para $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ em $\mathbb{C}$, temos

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Com efeito, é claro $(M_1)$, $(M_2)$ e $(M_3)$ são satisfeitas. Para $(M_4)$, primeiro note que dados $z, w \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2. \end{aligned}$$

Como para $u \in \mathbb{C}$ temos $u + \overline{u} = 2\operatorname{Re}(u)$ e $\operatorname{Re}(u) \leqslant |u|$, segue que

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leqslant |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z|+|w|)^2, \end{aligned}$$

de onde vem que $|z+w| \leqslant |z| + |w|$. Consequentemente,

$$d(z,w) = |z-w| = |(z-u)+(u-w)| \leqslant |z-u| + |u-w| = d(z,u) + d(u,w),$$

o que prova $(M_4)$. Portanto, $d$ é uma métrica sobre $\mathbb{C}$.

Considere o conjunto $\beta(X;\mathbb{R})$ formado por todas as funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ limitadas, ou seja, existe $k > 0$ tal que para todo $x \in X$, temos $|f(x)| \leqslant k$. Note que neste caso, podemos afirmar que existe $\sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

*Exemplo* 2.3. Sejam $f, g \in \beta(X;\mathbb{R})$, então mostraremos que a aplicação

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

é uma métrica sobre $\beta(X;\mathbb{R})$. De fato, note que $(M_1)$ e $(M_3)$ são trivialmente satisfeitas.

A fim de provar $(M_2)$, note que para $f \neq g$, existe ao menos um ponto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, então é claro que

$$0 < |f(x_0) - g(x_0)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = d(f, g).$$

Por fim, note que para $h \in X$, é claro que

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |(f(x) - h(x)) + (h(x) - g(x))| \\ &\leqslant \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)| \\ &= d(f,h) + d(h,g). \end{aligned}$$

Portanto, $d$ é uma métrica sobre $\beta(X; \mathbb{R})$.

Agora, considere $C[a,b]$ o conjunto de todas as funções $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $[a,b]$, onde $a < b$. Uma vez que $f$ é contínua e está definida em um conjunto compacto, sabemos que $f$ será limitada, ou seja, existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant k$, para todo $x \in [a,b]$. Desta forma, podemos afirmar que existe $\sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$, que por sua vez será igual ao $\max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$, e que $f$ será integrável em $[a,b]$.

*Exemplo* 2.4. Sejam $f, g \in C[a,b]$, então mostraremos que a aplicação

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

define uma métrica em $C[a,b]$. Com efeito, é claro que $(M_3)$ é satisfeita. Além disso, uma vez que a aplicação $|f+g| \geqslant 0$ e esta definida em $[a,b]$, segue do Lema da Conservação de Sinal que

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \geqslant 0,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se,

$$\begin{aligned} d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 0 &\iff |f(x) - g(x)| = 0, \ \forall x \in [a,b] \\ &\iff f(x) = g(x), \ \forall x \in [a,b] \\ &\iff f = g \text{ em } [a,b]. \end{aligned}$$

Novamente, para $h \in C[a,b]$, segue que

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|, \ \forall x \in [a,b],$$

pela conservação de sinal, temos

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx \leqslant \int_a^b |f(x) - h(x)|dx + \int_a^b |h(x) - g(x)|dx,$$

ou seja, $d(f,g) \leqslant d(f,h) + d(h,g)$. Portanto, $d'$ é uma métrica em $C[a,b]$.

Observe que $C[a,b] \subset \beta([a,b];\mathbb{R})$, deste modo, podemos considerar $C[a,b]$ um subespaço métrico de $\beta([a,b];\mathbb{R})$ com a métrica induzida

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Porém, a métrica definida como no Exemplo 2.4 não é necessariamente válida em $\beta(X;\mathbb{R})$, pois embora as função deste conjunto sejam limitadas, não temos garantir de que elas sejam integráveis.

## 2.2 Sequências e Topologia em Espaços Métricos

Uma sequência em no espaço métrico $M$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ $x(n) = x_n \in M$. Neste caso, denotaremos por $(x_n) = \{x_1, x_2, ...\}$ o conjunto imagem da aplicação $x$, enquanto $x_n$ denotará algum elemento da sequência.

**Definição 2.3.** Diremos que uma sequência $(x_n) \subset M$ converge para um ponto $a$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x,a) < \varepsilon.$$

Neste caso, denotaremos esta convergência por $\lim x_n = a$, ou simplesmente $x_n \longrightarrow a$.

**Definição 2.4.** Dada uma sequência $x = (x_n) \subset M$, uma subsequência de $x$ é a restrição de $x$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_j < ...\} \subset \mathbb{N}$ e será denotada por $(x_{n_j})$.

**Teorema 2.1.** *Seja $(x_n) \subset M$ uma sequência tal que $x_n \longrightarrow a$. Então, toda subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ é convergente e $x_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} a$.*

*Demonstração.* Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $x_n \longrightarrow a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n,a) < \varepsilon.$$

Deste modo, como $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2, ... < n_j < ...\}$ é infinito, existe um $n_{j_0} \in \mathbb{N}'$ tal que $n_{j_0} \geqslant n_0$. Logo, para $n_j > n_{j_0} \geqslant n_0$, temos $d(x_j,a) < \varepsilon$. Portanto $x_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} a$. □

Além das sequências, a topologia dos espaços métricos é de extrema importância no desenvolvimento da nossa teoria. Vejamos a seguir alguns destes tópicos.

**Definição 2.5.** Seja $M$ um espaço métrico, $a \in M$ e $\varepsilon > 0$ um número real. Nestas condições definimos a bola aberta de centro $a$ e raio $\varepsilon$ como sendo o conjunto

$$B(a;\varepsilon) = \{x \in M : d(x,a) < \varepsilon\}.$$

A partir da definição de bola aberta, note que podemos estudar o que ocorre na vizinhança de um ponto a medida que $\varepsilon \longrightarrow 0$.

**Definição 2.6.** Seja $M$ um espaço métrico e $X \subset M$.

**i)** Diremos que $X$ é um conjunto aberto se para todo $x \in X$, existir $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset X$.

**ii)** Diremos que $X$ é um conjunto fechado se $X^c = M - X$ é aberto.

**Definição 2.7.** Seja $(M,d)$ um espaço métrico, então:

**i)** Um ponto $a \in M$ se diz ponto aderente de $X \subset M$ se, para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$B(a,\varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

Neste caso o conjunto de todos os pontos aderentes de $X$ será o conjunto $\overline{X}$, denominado fecho de $X$.

**ii)** Um ponto $a \in M$ diz-se ponto de acumulação de $X \subset M$ se, para todo $\varepsilon > 0$,

$$B(a,\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset.$$

O conjunto de todos os pontos de acumulação de $X$ é chamado de conjunto derivado e será denotado por $X'$.

**Teorema 2.2.** *Seja $(M,d)$ um espaço métrico e $X \subset M$ um conjunto não vazio. Deste modo, temos*

**a)** *$x \in \overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow x$.*

**b)** *$X$ é fechado se, e somente se, $X = \overline{X}$.*

*Demonstração.* a) Seja $x \in \overline{X}$. Caso $x \in X$, basta considerar a sequência constante $(x, x, ...) \subset X$. Se $x \notin$, então sabemos que para todo $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Em particular, se $\varepsilon_1 = 1$, existe $x_1 \in B(x, \varepsilon_1) \cap X$ de modo que $d(x, x_1) < 1$. Para $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, d(x, x_1)\}$, existe $x_2 \in B(x, \varepsilon_2) \cap X$, com $d(x_2, x) < \dfrac{1}{2}$. Do mesmo modo que para $\varepsilon_3 = \min\{\frac{1}{3}, d(x, x_2)\}$, existe $x_3 \in B(x, \varepsilon_3) \cap X$, de modo que $d(x_3, x) < \dfrac{1}{3}$. Prosseguindo desta maneira, existe uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon_n < \dfrac{1}{n}$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x, x_n) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Logo, $x_n \longrightarrow x$.

Reciprocamente, se existe uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow x$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Ou seja, para $n > n_0$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Uma vez que $x_n \in X$, segue que $B(x, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

b) Por definição $X \subset \overline{X}$. Assim, temos $x \in \overline{X}$, pelo item (a), existe uma sequência $(x_n) \subset X$ de modo que $x_n \longrightarrow x$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \Longrightarrow x_n \in B(x, \varepsilon). \tag{10.1}$$

Suponha por absurdo que $x \notin X$, então $x \in X^c$ que é um aberto, então existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset X^c$. Considerando $\varepsilon = \delta$, em (4) temos que $x_n \in B(x, \delta)$, ou seja, $x_n \in X^c$, um absurdo, pois $x_n \in X$. Logo, $x \in X$, então

$$\overline{X} \subset X \Longrightarrow X = \overline{X}.$$

Reciprocamente, suponha que $X = \overline{X}$. Tomando $a \in X^c$, temos que $a \notin \overline{X}$, então existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap X = \emptyset$, consequentemente, $B(a, \delta) \subset X^c$. Portanto, $X^c$ é aberto, isto é, $X$ é fechado. $\square$

**Definição 2.8.** Diremos que $(x_n) \subset M$ é uma sequência de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Teorema 2.3.** *Toda sequência $(x_n)$ convergente definida em um espaço métrico $M$ é uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* Se $x_n \longrightarrow a \in M$, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2},$$

do mesmo modo, temos

$$m > n_0 \Longrightarrow d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para $n, m > n_0$, segue que

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. $\square$

Note que a recíproca do Teorema 2.3 nem sempre é verdadeira, basta considerarmos a sequência real $x_n = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$. Sabemos que em $\mathbb{R}$ toda sequência convergente é de Cauchy, porém, considerando o subespaço métrico $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ e notando que $(x_n) \subset (0, 1]$, vemos que nem sempre uma sequência de Cauchy converge para um ponto do espaço.

**Definição 2.9.** Diremos que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy converge para um ponto deste espaço.

**Teorema 2.4.** *Seja $(M, d)$ um espaço métrico completo. Então, um subespaço $X \subset M$ será completo se, e somente se, $X$ é fechado em $M$.*

*Demonstração.* $(\Longrightarrow)$ Considere $a \in \overline{X}$, segue que existe $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow a$. Como $(x_n)$ é convergente, segue do Teorema 2.3 que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. Além disso, temos que $X$ é um espaço métrico completo, então $x_n \longrightarrow a \in X$, consequentemente, $\overline{X} \subset X$. Logo, $X = \overline{X}$ e, portanto, segue do Teorema 2.2 que $X$ é fechado em $M$.

$(\Longleftarrow)$ Considere $(x_n) \subset X$ como sendo uma sequência de Cauchy. Uma vez que $M$ é um espaço métrico completo, segue que $x_n \longrightarrow a \in M$, ou seja, $a \in \overline{X}$. Porém, como $X$ é fechado, $\overline{X} = X$, então $a \in X$. Logo, toda sequência de Cauchy definida em $X$ converge para um ponto de $X$, isto é, $X$ é completo. $\square$

# 3 Espaços de Banach

O estudo dos espaços métricos é bastante amplo e seus conceitos podem ser aplicados nos mais diversos conjuntos. Porém, a fim de estudar o Teorema de Hahn-Banach, precisamos de que o conjunto que estamos trabalhando satisfaça mais algumas propriedades. Tendo isto em mente, a seguir veremos alguns dos conceitos de espaços vetoriais e espaços de Banach.

**Definição 3.1.** Um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto não vazio $X$ sobre o qual estão definidas duas operações para todos os seus elementos (ou vetores). Usualmente, para $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, estas operações são definidas da seguinte forma:

$$(x, y) \longmapsto x + y \in X \;\; (\textit{adição})$$
$$(\alpha, x) \longmapsto \lambda \cdot x \in X \;\; (\textit{multiplicação})$$

Além disso, para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$(A_1)$ $x + y = y + x$;

$(A_2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$;

$(A_3)$ Existe $0 \in X$ tal que $0 + x = x$;

$(A_4)$ Para todo $x \in X$, existe $(-x) \in X$ tal que $x + (-x) = 0$;

$(M_1)$ $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta \cdot x)$;

$(M_2)$ $1 \cdot x = x$, onde $1 \in \mathbb{K}$ é a identidade em $\mathbb{K}$;

$(D_1)$ $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

$(D_2)$ $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

No que segue, iremos nos atentar aos casos em que $X$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, porém, vale ressaltar que alguns dos resultados e definições a seguir são válidas para um corpo qualquer.

**Definição 3.2.** Diremos que o subconjunto não vazio $M \subset X$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $X$ caso a restrição das operações de $X$ a $M$ torna esse conjunto um espaço vetorial em $\mathbb{K}$.

Além disso, caso $X = M$, diremos que $M$ é um subespaço impróprio de $X$. Caso $M \neq \{0\}$ e $M \neq \emptyset$, diremos que $M$ é um subespaço próprio de $X$.

**Proposição 3.1.** *Sejam $X$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $M \subset X$ um conjunto não vazio. Então, $M$ é um subespaço vetorial de $X$ se, e somente se, as seguintes condições forem atendidas:*

**a)** $0 \in M$;

**b)** *Se $x, y \in M$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então $\alpha x + y \in M$.*

*Demonstração.* Supondo que $M$ seja um subespaço vetorial de $X$, então sabemos que a restrição das operações de $X$ a $M$ tornam $M$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, então por definição $0 \in M$ e dados $x, y \in M$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, sabemos que $\alpha x \in M$ e, consequentemente, $\alpha x + y \in M$.

Reciprocamente, note que as operações $(+)$ e $(\cdot)$ induzidas de $X$ são fechadas em $M$, pois para $\alpha = 1$, temos $x + y \in M$, além disso, fazendo $y = 0 \in M$, temos $\alpha x \in M$. Além disso, a condição $(A_3)$ segue direto da hipótese e para $(A_4)$, basta considerar $-1 \in \mathbb{K}$, assim $-1 \cdot x = -x \in M$. As demais condições seguem direto do fato de que $X$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. □

**Definição 3.3.** Considere $X$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que um vetor $x \in X$ é uma combinação linear dos vetores $x_1, ..., x_n \in X$ caso existirem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Além disso, diremos que $M \subset X$ é um conjunto gerador de $X$, caso todos os elementos de $X$ possam ser escritos como combinação linear de um número finito de elementos de $M$. Neste caso, denotaremos $[M] = X$.

*Exemplo* 3.1. Considere $M$ um subconjunto não vazio do espaço vetorial $X$. Vejamos que $[M]$ é um subespaço vetorial de $X$. De fato, note que $0 \in [M]$, pois $0 \in \mathbb{K}$ e para qualquer $v \in M$, $0 = 0 \cdot v \in [M]$. Além disso, para $x, y \in M$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha x + y \in M$, pois é uma combinação linear de vetores de $M$.

**Definição 3.4.** Sejam $X$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $M$ um subconjunto não vazio de $X$. Dizemos que $M$ é linearmente independente se, dados $x_1, ..., x_n \in M$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0.$$

Caso $M$ não seja linearmente independente, dizemos que $M$ é linearmente dependente.

**Definição 3.5.** Seja $X$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{B}$ de $X$ é uma base de $X$ caso

**a)** $\mathcal{B}$ gera $X$, isto é, $[\mathcal{B}] = X$;

**b)** $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

**Definição 3.6.** Seja $X$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Caso $X$ admita uma base finita com $n$ elementos, então diremos que a dimensão de $X$ é igual a $n$. Neste caso, denotaremos por $\dim X = n$.

Caso $X$ não admita uma base finita, então diremos que $X$ é um espaço de dimensão infinita.

Considerando o espaço vetorial $X = \{0\}$, admitimos que $X$ é gerador por $\emptyset$ e que $\dim X = 0$.

## 3.1 Espaços Vetoriais Normados

Mesmo podendo definir a soma e a multiplicação por escalar em espaços vetoriais, em alguns casos será necessário também definir mais uma aplicação neste espaço, que é conhecida como norma.

**Definição 3.7.** Diremos que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $X$ é normado caso for possível definir uma aplicação $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$n_1$) $\|x\| \geqslant 0$, $\forall x \in X$.

$n_2$) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

$n_3$) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall x \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;

$n_4$) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Note que existe certa semelhança entre a definição de norma e a definição de métrica. Agora vejamos que todo espaço normado também é um espaço métrico.

**Propriedade 3.1.** *Seja $X$ um espaço vetorial normado. Então, a aplicação $d(x,y) = \|x - y\|$ onde $x, y \in X$, define uma métrica em $X$.*

*Neste caso, diremos que a métrica $d$ é induzida pela norma*

*Demonstração.* Para $x, y \in X$, note que

$$d(x,y) = \|x - y\| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Além disso, $(M_2)$ e $(M_4)$ são obtidas trivialmente da definição de norma. Por fim, para $(M_3)$, basta tomar $-1 \in \mathbb{K}$, então

$$d(x,y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y,x).$$

Logo, $d$ é uma métrica sobre $X$. $\square$

O fato de todo espaço normado também ser um espaço métrico motiva a seguinte definição.

**Definição 3.8.** Seja $X$ um espaço vetorial normado. Diremos que o espaço métrico $(X, \|\cdot\|)$, ou simplesmente $X$, é um espaço de Banach quando $X$ for completo.

**Definição 3.9.** Seja $X$ um espaço vetorial normado cuja norma é denotada por $\|\cdot\|$. Então, um subespaço $M \subset X$ será um espaço normado, onde a norma $\|\cdot\|'$ é obtida restringindo $\|\cdot\|$ aos pontos de $M$.

Embora até aqui não tenhamos considerado diferentes normas definidas em um espaço, vale ressaltar que em alguns casos é possível estabelecer uma relação entre as diferentes normas de um espaço vetorial, como veremos na seguinte definição.

**Definição 3.10.** Diz-se que duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ definidas sobre um espaço vetorial $X$ são equivalentes, caso para todo $x \in X$, existam $a, b > 0$ tais que

$$a\|x\|_0 \leqslant \|x\| \leqslant b\|x\|_0.$$

Em particular, aplicando esta definição para espaços normados de dimensão finita, temos um resultado que nos garante, dentre outras coisas, que a convergência de uma sequência neste espaço independe da escolha da métrica.

**Lema 10.1.** *Seja $\{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em um espaço normado $X$. Então, existe $c > 0$ de modo que para quaisquer escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$, temos*

$$c(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|) \leqslant \|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\|.$$

*Demonstração.* Primeiro, note que caso $s = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n| = 0$, então cada $\alpha_i = 0$, onde $i = 1, ..., n$, e neste caso a desigualdade é imediata. Supondo que $s \neq 0$, então podemos escrever

$$c < \frac{1}{s}\|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\|,$$

fazendo $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{s}$, provar este lema se resume a mostrar que para quaisquer escalares $\beta_1, ..., \beta_n$, onde $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$, existe $c > 0$ tal que

$$c < \|\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n\|.$$

Neste caso, suponha por absurdo que dado $c > 0$ existam $\beta_1^{(m)}, ..., \beta_n^{(m)} \in \mathbb{K}$ de modo que $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i^{(m)}| = 1$ e

$$\|\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n\| < c,$$

onde cada escalar $\beta_i^{(m)}$ é uma sequência em $\mathbb{K}$, com $i = 1, ..., n$. Note que cada $(\beta_i^{(m)})$ é limitada, pois

$$\sum_{i=1}^{n} |\beta_i^{(m)}| = 1 \Longrightarrow \beta_i^{(m)} \leqslant 1, \; i = 1, ..., n.$$

Logo, segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass que cada $(\beta_i^{(m)})$ possui uma subsequência $\lambda_i^{(m)}$ convergente, digamos $\lambda_i^{(m)} \longrightarrow \beta_i$, e denotaremos por $(y_{i,m})$ a subsequência de $(y_m)$ que é obtida substituindo o i-ésimo termo $\beta_i^{(m)}$ por sua subsequência correspondente, para todo $i = 1, ..., n$. Deste modo, temos a subsequência $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, ...)$ de $(y_m)$, onde

$$y_{n,m} = \lambda_1^{(m)} x_1 + ... + \lambda_n^{(m)} x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(m)} x_i,$$

de modo que para $m \longrightarrow \infty$, temos $y_{n,m} \longrightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$.

Note que esta sequência converge para um $y$ que é escrito como combinação linear de $\{x_1, ..., x_n\}$ que é linearmente independente. Além disso, sabemos que $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i^{(m)}| = 1$, logo deve existir ao menos um $\beta_i^{(m)} \neq 0$, consequentemente, $\beta_i \neq 0$, para algum $i = 1, ..., n$. Logo, devemos ter $y \neq 0$. Porém, sabemos que $\|y_{n,m}\| \longrightarrow y$ e $\|y_m\| \longrightarrow 0$, segue do Teorema 2.1 que $\|y\| = 0$, então $y = 0$, um absurdo. □

**Teorema 3.1.** *Seja $X$ um espaço normado de dimensão finita. Sendo assim, todas as suas normas são equivalentes.*

*Demonstração.* Considere as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ definidas em $X$ e considere $\{e_1, ..., e_n\}$ como sendo uma base de $X$, isto é, $\dim X = n$. Deste modo, dado $x \in X$, existem $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Aplicando o Lema 10.1, sabemos que existem $c, k > 0$ tais que

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \geqslant c \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

e

$$\|x\|_0 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_0 \geqslant k \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Deste modo, tomando $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\|$ e $\beta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\|_0$, temos que

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|e_i\| \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant \frac{\lambda}{k} \|x\|_0,$$

de maneira análoga, obtemos

$$\|x\|_0 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|e_i\|_0 \leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant \frac{\beta}{c} \|x\|.$$

Portanto, temos que para todo $x \in X$, existem $a = \dfrac{c}{\beta} > 0$ e $b = \dfrac{\lambda}{k} > 0$ tais que

$$a\|x\|_0 \leqslant \|x\| \leqslant b\|x\|_0,$$

de onde segue o desejado. $\square$

## 3.2 Operadores Lineares

Em espaços vetoriais podemos definir um tipo específico de aplicações que se comportam de maneira linear assim como a reta no conjunto dos números reais, como segue na seguinte definição.

**Definição 3.11.** Sejam $X$ e $Y$ dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ e $\mathbb{Z}_{\geq 0}(T)$ um subespaço vetorial de $X$. Diz-se que a aplicação $T : \mathbb{Z}_{\geq 0}(T) \longrightarrow Y$ é um operador linear caso as seguintes condições forem satisfeitas:

**i)** $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(T)$;

**ii)** $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, para quaisquer $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

*Exemplo* 3.2. Considerando o espaço vetorial $C[a, b]$, temos que a integração dada pela aplicação $T : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$, onde para $x \in C[a, b]$, temos

$$T(x)(t) = \int_a^t x(\tau)d\tau, \quad t \in [a, b],$$

é um operador linear. Isto ocorre pois a integral, assim como a derivada, preserva a soma e o produto por escalar.

Nos resultados a seguir, consideraremos $\mathbb{Z}_{\geq 0}(T)$ como sendo o próprio espaço $X$ e, quando necessário, explicitaremos as diferenças.

**Definição 3.12.** Considere $X$ e $Y$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear.

**a)** Diz-se que $y \in Y$ pertence a imagem de $T$, denotado por $\mathrm{Im}(T)$, caso exista $x \in X$ tal que
$$T(x) = y.$$

**b)** Diz-se que $x \in X$ pertence ao núcleo de $T$, denotador por $\mathrm{nuc}(T)$, caso
$$T(x) = 0 \in Y.$$

Note que para o operador $T : X \longrightarrow T$, temos que $\text{nuc}(T) \neq \emptyset$, pois ao menos o vetor nulo $0 \in X$ pertence ao núcleo. De fato, para $x \in X$, temos

$$T(0) = T(x - x) = T(x) + T(-x) = T(x) - T(x) = 0.$$

**Definição 3.13.** Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Denotaremos a restrição do operador $T$ a um conjunto $M \subset X$ por $T|_M : M \longrightarrow Y$, onde

$$T|_M(x) = T(x), \ \forall x \in M.$$

**Definição 3.14.** Seja $T : M \longrightarrow Y$ um operador linear e $X$ um espaço vetorial tal que $M \subset X$. Diz-se que o operador $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$ é uma extensão de $T$ caso $\tilde{T}|_M = T$, isto é,

$$\tilde{T}(x) = T(x), \ \forall x \in M.$$

## 3.3 Operadores Lineares Limitados

**Definição 3.15.** Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Diz-se que $T$ é limitado, caso exista $k > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leqslant k\|x\|, \ \forall x \in X.$$

Embora não tenhamos explicitado as normas, vale ressaltar que na definição de operadores limitados, $\|T(x)\|$ corresponde a norma do espaço $Y$, enquanto $\|x\|$ a norma do espaço $X$.

Note que caso $\|x\| = 0$, então $x = 0$ e $T(x) = 0$, ou seja, evidentemente, existe $k > 0$ tal que $\|T(x)\| \leqslant k\|x\|$. Considerando $\|x\| \neq 0$, então o operador $T : X \longrightarrow Y$ será limitado caso exista $k > 0$ tal que

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leqslant k, \ \forall x \in X, \|x\| \neq 0.$$

Deste modo, caso consideremos $k > 0$ o menor número real possível que satisfaça esta condição, isto é, o supremo deste conjunto, podemos definir a norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}. \tag{10.2}$$

Temos ainda que (10.2) pode ser reescrita como

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\neq 0}} \left( \frac{1}{\|x\|} \|T(x)\| \right) = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\neq 0}} \left\| T\left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\|,$$

fazendo $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ e notando que $\|y\| = 1$, temos ainda

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{y\in X \\ \|y\|=1}} \|T(y)\|,$$

deixando subtendido que $y \in X$, podemos denotar simplesmente por

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\|.$$

Vejamos a seguir que esta aplicação é de fato uma norma.

**Proposição 3.2.** *Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. Deste modo, a aplicação*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|,$$

*define uma norma.*

*Demonstração.* Sendo $\|T(x)\|$ uma norma em $Y$, sabemos que $\|T\| \geqslant 0$, onde a igualdade ocorre se, e somente se

$$\begin{aligned} \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = 0 &\iff \|T(x)\| = 0,\ \forall x \in X, \|x\| = 1 \\ &\iff \|T(x)\| = 0,\ \forall x \in X \\ &\iff T = 0. \end{aligned}$$

Além disso, para $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|T(x)\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = |\alpha| \|T\|.$$

Por fim, para os operadores $T_1, T_2 : X \longrightarrow Y$, temos

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x) + T_2(x)\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x)\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2(x)\|.$$

Logo, $\|T\|$ é uma norma. $\square$

Embora tenhamos mostrado que $\|T\|$ é uma norma, ainda não sabemos sobre qual espaço esta norma está definida. Deste modo, temos a seguinte definição.

**Definição 3.16.** Sejam $X$ e $Y$ espaços normados sobre um mesmo corpo. Defina por $\mathcal{B}(X,Y)$ o espaço de todos os operadores lineares definidos em $X$ e cuja imagem esta contida em $Y$.

Deste modo, considerando $T, S \in \mathcal{B}(X,Y)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, podemos definir as seguintes operações

$$(T,S) \longmapsto T+S \in X \ \ (\textit{adição})$$
$$(\alpha,T) \longmapsto \alpha \cdot u \in X \ \ (\textit{multiplicação})$$

Isto é, $\mathcal{B}(X,Y)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, mais ainda, considerando a norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\|$$

temos que $\mathcal{B}(X,Y)$ é um espaço vetorial normado.

*Exemplo* 3.3. Considere o operador $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ onde para $x \in C[0,1]$, temos

$$T(x)(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau, \ t \in [0,1],$$

neste caso, $k$ é uma função dada e contínua em $G = [0,1]\times[0,1]$ chamada de núcleo de $T$. Note que $T$ é um operador linear, pois a integral preserva a soma e o produto por escalar. Além disso, como $G$ é fechado e limitado, uma vez que $k$ é contínua em $G$, segue que $k$ é limitada em $G$, ou seja, existe $k_0 > 0$ tal que

$$|k(t,\tau)| \leqslant k_0, \ \forall (t,\tau) \in G.$$

Nestas condições, adotando em $C[0,1]$ a norma

$$\|x\| = |x(t)| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|,$$

temos

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \max_{t\in[0,1]} |T(x)| \\ &= \max_{t\in[0,1]} \left|\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right| \\ &\leqslant \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau \\ &\leqslant \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 k_0\|x\| \\ &= k_0\|x\| \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 d\tau \\ &= k_0\|x\|.\end{aligned}$$

Logo, existe $k_0 > 0$ tal que $\|T(x)\| \leqslant k_0\|x\|$, ou seja, $T$ é limitado

**Proposição 3.3.** *Seja $T : X \longrightarrow Y$ limitado. Então, temos que*

$$\|T(x)\| \leqslant \|T\|\|x\|, \ \forall x \in X.$$

*para todo $x \in X$;*

*Demonstração.* Se $x = 0$, então a desigualdade é imediata. Caso $x \neq 0$, uma vez que $T$ é limitado, dado $x \in X$, sabemos que existe $k > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leqslant k\|x\| \Longrightarrow \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leqslant k.$$

Deste modo, como $\|T\|$ é um supremo, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leqslant k \Longrightarrow \|T(x)\| \leqslant \|T\|\|x\|, \ \forall x \in X.$$

□

**Teorema 3.2.** *Seja $X$ um espaço normado de dimensão finita. Então, todo operador $T$ definido em $X$ é limitado.*

*Demonstração.* Seja $\dim X = n < \infty$, ou seja podemos considerar $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de $X$. Nestas condições, dado $x \in X$, existem $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tais que

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Deste modo, segue do Lema 10.1 que existe $c > 0$ tal que

$$c\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\| \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leqslant \frac{\|x\|}{c}. \tag{10.3}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \|T(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)\| \\ &= \|\alpha_i T(e_i) + ... + \alpha_n T(e_n)\| \\ &\leqslant |\alpha_1|\|T(e_1)\| + ... + |\alpha_n|\|T(e_n)\|.\end{aligned}$$

Considerando $k_0 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|T(e_i)\|$, segue que

$$\|T(x)\| \leqslant k_0(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|) = k_0\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|.$$

Multiplicando $k_0$ em (10.3), vem que

$$\|T(x)\| \leqslant k_0\sum_{i=1}^{n} \leqslant \frac{k_0}{c}\|x\|.$$

Logo, dado $x \in X$, existe $k = \dfrac{k_0}{c} > 0$, tal que $\|T(x)\| \leqslant k\|x\|$, isto é, $T$ é limitado. Note que caso $k_0 = 0$, então $\|T(x)\| = 0$, que também é limitado. □

## 3.4 Operadores Lineares Contínuos

De maneira análoga a feita em Análise Real ou em Espaços Métricos, podemos estudar a continuidade de operadores lineares com a seguinte definição:

**Definição 3.17.** Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados. Diremos que um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é contínuo em $a \in X$ caso para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|T(x) - T(a)\| < \varepsilon.$$

Quando esta propriedade é satisfeita para todo $a \in X$, diremos simplesmente que $T$ é contínuo.

**Teorema 3.3.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

**a)** *$T$ é contínua;*

**b)** *$T$ é contínua em um algum ponto $a \in X$;*

**c)** *$T$ é limitada.*

*Demonstração.* $(a) \Longrightarrow (b)$ Como $T$ é contínua em $X \neq \emptyset$, então $T$ é contínua em algum $a \in X$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Supondo que $T$ é contínua em algum $a \in X$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \ \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|T(x) - t(a)\| < \varepsilon.$$

Suponha que $x \neq 0$ e $\varepsilon = 1$, tome $k > 0$ tal que $\dfrac{1}{\delta} < k$. Sendo assim, note que o vetor $y = a - \dfrac{x}{k\|x\|} \in X$, deste modo, temos

$$\|y - a\| = \left\| a - \frac{x}{k\|x\|} - a \right\| = \frac{1}{k} < \delta.$$

Logo, como $T$ é contínua em $a \in X$, temos

$$\begin{aligned}
\|T(y) - T(a)\| < \varepsilon &\Longrightarrow \left\| T\left(a - \frac{x}{k\|x\|}\right) - T(a) \right\| < 1 \\
&\Longrightarrow \left\| T\left(\frac{x}{k\|x\|}\right) \right\| < 1 \\
&\Longrightarrow \|T(x)\| < k\|x\|.
\end{aligned}$$

Como $k > 0$, segue que $T$ é limitado para $x \neq 0$. Caso $x = 0$, então existe $k > 0$ tal que

$$\|T(x)\| = 0 \leqslant k\|x\| = 0.$$

Portanto, existe $k > 0$ tal que para todo $x \in X$ $\|T(x)\| \leqslant k\|x\|$, isto é, $T$ é limitado.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Seja $\varepsilon > 0$ dado. Caso $T = 0$, então sabemos que para $a \in X$, temos que existe $\delta > 0$ de modo que

$$\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|T(x) - T(a)\| = 0 < \varepsilon.$$

Assim, suponha que $T \neq 0$, isto é, $\|T\| \neq 0$. Sendo assim, podemos tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|T\|}$. Logo, para $a \in X$, considere $x \in X$ tal que $\|x - a\| < \delta$, então, segue da Proposição 3.3

que

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(a)\| &= \|T(x-a)\| \\ &\leqslant \|T\|\|x-a\| \\ &< \|T\|\delta \\ &= \|T\|\frac{\varepsilon}{\|T\|} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto, $T$ é contínua em $a \in X$. Como $a$ é um vetor qualquer de $X$, segue que $T$ é contínua em $X$. □

**Teorema 3.4.** *Seja $X$ um espaço normado e $Y$ um espaço de Banach. Considere $M \subset X$ e $T : M \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. Então, existe uma extensão*

$$\tilde{T} : \overline{M} \longrightarrow Y$$

*de $T$, onde $\tilde{T}$ é um operador linear limitado e*

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

*Demonstração.* Considere que $T$ seja limitado, isto é, existe $\|T\|$. Seja $x \in \overline{M}$. Deste modo, existe uma sequência $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Uma vez que $(x_n)$ converge, sabemos que ela também é de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}.$$

Como $T$ é um operador limitado, segue da Proposição 3.3 que para $n, m > n_0$, temos

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqslant \|T\|\|x_n - x_m\| < \|T\|\frac{\varepsilon}{\|T\|} = \varepsilon,$$

ou seja, $(T(x_n))$ também é uma sequência de Cauchy. Uma vez que $Y$ é completo, sabemos que

$$T(x_n) \longrightarrow y \in Y.$$

Deste modo, considere $\tilde{T} : \overline{M} \longrightarrow Y$ definido por

$$\tilde{T}(x) = y,$$

a fim de mostrar que $\tilde{T}$ é uma extensão de $T$, precisamos mostrar que $\tilde{T}$ esta bem definida, é linear e $\tilde{T}|_M = T$.

De fato, note que $\tilde{T}$ esta bem definida pois, considerando $(x_n),(z_n) \subset M$ sequências tais que $x_n, z_n \longrightarrow x$ e $(v_m) = (x_1, y_1, x_2, y_2, ...) \subset M$ uma sequência tal que $v_m \longrightarrow x$, uma vez que $T$ é continuo, segue do corolário do Teorema 3.3 que

$$T(x_n), T(z_n), T(v_m) \longrightarrow T(x) \in Y,$$

isto é independente da sequência, existe um único $y \in Y$ tal que $\tilde{T}(x) = y$.

Note que $\tilde{T}$ é linear, pois dados $x, z \in \overline{M}$, existem $(x_n),(z_n) \subset X$ tais que $x_n \longrightarrow x \in M$ e $z_n \longrightarrow z \in M$, de modo que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\tilde{T}(\lambda x + z) = \lim(\lambda x_n + z_n) = \lambda \lim x_n + \lim\_n = \lambda\tilde{T}(x) + \tilde{T}(z).$$

Além disso, por construção, é claro que $\tilde{T}(x) = T(x)$, para todo $x \in M$, ou seja, $\tilde{T}|M = T$.

Logo, $\tilde{T}$ é uma extensão de $T$.

Agora, precisamos mostrar que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Com efeito, considerando $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \longrightarrow x \in M$, temos que

$$\|T(x_n)\| \leqslant \|T\|\|x_n\|.$$

Uma vez que $\|\cdot\|$ é uma função contínua, fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos $T(x_n) \longrightarrow T(x) = \tilde{T}(x)$, ou seja,

$$\|\tilde{T}(x)\| \leqslant \|T\|\|x\|, \ \forall x \in M,$$

então, $\tilde{T}$ é limitada. Em particular, se $\|x\| = 1$, então temos $\|\tilde{T}\| \leqslant \|T\|$. Porém, como $\tilde{T}$ é uma extensão de $T$ e a norma do operador é definida por um supremo, é claro que $\|T\| \leqslant \|\tilde{T}\|$.

Portanto, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. □

## 3.5 Funcionais Lineares e Espaço Dual

**Definição 3.18.** Seja $X$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial . Diz-se que um operador linear $f$ é um funcional linear caso sua imagem seja um subconjunto do corpo. Isto é, $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$.

Como os funcionais lineares são um caso particular de operadores lineares, todos os resultados vistos anteriormente continuam válidos. Vale ressaltar que caso $X$ for um espaço normado, então um funcional $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é dito limitado caso exista $k > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant k\|x\|.$$

Neste caso, a norma do funcional será dada por

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Segue da Proposição 3.3 que

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\|, \ \forall x \in X.$$

*Exemplo* 3.4. Considere o espaço das funções contínuas $C[a,b]$ munido da norma

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \ \forall x \in C[a,b].$$

Nestas condições,

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt$$

define um funcional linear $f : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Além disso, mostraremos que $f$ é limitado e sua norma é dada por $\|f\| = b-a$. De fato, para todo $x \in C[a,b]$, temos

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\int_a^b x(t)dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |x(t)|dt \\ &\leqslant \int_a^b \|x\|dt \\ &= (b-a)\|x\|. \end{aligned}$$

Como $b-a>0$, segue que $f$ é limitada, então existe $\|f\|$. Em particular, para $\|x\|=1$, temos

$$|f(x)| = (b-a)\|x\| = b-a \Longrightarrow \|f\| \leqslant b-a.$$

Além disso, uma vez que

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\|, \ \forall x \in C[a,b],$$

novamente para $\|x\|=1$, temos

$$\|f\| \geqslant |f(x)| = \left|\int_a^b x dt\right| = b-a.$$

Logo, $\|f\| = b-a$.

**Definição 3.19.** Seja $X$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial normado. O conjunto formado por todos os funcionais lineares limitados definidos em $X$ é chamado de espaço dual de $X$ e será denotado por $X'$.

Prosseguindo de maneira análoga, definindo a soma e a multiplicação por escalar como feito para $\mathcal{B}(X,Y)$, temos que o espaço dual $X'$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial normado, onde a norma é dada por

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

# 4 Espaços de Hilbert

**Definição 4.1.** Seja $X$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que $X$ é um espaço com produto interno, caso seja possível definir uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ que satisfaça as seguintes propriedades:

$(p_1)$ $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in X$;

$(p_2)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, $\forall x, y \in X$;

$(p_3)$ $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\forall x, y, x \in X$;

$(p_4)$ $\langle x, x\rangle > 0$, sempre que $x \neq 0$.

Na definição de produto interno, $\overline{\langle y, x\rangle}$ denota o conjugado complexo de $\langle x, y\rangle$.

Nestas condições, veremos que uma norma em um espaço com produto interno $X$ pode ser definida como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},\ \forall x \in X,$$

para isso, precisamos da Desigualdade de Cauchy-Schwarz para espaços com produto interno.

**Teorema 4.1** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se $X$ é um espaço com produto interno, então vale*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|,\ \forall x \in X,$$

*onde* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

*Demonstração.* Note que caso $x = 0$ ou $y = 0$, a desigualdade é imediata. Supondo que $x, y \neq 0$, então para todo $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \|x-\lambda y\|^2 &= \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, -\lambda y\rangle + \langle -\lambda y, x\rangle + \langle -\lambda y, -\lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda[\langle y, x\rangle - \overline{\lambda}\langle y, y\rangle].
\end{aligned}$$

Como isto deve ser válido para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e considerando que $y \neq 0$, tome

$$\overline{\lambda} = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle},$$

assim, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle - \lambda \left[ \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, y \rangle \right] \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ e para $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$, segue que

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|},$$

ou ainda,

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

□

**Proposição 4.1.** *Seja $X$ um espaço com produto interno sobre o corpo $\mathbb{R}$. Então, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, onde $x \in X$, define uma norma em $X$.*

*Demonstração.* Segue de $(p_4)$ que $\|x\| > 0$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se $x = 0$. Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2.$$

Por fim, dados $x, y \in X$, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leqslant \langle x, x \rangle + |\langle x, y \rangle| + |\langle y, x \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\|^2 + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

de onde segue a desigualdade triangular. □

Sendo assim, se $X$ é um espaço com produto interno, então ele será um espaço normado e, consequentemente, também será um espaço métrico. Este fato motiva a seguinte definição.

**Definição 4.2.** Diz-se que um espaço com produto interno $H$ é um espaço de Hilbert se a métrica induzida pelo produto interno torna o espaço métrico $H$ completo.

*Exemplo* 4.1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Hilbert, onde o produto interno é dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

onde $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ estão em $\mathbb{R}^n$. Com efeito, basta notar que

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2.$$

Do mesmo modo, $\mathbb{C}^n$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

onde $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$. Neste caso, basta notar que

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^2.$$

*Exemplo* 4.2. O espaço $\ell^2$ também é um espaço de Hilbert, onde o produto interno é dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i},$$

onde $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^2$.

**Proposição 4.2.** *Seja $X$ um espaço com produto interno. Então, para $x_0 \in X$ fixo, temos que $f(x) = \langle x, x_0\rangle$, onde $x \in X$, define um funcional linear em $X$.*

*Demonstração.* Sabemos que $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$, de modo que para todo $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \langle \lambda x + y, x_0\rangle \\ &= \langle \lambda x, x_0\rangle + \langle y, x_0\rangle \\ &= \lambda\langle x, x_0\rangle + \langle y, x_0\rangle \\ &= \lambda f(x) + f(y), \end{aligned}$$

de onde segue o desejado. □

**Definição 4.3.** Seja $X$ um espaço vetorial real. Dados $x, y \in X$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, o segmento que une estes pontos é dado por

$$z = \alpha x + (1-\alpha)y.$$

Caso $M \subset X$ é tal que para quaisquer $x, y \in M$ o segmento que une estes dois pontos está contido em $M$, então diremos que $M$ é convexo.

Segue da definição de conjunto convexo que todo subespaço $M$ de um espaço vetorial $X$ é convexo, pois a combinação linear de elementos de $M$ está em $M$.

**Proposição 4.3** (Lei do Paralelogramo)**.** *Seja $X$ um espaço com produto interno onde a norma provem de um produto, então*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \ \forall x, y \in X.$$

*Demonstração.* Note que para quaisquer $x, y \in X$, temos

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2$$

e

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2,$$

ou seja,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \ \forall x, y \in X.$$

□

## 4.1 Ortogonalidade e Conjuntos Convexos

**Definição 4.4.** Seja $X$ um espaço com produto interno e $x, y \in X$. Diz-se que $x$ e $y$ são ortogonais caso

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Neste caso, denotaremos este fato por $x \perp y$.

Quando $x \perp y$ para todo $y \in M$, onde $M \subset X$ é um subespaço, denotaremos por $x \perp M$. Além disso, o complemento ortogonal de um subespaço $M \subset X$ é o conjunto

$$M^{\perp}\{x \in X : x \perp M\}.$$

Além disso, se $M$ é um subespaço vetorial de $X$, note que $M^{\perp}$ também será um subespaço, pois por definição $0 \in M^{\perp}$, uma vez que $\langle x, 0\rangle = 0$, para todo $x \in M$ e dados

$x_1, x_2 \in M^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que $\lambda x_1 + x_2 \in M^\perp$, pois

$$\langle x, \lambda x_1 + x_2 \rangle = \overline{\lambda}\langle x, x_1 \rangle + \langle x, x_2 \rangle = 0.$$

Mais ainda, temos que $M \cap M^\perp = \{0\}$, pois se $x_0 \in M \cap M^\perp$, então para todo $x \in M$, temos $\langle x, x_0 \rangle = 0$, em particular para $x = x_0 \in M$, segue que $\langle x_0, x_0 \rangle = 0$, o que só ocorre quando $x_0 = 0$.

**Teorema 4.2.** *Sejam $X$ um espaço com produto interno e $M \neq \emptyset$ um subconjunto convexo de $X$ que é completo com a norma induzida pelo produto interno. Então, para qualquer $x \in X$, existe um único $y \in M$ tal que*

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|.$$

*Demonstração.* Uma vez que $\delta$ é um ínfimo, para todo $\varepsilon > 0$, exite $y_\varepsilon \in M$ tal que

$$\delta \leqslant \|x - y_\varepsilon\| < \delta + \varepsilon,$$

em particular, se $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\delta < \|x - y_n\| < \delta + \frac{1}{n}.$$

Assim, temos uma sequência $(y_n) \subset M$ e uma sequência $(\delta_n) \subset \mathbb{R}$ de modo que

$$\delta_n = \|x - y_n\| \longrightarrow \delta.$$

Logo, como $M$ é completo, basta mostrar que $(y_n) \subset M$ é de Cauchy. De fato, fazendo $v_n = y_n - x$, temos $\|v_n\| = \delta_n$ e

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\|,$$

como $M$ é convexo, $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$, então

$$\|v_n + v_m\| = 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geqslant 2\delta.$$

Segue da lei do paralelogramo que

$$\|v_n - v_m\|^2 + \|v_n + v_m\|^2 = 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2)$$

ou seja

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|v_n - v_m\|^2 \\ &= 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) - \|v_n + v_m\|^2 \\ &\leqslant 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) - 4\delta^2 \\ &= 2(\delta_n^2 - \delta^2) + 2(\delta_m^2 - \delta^2).\end{aligned}$$

Como $(\delta_n) \subset \mathbb{R}$ e $\delta_n \longrightarrow \delta$, temos que $\delta_n^2 \longrightarrow \delta^2$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |\delta_n^2 - \delta^2| < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Logo, para $n, m > n_0$, temos

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &\leqslant 2(\delta_n^2 - \delta^2) + 2(\delta_m^2 - \delta^2) \\ &\leqslant 2|\delta_n^2 - \delta^2| + 2|\delta_m^2 - \delta^2| \\ &\leqslant 2\frac{\varepsilon^2}{4} + 2\frac{\varepsilon^2}{4} \\ &= \varepsilon^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$n, m > n_0 \Longrightarrow \|y_n - y_m\| < \varepsilon.$$

Portanto, $(y_n) \subset M$ é de Cauchy e uma vez que $M$ é completo, então $y_n \longrightarrow y \in M$.

Agora, mostraremos que $y$ é único. Com efeito, suponha que exista $y_0 \in M$ tal que

$$\|x - y\| = \|x - y_0\| = \delta.$$

Segue da lei do paralelogramo que

$$\begin{aligned}\|y - y_0\|^2 &= \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2(\|y - x\|^2 + \|y_0 - x\|^2) - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2 \\ &= 4\delta^2 - \|y - y_0 - 2x\|^2 \\ &= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y - y_0) - x\right\|^2,\end{aligned}$$

uma vez que $M$ é convexo, temos que $\frac{1}{2}(y + y_0) \in M$, então

$$\left\|\frac{1}{2}(y - y_0) - x\right\| \geqslant \delta \Longrightarrow -\left\|\frac{1}{2}(y - y_0) - x\right\| \leqslant -\delta^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2 &= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y-y_0)-x\right\|^2\\ &\leqslant 4\delta^2-4\delta^2\\ &=0,\end{aligned}$$

o que só ocorre caso $\|y-y_0\|=0$, ou seja, $y=y_0$. □

**Corolário 4.1.** *Seja $M$ um subespaço convexo e completo do espaço normado $X$ e considere $x\in X$ fixado. Então, $z=x-y$ é ortogonal a $M$, onde $y\in M$ é tal que*

$$\delta = \inf_{\tilde{y}\in M}\|x-\tilde{y}\| = \|x-y\|.$$

*Demonstração.* Suponha que $z$ não seja ortogonal a $M$, isto é, existe $y_1\in M$ tal que $\langle z,y_1\rangle=\beta$, onde $\beta\neq 0$. Note que $y_1\neq 0$ e além disso, para qualquer $\alpha\in\mathbb{K}$, temos $\alpha y_1\in M$ e

$$\begin{aligned}\|z-\alpha y_1\|^2 &= \langle z-\alpha y_1, z-\alpha y_1\rangle\\ &= \|z\|^2-\overline{\alpha}\langle z,y_1\rangle-\alpha\langle y_1,z\rangle+\alpha\overline{\alpha}\|y_1\|^2\\ &= \|z\|^2-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\alpha}\|y_1\|^2.\end{aligned}$$

Tomando em particular

$$\overline{\alpha}=\frac{\overline{\beta}}{\|y_1\|^2},$$

temos

$$\|z-\alpha y_1\|^2=\|z\|^2-\frac{\overline{\beta}\beta}{\|y_1\|^2}-\frac{\beta\overline{\beta}}{\|y_1\|^2}+\frac{\beta\overline{\beta}}{\|y_1\|^2}=\|z\|^2-\frac{|\beta|^2}{\|y_1\|^2}<\|z\|^2.$$

Uma vez que $\|z\|=\|x-y\|=\delta$, segue que

$$\|z-\alpha y_1\|<\delta,$$

um absurdo, pois $\alpha y_1\in M$. □

**Definição 4.5.** Seja $X$ um espaço com produto interno. Um subconjunto $M\subset X$ é dito ortonormal se, para quaisquer $x,y\in M$, temos:

$$\langle x,y\rangle=\begin{cases}0, & \text{se } x\neq y\\ 1, & \text{se } x=y.\end{cases}$$

**Definição 4.6.** Seja $(e_n) \subset X$ uma sequência, onde $X$ é um espaço com produto interno. Dizemos que $(e_n)$ é uma sequência ortonormal se

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, \text{ se } j \neq k \\ 1, \text{ se } j = k, \end{cases}$$

onde $k, j \in \mathbb{N}$.

Considerando $(e_n) \subset X$ uma sequência ortonormal, norte que fixado $n \in \mathbb{N}$ e tomando $x \in [e_1, ..., e_n]$, então existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

De modo que para $k = 1, ..., n$, temos

$$\langle x, e_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_k \rangle = \alpha_k \langle e_k, e_k \rangle = \alpha_k,$$

ou seja, podemos escrever

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

**Lema 10.2.** *Seja $X$ um espaço com produto interno e $(e_n) \subset X$ uma sequência ortonormal, além disso, fixado $n \in \mathbb{N}$, considere $Y_n = [e_1, ..., e_n]$. Assim, para todo $x \in X$ podemos escrever $x = y + z$, onde $y \in Y_n$ e $z \in X$ é tal que $z \perp y$.*

*Demonstração.* Dado $x \in X$, considere $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in Y_n$ e seja $z = x - y$. Deste modo, note que

$$\langle z, y \rangle = \langle x - y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \|y\|^2.$$

Segue que

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x, e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

E além disso,

$$
\begin{aligned}
\|y\|^2 = \langle y, y\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, \sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\langle x, e_i\rangle\overline{\langle x, e_j\rangle}]\langle e_i, e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle x, e_i\rangle} \\
&= \sum_{i=1}^{n}|\langle x, e_i\rangle|^2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\langle z, y\rangle = \langle x, y\rangle - \|y\|^2 = 0,$$

o que conclui a demonstração. □

**Teorema 4.3** (Desigualdade de Bessel)**.** *Seja $X$ um espaço com produto interno. Se $(e_n) \subset X$ é uma sequência ortonormal, então para todo $x \in X$, temos*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

*Demonstração.* Seja do Lema 10.2 que dado $x \in X$e fixado $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $x = y + z$, onde $y = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i$ e $z \perp y$. Assim, note que

$$\|x\|^2 = \|y - z\|^2 = \|y\|^2 - \langle y, z\rangle - \langle z, y\rangle + \|z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2,$$

ou seja,

$$0 \leqslant \|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2,$$

de onde vem que $\|y\|^2 \leqslant \|x\|^2$. Novamente pelo Lema 10.2, temos que

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Logo, fazendo $n \longrightarrow \infty$, vem que

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

□

**Definição 4.7.** Diz-se que um subespaço vetorial $X$ é a soma direta de depois subespaços $Y$ e $Z$ caso todo elemento $x \in X$ possa ser escrito como

$$x = y + z,$$

onde $y \in Y$ e $z \in Z$ são únicos. Neste caso, denotaremos por

$$X = Y \oplus Z.$$

**Teorema 4.4.** *Seja $M$ um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert $H$. Então,*

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

*Demonstração.* Uma vez que $H$ é completo e $M$ é fechado, segue do Teorema 2.4 que $M$ é completo. Além disso, como $Y$ é convexo, pelo Corolário 4.1, para todo $x \in H$, existe $y \in M$ tal que $z = x - y \in M^{\perp}$, ou seja, podemos escrever

$$x = y + z, \quad \text{com } y \in M \text{ e } z \in M^{\perp}.$$

Logo, falta mostrar que $y$ e $z$ são únicos. De fato, suponha que existam $y_1 \in M$ e $z_1 \in M^{\perp}$ tais que

$$x = y + z = y_1 + z_1.$$

ou seja, $y - y_1 = z_1 - z$ e como $M$ e $M^{\perp}$ são espaços vetoriais, temos $y - y_1 \in M$ e $z_1 - z \in M^{\perp}$. Porém, uma vez que $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, segue que

$$y - y_1 = 0 \text{ e } z_1 - z = 0 \Longrightarrow y = y_1 \text{ e } z = z_1.$$

Portanto, $H = M \oplus M^{\perp}$. □

## 4.2 Representação de Riesz

A seguir, veremos o Teorema de Riesz que dentre outras coisas, nos garante que todo funcional linear limitado $f$ definido em um espaço de Hilbert $H$ pode ser representado como

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \ \forall x \in H,$$

onde $z \in H$ é fixado. Note que uma das exigências para que isto ocorra é que $\langle x, z \rangle = 0$ para $x \in Nuc(f)$, ou seja, $z \perp Nuc(f)$, oque nos diz que $z \in Nuc(f)^{\perp}$. Tendo isto em mente, vejamos de fato o teorema.

**Teorema 4.5** (Riesz)**.** *Todo funcional linear limitado $f$ definido em um espaço de Hilbert*

*H pode ser representado por*

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \ \forall x \in H, \tag{10.4}$$

*onde $z \in H$ depende de $f$, e é o único elemento de $H$ que satisfaz esta condição de modo que*

$$\|z\| = \|f\|. \tag{10.5}$$

*Demonstração.* Caso $f = 0$, basta considerar $z = 0$ e deste modo, nada há de se demonstrar. Supondo que $f \neq 0$, vamos mostrar que: $a)$ $f$ pode ser escrita como em (10.4), $b)$ $z \in H$ é único e $c)$ (10.5) é válido.

**a)** Uma vez que $f \neq 0$, isto existe $x \in H$ tal que $f(x) \neq 0$, ou seja, $Nuc(f) \neq H$. Como $Nuc(f)$ é um subespaço vetorial de $H$, segue que $Nuc(f)$ é convexo, além disso, pelo corolário do Teorema 3.3, segue que $Nuc(f)$ é fechado e pelo Teorema 2.4 temos também que $Nuc(f)$ é completo.

Deste modo, segue do Teorema 4.4 que $H = Nuc(f) \oplus Nuc(f)^\perp$ e como $Nuc(f) \neq H$, então $Nuc(f)^\perp \neq \{0\}$, ou seja, existe $z_0 \in Nuc(f)^\perp$ tal que $z_0 \neq 0$.

Assim, para todo $x \in H$, defina

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x.$$

Aplicando $f$, temos que

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0,$$

isto é, $v \in Nuc(f)$. Porém, $z_0 \perp Nuc(f)$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, z_0 \rangle \\ &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle, \end{aligned}$$

como $z_0 \neq 0$, temos $\|z_0\|^2 \neq 0$, o que nos permite escrever

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}\langle x, z_0 \rangle.$$

Tomando

$$z = \overline{\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}} z_0 \in Nuc(f)^\perp,$$

temos

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \ \forall x \in H.$$

**b)** Suponha que exista $z_1 \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \langle x, z_1 \rangle.$$

Deste modo, temos

$$\langle x, z - z_1 \rangle = 0, \ \forall x \in H,$$

em particular, se $x = z - z_1 \in H$, então

$$\langle z - z_1, z - z_1 \rangle = \|z - z_1\|^2 = 0,$$

o que só ocorre quando $z = z_1$.

Logo, $z \in H$ é único.

**c)** Sabendo que $f$ é um funcional limitado, sabemos que existe $\|f\|$. Além disso, uma vez que $f(x) = \langle x, z \rangle$ para todo $x \in H$, em particular para $x = z$ temos

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \Longrightarrow \|z\|^2 = |f(z)| \leqslant \|f\|\|z\|,$$

uma vez que $f \neq 0$, então $z \neq 0$ o que implica em $\|z\| \neq 0$. Deste modo, temos $\|z\| \leqslant \|f\|$. Além disso, temos

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle|,$$

segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|x\|\|z\| = \|z\|.$$

Portanto, $\|z\| = \|f\|$. □

# 5 Teorema de Hahn-Banach

Tendo em vista os resultados vistos em Espaços Métricos e Espaços de Banach, podemos finalmente enunciar e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach. Em particular, a fim de mostrar uma de suas diversas aplicações, precisamos da versão deste teorema para espaços normados, para tanto, veremos a sua versão para espaços vetoriais reais e complexos.

## 5.1 Preliminares

Dentre as três versões que serão enunciadas e demonstradas neste trabalho, a que requer mais atenção é quando consideramos espaços vetoriais reais. Isto ocorre devido a versão complexa ser obtida através de espaços vetoriais reais, do mesmo modo que para espaços normados, iremos provar utilizando o fato de que este teorema é válido para espaços vetoriais complexos.

Assim, devido a todo o processo construtivo da demonstração, precisamos de mais algumas definições e resultados antes de provarmos de fato o Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais reais.

**Definição 5.1.** Dizemos que o conjunto $X$ é parcialmente ordenado caso seja possível definir uma relação $\sim$ parcialmente ordenada em $X$, isto é:

**a)** $a \sim a$, para todo $a \in X$;

**b)** Se $a \sim b$ e $b \sim a$, então $a = b$;

**c)** Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.

Além disso, se para cada $a, b \in X$ temos $a \sim b$ ou $b \sim a$, então $X$ é dito totalmente ordenado.

*Exemplo* 5.1. Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de um conjunto $X$. Mostraremos que $\mathcal{P}$ é um conjunto parcialmente ordenado, onde a relação $\sim$ é definida por

$$A \sim B \iff A \subset B.$$

Com efeito, é claro que $A \sim A$, pois por definição $A \subset A$. Além disso, se $A \sim B$ e $B \sim A$, isto é, $A \subset B$ e $B \subset A$, então sabemos que $A = B$. Por fim, se $A \sim B$ e $B \sim C$, evidentemente $A \subset C$, ou seja, $A \sim C$.

*Exemplo* 5.2. Seja $X$ um espaço vetorial real e considere $f$ um funcional linear definido no subespaço $M \subset X$. Se $E$ é o conjunto de todas as extensões lineares de $f$, então $E$ é um conjunto parcialmente ordenado com a relação

$$g \leqslant h \iff h \text{ é um extensão de } g.$$

Com efeito, é claro que $g \leqslant g$, pois $g(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g)$. Além disso, se $g \leqslant h$ e $h \leqslant g$, então $g(x) = h(x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g) = \mathbb{Z}_{\geq 0}(h)$, ou seja, $g = h$. Por fim, se $g \leqslant h$ e $h \leqslant p$, então

$$g(x) = h(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g) \quad \text{e} \quad h(x) = p(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(h),$$

porém, como $h$ é uma extensão de $g$, temos $D(g) \subset D(h)$, então $\mathbb{Z}_{\geq 0}(g) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}(p)$, consequentemente

$$g(x) = p(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g) \Longleftrightarrow g \leqslant p.$$

**Definição 5.2.** Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Diz-se que $M \subset X$ possui uma cota superior, caso exista $u \in X$ tal que

$$x \sim u,\ \forall x \in M.$$

Além disso, dizemos que $m \in M$ é um elemento maximal de $M$ caso para todo $x \in M$ tal que $m \sim x$, temos $m = x$.

**Lema 10.3** (Lema de Zorn)**.** *Seja $E \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado $C \subset E$ admite uma cota superior, então $E$ contém um elemento maximal.*

**Definição 5.3.** Seja $X$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Diz-se que $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional sublinear caso:

**i)** $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in X$ (subaditiva);

**ii)** $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, para quaisquer $x \in X$ e $\alpha \geqslant 0$ (positivamente homogênea).

## 5.2 O Teorema de Hahn-Banach e suas Versões

**Teorema 5.1** (Hahn-Banach)**.** *Seja $p$ um funcional sublinear definido no espaço vetorial real $X$. Considere também que $f$ é um funcional linear definido no subespaço $M$ de $X$ tal que*

$$f(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in M.$$

*Então, $f$ possui uma extensão linear $\tilde{f}$ definida em $X$ tal que*

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in X.$$

*Demonstração.* Devido ao processo de construção da demonstração, iremos mostrar que existe uma extensão $\tilde{f}$ de $f$ e depois mostraremos que $\mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f}) = X$.

**(a)** Existência de $\tilde{f}$:

Seja $E$ o conjunto de todas as extensões lineares $g$ de $f$ que satisfazem a condição

$$g(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g).$$

Note que ao menos $f \in E$, então $E \neq \emptyset$. Em $E$, defina a relação de ordem parcial $\leqslant$, onde

$$\begin{aligned} g \leqslant h &\iff h \text{ é uma extensão de } g \\ &\iff \mathbb{Z}_{\geq 0}(g) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}(h) \text{ e } g(x) = h(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g). \end{aligned}$$

Dado um conjunto totalmente ordenado $C \subset E$, para cada $x \in \bigcup_{g \in C} \mathbb{Z}_{\geq 0}(g)$, defina a função

$$\hat{g}(x) = g(x),$$

onde $\mathbb{Z}_{\geq 0}(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} \mathbb{Z}_{\geq 0}(g)$. Isto é, dado $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\hat{g})$, existe $g \in C$ tal que

$$\hat{g}(x) = g(x).$$

Note que $\hat{g}$ está bem definida, pois dado $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g') \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}(g'')$, onde $g', g'' \in C$, temos $g' \leqslant g''$ ou $g'' \leqslant g'$, em qualquer caso,

$$\hat{g}(x) = g'(x) = g''(x).$$

Agora, Mostraremos que $\mathbb{Z}_{\geq 0}(\hat{g})$ é um subespaço de $X$. Com efeito, é claro que $0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\hat{g})$, pois cada $\mathbb{Z}_{\geq 0}(g)$ é um subespaço de $X$ e consequentemente, $0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}(\hat{g})$. Além disso, dados $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\hat{g})$, temos que exitem $g_1, g_2 \in C$ tais que

$$\hat{g}(x) = g_1(x) \quad \text{ e } \quad \hat{g}(y) = g_2(y),$$

além disso, como $g_1$ é linear, devemos ter $\alpha x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g_1)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $C$ é totalmente ordenado, temos que $g_1 \leqslant g_2$ ou $g_2 \leqslant g_1$. Sem perda de generalidade, suponha que $g_1 \leqslant g_2$, então $\alpha x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g_2)$ e como $y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g_2)$, segue que $\alpha x + y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g_2)$. Logo, $\alpha x + y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\hat{g})$ e, portanto, $\mathbb{Z}_{\geq 0}(\hat{g})$ é um subespaço de $X$.

Deste modo, note que para qualquer $g \in C$, temos $g \leqslant \hat{g}$, isto é, $\hat{g}$ é um limite superior do conjunto totalmente ordenado $C$. Segue do Lema de Zorn que $E$ possui um elemento maximal $\tilde{f}$ que, por definição, é uma extensão linear de $f$ tal que

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x), \ \forall x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f}).$$

**(b)** $D(\tilde{f}) = X$:

Com efeito, suponha que exista $y_1 \in X - \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$ e considere $Y_1$ o espaço gerado pela união de $\mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$ e $\{y_1\}$, isto é,

$$Y_1 = [\mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f}) \cup \{y_1\}].$$

Neste caso, note que $y_1 \neq 0$, pois $0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$. Então, temos que cada $x \in Y_1$ pode ser escrito como

$$x = y + \alpha y_1, \quad \text{onde } y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f}) \ \text{ e } \alpha \in \mathbb{R},$$

onde esta combinação linear é única, pois caso contrário para $z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$ e $\beta \in \mathbb{R}$, onde $z \neq y$ e $\alpha \neq \beta$, temos

$$y + \alpha y_1 = z + \beta y_1 \Longrightarrow y - z = (\alpha - \beta) y_1,$$

como $y - z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$ e $\alpha - \beta \neq 0$, isto significa que $y_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$, um absurdo.

Em $Y_1$, defina a aplicação $g_0$, dada por

$$g_0(x) = g_0(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c, \tag{10.6}$$

onde $c$ uma constante real qualquer fixada. Note que $g01$ é um funcional linear, pois para $x, \overline{x} \in Y_1$, existem $y, \overline{y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = y + \alpha y_1 \quad \text{ e } \quad \overline{x} = \overline{y} + \beta y_1,$$

e considerando $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\alpha x + \overline{x} \in Y_1$ e

$$\begin{aligned} g_0(\lambda x + \overline{x}) &= g_0(\lambda(y + \alpha y_1) + (\overline{y} + \beta y_1)) \\ &= g_0((\lambda y + \overline{y}) + (\lambda\alpha + \beta) y_1) \\ &= \tilde{f}(\lambda y + \overline{y}) + (\lambda\alpha + \beta) c \\ &= \lambda(\tilde{f}(y) + \alpha c) + (\tilde{f}(\overline{y}) + \beta c) \\ &= g_0(x) + g_0(\overline{x}). \end{aligned}$$

Como $\alpha$ é uma constante real qualquer, para $\alpha = 0$ temos

$$g_0(y) = \tilde{f}(y), \ \forall y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f}) \Longrightarrow \tilde{f} \leqslant g_0,$$

e uma vez que $Y_1 \neq \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$, segue que $g_0$ é uma extensão própria de $\tilde{f}$, isto é, $g_0 \neq \tilde{f}$. Agora, mostraremos que para todo $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(g_0)$, temos $g_0(x) \leqslant p(x)$, o que irá contradizer o fato de $\tilde{f}$ ser o elemento maximal de $E$.

De fato, seja $y, z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$. Por hipótese, sabemos que para todo $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$ temos

$\tilde{f}(x) \leqslant p(x)$, então

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y-z) &\leqslant p(y-z)\\ &= p(y+y_1-z-y_1)\\ &\leqslant p(y+y_1)+p(-z-y_1),\end{aligned}$$

ou ainda

$$-p(-z-y_1) - \tilde{f}(z) \leqslant p(y+y_1) - \tilde{f}(y),\ \forall y,z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f}), \tag{10.7}$$

onde $y_1 \in X - \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})$ é o elemento fixado que tomamos no início deste item. Como o lado esquerdo da desigualdade (10.7) não depende de $y$, segue que o conjunto

$$\{p(y+y_1) - \tilde{f}(y) : y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})\} \subset \mathbb{R}$$

é limitado inferiormente. Do mesmo modo, como o lado direito não depende de $z$, segue que

$$\{-p(-z-y_1) - \tilde{f}(z) : z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f})\} \subset \mathbb{R}$$

é limitado superiormente. Deste modo, sabemos que existem

$$m_0 = \sup_{z \in D(\tilde{f})} \{-p(-z-y_1) - \tilde{f}(z)\} \quad \text{e} \quad m_1 = \inf_{y \in D(\tilde{f})} \{p(y+y_1) - \tilde{f}(y)\},$$

onde $m_0 \leqslant m_1$, mais ainda temos que existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $m_0 \leqslant c_0 \leqslant m_1$. Logo, temos

$$-p(-z-y_1) - \tilde{f}(z) \leqslant c_0,\ \forall z \in D(\tilde{f}) \tag{10.8}$$

$$c_0 \leqslant p(y+y_1) - \tilde{f}(y),\ \forall y \in D(\tilde{f}). \tag{10.9}$$

Segue de (10.6), que dado $x = y + \alpha y_1 \in Y_1$, temos, em particular para $c_0 \in \mathbb{R}$

$$g_0(x) = g_0(y+\alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c_0,$$

onde queremos mostrar que

$$g_0(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in Y_1.$$

Note que $\tilde{f}(y)$ não atrapalha nosso problema e como $c_0$ esta fixado, resta estudar o que ocorre com $\alpha \in \mathbb{R}$. Caso $\alpha < 0$, como (10.8) deve ser válida para $z = \alpha^{-1}y$, temos

$$-p\left(-\frac{y}{\alpha} - y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \leqslant c_0,$$

multiplicando por $-\alpha > 0$, segue que

$$-p(y+\alpha y_1) + \tilde{f}(y) \leqslant -\alpha c_0,$$

ou ainda,

$$g_0(x) = g_0(y+\alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c_0 \leqslant p(y+\alpha y_1) = p(x).$$

Considerando $\alpha > 0$, então (10.9) de ver válida para $z = \alpha^{-1}y$, ou seja

$$c_0 \leqslant p\left(\frac{y}{\alpha} + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

multiplicando por $\alpha > 0$, temos

$$\alpha c_0 \leqslant p(y+\alpha y_1) - \tilde{f}(y),$$

ou ainda,

$$g_0(x) = g_0(y+\alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c_0 \leqslant p(y+\alpha y_1) = p(x).$$

Para $\alpha = 0$, temos

$$g_0(x) = g_0(y) = \tilde{f}(y) \leqslant p(x).$$

Logo,

$$g_0(x) \leqslant p(x), \ \forall x \in Y_1$$

e como $\tilde{f} \leqslant g_0$, $\tilde{f} \neq g_0$, segue que $g_0$ é o elemento maximal de $E$, um absurdo. Portanto, $\mathbb{Z}_{\geq 0}(\tilde{f}) = X$, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema de Hahn Banach para espaços vetoriais complexos, note que dado qualquer funcional linear $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, podemos escrever

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

onde $f_1(x)$ é a parte real e $f_2(x)$ é a parte imaginária e por definição $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$. Porém embora as aplicações $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ estejam definidas para todo o espaço $X$, só temos a garantia da linearidade quando restringimos a multiplicação por escalar no espaço $X$ no corpo dos reais, que denotaremos por $X_{\mathbb{R}}$, isto é, $f_1, f_2 : X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funcionais lineares. Isto significa que não necessariamente temos $f_1(ix) = i f_1(x)$.

**Teorema 5.2** (Hahn-Banach Generalizado). *Seja $X$ um espaço vetorial real ou complexo e considere $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação tal que*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X$$

*e para todo escalar $\alpha$ temos*

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x).$$

*Além disso, seja $f$ um funcional linear definido no subespaço $M \subset X$ de modo que*

$$|f(x)| \leqslant p(x), \ \forall x \in M.$$

*Então, existe uma extensão linear $\tilde{f}$ e $f$ definida em $X$ tal que*

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \ \forall x \in X.$$

*Demonstração.* Se $X$ é um espaço vetorial real, uma vez que

$$f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x), \ \forall x \in M,$$

segue do Teorema 5.1 que existe uma extensão linear $\tilde{f}$ de $f$ definida em $X$ tal que

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x), \ \forall x \in X.$$

Além disso, temos

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leqslant p(-x) = |-1| p(x) = p(x),$$

ou seja

$$-p(x) \leqslant \tilde{f}(x), \ \forall x \in X.$$

Logo,

$$-p(x) \leqslant \tilde{f}(x) \leqslant p(x) \Longrightarrow |\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \ \forall x \in X.$$

Se $X$ for um espaço vetorial complexo, então $f$ é da forma

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \ \forall x \in M,$$

onde $f_1, f_2 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são funcionais lineares reais, pois para $x, y \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f(x) + \lambda f(y) \\ &= [f_1(x) + i f_2(x)] + \lambda [f_1(y) + i f_2(y)] \\ &= [f_1(x) + i f_2(x)] + \lambda [f_1(y) + i f_2(y)] \\ &= [f_1(x) + \lambda f_1(y)] + i [f_2(x) + \lambda f_2(y)] \end{aligned}$$

e como

$$f(x+\lambda y) = f_1(x+\lambda y) + if_2(x+\lambda y),$$

vem que

$$f_1(x+\lambda y) = f_1(x) + \lambda f_1(y) \quad \text{e} \quad f_2(x+\lambda y) = f_2(x) + \lambda f_2(y),$$

ou seja, $f_1, f_2 : M_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funcionais lineares. Deste modo, $f_1$ é um funcional linear tal que

$$f_1(x) \leqslant |f_1(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant p(x), \ \forall x \in M_{\mathbb{R}}.$$

Segue do Teorema 5.1 que existe um funcional linear real $\tilde{f}_1$ que é uma extensão de $f_1$ a $X_{\mathbb{R}}$ e com

$$\tilde{f}_1(x) \leqslant p(x), \ \forall x \in X_{\mathbb{R}}.$$

Além disso, pela linearidade de $f$, temos

$$i(f_1(x) + if_2(x)) = if_1(x) - f_2(x) = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix),$$

ou seja,

$$f_1(ix) = -f_2(x), \ \forall x \in M,$$

isto é,

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \ \forall x \in M.$$

Logo, defina em $X$ a aplicação $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(x)$. Note que $\tilde{f}$ é uma extensão de $f$, pois como $\tilde{f}_1$ é uma extensão de $f_1$, para $x \in M$ temos

$$\tilde{f}_1(x) = f_1(x) \quad \text{e} \quad \tilde{f}_1(ix) = f_1(ix) = -f_2(x),$$

ou seja,

$$\tilde{f}(x) = f_1(x) + if_2(x) = f(x).$$

Agora, vamos mostrar que $\tilde{f}$ é um funcional linear em $X$ considerando o corpo dos complexos. Com efeito, dados $x, y \in X$, segue da linearidade de $\tilde{f}_1$ que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x+y) &= \tilde{f}_1(x+y) - if_1(x+y) \\
&= [\tilde{f}_1(x) - if_1(x)] + [f_1(y) - if_1(y)] \\
&= \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y),
\end{aligned}$$

além disso, para $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda\tilde{f}(x) &= \lambda\tilde{f}_1(x) - i\lambda\tilde{f}_1(x)\\
&= (a+ib)\tilde{f}_1(x) - i(a+ib)\tilde{f}_1(ix)\\
&= a\tilde{f}_1(x) + ib\tilde{f}_1(x) - ia\tilde{f}_1(ix) + b\tilde{f}_1(ix)\\
&= \tilde{f}_1(ax) + i\tilde{f}_1(bx) - i\tilde{f}_1(aix) + \tilde{f}_1(bix)\\
&= \tilde{f}_1((a+ib)x) - i\tilde{f}_1((ai-b)x)\\
&= \tilde{f}_1((a+ib)x) - i\tilde{f}_1((a+ib)ix)\\
&= \tilde{f}_1(\lambda x) - i\tilde{f}_1(\lambda ix)\\
&= \tilde{f}(x).
\end{aligned}$$

Agora, queremos mostrar que $|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x)$, para todo $x \in X$. Para isso, note que se $\tilde{f}(x) = 0$, então a desigualdade é imediata. Caso $\tilde{f}(x) \neq 0$, então podemos escrever

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|e^{i\theta} \Longrightarrow |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}(e^{-i\theta}x).$$

Como $|\tilde{f}(x)|$ é um número real, segue que

$$\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x),$$

além disso, usando o fato de que

$$\tilde{f}_1(x) \leqslant p(x),\ \forall x \in X,$$

temos

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

Portanto, para todo $x \in X$, temos

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x),$$

o que prova o teorema. □

**Teorema 5.3** (Hahn-Banach para Espaços Normados)**.** *Seja $X$ um espaço normado e considere $f$ um funcional linear limitado definido no subespaço $M \subset X$. Então, existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ definido em $X$ que é uma extensão de $f$ de modo que*

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_M.$$

*Demonstração.* Se $M = \{0\}$, então $f = 0$ e basta considerar $\tilde{f} = 0$. Suponha que $M \neq \{0\}$. Uma vez que

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_M \|x\|, \ \forall x \in M,$$

considere $p : X \longrightarrow \mathbb{K}$ de modo que

$$p(x) = \|f\|_M \|x\|, \ \forall x \in X.$$

Note que dados $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|f\|_M \|x+y\| \\ &\leqslant \|f\|_M (\|x\| + \|y\|) \\ &= \|f\|_M \|x\| + \|f\|_M \|y\| \\ &= p(x) + p(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= \|f\|_M \|\alpha x\| \\ &= |\alpha| \|f\|_M \|x\| \\ &= |\alpha| p(x), \end{aligned}$$

de modo que

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_M \|x\| = p(x), \ \forall x \in M.$$

Logo, segue do Teorema 5.2 que existe uma extensão linear $\tilde{f}$ de $f$ definida em $X$ de modo que

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \ \forall x \in X.$$

Afim de provar a igualdade entre as normas, note que como $\tilde{f}$ é uma extensão de $f$, é claro que $\|f\|_M \leqslant \|\tilde{f}\|_X$. Além disso,

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x) = \|f\|_M \|x\|, \ \forall x \in X,$$

deste modo, para $\|x\| = 0$, temos

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant \|f\|_M, \ \forall x \in X, \ \|x\| \neq 0,$$

isto é,

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |\tilde{f}(x)| = \|\tilde{f}\|_X \leqslant \|f\|_M,$$

ou seja, $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_M$, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

**Teorema 5.4.** *Seja $X$ um espaço vetorial normado e $x_0 \neq 0$ um elemento qualquer de $X$. Então, existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ definido em $X$ de modo que*

$$\|\tilde{f}\| = 1 \quad e \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

*Demonstração.* Considere $M \subset X$ um subespaço vetorial de modo que $M = [x_0]$, isto é, se $x \in M$, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $x = \alpha x_0$. Assim, em $M$ defina a aplicação

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|, \ \forall x \in M$$

que é linear, pois para $y = \beta x_0 \in M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= f(\lambda \alpha x_0 + \beta x_0) \\ &= f((\lambda \alpha + \beta) x_0) \\ &= (\lambda \alpha + \beta)\|x_0\| \\ &= \lambda \alpha \|x_0\| + \beta \|x_0\| \\ &= \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Além disso, note que $f$ é limitado e uma vez que

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|, \ \forall x \in M$$

considerando o supremo quando $\|x\| = 1$, temos que $\|f\| = 1$. Logo, segue do Teorema 5.3 que existe uma extensão $\tilde{f}$ de $f$ definida em $X$ de modo que

$$\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1.$$

Como $x_0 \in M$, é claro que

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|,$$

de onde segue o desejado. □

Vejamos uma consequência direta deste teorema. Para isso, usaremos o fato de que $X'$ é o dual de um espaço normado $X$, formado por todos os funcionais lineares limitados definidos em $X$.

**Corolário 5.1.** *Para todo $x$ em um espaço normado $X$, temos*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

*Em particular, se* $x_0 \in X$ *é tal que* $f(x_0) = 0$ *para todo* $f \in X'$*, então* $x_0 = 0$.

*Demonstração.* Se $x = 0$, então a igualdade é imediata. Suponha que $x \neq 0$. Considerando $\tilde{f}$ definida como no Teorema 5.4, segue que $\tilde{f}(x) = x$ e $\|f\| = 1$, então

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqslant \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|f\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|.$$

Além disso, é claro que para qualquer $f \in X'$ temos

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \|x\|,$$

em particular, se $f \neq 0$, segue que

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqslant \|x\|.$$

Logo,

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}, \ \forall x \in X.$$

Em particular, se $x_0 \in X$ é tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X'$, então

$$\|x_0\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = 0,$$

oque só ocorre caso $x_0 = 0$. □

**Teorema 5.5** (Hahn-Banach para Espaços com Produto Interno)**.** *Seja* $M$ *um subespaço de um espaço de Hilbert* $H$ *e considere* $f$ *um funcional linear limitado definido em* $M$*. Então, existe um funcional linear limitado* $\tilde{f}$ *que é uma extensão de* $f$ *ao espaço* $H$ *de modo que*

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.4 que existe uma extensão $g : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{K}$ de $f$ tal que

$$\|g\| = \|f\|.$$

Como $\overline{M}$ é fechado, segue do Teorema 2.4 que $\overline{M}$ também é completo e, portanto, é um espaço de Hilbert. Uma vez que $g$ é limitado, segue do Teorema de Riesz que existe $z \in \overline{M}$ tal que

$$g(x) = \langle x, z \rangle, \ \forall x \in \overline{M},$$

com $\|g\| = \|z\|$. Porém, como o produto interno está definido para todo espaço de Hilbert $H$, existe uma extensão $\tilde{f} : H \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\tilde{f}(x) = \langle x, z \rangle, \ \forall x \in H,$$

onde $\|\tilde{f}\| = \|z\|$.

Logo, $\tilde{f}$ é uma extensão de $f$ definida em $H$ tal que

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

$\square$

## 5.3 Aplicação

Finalmente, de posse das três versões do Teorema de Hahn-Banach, utilizaremos a versão deste teorema para espaços normados, em particular para espaços de Banach, para demonstrar uma de suas aplicações na teoria de semigrupos.

Para tanto, sendo $X$ um espaço de Banach e dado $f \in X'$ e $x \in X$, denotaremos por $\langle f, x \rangle_{X,X'} = f(x)$ a dualidade entre o par $X$ e $X'$.

**Teorema 5.6.** *Seja $X$ um espaço de Banach. Para todo $x_0 \in X$ fixado, existe $f_0 \in X'$ tal que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad e \quad \langle f_0, x_0 \rangle_{X,X'} = \|x_0\|^2$$

*Demonstração.* Note que caso $x_0 = 0$, basta considerar $f_0 = 0 \in X'$. Caso $x_0 \neq 0$, segue do Teorema 5.4 que existe um funcional $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ tal que $\|\tilde{f}\| = 1$ e $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$. Deste modo, basta considerar

$$\begin{aligned} f_0 : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto f_0(x) = \|x_0\|\tilde{f}(x). \end{aligned}$$

De modo que como $\tilde{f} \in X'$ que é um espaço vetorial, temos que $f_0 \in X'$. Além disso, é claro que

$$\|f_0\| = \|\tilde{f}\|\|x_0\| = \|x_0\| \quad \text{e} \quad \langle f_0, x_0 \rangle_{X,X'} = f_0(x_0) = \|x_0\|\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|^2,$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Agora, considere o conjunto

$$F(x) = \{f \in X' : \|f\| = \|x\| \ \text{ e } \ \langle f, x \rangle_{X,X'} = \|x\|^2\},$$

note que pelo Teorema 5.6, temos que $F(x) \neq \varnothing$ e $F(x)$ está definido para todo $x \in X$. Embora um $x \in X$ possa estar relacionada a mais de um funcional do dual, o conjunto $F(x)$ é conhecido como aplicação dualidade. Deste modo, a fim de que $F$ seja de fato uma aplicação, é necessário fazer mais algumas restrições em seu domínio $X$, como por exemplo garantir que ele seja um espaço de Hilbert.

Este conjunto é fundamental para o desenvolvimento da teoria de semigrupos, sendo parte inicial da teoria, constituindo a prova de resultados como o Teorema de Lummer-Phillips que estuda operadores dissipativos, de modo que garantir que este conjunto é de suma importância para o desenvolvimento desta teoria. Em geral, embora abstrata, a teoria de semigrupos é aplicada principalmente no estudo de Equações Diferenciais Parciais, sendo uma importante ferramente para provar existência, unicidade e estabilidade de soluções.

# 6 Conclusão

Ao longo desta iniciação científica foi possível estudar e compreender conceitos que generalizam alguns aspectos vistos na graduação como em Cálculo Avançado, Espaços Métricos e Álgebra Linear, pois os conceitos vistos neste trabalho são mais gerais, envolvendo espaços mais abstratos e de dimensão infinita. Deste modo, foi possível estudar tópicos que são característicos da pós-graduação, além da possibilidade de ter um primeiro contato com a teoria de semigrupos que é fundamental para o estudo de Equações Diferenciais Parciais.

# Referências Bibliográficas

[1] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.

[2] Coelho F. U; Lourenço M. L. *Um curso de Álgebra Linear*, Edusp, 2018.

[3] Cavalcanti M. M. et al. *Introdução à Análise Funcional*, Eduem, 2011.

[4] Brezis H. *Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[5] Domingues H. H. , *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, Atual Editora, 1982.

[6] Lima E. L. *Espaços métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, 2013. (Projeto Euclides).

[7] Lima E. L. *Curso de análise*, v.1, IMPA, Rio de Janeiro, 2019. (Projeto Euclides).

# SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS


Luana Ayumi Tamura
*Estudante*

Prof. Dr. José Henrique Rodrigues
*Orientador(a)*



## RESUMO

O presente projeto de iniciação científica tem como objetivo estudar as sequências de números reais, apresentando os conceitos e resultados, explorando aspectos mais gerais e fazendo as demonstrações.


**Palavras-chave:** Números Reais, Sequências, Critério de Cauchy, Convergência, Bolzano-Weierstrass.



## ABSTRACT

The objetive of this project is to study sequences of real numbers, presenting the mais concepts and results and exploring their general aspects and demonstrations.


**Keywords:** Real numbers, sequences, Cauchy criteria, convergence, Bolzano-Weierstrass.

# 1 Introdução

A teoria de sequências de números reais é tido como uma ferramenta essencial para o estudo da Análise Real, disciplina esta comumente ofertada aos alunos dos anos mais avançados do curso de bacharelado em Matemática. Neste, são apresentados ao aluno o rigos e precisão na escrita e argumentação matemática, habilidades estas que são imprescindíveis ao matemático.

# 2 Resultados e Discussão

Nesta seção, iremos apresentas os tópicos discutidos durante os encontros, bem como a teoria e resultados estudados ao longo do período que compreende o projeto. Durante estes encontros, foram realizados exposições no quadro negro e discussões dos assuntos abordados.

## 2.1 Corpos

Iniciamos os trabalhos com o conceito algébrico de *corpo*. Para o que segue nesta seção, denotaremos $\mathbb{K}$ um conjunto qualquer não vazio.

**Definição 2.1.** Diremos que $\mathbb{K}$ é um **corpo** se estão bem definidas duas operações, a dizer

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto +(x, y) = x + y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \cdot(x, y) = x \cdot y \end{aligned}$$

chamadas, respectivamente, **adição** e **multiplicação**, e que satisfazem os seguintes axiomas

**A.** *Axiomas da Adição:*

**A1.** Associatividade: Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se $(x + y) + x = x + (y + z)$;

**A2.** Comutatividade: Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{K}$, tem-se $x + y = y + x$;

**A3.** Elemento Neutro Aditivo: Existe o elemento 0 que chamaremos de zero, onde $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, para qualquer $x \in \mathbb{K}$;

**A4.** Inverso Aditivo: Para todo elemento $x \in \mathbb{K}$, existe um inverso $-x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$.

**M.** *Axiomas da Multiplicação*:

**M1.** Associatividade: Dados $x, y, z \in \mathbb{K}$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

**M2.** Comutatividade: Sejam $x, y \in \mathbb{K}$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$;

**M3.** Elemento Neutro da Multiplicação: Existe o elemento 1 que chamaremos de um, onde $1 \in \mathbb{K}$, tal que $x \cdot 1 = x$, para qualquer $x \in \mathbb{K}$;

**M4.** Inverso Multiplicativo: Todo $x \neq 0$ e $x \in \mathbb{K}$, possui um inverso $x^{-1}$, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

**D.** *Axioma da Distribuição*

**D1.** Dados $x, y$ e $z$ quaisquer em $\mathbb{K}$, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Diversas propriedades decorrem dos axiomas apresentados na Definição 2.1 acima, vejamos abaixo algumas destas propriedades.

**Proposição 2.1** (Unicidade do Elemento Neutro)**.** *Os elementos neutros aditivo e multiplicativo são únicos, isto é, são válida:*

**i.** *Se $y \in \mathbb{K}$ é tal que $x + y = x$, para qualquer $x \in \mathbb{K}$, então $y = 0$;*

**ii.** *Se $y \in \mathbb{K}$ é tal que $x \cdot y = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$, então $y = 1$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar inicialmente $(i)$. Sejam $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = x$ para qualquer $x \in \mathbb{K}$. Usando as propriedades da adição, temos:

$$y \overset{[A_3]}{=} y + 0 \overset{[A_4]}{=} y + (x + (-x)) \overset{[A_1]}{=} (y + x) + (-x) \overset{[A_2]}{=} (x + y) + (-x) \overset{[Hip]}{=} x + (-x) \overset{[A_4]}{=} 0,$$

ou seja, $y = 0$, como queríamos mostrar.

De maneira análoga, vamos mostrar $(ii)$. Seja $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = 1$, para todo $x \in \mathbb{K}$. Usando as propriedades da multiplicação, se $x \neq 0$, temos:

$$y \overset{[M_3]}{=} y \cdot 1 \overset{[M_4]}{=} y \cdot (x \cdot x^{-1}) \overset{[M_1]}{=} (y \cdot x)(x^{-1}) \overset{[Hip]}{=} x \cdot x^{-1} \overset{[M_4]}{=} 1,$$

ou seja, $y = 1$, como queríamos mostrar. $\square$

O próximo resultado mostra que os elementos inversos (aditivo e multiplicativo, este último quando existe) são únicos.

**Proposição 2.2** (Unicidade do Elemento Inverso)**.** *Os elementos inversos aditivo e multiplicativo, quando existem, são únicos, isto é, são válidas as seguintes afirmações:*

**i.** *Se $y \in \mathbb{K}$ é tal que, para algum $x \in \mathbb{K}$ tem-se $x + y = 0$, então $y = -x$;*

**ii.** *Se $y \in \mathbb{K}$ é tal que, para algum $x \in \mathbb{K}$ com $x \neq 0$, tem-se $x \cdot y = 1$, então $y = x^{-1}$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar $(i)$. Seja $x \in \mathbb{K}$ tal que, para algum $x \in \mathbb{K}$ tem-se $x + y = 0$. Usando as propriedades da adição e a hipótese, temos:

$$y \overset{[A_3]}{=} y+0 \overset{[A_4]}{=} y+(x+(-x)) \overset{[A_1]}{=} (y+x)+(-x) \overset{[A_2]}{=} (x+y)+(-x) \overset{[Hip]}{=} 0+(-x) \overset{[A_3]}{=} (-x),$$

ou seja, $y = -x$, o que prova o desejado.

De maneira análoga, vamos mostrar $(ii)$. Seja $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = 1$, para algum $x \in \mathbb{K}$, com $x \neq 0$. Então, usando as propriedades da multiplicação e a hipótese, temos:

$$y = \overset{[M_3]}{=} y \cdot 1 \overset{[M_4]}{=} y \cdot (x \cdot x^{-1}) \overset{[M_1]}{=} (y \cdot x) \cdot (x^{-1}) \overset{[Hip]}{=} 1 \cdot x^{-1} \overset{[M_3]}{=} x^{-1},$$

ou seja, $y = x^{-1}$ como queríamos mostrar. □

Outra propriedade bastante importante que mostraremos a seguir é conhecida como ”Lei do Corte".

**Proposição 2.3** (Lei do Corte)**.** *São válidas as seguintes afirmações:*

*i. Se $x, y, z \in \mathbb{K}$ são tais que $x + z = y + z$, então $x = y$;*

*ii. Se $x, y, z \in \mathbb{K}$ são tais que $x \cdot z = y \cdot z$, com $y \neq 0$, então $x = y$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar inicialmente $(i)$. Sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$ tais que $x+z = y+z$. Usando as propriedades da adição e a hipótese, temos:

$$x \overset{[A_3]}{=} x + 0 \overset{[A_4]}{=} x + (z + (-z)) \overset{[A_1]}{=} (x + z) + (-z)$$

e da hipótese segue que

$$x = (y + z) + (-z) \overset{[A_1]}{=} y + (z + (-z)) \overset{[A_4]}{=} y + 0 \overset{[A_3]}{=} y,$$

ou seja, $x = y$, como queríamos mostrar.

De maneira análoga, vamos mostrar $(ii)$. Sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$ tais que $x \cdot z = y \cdot z$, com $z \neq 0$. Usando as propriedades da multiplicação, temos:

$$x \overset{[M_3]}{=} x \cdot 1 \overset{[M_4]}{=} x \cdot (z \cdot z^{-1}) \overset{[M_1]}{=} (x \cdot z) \cdot z^{-1}$$

e da hipótese segue que

$$x = (y \cdot z) \cdot z^{-1} \overset{[M_1]}{=} y \cdot (z \cdot (z^{-1})) \overset{[M_4]}{=} y \cdot 1 \overset{[M_3]}{=} y,$$

ou seja, $x = y$, como queríamos mostrar. □

A unicidade do elemento inverso, em ambas as operações, nos permite definir novas operações, a dizer, as operações de *subtração* e *divisão*

**Definição 2.2.** Sejam $x, y \in \mathbb{K}$. A soma $x + (-y)$ será indicada com a notação $x - y$ e chamada de *diferença* entre $x$ e $y$. Fica então bem definida a operação

$$(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto x - y \in \mathbb{K},$$

chamada **subtração**.

**Definição 2.3.** Sejam $x, y \in \mathbb{K}$, com $y \neq 0$. A multiplicação $x \cdot y^{-1}$ será indicada com a notação $\frac{x}{y}$ e chamada de *divisão* de $x$ por $y$. Fica então bem definida a operação

$$(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \mapsto \frac{x}{y} \in \mathbb{K}$$

chamada **divisão**, onde $\mathbb{K}^*$ denota o conjunto $\mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Concluímos assim que as regras usuais relativas à adição e subtração decorrem dos quatro axiomas da adição, e são válidas em qualquer corpo.

*Observação* 2.1. Usando a propriedade comutativa da adição e da multiplicação, a propriedade distributiva $D_1$ fornece então

$$x \cdot (y + z) = (y + z) \cdot x, \quad \text{para quaisquer } x, y, z \in \mathbb{K}.$$

Uma das mais importantes propriedades dos corpos é descrita na proposição seguinte.

**Proposição 2.4.** *Sejam $x, y \in \mathbb{K}$ tais que $x \cdot y = 0$. Então $x = 0$ ou $y = 0$.*

*Demonstração.* Se $x = 0$, nada temos a provar. Suponha então que $x \neq 0$. Logo, existe $x^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$. Daí, usando as propriedades da multiplicação, temos

$$y = y \cdot 1 = y \cdot (x \cdot x^{-1}) = (y \cdot x) \cdot x^{-1} = (x \cdot y) \cdot x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0,$$

ou seja, $y = 0$, provando o desejado. $\square$

Vejamos a seguir alguns exemplos de corpos.

*Exemplo* 2.1. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos *números racionais* é o conjuntos das frações obtidas através dos números inteiros. Em notação de conjunto, temos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Em $\mathbb{Q}$, então definidas as operações de adição e multiplicação como seguem:

$$\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{p\cdot q'+p'\cdot q}{q\cdot q'} \quad \text{e} \quad \frac{p}{q}\cdot\frac{p'}{q'}=\frac{p\cdot p'}{q\cdot q'}, \quad \text{para quaisquer } \frac{p}{q},\frac{p'}{q'}\in\mathbb{Q}.$$

Lembremos que a igualdade de números racionais pode ser verificada através da seguinte propriedade:

$$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}\Leftrightarrow p\cdot q'=p'\cdot q.$$

Note ainda que o elemento neutro aditivo 0 é $\frac{0}{q}\in\mathbb{Q}$, onde $q\neq 0$ é qualquer, enquanto que o elemento neutro multiplicativo é $1=\frac{1}{1}$. A boa definição do elemento neutro aditivo se deve a propriedade de igualdade, descrita antes. Temos que o inverso aditivo de $\frac{p}{q}$ é $-\frac{p}{q}$, pois $\frac{p}{q}+\left(-\frac{p}{q}\right)=0$. O inverso multiplicativo do número racional $\frac{p}{q}$ é $\frac{q}{p}$, desde que $p,q\neq 0$.

*Exemplo* 2.2. O corpo $\mathbb{Z}_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$, formado apenas por dois elementos distintos $\overline{0}$ e $\overline{1}$, é obtido a partir de $\mathbb{Z}$ considerando as classes de equivalência obtidas através da relação de divisão por 2. Em $\mathbb{Z}_2$, então bem definidas as operações

$$\overline{0}+\overline{1}=\overline{1}+\overline{0}=\overline{1},\ \ \overline{0}+\overline{0}=\overline{1}+\overline{1}=\overline{0},\ \ \overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0} \quad \text{e} \quad \overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}.$$

Aqui, os elementos inversos são eles próprios.

*Exemplo* 2.3. O conjunto $\mathbb{Q}(t)$, das funções racionais $r(t)=\frac{p(t)}{q(t)}$, onde $p$ e $q$ são polinômios de coeficientes racionais, sendo $q(t)$ não nulo. Se $u(t)$ é também não nulo, tem-se

$$\frac{p(t)}{q(t)}=\frac{p(t)\cdot u(t)}{q(t)\cdot u(t)}.$$

A operação de multiplicação nos permite definir a seguinte operação de *potenciação*: dados $x\in\mathbb{K}$ e $n\in\mathbb{N}$, temos

$$x^n:=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{-vezes}}.$$

Em particular, para $n=2$, temos $x^2=x\cdot x$, para qualquer $x\in\mathbb{K}$.

*Observação* 2.2. Note que no corpo $\mathbb{K}$ é válida a seguinte propriedade: sejam $a,b\in\mathbb{K}$, então pela distributividade é válido que

$$(a+b)\cdot(a-b)=a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a+b\cdot(-b)=a^2-b^2\Rightarrow(a+b)\cdot(a-b)=a^2+b^2,$$

ou seja, $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$, que é conhecida como fórmula para *diferença de quadrados*.

Ainda para o caso $n=2$, em especial, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.5.** *Dados $x,y\in\mathbb{K}$ tais que $x^2=y^2$, tem-se $x=y$ ou $x=-y$.*

*Demonstração.* Com efeito, basta observar que, utilizando a diferença de quadrados e a Proposição 2.4, tem-se

$$x^2 + y^2 \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x+y)(x-y) = 0 \Longleftrightarrow x = -y \text{ ou } x = y,$$

donde segue o afirmado. □

# 3 Corpos Ordenados

Lembramos que nosso objetivo neste capítulo é estudar as propriedades dos corpos, tendo em vista sempre o corpo dos números reais como protótipo. Assim sendo, iremos estudar nesta seção a propriedade de ordenação

**Definição 3.1.** Diremos que um corpo $\mathbb{K}$ é *ordenado* se existe um subconjunto $P \subset \mathbb{K}$ tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

**P1.** A soma e o produto de elementos positivos são positivos, ou seja, se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$;

**P2.** Dado $x \in \mathbb{K}$, uma e somente uma das três alternativas ocorre: $x = 0$ ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

O conjunto $P$ é chamado conjunto dos elementos *positivos* de $\mathbb{K}$. Nesse caso, esta bem definido o conjunto

$$-P = \{-x;\ x \in P\},$$

chamado de *conjunto dos elementos negativos* de $\mathbb{K}$.

Não é difícil ver que

$$\mathbb{K} = P \cup (-P) \cup \{0\}.$$

**Proposição 3.1.** *Em um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é valido que se $a \in \mathbb{K}$ e $a \neq 0$, então $a^2 \in P$.*

*Demonstração.* Seja $a \in \mathbb{K}$ tal que $a \neq 0$. Então, pela definição de corpo ordenado, mais especificamente (P2), devemos ter $a \in P$ ou $-a \in P$. Se $a \in P$, então $a^2 = a \cdot a \in P$, o que prova o desejado. Por outro lado, se $-a \in P$, então $a^2 = (-a) \cdot (-a) \in P$, o que também prova o desejado. Em todo caso, a afirmação é válida, o que conclui a demonstração. □

Vejamos alguns exemplos.

*Exemplo* 3.1. Note que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, pois existe o conjunto $P$ dado por

$$P = \left\{ \frac{p}{q} :\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ p \cdot q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nesse caso, temos $-P = \left\{\frac{p}{q};\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ -(p\cdot q) \in \mathbb{N}\right\}$.

*Exemplo* 3.2. O corpo $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ (definido no Exemplo 2.2), por outro lado, não pode ser ordenado. De fato, suponha que existe $P \subset \mathbb{Z}_2$ um conjunto de elementos positivos. Note que, neste caso, temos $\overline{1} \in P$, pois $\overline{1} \neq \overline{0}$, por outro lado, temos $\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$, o que contradiz o fato de $P$ não ser fechado para a adição. Portanto, $\mathbb{Z}_2$ não pode ser ordenado.

**Definição 3.2.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $x, y \in \mathbb{K}$. Diremos que $x$ é menos que $y$, e escreveremos $x < y$ quando $y - x \in P$, ou seja, existe $z \in P$ tal que $y = x + z$. Ainda neste caso, diremos também que $y$ é maior que $x$, e escrevemos $y > x$.

Para o que segue nesta seção, denotaremos por $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e por $P$ o respectivo conjunto dos elementos positivos.

*Observação* 3.1. Não é difícil ver que $x > 0$ significa que $x \in P$, isto é, que $x$ é positivo. Enquanto $x < 0$ quer dizer que $-x \in P$, isto é, que $x$ é negativo.

Utilizando a notação introduzida acima temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.2.** *Se $x \in P$ e $y \in -P$, tem-se sempre $x > y$.*

*Demonstração.* Sejam $x \in P$ e $y \in -P$. Então pela Definição 3.1 temos que $x \in P$ e $-y \in P$. Pela propriedade (P1), temos $x + (-y) \in P$. Ponto $z = x + (-y)$, temos que $z \in P$. Disto segue que

$$y + z = y + (x + (-y)) = (y + (-y)) + x = 0 + x = x,$$

ou seja, $y + z = x$ com $z \in P$. Logo, pela Definição 3.2 temos $x > y$. □

Tendo em vista o estuda de relações, não é difícil ver que, no corpo ordenado $\mathbb{K}$, fica bem definida a seguinte relação: $x < y$ se, e somente se, $y - x \in P$. Além disso, esta é uma relação de ordem total em $\mathbb{K}$. Vejamos a seguir mais algumas propriedades.

**Proposição 3.3.** *A relação $x < y$ num corpo ordenado $\mathbb{K}$ é de ordem total, isto é, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

**O1.** *Transitividade: se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;*

**O2.** *Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{K}$, ocorre exatamente uma das alternativas seguintes: ou $x = y$, ou $x < y$, ou $x > y$;*

**O3.** *Monotonicidade da adição: se $x < y$, então para todo $z \in P$, tem-se $x + z < y + z$;*

**O4.** *Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$, então para todo $z \in P$, tem-se $x \cdot z < y \cdot z$.*

*Demonstração.* Provaremos as quatro propriedades acima.
Prova de O1. Por hipótese, temos que $x < y$ e $y < z$. Logo, $y - x \in P$ e $z - y \in P$. Usando a propriedade (P1) vem que

$$(y-x),(z-y) \in P \Longrightarrow (y-x)+(z-y) \in P \Longrightarrow (z-x)+(y-y) \in P \Longrightarrow (z-x) \in P.$$

Desta forma, como $(z - x) \in P$, segue que $x < z$ como queríamos provar.
Prova de O2. Sejam $x, y \in \mathbb{K}$ e defini $z = x - y$. Então pela propriedade (P2) na Definição 3.1, tem-se que ou $z = 0$, ou $z \in P$, ou $-z \in P$. Suponha inicialmente que $z = 0$. Então $x - y = 0$, onde segue que $x = y$. Suponha que $z \in P$. Então $x - y \in P$, donde segue que $x > y$. Por fim, suponha que $-z \in P$. Então temos $-(x - y) \in P$, donde segue que $y - x \in P$, ou seja, $y > x$. Em qualquer dos casos, temos o desejado.
Prova de O3. Sejam $x, y \in \mathbb{K}$ tais que $x < y$, ou seja, $y - x \in P$. Seja $z \in \mathbb{K}$. Note que

$$y - x = y - x + 0 = y - x + (z + (-z)) = (y + z) - (x + z). \tag{11.1}$$

Como $(y - x) \in P$, segue de (11.1) que $(y + z) - (x + z) \in P$. Logo, pela Definição 3.1 temos $x + z < y + z$, provando o desejado.
Prova de O4. Sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$, tais que $x < y$ e $z \in P$. Como $x < y$, pela Definição 3.1 temos $x < y$, ou seja, $y - x \in P$. Daí, temos $z \cdot (y - x) \in P$, o que implica que $z \cdot y - z \cdot x \in P$. Desta última, segue da Definição 3.2 que $z \cdot y > z \cdot x$, provando o desejado. $\square$

*Observação* 3.2. Convém notar que, num corpo ordenado $\mathbb{K}$, temos que $x < y$ é equivalente a $-y < -x$. Com efeito, basta multiplicar ambos os membros de qualquer uma destas igualdades por $-1$.

Vejamos algumas consequências da Proposição 3.3

**Corolário 3.1.** *Nas condições da Proposição 3.3, temos que se $x < y$ e $x' < y'$, então $x + x' < y + y'$.*

*Demonstração.* Sejam $x, y, x', y' \in \mathbb{K}$ tais que $x < y$ e $x' < y'$. Pela propriedade (O3) temos que $x < y$ implica que $x + x' < y + x'$ e, da mesma forma, $x' < y'$ implica que $y + x' < y' + y$. Logo, da propriedade (O1) concluímos que $x + x' < y' + y$. $\square$

**Corolário 3.2.** *Nas condições da Proposição 3.3 temos que, se $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$, então $x \cdot x' < y \cdot y'$.*

*Demonstração.* Sejam $x, y, x', y' \in \mathbb{K}$ tais que $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$. Como $x, y > 0$ e $x', y' > 0$, segue da propriedade (O4) que, se $x < y$ então $x \cdot x' < y \cdot x'$ e, da mesma forma, $x' < y'$ implica que $x' \cdot y < y' \cdot y$. Por fim, pela propriedade (O1) vem que, se $x < y$ e $x' < y'$ então $x \cdot x' < y \cdot y'$. $\square$

O próximo resultado nos diz que a multiplicação por um elemento negativo altera o sinal da igualdade.

**Proposição 3.4.** *Em um corpo ordenado $\mathbb{K}$ temos que, se $z < 0$ e $x < y$ então $x \cdot z > y \cdot z$.*

*Demonstração.* Sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$ tais que $x < y$ e $z < 0$. Como $z < 0$, temos que $-z \in P$, e pela parte já provada, vem que $x \cdot (-z) < y \cdot (-z)$. Pela Definição 3.2 temos que $(y \cdot (-z)) - (x \cdot (-z)) \in P$. Por outro lado,

$$(y \cdot (-z)) - (x \cdot (-z)) = -y \cdot z + x \cdot z = -(y \cdot z - x \cdot z).$$

Logo, $-(y \cdot z - x \cdot z) \in P$. Novamente, pela Definição 3.2 vem que $y \cdot z - x \cdot z < 0$, ou seja, $y \cdot z < x \cdot z$. $\square$

O próximo resultado é conhecida como "regra do sinal"para a multiplicação.

**Proposição 3.5.** *Em um corpo ordenado $\mathbb{K}$, o produto de elementos de sinais contrários resulta em um elemento negativo, ou seja, se $x, y \in \mathbb{K}$ são tais que $x > 0$ e $y < 0$, então $x \cdot y < 0$.*

*Demonstração.* Dados $x, y \in \mathbb{K}$ tais que $x, (-y) \in P$, temos pela Definição 3.1 que $x \cdot (-y) \in P$. Por outro lado, temos $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. Logo, $-(x \cdot y) \in P$ e, por conseguinte, $x \cdot y < 0$. $\square$

Perceba que, se $x \in \mathbb{K}$ e $x \neq 0$, então $x \cdot x^{-1} = 1$. Por outro lado, como $1 > 0$ segue que se $x > 0$ então $x^{-1} > 0$. Assim, o inverso de $x^{-1}$ de $x$ é um elemento positivo é positivo. Em particular, segue que se $x > 0$ e $y > 0$, então $\frac{x}{y} > 0$.

**Proposição 3.6.** *Sejam $x, y \in \mathbb{K}$ tais que $0 < x < y$. Então, $x^{-1} > y^{-1}$.*

*Demonstração.* Sejam $x, y \in \mathbb{K}$ como no enunciado. Como $x < y$, segue do observado antes e da Proposição 3.3 que

$$x < y \Longrightarrow x \cdot x^{-1} < y \cdot x^{-1} \Longrightarrow 1 < y \cdot x^{-1}.$$

Novamente, utilizando a Proposição 3.3 e multiplicando por $y^{-1}$ temos

$$y < y^{-1} \cdot y \cdot x^{-1} \Longrightarrow y^{-1} < x^{-1},$$

o que prova o desejado. $\square$

**Definição 3.3.** Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, escreveremos $x \leq y$ para significar que $x < y$ ou $x = y$ e, neste caso, lê-se: $x$ é menor ou igual a $y$.

Note que por definição, como $x < y$ ou $x = y$, temos que $y - x \in P \cup \{0\}$, onde $P$ é o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{K}$. Chamaremos os elementos de $P \cup \{0\}$ de não negativos e caracterizaremos como $x \geq 0$, com $x \in P \cup \{0\}$.

**Proposição 3.7.** *Dados $x, y \in \mathbb{K}$, tem-se $x = y$ se, e somente se, $x \leq y$ e $y \leq x$.*

*Demonstração.* A ida dessa demonstração é trivial. Provaremos somente a volta: Por hipótese temos que $x \leq y$ e $y \leq x$. Por definição, segue que $x < y$ ou $x = y$ e $x > y$ ou $x = y$. Então, devemos ter $x = y$. □

*Observação* 3.3. Veja que $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{K}$, pois a igualdade $x = x$ é sempre verdadeira.

As propriedades (O1), (O3) e (O4) são também válidas para a relação $x \leq y$. Neste caso, a propriedade de Tricotomia (O2) é substituída pelas propriedades:

Reflexividade: para todo $x \in \mathbb{K}$, temos $x \leq x$;

Antissimetria: $\forall x, y \in \mathbb{K}$, temos $x = y$ se, e somente se, $x \leq y$ e $y \leq x$.

Em um corpo ordenado $\mathbb{K}$ como $1_{\mathbb{K}} > 0$, temos

$$1_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} < \dots.$$

Logo, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto& f(n) = \underbrace{1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + ... + 1_{\mathbb{K}}}_{\text{n-vezes}}. \end{aligned}$$

*Observação* 3.4. Não é difícil ver que $f(1) = 1$ e $f(n) = f(n-1) + 1_{\mathbb{K}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$.

A fórmula acima permite mostrar, sem muita dificuldade que $f$ é injetora. Com efeito, basta observar que, se $f(n) - f(n-1) = 1_{\mathbb{K}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então pela relação definida acima, temos que $f(n) > f(n-1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De maneira geral, temos $f(m) > n$, sempre que $m > n$.

Outra importante propriedade de $f$ é que $f(m+n) = f(m) + f(n)$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Com efeito, note inicialmente que $f(m+1) = f(m) + 1_{\mathbb{K}}$, para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Agora dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(m+n) = f((m+n-1)+1) = f(m+n-1) + 1_{\mathbb{K}}.$$

Prosseguindo com o raciocínio, teremos

$$f(m+n) = f(m+1-(1+...+1)) + 1_{\mathbb{K}} + ... + 1_{\mathbb{K}} = f(m) + f(n).$$

Sendo $f$ injetora e satisfazendo a propriedade referente a adição, concluímos que $f$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ e $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}'$. Costuma-se identificar $\mathbb{N}'$ com $\mathbb{N}$ e considerar os números naturais contidos em $\mathbb{K}$. Temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$, e voltamos a escrever 1, em vez que $1_{\mathbb{K}}$.

De maneira semelhante, podemos definir a função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\to \mathbb{K} \\ n \mapsto g(n) &= \begin{cases} f(n), & n \in \mathbb{N} \\ -f(n), & -n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Com esta função, e tendo em vista o conjunto $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$, definimos a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Q} &\to \mathbb{K} \\ \frac{p}{q} \mapsto h\left(\frac{p}{q}\right) &= g(p) \cdot (g(q))^{-1} = \frac{g(p)}{g(q)}. \end{aligned}$$

De maneira semelhante, pode-se mostrar que as funções $g$ e $h$ tem as mesmas propriedades já listadas para $f$ e, além disso, $h$ e $g$ satisfazem a seguinte propriedade para a multiplicação:

$$g(n \cdot m) = g(n) \cdot g(m) \quad \text{e} \quad h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y).$$

Logo, denotando $\mathbb{Z}' = g(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{K}$ e $\mathbb{Q}' = h(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{K}$, temos a seguinte cadeira de inclusões:

$$\mathbb{N}' \subset \mathbb{Z}' \subset \mathbb{Q}' \subset \mathbb{K}.$$

O conjunto $\mathbb{Q}'$ é, portanto, um subcorpo de $\mathbb{K}$. Fazendo as devidas identificações, para o que segue nestas notas, os conjunto $\mathbb{N}'$, $\mathbb{Z}'$ e $\mathbb{Q}'$ serão substituídos pelos conjuntos tradicionais $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, e serão vistos como subconjuntos de $\mathbb{K}$.

Concluímos esta seção com um importante e conhecido resultado.

**Proposição 3.8** (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, então vale $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.*

*Demonstração.* Demonstraremos utilizando o Princípio da Indução Finita. Primeiro, observe que a desigualdade é válida para $n = 1$. Com efeito, basta ver que $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$. Supondo agora que a desigualdade é válida para $n \geq 1$, isto é $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$, vamos mostrar a desigualdade para $n+1$. Usando a hipótese de indução, temos

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \geq (1+x)\cdot(1+n\cdot x) = 1+nx^2+(1+n)x.$$

Como $nx^2 \geq 0$, segue que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, o que prova a afirmação para $n+1$ e, consequentemente, conclui a demonstração. □

## 3.1 Boa Ordenação

A fim de obter as principais propriedades dos corpos e tendo em vista o corpo dos números reais, iremos destacar aqui alguns conceitos e resultado decorrentes da relação de ordem obtida na seção anterior.

**Definição 3.4.** Seja $X$ um subconjunto de um corpo ordenado $\mathbb{K}$. Diremos que um elementos $a \in X$ é *elemento maximal* (respectivamente *minimal*) de $X$ se, para todo $x \in X$, tem-se $x \leq a$ (respectivamente $a \leq x$.)

*Exemplo* 3.3. O conjunto $\mathbb{N}$ em um corpo qualquer $\mathbb{K}$ admite elemento minimal pois $1 \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Em contrapartida, o conjunto $\mathbb{Z}$ de um corpo $\mathbb{K}$ não admite um elemento minimal.

**Definição 3.5.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Um subconjunto $X \subset \mathbb{K}$ é dito *limitado inferiormente* (respectivamente *limitado superiormente*) se existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$ (respectivamente existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$).

*Exemplo* 3.4. Considere o corpo ordenado $\mathbb{K}$ e seja $X \subset \mathbb{K}$ limitado inferiormente. Então, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Defina $A = \{x - a;\ x \in X\}$. Note que $A \subset \mathbb{N}$. Como todo subconjunto de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento, segue que $A$ possui um menor elemento, isto é, existe $n_0 \in A \subset \mathbb{N}$ tal que $n_0 \leq y$ para todo $y \in A$. Logo, existe $x_0 \in X$ tal que $n_0 = x_0 - a$ e satisfaz $x_0 - a \leq x - a$ para todo $x \in X$. Disto segue que $x_0 \leq x$ para todo $x \in X$, o que mostra que $X$ admite elemento minimal.

O exemplo anterior permite concluir que o corpo ordenado $\mathbb{K}$ tem a propriedade: todo subconjunto limitado inferiormente admite elemento minimal.

Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, existe a importante noção de intervalo. Dados $a, b \in \mathbb{K}$, com $a < b$, usaremos as notações abaixo:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{K};\ a \leq x \leq b\}$ $\qquad$ $(a,b) = \{x \in \mathbb{K};\ a < x < b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{K};\ a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{K};\ a < x \leq b\}$ $\qquad$ $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{K};\ x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{K};\ x < b\}$ $\qquad$ $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{K};\ a < x\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{K};\ a \leq x\}$ $\qquad$ $(-\infty, +\infty) = \mathbb{K}$.

Os quatro intervalos à esquerda, tem extremos $a$ e $b$, com intervalos limitados, ou seja, chamaremos $[a, b]$ de intervalo fechado, $[a, b)$ é fechado à esquerda, $(a, b]$ é fechado à direito, e $(a, b)$ é um intervalo aberto.

## 3.2 Números Reais

**Definição 3.6.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $X \subset \mathbb{K}$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{K}$ chama-se **supremo** do subconjunto $X$, quando $b$ é a *menor das cotas superiores* de $X$ em $\mathbb{K}$. Neste caso, escrevemos $\sup X = b$.

Para que $b \in \mathbb{K}$ seja supremo de um conjunto $X \subset \mathbb{K}$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

(S1) Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

(S2) Se $c \in \mathbb{K}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

A condição (S1) diz que $b$ é cota superior de $X$ e a condição (S2) afirma que qualquer outra cota superior de $X$ deve ser maior ou igual do que $b$.

A condição (S2) pode ser reescrita como:

(S2') Dado $c < b$ em $\mathbb{K}$, existe $x \in X$ tal que $c < x$.

Com efeito, a condição (S2') diz que nenhum elemento de $\mathbb{K}$, que seja inferior a $b$, pode ser cota superior de $X$.

**Proposição 3.9.** *Quando o supremo existe, ele é único.*

*Demonstração.* De fato, sejam dois elementos $b$ e $b'$ em $\mathbb{K}$, que satisfazem as condições (S1) e (S2), então devemos ter $b \leq b'$ e $b' \leq b$, ou seja, $b = b'$. $\square$

*Observação* 3.5. Se $X = \varnothing$, então todo $b \in \mathbb{K}$ é uma cota superior de $X$. Note que não existe menor elemento num corpo ordenado $\mathbb{K}$, então segue que o conjunto vazio não possui supremo em $\mathbb{K}$.

**Definição 3.7.** Um elemento $a \in \mathbb{K}$ chama-se **ínfimo** do subconjunto $Y \subset \mathbb{K}$, quando $a$ é a *maior das cotas inferiores* de $Y$ em $\mathbb{K}$. Escreveremos $\inf Y = a$ para indicá-lo.

Para que $a \in \mathbb{K}$ seja ínfimo de um conjunto $Y \subset \mathbb{K}$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas a condições abaixo:

(I1) Para todo $y \in Y$, tem-se $y \geq a$;

(I2) Se $c \in \mathbb{K}$ é tal que $c \leq y$ para todo $y \in Y$, então $c \leq a$.

A condição (I2) pode ser reescrita como

(I2') Dado $c \in \mathbb{K}$, com $a < c$, existe $y \in Y$ tal que $y < c$.

Com efeito, a condição (I2') diz que nenhum elementos de $\mathbb{K}$, que seja maior que $a$, não pode ser cota inferior de $Y$.

*Exemplo* 3.5. Seja $Y \subset \mathbb{Q}$ o conjunto das frações do tipo $\frac{1}{2^m}$, com $n \in \mathbb{N}$. Note que $\sup Y = \frac{1}{2}$, pois $\frac{1}{2} \in Y$ e $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$, para todo $n \geq 1$. Logo, $\frac{1}{2}$ é o supremo de $Y$.

Por outro lado, $0 < \frac{1}{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então 0 é cota inferior de $Y$ e, dado $c \in \mathbb{Q}$ tal que $c > 0$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 > \frac{1}{c}$, isto é, $n > \frac{1}{c} - 1$. Disto segue que $c > \frac{1}{n+1}$. Ainda pela desigualdade de Bernoulli, para todo $x \geq -1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Em particular, para $x = 1$ temos

$$(1+1)^n \geq 1 + n \Longleftrightarrow 2^n \geq n+1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Disto segue que $\frac{1}{2^n} < c<$ o que prova que 0 é o ínfimo de $Y$.

**Lema 11.1.** *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a* 2.

*Demonstração.* A demonstração será feita por absurdo. Suponha que $\sqrt{2}$ é racional, da forma $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, logo

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2.$$

Como $p^2 = 2 \cdot q^2$, então $p$ é par. Escrevendo $p = 2 \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos $p^2 = 2 \cdot q^2$ o que implica $(2 \cdot)^2 = 2 \cdot q^2$, ou seja, $4 \cdot k^2 = q^2$. Disto segue que $q$ é par. Como $p$ e $q$ são pares, então $\frac{p}{q}$ não está irredutível, logo chegamos em um absurdo, e assim $\sqrt{2}$ é irracional. Portanto, não existe um número racional cujo quadrado é seja igual a 2. □

*Exemplo* 3.6. Sejam $X = \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{Q};\ y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$. Temos que $X$ é um conjunto limitado, enquanto $Y$ é apenas limitado inferiormente. Além disso, as seguintes propriedades são válidas:
**(A)** O conjunto $X$ não tem elemento máximo. Com efeito, seja $x \in X$. Vamos mostrar que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x + r \in X$. Para isto, tome $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r < 1$ a ser determinado. Note que

$$(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot r + r^2 = x^2 + r(r + 2x).$$

Como $r < 1$ e $x \geq 0$, segue da Desigualdade de Bernoulli que

$$r + 2x < 1 + 2x \leq (1 + x)^2.$$

Daí, temos

$$(x + r)^2 < x^2 + r(1 + x)^2.$$

Escolhendo $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < 1$ satisfazendo $r < \frac{2-x^2}{(1+x)^2}$, concluímos que $(x + r)^2 < 2$ donde $x + r \in X$, como queríamos.

**(B)** $Y$ não possui elemento mínimo. Com efeito, seja $y \in Y$. Vamos mostrar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $y - r \in Y$. Para isto, tome $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r < 1$ a ser determinado. Note que

$$(y - r)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + r^2 > y^2 - 2 \cdot y \cdot r,$$

pois $r > 0$. Escolhendo $r \in \mathbb{Q}$ positivo tal que $r < \frac{y^2-2}{2y}$, segue que $(y - r)^2 > 2$, ou seja, $y - r \in Y$.

**(C)** Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$. Com efeito, dados $x \in X$ e $y \in Y$, temos $x^2 < 2 < y^2$. Disto segue que $0 < y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$. Como $x, y > 0$, segue que $y - x > 0$, ou seja, $y > x$.

Utilizando as propriedades **(A)**, **(B)** e **(C)**, temos o seguinte resultado.

**Lema 11.2.** *O conjunto $X$ não possui supremo em $\mathbb{Q}$ e $Y$ não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.*

*Demonstração.* Suponha que existe $a \in \mathbb{Q}$ $a = \sup X$. Neste caso, devemos ter $a > 0$ e $a^2 \geq 2$, pois caso $a^2 \leq 2$ implicaria $a \in X$, ou seja, $a$ seria o elemento máximo de $X$ o que não ocorre por **(A)**. Agora, se $a^2 > 2$ então $a \in Y$ e por **(B)**, como $Y$ não possui elemento mínimo, deve existe $b \in Y$ tal que $b < a$. Usando a propriedade **(C)**, concluímos que $x < b < a$, para todo $x \in X$, o que contradiz o fato de que $a = \sup X$. Assim, se existir $a = \sup X$ devemos ter $a^2 = 2$. Pelo Lema 11.1, nenhum número racional existe com essa propriedade. Concluímos que o conjunto $X$ não possui supremo em $\mathbb{Q}$. Um raciocínio análogo mostra que $Y$ não possui ínfimo, pelos mesmos argumentos. □

**Definição 3.8.** Um corpo $\mathbb{K}$ é chamado de arquimediano quando dados $a, b \in \mathbb{K}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$.

*Observação* 3.6. Um corpo $\mathbb{K}$ não é arquimediano se $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é um conjunto limitado superiormente. Com efeito, sabemos que existem $a, b \in \mathbb{K}$ com $a > 0$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $n \cdot a \leq b$. Se $0 < a < 1$, então $\frac{b}{a}$ é uma cota superior de $\mathbb{N}$. Caso $a > 1$, basta notar que $n < n \cdot a < b$. De qualquer modo, o conjunto $\mathbb{N}$ é limitado superiormente.

*Exemplo* 3.7. Vejamos um exemplo de conjunto limitado superiormente num corpo ordenado $\mathbb{K}$ que não possui supremo. Para isto, tomamos um corpo não arquimediano $\mathbb{K}$.

O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é limitado superiormente. Se $b \in \mathbb{K}$ é uma cota superior de $\mathbb{N}$, então $n + 1 \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e isto implca em $n \leq b - 1$. Como $b$ é cota superior de $\mathbb{N}$, então $b - 1$ também será. Note que $b - 1 < b$, então o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é limitado superiormente, mas não existe supremo de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$.

**Definição 3.9.** Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ chama-se *completo* quando todo subconjunto não vazio limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{K}$.

*Observação* 3.7. Não é difícil ver que, em um corpo ordenado completo, é válido que: todo conjunto não vazio e limitado inferiormente possui ínfimo.

*Observação* 3.8. Todo corpo ordenado completo é arquimediano.

Iremos considerar o seguinte axioma.

*Axioma* 3.1. Existe um corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, chamado de corpo dos números reais.

Em verdade, existem técnicas que nos permitem ”construir"o corpo dos números reais, como por exemplo os cortes de Dedekind. Entretanto, esta construção foge ao objetivo deste projeto.

Como mostrado anteriormente, $\sqrt{2}$ não é um número racional. O conjunto dos números reais que não são racionais, chamaremos de **números irracionais** e denotaremos como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Assim, $\sqrt{2}$ é um número irracional, ou seja, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Um raciocínio análogo ao utilizado no Exemplo 3.6 permite concluir que, dados $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um único número $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. Isto fornece a seguinte definição.

**Definição 3.10.** Dados $a > 0$ em $\mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, o número real $b > 0$ tal que $b^n = a$ chama-se raiz *n-ésima* de $a$ e é representada por $b = \sqrt[n]{a}$.

# 4 Sequências

Nesta seção iremos estudar o importante conceito de sequências de números reais.

**Definição 4.1.** Uma *sequência* de números reais é uma função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) = x_n \end{aligned}$$

que para cada $n \in \mathbb{N}$ associa $f(n) \in \mathbb{R}$. Denotaremos $f(n)$ como $x_n$ e o chamaremos de termo de ordem $n$, ou $n$-ésimo termo da sequência. O conjunto dos termos da sequência é representado por $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, enquanto a sequência será denotada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente $(x_n)$.

**Definição 4.2.** Uma sequência $(x_n)$ é dita *limitada superiormente* quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Definição 4.3.** Uma sequência $(x_n)$ é dita *limitada inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Definição 4.4.** Uma sequência $(x_n)$ é dita *limitada*, quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que uma sequência é limitada quando ela é limitada superiormente e inferiormente.

**Definição 4.5.** Uma sequência $(x_n)$ chama-se *crescente* quando $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, temos $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ . Se vale $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência é chamada de *não-decrescente.*

**Definição 4.6.** Uma sequência $(x_n)$ chama-se *decrescente* quando $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, temos $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$ . Se vale $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência é chamada de *não-crescente*

**Definição 4.7.** Sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes ou não-crescentes são chamadas de sequências *monótonas.*

Note que uma sequência não-decrescente é sempre limitada inferiormente pelo primeiro termo. Do mesmo modo, uma sequência não-crescente é sempre limitada superiormente.

*Exemplo* 4.1. Seja $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, a aplicação $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é a aplicação de inclusão. Neste caso, obtemos a sequência $(1, 2, 3, ..., n, ...)$ que é limitada inferiormente, ilimitada superiormente e monótona crescente.

*Exemplo* 4.2. Seja $x_n = \sqrt[n]{n}$. Note que $n > 0$, então se trata de uma sequência de números positivos, portanto ela é limitada inferiormente. Verificaremos se ela é limitada. Para isso, temos que

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} &\iff (\sqrt[n]{n})^{n^2+n} > (\sqrt[n+1]{n+1})^{n^2+n} \\ &\iff n^{n+1} > (n+1)^n \\ &\iff n^n \cdot n > (n+1)^n \end{aligned}$$
$$\iff n > \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Perceba que isso ocorre para todo $n \geq 3$, pois sabemos que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, seja qual for o $n \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência dada por $x_n = \sqrt[n]{n}$ é decrescente a partir do seu terceiro termo. Sendo assim, temos $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, isto é, ela cresce em seus três primeiro termos e depois decresce. Logo, a sequência $(\sqrt[n]{n})$ é limitada.

**Definição 4.8.** Seja $a \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ uma sequência de números reais. Diremos que $a$ é um limite para $(x_n)$ se vale:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Neste caso, diremos que $(x_n)$ é *convergente* e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ou ainda, $x_n \to a$. Por outro lado, diremos que $(x_n)$ é *divergente* se $(x_n)$ não possui limite.

Veremos a seguir que se uma sequência é convergente, então seu limite é único.

**Teorema 4.1** (Unicidade do Limite)**.** *Sejam $(x_n)$ uma sequência e $a, b \in \mathbb{R}$ limites de $(x_n)$, isto é, $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$. Então $a = b$.*

*Demonstração.* Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $x_n \to a$, segue que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tla que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da mesma forma, como $x_n \to b$, teremos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definindo $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, então temos

$$0 \leq |a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou sejam $0 \leq |a - b| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, pela arbitrariedade de $\varepsilon$, segue que $|a - b| = 0$, ou seja, $a = b$. $\square$

**Teorema 4.2.** *Toda sequência convergente é limitada.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência tal que $x_n \to a \in \mathbb{R}$. Tome $\varepsilon = 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $|x_n - a| < 1$. Logo,

$$|x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| < 1 + |a|,\ \forall n > n_0.$$

Seja $K = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|\}$, daí basta tomar $M = \max\{K, 1 + |a|\}$, de modo que $|x_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O que mostra que a sequência $(x_n)$ é limitada. $\square$

*Observação* 4.1. Note que uma sequência limitada não é necessariamente convergente. Basta considerar a sequência $(0, 1, 0, 1, ...)$ que é limitada e seus únicos candidatos a limite são 0 e 1.

Tome o intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, veja que semrpe existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quando $n$ for par. Analogamente, se prova para 1.

**Teorema 4.3.** *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

*Demonstração.* Seja uma sequência $(x_n)$ monótona crescente e limitada. Como $x_n$ é limitada, então ela é limitada superiormente e geque existe $a = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Vamos mostrar que $x_n \to a$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Temos que encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq a.$$

Como $a$ é o supremo e $a - \varepsilon < a$, devemos ter $a - \varepsilon < x_{n_0}$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Daí, como $x_n$ é monótona, temos

$$n > n_0 \Rightarrow x_n > x_{n_0} > a - \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de $\varepsilon$ e pela definição de convergência, segue que $x_n$ converge para $a$. De maneira análoga mostra-se que $(x_n)$ é convergente para os demais casos. □

**Teorema 4.4.** *Seja $x_n \to 0$ e $y_n$ limitada, então temos que $x_n \cdot y_n \to 0$.*

*Demonstração.* Sabemos que $(y_n)$ é limitada, então existe $M > 0$ tal que $|y_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, por definição, dado $\varepsilon > 0$,existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| = |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Veja que

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí, temos que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n| \leq |x_n| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Portanto, concluímos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que vale $|x_n \cdot y_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$, ou seja, $x_n \cdot y_n \to 0$. □

**Teorema 4.5.** *Sejam $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, então $\lim z_n = a$.*

*Demonstração.* Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{e} \quad n > n_2 \Rightarrow y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Considere $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então:

$$n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon.$$

Logo, para $n > n_0$, temos $z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e portanto $\lim z_n = a$. □

**Definição 4.9.** Uma subsequência de $(x_n)$ é a restrição desta a um subconjunto $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito e ordenado, digamos $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ...\}$.

**Teorema 4.6.** *Se* $\lim x_n = a$*, então toda a subsequência de* $(x_n)$ *converge para o limite* $a$*.*

*Demonstração.* Seja $(x_{n_j})$ uma subsequência de $(x_n)$, onde $n_j \in \mathbb{N}'$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $|x_n - a| < \varepsilon$. Note que temos infinitos elementos da subsequência, então existe entre eles um $n_{j0} > n_0$. Então,

$$n_j > n_{j_0} \Rightarrow n_j > n_0 \Rightarrow |x_{n_j} - a| < \varepsilon.$$

Logo, $x_{n_j} \to a$. □

*Observação* 4.2. Para concluir que $(x_n)$ não converge para $a$, deve-se encontrar duas subsequências que convergem para pontos diferentes. E para concluir que $(x_n)$ não converge para nenhum lugar, basta mostrar que uma subsequência não converge.

**Teorema 4.7.** *A fim de que* $a \in \mathbb{R}$ *seja limite de uma sequência* $(x_n)$*, é necessário e suficiente que* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ *contenha uma infinita quantidade de termos de* $x_n$*, para todo* $\varepsilon > 0$*.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Suponha que $a$ é limite de uma subsequência de $(x_n)$. Então, existe $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ tal que $(x_{n_j})$ converge para $a$, onde $n_i \in \mathbb{N}'$. Daí,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists i_0 \in \mathbb{N};\ i > i_0 |x_{n_i} - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x_{n_i} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Logo, $\{x_{n_i}\} \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
($\Leftarrow$) Por hipótese, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\mathbb{N}_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N};\ x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}$ é infinito. Assim, note que

- $\varepsilon = 1 \Rightarrow \mathbb{N}_1$ é infinito. seja $n_1 \in \mathbb{N}_1$. Ainda temos

$$x_{n_1} \in (a - 1, a + 1) \Leftrightarrow |x_{n_1} - a| < 1.$$

- $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{N}_2$ é infinito. Seja $n_2 \in \mathbb{N}_2$ tal que $n_2 > n_1$. Ainda temos que

$$x_{n_2} \in \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow |x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}.$$

Obtemos assim um conjunto $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_i} - a| < \frac{1}{i}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Daí, para todo $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, donde

$$i > i_0 \Rightarrow n_i > n_{i_0} \Rightarrow |x_{n_i} - a < \frac{1}{i} < \frac{1}{i_0} < \varepsilon.$$

Logo, $x_{n_i} \to a$. $\square$

**Teorema 4.8** (Bolzana-Weirstrass)**.** *Toda sequência limita em* $\mathbb{R}$ *admite uma subsequência convergente.*

*Demonstração.* Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}$ limitada, então existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ou seja, $\{x_n\} \subset [a, b]$. Seja $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito e considere

$$A = \{t \in \mathbb{R};\ t < x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}'\}.$$

Veja que $A \neq \varnothing$, pois $-M \in A$. Mostraremos que $A$ é limitado superiormente por $M$. Com efeito, se $t > M$, então $t > x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, um absurdo.

Então, existe $c = \sup A$. Por definição de supremo, temos

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t \in A;\ c - \varepsilon < t \leq c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathbb{N}' \subset \mathbb{N};\ c - \varepsilon < x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}',$$

onde $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito. Por outro lado, uma vez que $c < c+\varepsilon$, então $c+\varepsilon \notin A$. Logo, por definição de $A$, vem que $c + \varepsilon \leq x_n$, para no máximo uma quantidade finita de índices de $\mathbb{N}$.

Logo, temos $c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon$ para um quantidade infinita de índices de $\mathbb{N}$. $\square$

**Definição 4.10** (Sequência de Cauchy)**.** Dizemos que uma sequência $(x_n)$ de números reais é de Cauchy se satisfaz:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

**Teorema 4.9.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy, então para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1.$$

Em particular, para $m = n_0 + 1$ e $n > n_0 + 1$, temos

$$|x_{n_0+1} - x_n| < 1 \Rightarrow |x_n| - |x_{n_0+1}| < 1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_{n_0+1}.$$

Daí tomando $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}, 1 + |x_{n_0+1}\}$, temos que $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que mostra que a sequência é limitada. $\square$

**Teorema 4.10.** *Toda sequência convergente em $\mathbb{R}$ é de Cauchy.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência convergente, isto é, $x_n \to a$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para $m, n > n_0$, temos

$$|x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto mostra que $(x_n)$ é de Cauchy. □

**Teorema 4.11.** *Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy, então segue do Teorema 4.9 que $(x_n)$ é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstass, $(x_n)$ admite uma subsequência convergente, ou seja, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to a$, para $n \in \mathbb{N}'$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado, como $(x_n)$ é de Cauchy, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, sabemos que $x_n \to a$, com $n \in \mathbb{N}'$. Logo, pela definição de convergência, temos que existe $n_2 \in \mathbb{N}'$ tal que

$$m \in \mathbb{N}',\ m > n_2 \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Contudo, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que para $m, n > n_0$

$$|x_n - a| = |x_n - x_m + x_m - a| \leq |x_n - x_m| + |x_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que mostra que $x_n \to a$, com $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(x_n)$ é convergente. □

# 5 Conclusão

Concluímos que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ trata-se de um objeto matemático com propriedades gerais que podem ser evidenciadas em outros conjuntos, tais com oa existência de elementos maximais e também a completude. Além disso, serve de base como ferramenta para tratar outros tipos de conjuntos, como pro exemplo espaços vetoriais.

# Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L. *Curso de análise Vol. 1*, Rio de Janeiro: IMPA - Projeto Euclides, 2006.

[2] LIMA, E. L. *Análise Real Vol. 1*, Rio de Janeiro: IMPA - Coleção Matemática Universitária, 2017.

# ANÁLISE DOS DADOS DA COVID-19 NO PARANÁ

Vitor Pereira Matias
*Estudante*

Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo
*Orientador(a)*

## RESUMO

O presente trabalho analisa as bases de dados disponibilizadas pela Secretaria Estadual de Saúde do Estado do Paraná. Compara três diferentes bases disponibilizadas, entre ela foram encontrada discordâncias, valores computados em atraso, altos picos e baixos vales são ocorrências comuns. Também é possível ver alguns padrões que se repetem pelo mundo, como a maior taxa de fatalidade entre homens do que mulheres. Tempos virais, como o tempo entre o início de sintomas e o diagnóstico. Em sumo, é possível concluir que a base de dados foi amadurecendo conforme o tempo e hoje em dia se encontrar um estado bem maior e mais sólida.
**Palavras-chave:** COVID-19; Londrina-PR; Estatística; Ciência de Dados; Períodos Virais.

## ABSTRACT

The present work analises the datasets made available by the Secretaria Estadual de Saúde do Estado do Paraná. We compare three of the datasets where we could find discrepancies, delayed entries, high peaks and low valleys are common occurrences. It's also possible to see patterns that are found throughout the world like the bigger fatality rate between mens. Viral periods, like the time between the first symptoms and the diagnostic. Overall it's possible to conclude that the dataset has matured over time e nowadays it's encountered in a bigger and more solid state.
**Keywords:** COVID-19; Londrina-PR; Statistics; Datacience; Viral Periods.

# 1 Introdução

A Pandemia da Covid-19 provocada pelo vírus SARS-COV-2 que teve inicio em Wuhan na China no final de dezembro de 2019 rapidamente chegou a Europa[1]. Logo após, chegou ao Brasil que teve seu primeiro caso confirmado em 26 de fevereiro de 2020[2], desde então a Pandemia se espalhou pelo mundo, realmente sendo caracterizada como um pandemia somente em 11 de março de 2020[3].

Uma pandemia trás diversos desafios para os governos federais, estaduais e municipais, tendo em vista que as ordens e posicionamentos governamentais a respeito da pandemia vão afetar milhões de pessoas. Com isso em mente, houve uma busca por dados, indicadores e fatores para visualizar como a pandemia estava se comportando para assim, os governos ou entidades privadas terem melhores embasamentos para estipular decretos municipais, estaduais e federais.

## 1.1 Base de Dados

Essa busca por dados sobre os pacientes testados, infectados, vacinados, mortos e outros, gerou grandes bases de dados tanto em âmbitos municipais, estaduais e federais. Estascontém informações pessoais como o Cadastro de Pessoa Física (CPF) que não são divulgadas e também possui informações biológicas importantes como idade, sexo e outras. Algumas também possuem informações geográficas como o bairro, cidade de residencia. Além dessas, também possuem os dados do paciente sobre a doença, como data de infecção, óbito, vacinas e as vezes recuperação.

Consequentemente as bases de dados vieram se atualizando e crescendo, por exemplo na página referente a Covid-19 da Secretaria Estadual de Saúde do Paraná[4], existe uma base de dados que possuí todos os casos desde o primeiro caso confirmado no Estado em 12 de março de 2020[5] até o dia que ela é atualizada.

Esses dados em geral podem ser todos correlacionados entre si para melhor visualização de como a pandemia está ocorrendo, com isso os governantes, entidades públicas e privadas conseguem melhores informações a respeito da pandemia é isso pode levar a atitudes mais embasadas.

Os dados normalmente são guardados em bases de dados computadorizadas que utilizam linguagens como `SQL` e derivados ou `Python`[6] com a biblioteca `Pandas`[7] ou outras. Assim pode-se também utilizar diversos programas computacionais para visualizar os dados, como algumas bibliotecas do `Python` ou o `RStudio` que conseguem gerar gráficos intuitivos.

### 1.2 Utilização dos dados

Os dados podem ser utilizados por entidades públicas e privadas para estudarem as diversas estatísticas e dinâmicas por detrás do vírus. Assim, conseguem estipular melhores ordens executivas a respeito da pandemia. Nesse estudo, os dados foram visualizados a partir de gráficos gerados no `Python`, com uma forma de comparar as bases de dados do início da Pandemia em março de 2020, até outubro de 2021.

Além disso é possível aplicá-los a modelos epidemiológicos de estudo de tendências de novos casos, como o modelo SIR e derivados dele. Como um exemplo, o modelo SEIR foi utilizado no nosso trabalho que foi recentemente publicado para estudo de tendência de infectados na cidade de Londrina no estado do Paraná[8].

## 2 Metodologia

Utilizando a linguagem de programação `Python` e as bibliotecas `NumPy`[9] e Pandas para análise do banco de dados e `matplotlib`[10] para visualização gráfica, é possível extrair os dados que a Secretaria Estadual de Saúde do Paraná disponibilizou em uma página especifica da COVID-19. Os dados eram salvos em formato `csv` que pode ser facilmente lido pelo comando `read_csv` da biblioteca Pandas.

Assim as análises foram feitas com base na base de dados obtida de cada dia, sendo que, por exemplo, a base de dados do dia 10 de outubro de 2021 é referente a todos os casos que existiram até esse dia. Todas as análises são feitas com a base de dados integra. Porém algumas alterações estruturais são necessárias.

### 2.1 Alterações estruturais

Quando uma base de dados em formato `csv` é baixada, ela não possui nenhuma classificação do tipo de objeto que cada coluna possui. O tipo de objeto (se é inteiro, float, datetime64, entre outros) de cada coluna é importante na hora de utilizar comandos do `Python`, principalmente na formatação das datas.

Em algumas bases, foi necessário mudar o formato das datas para o formato internacional além disso é necessário também mudar o tipo de objeto das datas, isso se deve ao fato de que o `Python` possui comando que fazem cálculos, como subtração de datas, que necessitam do tipo de objeto `datetime64` ou outros similares.

### 2.2 Como os dados foram grafados

Para gerar os gráficos de sexo dos infectados, sexo dos mortos, grupos de idade, número de atendimentos e residentes por municípios, foram necessários códigos específicos.

Já nos gráficos com respeito as datas de incio de sintomas, diagnósticos, confirmações, mortes, recuperações foi utilizado um código só para todos. Esses códigos estão presentes no Apêndice 7

### 2.3 Origem dos dados

Foram utilizadas três bases de dados – obtidas e disponibilizadas diariamente na pagina da Secretaria Estadual de Saúde do Estado do Paraná[4] – uma do dia 25 de julho de 2020 outra do dia 4 de abril de 2021 e outra do dia 18 de outubro de 2021. Isso se deve ao fato de que em 25 de julho foi o primeiro dia que a secretaria de saúde disponibilizou a base de dados intitulada como “geral” que contém todos os casos do paraná descritos individualmente.

A escolha da base de dados de abril e de outubro vem em conjunto com a análise dos dados, já que em abril tínhamos pouquíssimos dados de recuperados que depois foram inseridos em agosto de 2021, isso é um assunto que será tratado na seção de resultados.

Utilizando essas bases de dados vamos analisá-las para assim comparar a estrutura da base, os dados e os gráficos gerados a partir de algumas colunas.

## 3 Resultados

Nas próximas seções vamos compartilhar três bases de dados. Sobre as colunas vamos dispor possíveis significados que são tomados com base no nome da coluna.

### 3.1 Base de dados do dia 25 de julho de 2020

É a primeira base de dados que de maneira geral, possuí informações sobre todos os infectados do estado do Paraná.

#### Estrutura de dados

Possui 65 593 entradas[1] cada uma com as seguintes colunas de informações.

- IBGE_RES_PR;

  É o código IBGE (composto de 7 dígitos, sendo os dois primeiros referentes ao código da Unidade da Federação[11]) da cidade de onde a pessoa reside.

- IBGE_ATEND_PR;

  É o código IBGE de onde fez o atendimento.

[1] Uma entrada de um coluna é o valor de uma linha, quando dizemos novas entradas é quando esse valor passou de nulo para alguma coisa.

- Sexo;

  É separado por masculino (M) e feminino (F).

- idade_original;

  Idade da pessoa em anos, com uma inconcistência estrutural. Possuí valor do tipo inteiro e do tipo texto. Por exemplo, existem pacientes que tem a idade declarada como 10 dias, provavelmente é uma criança, ou um erro.

- Mun_Resid;

  É o nome da cidade, por completo, de onde a pessoa reside.

- Mun_atend;

  É o nome da cidade, por completo, de onde foi atendida

- Laboratorio;

  Apresenta informações sobre testes e sobre laboratórios, ela possuí 74 valores diferentes, sendo alguns deles e seus números de repetições em parêntesis mostrados abaixo.
  IBMP(35506)
  LACEN (4633) One Step COVID-2019 Test (3105)
  Por exemplo, para o teste de anticorpos IgG[12] temos 6 entradas diferentes.

- Dt_diag (DD);

  É a data que a pessoa teve seu diagnóstico.

- dt_notificacao;

  Não há informações.

- dt_inicio_sintomas (DIS);

  É a data que começaram os sintomas do paciente.

- Obito;

  Separada em três valores, Não(31644), SIM(833) e Sim(820), com uma clara inconsistência entre os SIM e Sim.

- Dt_obito (DO);

  É o dia que pessoa veio a óbito.

- DT_ATUALIZACAO;

  Não há informações.

- Fonte;

  Fonte dos dados.

- STATUS;

  Possuí dois valores Recuperado(605392) e recuperado(2), outra inconsistência.

## 3.2 Base de dados do dia 4 de abril de 2021

Em comparação com a base de dados anterior, Algumas mudanças ocorreram em algumas colunas além disso foi adicionada uma nova coluna. Isso mostra a evolução e solidificação ao decorrer do tempo.

### Estrutura de dados

Possui 858 988 entradas cada uma com as seguintes colunas de informações.

- SEXO;

  Mudança do nome da coluna para letras maiúsculas.

- IDADE_ORIGINAL;

  Mudança do nome da coluna para letras maiúsculas. Além disso os pacientes que tinham a idade declarada em dias foram atualizados, já que estas não existem mais.

- MUN_RESIDENCIA;

  Mudança do nome da coluna.

- MUN_ATENDIMENTO;

  Mudança do nome da coluna.

- LABORATORIO;

  Mudança do nome da coluna para letras maiúsculas.

- DATA_DIAGNOSTICO (DD);

  Mudança do nome da coluna.

- DATA_CONFIRMACAO_DIVULGACAO (DCD);

  Não há informações, seguindo uma sequência lógica, provavelmente é a data que o diagnóstico foi confirmado.

- DATA_INICIO_SINTOMAS (DIS);

  Mudança do nome da coluna.

- OBITO;

  Mudança do nome da coluna para letras maiúsculas.

- DATA_OBITO (DO);

  É o dia que pessoa veio a óbito.

- DATA_OBITO_DIVULGACAO (DOD);

  Não há informações, seguindo uma sequência lógica, provavelmente é a data de divulgação do dia que pessoa veio a óbito.

- DATA_RECUPERADO_DIVULGACAO (DR);

  É uma coluna **nova** e é a data de recuperação do paciente.

- FONTE_DADO_RECUPERADO.

  É uma coluna **nova** e é a fonte dos dados de recuperado.

## 3.3 Base de dados do dia 18 de outubro de 2021

Agora vamos utilizar a base de dados de 18 de outubro de 2021.

Em comparação com a base de dados de quatro de março de 2021, vemos uma nova coluna "UF_RESIDENCIA" e várias outras tiveram sua estrutura reformulada que serão descritas a baixo.

### Estrutura de dados

Possuí 1 536 788 entradas.

- UF_RESIDENCIA;

  É uma coluna **nova** e é a unidade federativa de onde o paciente reside. Possui 6130 entradas de residentes de fora do estado do Paraná.

- LABORATORIO;

Os valores agora são numéricos.

- ORIGEM_NOTIFICACAO.

  Mudança de nome de "FONTE_DADO_RECUPERADO".

Além dessas alterações, as colunas que apresentavam valores de datas, agora, estão no formato ano(quatro dígitos)-mês(dois dígitos)-dia(dois dígitos).

## 3.4 Análise dos dados

Para as bases de dados 3.1 e 3.2 todas as colunas que possuem datas estão no formato dia(dd)/ mês(mm) / ano(aaaa), isso impossibilita a ordenação da base inteira por datas, comparando com o formato ideal ano(aaaa)-mês(mm)-dia(dd), por exemplo, temos, ordenando da data menos recente para a mais recente:

| | |
|---|---|
| 01/01/2020 | 2020-01-01 |
| 01/01/2021 | 2020-01-02 |
| 01/02/2020 | 2020-02-01 |
| 02/01/2020 | 2021-01-01 |

Isso se deve ao fato de que a ordenação acontece da esquerda para a direita, por isso todas as datas devem ser colocadas no formato ideal. Isso é feito, pela própria secretaria, na base de dados 3.3, ou seja, lá todas as colunas que possuem datas estão no formato AAAA-MM-DD.

**Sexo, idade, cidade de residência e atendimento** Utilizando a base de dados do dia 18 de outubro de 2021, temos aproximadamente 6,26% a mais de mulheres infectadas em relação aos homens, um numero maior que a diferença do censo de 2010[13] de cerca de 1,7% , gráfico 12.1.

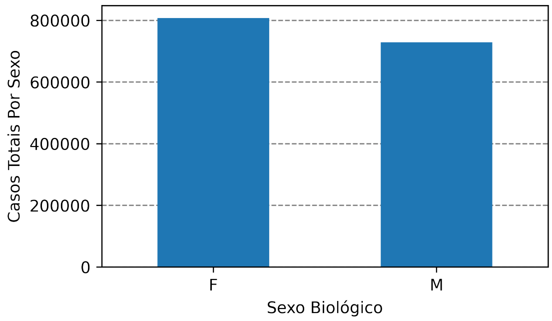



Figura 12.1: Casos totais por sexo biológico.

Porém se olharmos para o sexo em comparação com as mortes, temos uma diferença de aproximadamente 15,62% a mais de homens vindo a óbito. Um número bem alto se levarmos em consideração os 1,7% a mais de mulheres residentes no Paraná e os 6,26% a mais de mulheres infectadas no Paraná, gráfico 12.2.

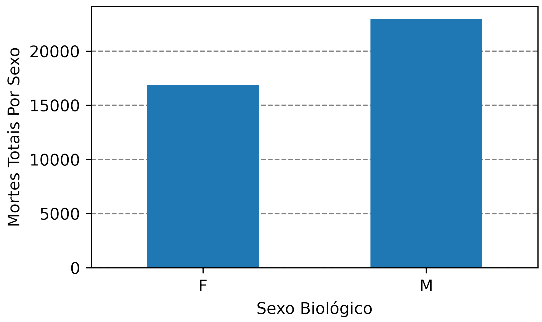



Figura 12.2: Mortes totais por sexo biológico.

Já no quesito idade, observando o gráfico 12.3 temos como grande maioria infectada a faixa etária de 19 até 49 anos.

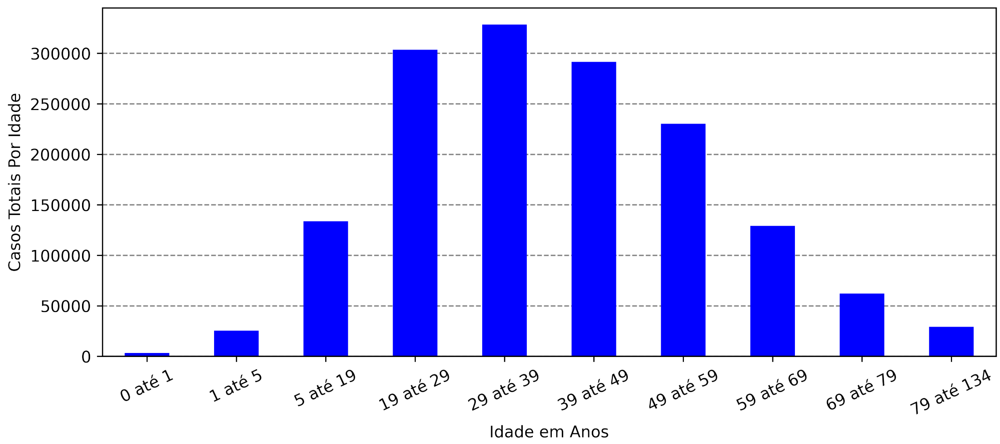



Figura 12.3: Casos totais por idade em anos.

A coluna de residencia e local de atendimento, mostra um pouco sobre a movimentação do vírus no estado com um total de **116303** pessoas sendo atendidas em um município e residindo em outro. gráfico 12.4.

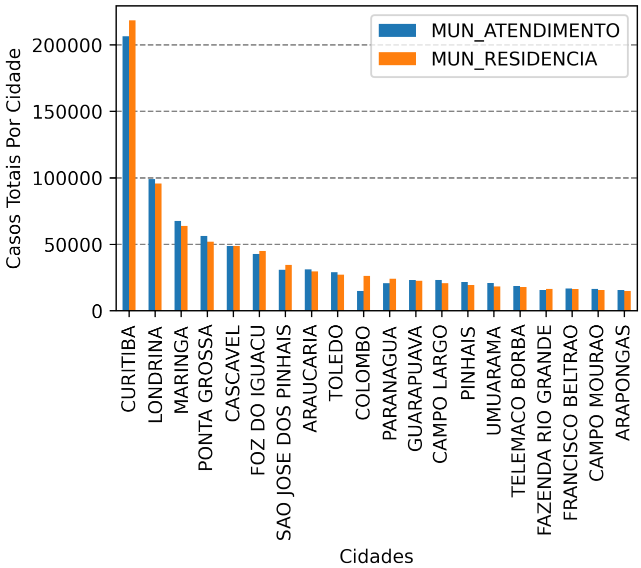



Figura 12.4: Casos totais por cidade.

**Datas** Em todas as bases de dados pode-se notar que cada linha da base dados corresponde a um infectado, pois todas as linhas tem a coluna DD preenchida. Vamos agora analisar as correspondências entre todas as colunas que possuem datas, sendo elas: DD; DIS; DO; DOD; DR veja a página 585 para mais detalhes. Primeiramente iremos analisar os dados do mês de abril.

### Análise gráfica de abril

Vamos utilizar a base de dados 3.2 para criar os gráficos 12.5, 12.6, 12.7 e 12.8. Sendo assim, grafando as colunas DD, DCD, DIS e DR por total de novas entradas por dia temos os gráficos abaixo.

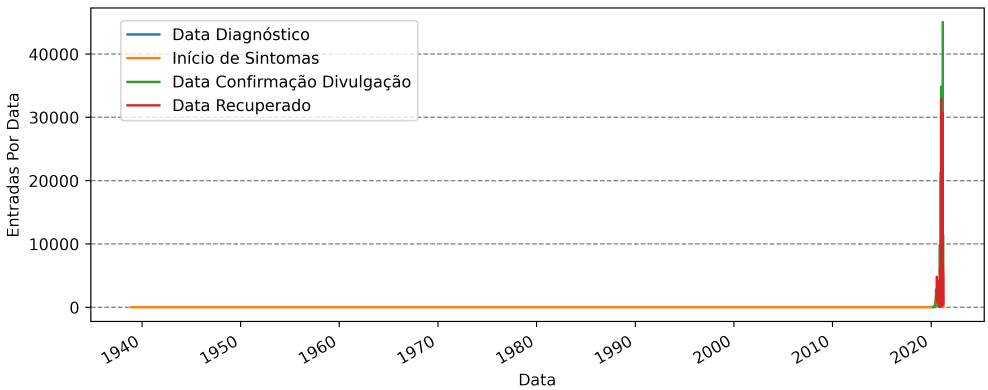



Figura 12.5: Entradas por data.

Conseguimos notar que existem pessoas que tiveram o início de sintomas na década de 30, e um pico de confirmação e de recuperados que chega em 40 mil. Contando o número de pessoas que tiveram o início de sintomas antes do dia 12 de abril de 2020 – dia do primeiro confirmado no paraná[5] – temos 938 pessoas. Ao retirar essas obtemos o gráfico 12.6.

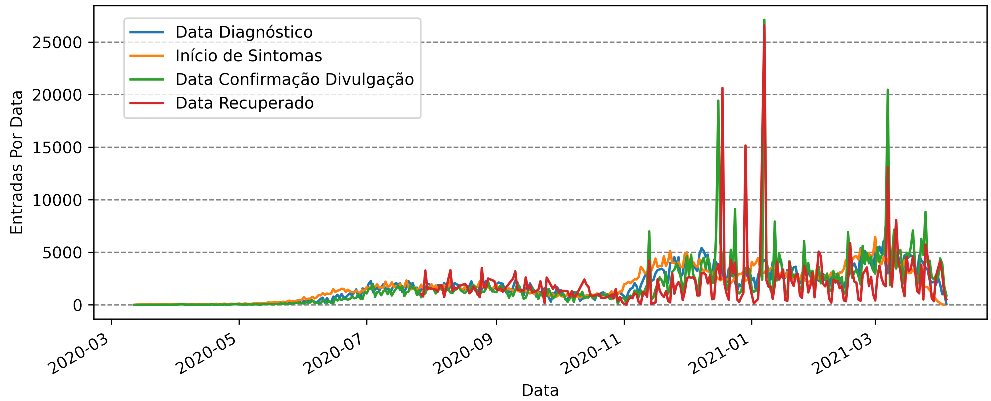



Figura 12.6: Entradas por data.

Conseguimos visualizar os picos de confirmados e recuperados, e também notamos a curva de início de sintomas acompanhada pela curva de diagnósticos. As quatro curvas, deveriam, em tese, ter todas o mesmo padrão de elevação e queda, porém os dados de recuperados e confirmados vieram em blocos o que talvez possa indicar algum erro.

Se olharmos o gráfico pela perspectiva de inicio de sintomas, diagnósticos, confirmações e recuperações acumuladas - gráfico 12.7 - vemos uma grande diferença entre a recuperação e o resto.

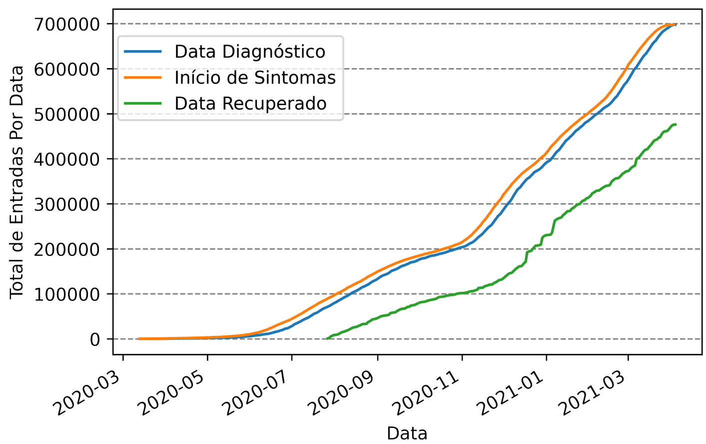



Figura 12.7: Casos acumulados por data.

Também temos o gráficos de óbitos e suas divulgações, podemos notar que o gráfico de óbitos é relativamente contínuo, já o de divulgação também tem o mesmo problema de picos e vales do anterior, e possui a primeira entrada no ano de 2020 no mês 07 no dia 17.

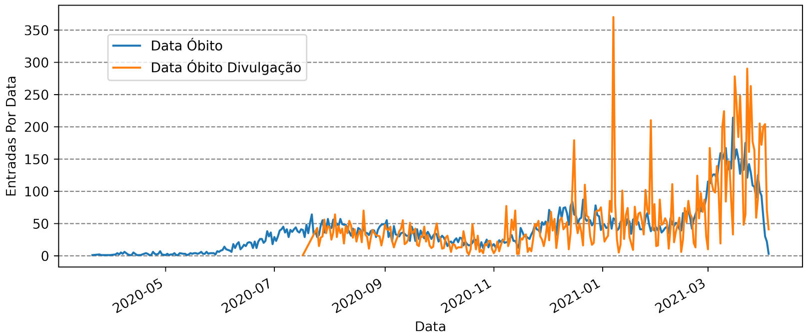



Figura 12.8: Entradas por data (óbito).

### Análise gráfica de outubro

Novamente, vamos analisar os gráficos de total de entradas por dia de todas as colunas que possuem datas e compararemos com as da base de dados anterior.

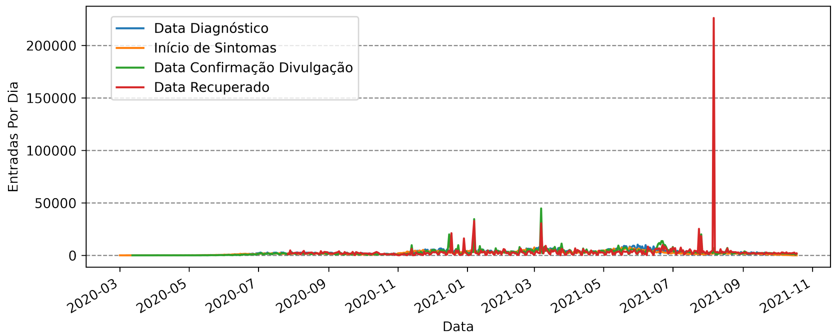



Figura 12.9: Entradas por data.

Perceba na Figura 12.9 que os dados referentes a DIS anteriores a 12 de março de 2020 foram removidos, e os dados de recuperados e confirmados vieram novamente, em grandes blocos, dessa vez chegando a cerca de 250 mil entradas em um único dia, também possuí vários picos e vales.

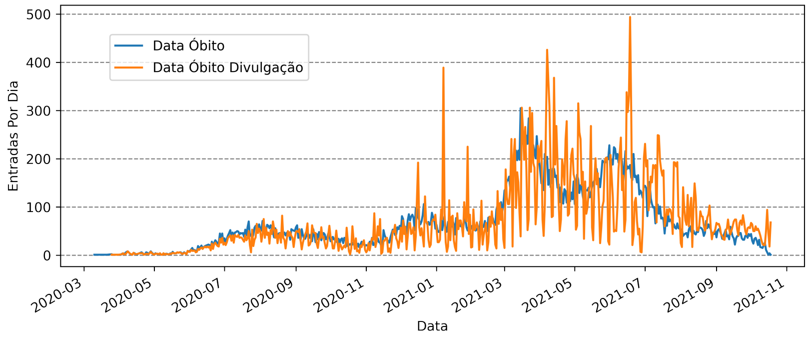



Figura 12.10: Entradas por data (óbito).

Comparando a Figura 12.10 com a Figura 12.8 na coluna de divulgação de óbitos vemos várias novas entradas anteriores ao dia 17 do 7 de 2020. Então, de uma base para outra foi inserido valores anteriores ao dia de divulgação da própria base, o que pode indicar uma recontagem dos casos ou um erro.

## Comparações

Limitando o gráfico até o dia 25 de julho de 2020, vemos uma grande diferença entre o número de novos início de sintomas por dia em relação a base de dados 3.1 e as outras, isso provavelmente se deve ao fato de que nessa data algumas cidades ainda não enviavam seus dados para serem contabilizados. Já as duas de 2021 seguem próximas com a de outubro um pouco abaixo. Isso pode indicar algum erro ou também uma recontagem das informações, ver gráfico 12.11.

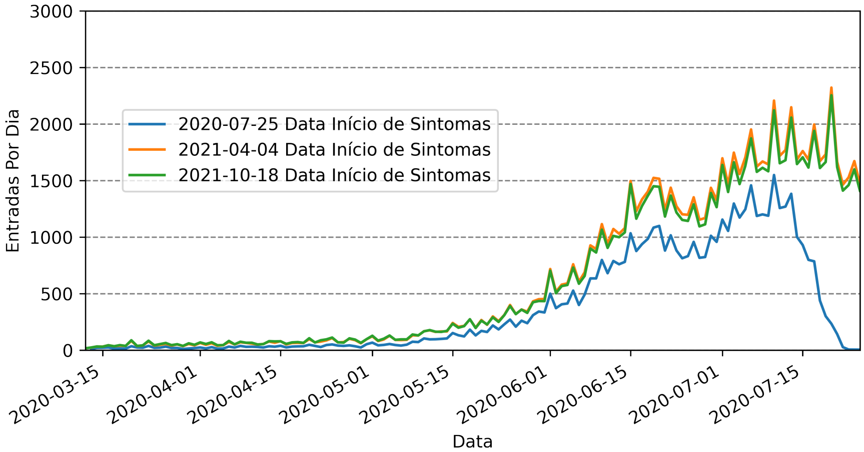



Figura 12.11: Comparação entre as três bases sobre as entradas de início de sintomas por data.

Já no quesito de total de diagnósticos por dia pode-se notar uma diferença crescente das mais antigas para as mais novas, gráfico 12.12.

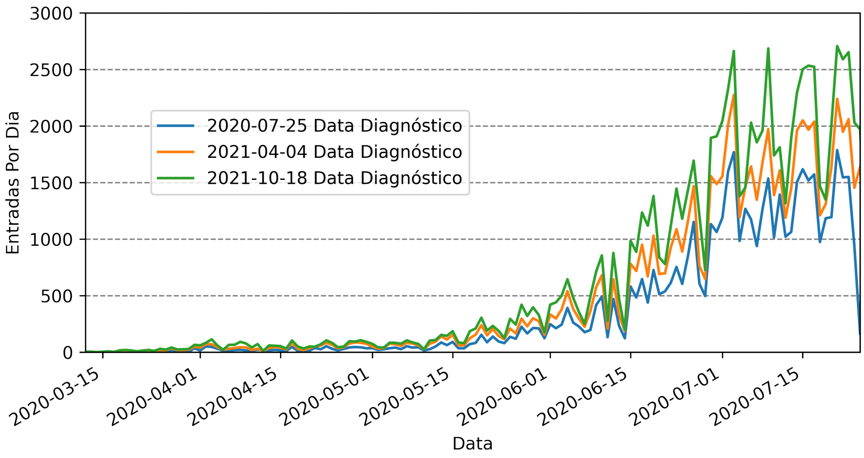



Figura 12.12: Comparação entre as três bases sobre as entradas de diagnóstico por data.

No gráfico 12.13 podemos ver, de modo ampliado os extremos de vales e picos do total de novos recuperados por dia. Vemos também que somente as bases de 2021 tinham a coluna de recuperados.

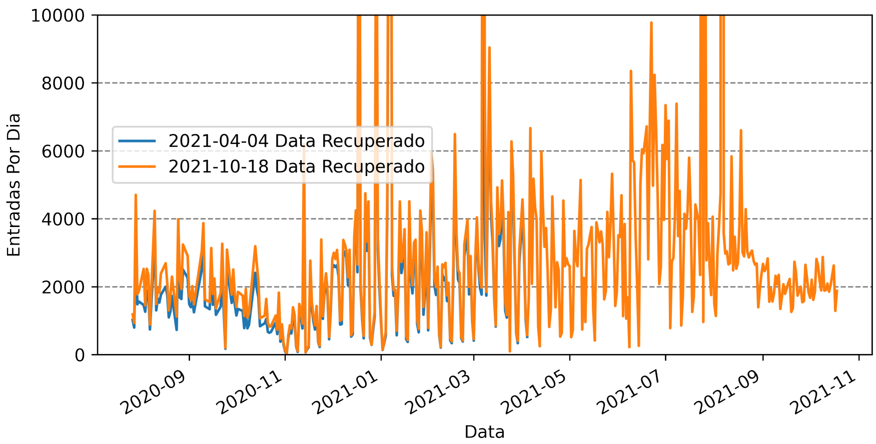



Figura 12.13: Comparação entre as três bases sobre as entradas de recuperação por data.

Nos dados de óbitos, o gráfico 12.14 mostra a diferença crescente do mais antigo para o mais novo.

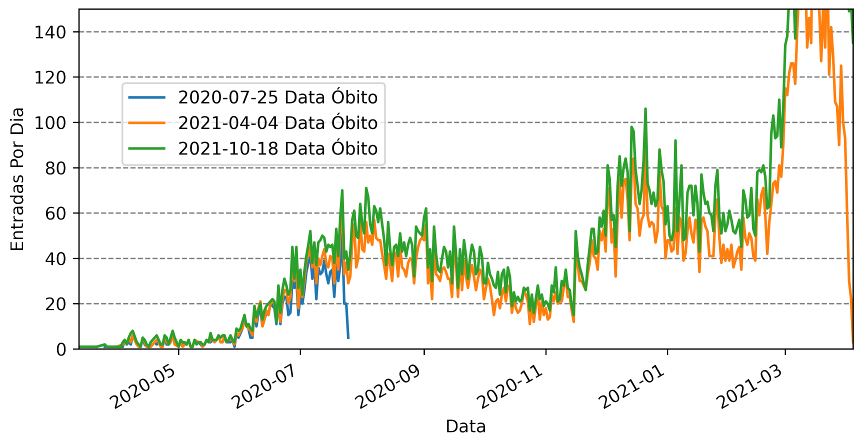



Figura 12.14: Comparação entre as três bases sobre as entradas de óbitos por data.

# 4 Análise de períodos virais

Um vírus passa por vários períodos em nosso corpo, desde quando somos expostos até quando nos recuperamos completamente. Alguns desses períodos e seus possíveis significados são:

- **Exposição**: Pode ser separado em dois tipos, o tempo que a pessoa ficou próxima a outra pessoa ou um lugar com vírus. Ou o tempo desde que a pessoa fez contato com o vírus até a incubação.[14]

- **Incubação**: É quando o vírus se encontra dentro do organismo. Mas o **tempo de incubação** é o período que a pessoa tem o vírus dentro dela até ela ter uma carga viral suficiente para ser sintomático ou assintomático.[14]

- **Sintomático**: Tempo que uma pessoa passa com o vírus com sintomas (alguns comuns para a Covid-19 são, febre e dor de cabeça).[14]

- **Assintomático**: Tempo que uma pessoa passa com o vírus sem sintomas.[14]

- **Recuperação**: Existem diversos tempos de recuperação, podendo ser o tempo desde a incubação até ou o sumiço dos sintomas, ou o sumiço de toda a carga viral do corpo, ou a recuperação clinica.[14]

- **Óbito**: Tempo da incubação até o óbito.[14]

Utilizando a base dados mais recente podemos calcular o tempo médio, e seus desvios, que as pessoas passam pelos diversos períodos. Vamos estudar os seguintes períodos: tempo que uma pessoa leva do início de sintomas até o diagnóstico, até a recuperação e até o óbito. Além disso temos os tempo entre eles, do diagnóstico até a recuperação e do diagnóstico até o óbito.

### Tempo entre o início de sintomas e o diagnóstico

Para obter o tempo médio entre a DIS e a DD, respectivamente verde(coluna 2) e azul(coluna 1) na Tabela 12.1 foi utilizada a base de dados do dia 18 de outubro de 2021. Definindo como número de aparições todas as entradas que possuíam valores nas colunas DIS e DD, foram calculados os tempos entre as datas de cada entrada, somados estes tempos e divididos pelo número de aparições.

Assim, obtivemos a média - tempo médio entre a DIS e a DD - de aproximadamente 5 dias, com um desvio padrão de aproximadamente 3 dias.

| DATA _DIAGNOSTICO | DATA _INICIO _SINTOMAS | DATA _OBITO | DATA _RECUPERADO _DIVULGACAO |
|---|---|---|---|
| 2021-10-10 | 2021-10-18 | 2021-09-23 | 2021-10-18 |
| 2021-09-17 | 2021-10-18 | 2021-09-10 | 2021-10-18 |
| 2021-09-30 | 2021-10-18 | 2021-09-26 | 2021-10-18 |
| 2021-08-27 | 2021-10-18 | 2021-08-25 | 2021-10-18 |
| 2021-05-13 | 2021-10-18 | 2021-05-13 | 2021-10-18 |

Tabela 12.1:

### Tempo entre o início de sintomas e a recuperação

A média entre a DIS e a DR, respectivamente verde(coluna 2) e laranja(coluna 4) na Tabela 12.1 foi obtida da mesma maneira que a anterior e é de aproximadamente 51 dias com um desvio padrão de aproximadamente 50 dias. Com esse desvio padrão obtemos que a maioria dos pacientes estão agrupados entre 0 e 101 dias para se recuperarem desde o início de sintomas, é um intervalo considerado grande se compararmos com o trabalho de Mancuso 2020 [15] e de Zhou 2020 [16] que informa que uma pessoa demora cerca de 36 dias após os primeiros sintomas, para eliminarem completamente o vírus do corpo. Esse estudo também mostrou uma leve alteração no número de dias de acordo com a idade dos testados. As pessoas com menos de 50 anos eliminaram o vírus em 35 dias. Já as pessoas acima de 80 anos levaram 38 dias para ficarem totalmente livres da covid-19.

Isso levanta algumas questões como a possibilidade de incoerência nos dados ou que o tempo de recuperação levado em conta foi o tempo até a recuperação da saúde do paciente.

### Tempo entre o início de sintomas e o óbito

A média entre a DIS e a DO, respectivamente verde(coluna 2) e amarelo(coluna 3) na Tabela 12.1 também foi obtida do mesmo modo e é de aproximadamente 20 dias com um desvio padrão de aproximadamente 11 dias, essa média se compararmos ao trabalho de Wang 2020 [17] tem uma diferença de 6 dias para menos, e possuem desvios diferentes.

### Tempo entre o diagnóstico e a recuperação

A média entre a DD e a DR, respectivamente azul(coluna 1) e laranja(coluna 4) na Tabela 12.1 é de aproximadamente 48 dias um desvio padrão de aproximadamente 51 dias. Esse desvio de aproximadamente 105% da média pode ser um indicativo de erro ou incoerência nos dados.

### Tempo entre o diagnóstico e o óbito

A média entre a DD e a DO, respectivamente azul(coluna 1) e amarelo(coluna 3) na Tabela 12.1 é de aproximadamente 14 dias com um desvio padrão de aproximadamente 10 dias, foi obtida de mesmo modo que as anteriores. Também podemos ver esse tempo como a subtração do tempo entre DIS e DO e o tempo entre DIS e DD.

### Acumulado de pessoas por período de dias

Também podemos referenciar dois tempos, o tempo entre o início de sintomas e o diagnóstico. E o tempo entre o diagnóstico e a recuperação. Se observarmos a quantidade de pessoas que tem como esses períodos de 0 a 9 dias, obtemos as tabelas 12.2 e 12.3.

| Quantidade de pessoas | Período(dias) |
|---|---|
| 2589 | 0 |
| 26721 | 1 |
| 58363 | 2 |
| 79212 | 3 |
| 101276 | 4 |
| 25572 | 5 |
| 153431 | 6 |
| 187015 | 7 |
| 226505 | 8 |
| 266244 | 9 |

Tabela 12.2: Acumulado de pessoas por período de dias entre o início de sintomas e o diagnóstico.

A partir da tabela 12.2, podemos notar que 2589 pessoas tiveram diagnóstico no mesmo dia que o início de sintomas, podendo ser um exemplo de uma pessoa que faz testes contínuos sem necessariamente possuir sintomas.

| Quantidade de pessoas | Período(dias) |
|---|---|
| 60744 | 0 |
| 117856 | 1 |
| 225972 | 2 |
| 386646 | 3 |
| 540261 | 4 |
| 686172 | 5 |
| 821343 | 6 |
| 939671 | 7 |
| 1024863 | 8 |
| 1086117 | 9 |

Tabela 12.3: Acumulado de pessoas por período de dias entre o tempo de diagnóstico e o recuperação.

Analisando agora a Tabela 12.3 podemos notar que 117856 pessoas tiveram recuperação entre 0 e 1 dias após os diagnósticos, ou seja, praticamente 10% dos dados possuem um tempo de recuperação muito abaixo do estipulado pelos estudos de Mancuso 2020 [15] e de Zhou 2020 [16].

# 5 Conclusão

Com a análise de dados podemos perceber que entre uma data e outra houve-se mudanças na formatação das colunas como pode-se ver nas seções 3.1, 3.2 e 3.3. Vemos também pelos gráficos que existem dados errôneos sobre o início de sintomas, datando na década de 30 que são removidos na próxima base, além disso grandes picos nas colunas de divulgação são evidenciados principalmente em outubro com um chegando a 250 mil. Com as comparações, podemos perceber que as novas bases adicionaram dados em tempos passados, por exemplo na figura 12.12 no mês 7 de 2020 da base mais antiga para a mais nova temos um número maior de diagnósticos e isso se repete para o incio de sintomas e óbito.

A partir das bases, conseguimos extrair tempos virais, dentre eles o tempo de alguma data qualquer até a data de recuperação veio com enormes desvios por exemplo o tempo entre o diagnóstico e a recuperação possui uma média de 48 dias e um desvio padrão de 51 dias. Isso pode ser um forte indicativo de alguma incoerência ou erro nos dados.

Concluindo, para modelos epidemiológico baseados em equações diferencias os dados dos recuperados são de suma importância e com essas incoerências os dados podem nos levar a novas incoerências nos resultados das aplicações dos modelos.

Em sumo, o trabalho mostra que a base de dados é algo crescente em tamanho e solidez. Mostrando que conforme o tempo, ela foi se modificando.

# 6 Agradecimento

Agradeço à minha família por me apoiar em todas as situações, ao meu orientador Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo por todo o conhecimento transmitido, ao grupo PET Matemática da UEL pelo apoio e à Secretaria de Educação Superior (SESu) do Ministério da Educação (MEC) e o Fundo Nacional de Desenvolvimento Estudantil (FNDE), pela Bolsa-PET, que financiaram o projeto.

# Referências Bibliográficas

[1] Menezes M. (IOC/Fiocruz). **Estudo aponta que novo coronavírus circulou sem ser detectado na Europa e Américas**. <`https://portal.fiocruz.br/noticia/estudo-aponta-que-novo-coronavirus-circulou-sem-ser-detectado-na-europa-e-americas`>, acesso em 2021.

[2] Oliveira E. & Ortiz B. G1 e G1 DF. **Ministério da Saúde confirma primeiro caso de coronavírus no Brasil**. <`https://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2020/02/26/ministerio-da-saude-fala-sobre-caso-possivel-paciente-com-coronavirus.ghtml`>, acesso em outubro de 2021.

[3] Organização Mundial de Saude. **WHO Director-General's opening remarks at the media briefing on COVID-19**. <`https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11-march-2020`>, acesso em 2021.

[4] Secretaria Estadual de Saúde do Estado do Paraná. **Coronavírus - COVID-19**. <`https://www.saude.pr.gov.br/Pagina/Coronavirus-COVID-19`>, acesso em outubro de 2021.

[5] Por Thais Kaniak e Pedro Brodbeck, G1 PR. **Ministério da Saúde confirma seis casos do novo coronavírus no Paraná**. <`https://g1.globo.com/pr/parana/noticia/2020/03/12/ministerio-da-saude-confirma-seis-casos-do-novo-coronavirus-no-parana.ghtml`>, acesso em 2021.

[6] Fred L Van Rossum, Guido; Drake Jr. ***Python reference manual***. Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, 1995.

[7] The pandas development team. **Pandas**, February 2020.

[8] Cirilo E. R.; Natti, P. L.; Godoi P. H. Valério; Lerma A.; Matias V. P.; Romeiro N. M. L. **COVID-19 in Londrina-PR: SEIR Model with Parameter Optimization**. *Semina: Exact and Technological Sciences*, 42(1Supl):45–54.

[9] Charles R. Harris; K. Jarrod Millman; Stéfan J. van der Walt; Ralf Gommers; Pauli Virtanen; David Cournapeau; Eric Wieser; Julian Taylor; Sebastian Berg; Nathaniel J. Smith; Robert Kern; Matti Picus ; Stephan Hoyer; Marten H. van Kerkwijk; Matthew Brett; Allan Haldane; Jaime Fernández del Río; Mark Wiebe; Pearu Peterson; Pierre Gérard-Marchant; Kevin Sheppard; Tyler Reddy; Warren Weckesser; Hameer Abbasi; Christoph Gohlke; Travis E. Oliphant. **Array programming with NumPy**. *Nature*, 585(7825):357–362, September 2020.

[10] J. D. Hunter. **Matplotlib: A 2D graphics environment**. *Computing in Science & Engineering*, 9(3):90–95, 2007.

[11] IBGE. **Códigos dos municípios IBGE**. <`https://www.ibge.gov.br/explica/codigos-dos-municipios.php`>, acesso em 2021.

[12] Fiocruz. **O que significa um exame IgM e/ou IgG positivo?** <`https://portal.fiocruz.br/pergunta/o-que-significa-um-exame-igm-e/ou-igg-positivo`>, acesso em outubro de 2021.

[13] IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo 2010**. *Computing in Science & Engineering*, acesso em 2021.

[14] Stephen NJ Korsman, Gert Van Zyl, Wolfgang Preiser, Louise Nutt, and Monique I Andersson. *Virology E-Book: An Illustrated Colour Text*. Elsevier Health Sciences, 2012.

[15] Pamela Mancuso, Francesco Venturelli, Massimo Vicentini, Cinzia Perilli, Elisabetta Larosa, Eufemia Bisaccia, Emanuela Bedeschi, Alessandro Zerbini, and Paolo Giorgi Rossi. Temporal profile and determinants of viral shedding and of viral clearance confirmation on nasopharyngeal swabs from sars-cov-2-positive subjects: a population-based prospective cohort study in reggio emilia, italy. *BMJ open*, 10(8):e040380, 2020.

[16] Fei Zhou, Ting Yu, Ronghui Du, Guohui Fan, Ying Liu, Zhibo Liu, Jie Xiang, Yeming Wang, Bin Song, Xiaoying Gu, et al. Clinical course and risk factors for mortality of adult inpatients with covid-19 in wuhan, china: a retrospective cohort study. *The lancet*, 395(10229):1054–1062, 2020.

[17] Weier Wang, Jianming Tang, and Fangqiang Wei. Updated understanding of the outbreak of 2019 novel coronavirus (2019-ncov) in wuhan, china. *Journal of medical virology*, 92(4):441–447, 2020.

# 7 Anexo: Códigos Computacionais

Sendo `df` a base de dados, temos para cada um os seguintes códigos:

- Sexo dos infectados

```
df['SEXO'].value_counts().plot.bar(rot=0)
```

- Sexo dos mortos

```
df.loc[df.DATA_OBITO.notnull()]['SEXO'].value_counts().sort_values().plot.bar(rot=0)
```

- Grupos de idade

```
out = pd.cut(df["IDADE_ORIGINAL"], bins=[0,1,5,19,29,39,49,59,69,79, df['IDADE_ORIGINAL'].max()], include_lowest=False,right=False )
ax = out.value_counts(sort=False).plot.bar(rot=25, color="b", figsize=(10,4))
labels = [item.get_text() for item in ax.get_xticklabels()]
ax.set_xticklabels([c[1:-1].replace(","," até").replace(".0", "").replace('-001','0') for c in labels])
```

- Número de atendimentos e residentes por municípios

```
df[['MUN_ATENDIMENTO','MUN_RESIDENCIA']].apply(pd.Series.value_counts).sort_values(by=['MUN_RESIDENCIA'], ascending=False).iloc[0:20].plot.bar(rot=90)
```

- Agora para os gráficos, temos:

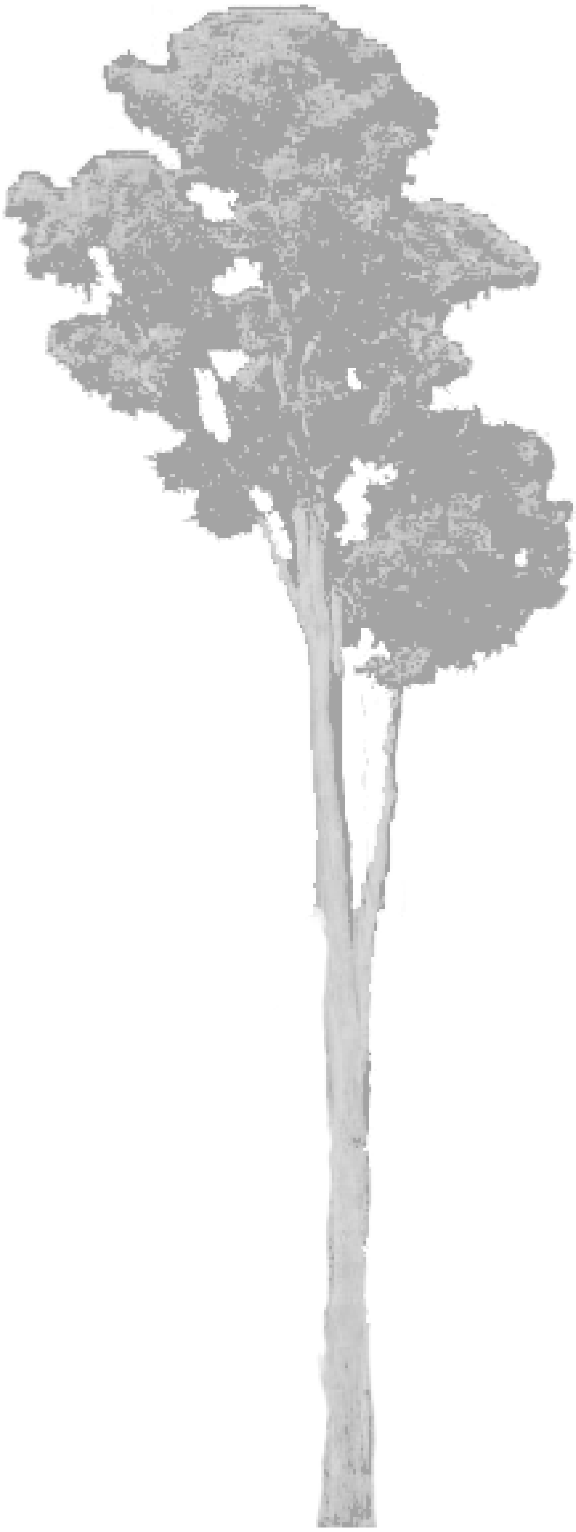
```
list_listDatas = [['DATA_DIAGNOSTICO', 'DATA_INICIO_SINTOMAS', 'DATA_RECUPERADO_DIVULGACAO'],['DATA_OBITO','DATA_OBITO_DIVULGACAO']]
list_listLegenda = [['Data Diagnóstico','Início de Sintomas','Data Recuperado'],['Data Óbito','Data Óbito Divulgação']]

```

```
def graficos_datas(listDatas,listLegenda,df):
  for l in listDatas:
      df.groupby(l)[l].count().plot(xlabel='Data', figsize=(10,4))
  plt.legend(listLegenda,loc='center', bbox_to_anchor=(0, 0.55, 0.4,
   ↪  0.5))
  plt.show()

for idx,var in enumerate(list_listDatas):
  graficos_datas(var,list_listLegenda[idx],df)
```

Assim, a depender da `df` que iremos utilizar, os gráficos serão sempre os mesmos. Porém algumas bases de dados tem dados antigos, e isso necessita de um corte da base de dados para melhor visualização, isso foi abordado melhor na seção de Analise de Dados 3.4 e também é um assunto que facilmente pode ser encontrado em qualquer ferramenta de busca.



A Coleção de Pesquisas do PETMAT da Universidade Estadual de Londrina constitue a memória de todos os trabalhos de iniciação científica (I.C.) relizados pelos petianos.

Neste segundo número, encontram-se estudos sobre Cálculo Numérico, Equações Diferenciais Ordinárias, Dinâmica Simbólica, Análise Real, Análise Funcional, Análise de Dados e Topologia

Para mais informações acesse:
http://www.uel.br/programas/petmat/