# Modelagem Matemática

Prof. Dr. Eliandro R. Cirilo

Universidade Estadual de Londrina - UEL
Centro de Ciências Exatas - CCE
Departamento de Matemática

8 de dezembro de 2023

# Sumário

1. Conceitos Básicos Sobre Modelagem Matemática: Parte I
   - Definições Iniciais
   - Problema, Matemática, Modelo

# Definições Iniciais

Em Ciência é de suma importância partir dos elementos fundamentais da construção das ideias, e de como tais elementos se conectam e se desdobram por definição. Em outras palavras, como acontece o vínculo entre o Antecedente e o Consequente num pensamento de sentido completo.

Ou seja, em Ciência há a necessidade de uma metodologia, posta e aceita, que norteie todo o pensamento lógico que possibilite o desenvolvimento.

Há de se reconhecer que todo o desenvolvimento tecnológico alcançado até o momento é fruto da ampliação dos entendimentos humanos.

Desta forma, uma vez aceita essa construção mental, gostando ou não, o pensar científico estaria determinado. Além disso, temos tão somente as opiniões e as crenças.

# Definições Iniciais

Os alicerces científicos estão amparados pelas seguintes construções mentais[1]:

- **Evidência/Axioma**
  – *qualidade ou caráter do que é evidente (indiscutível), do que não dá margem à dúvida ...*

- **Premissa**
  – *ponto ou ideia de que se parte para armar um raciocínio ...*

- **Argumento**
  – *raciocínio que conduz à indução ou dedução de algo ...*

- **Definição**
  – *delimitação exata, estabelecimento de limites ...*

[1] Oxford Languages

# Definições Iniciais

- **Postulado**
  – *o que se considera como fato reconhecido e ponto de partida, implícito ou explícito, de uma argumentação ...*

- **Conjectura**
  – *ato ou efeito de inferir ou deduzir que algo é provável, com base em presunções, evidências incompletas, pressentimentos ...*

- **Hipótese**
  – *proposição que se admite, independentemente do fato de ser verdadeira ou falsa, como um princípio a partir do qual se pode deduzir um determinado conjunto de consequências ...*

- **Tese**
  – *conclusão por raciocínio ...*

# Definições Iniciais

- **Teoria**
  – *conhecimento especulativo, metódico e organizado de caráter hipotético e sintético ...*

- **Demonstração**
  – *raciocínio que torna evidente o caráter verídico de uma proposição, ideia ou teoria ...*

- **Teorema**
  – *proposição que pode ser demonstrada via um processo lógico ...*

- **Opinião**
  – *posição precisa, ponto de vista adotado ...*

- **Crença**
  – *opinião manifesta com fé e grande segurança ...*

# Definições Iniciais

Portanto,

todo problema modelado por meio da Matemática

necessita do uso das construções mentais,

definidas e mencionadas anteriormente (ou derivadas destas),

de forma correta e honesta.

Não são científicos por exemplo:

- negar as Evidências ....
- aceitar uma Teoria como um Axioma ....
- afirmar uma Conjectura como equivalente a um Teorema ...
- Argumentar uma Tese proveniente de Hipóteses inverídicas ...
- confundir Opinião com Demonstração ....
- Crer nos resultados apenas por terem sido encontrados ....
- reflexões mentais que dão margem a dupla interpretação ....

# Problema, Matemática, Modelo

A pergunta mais difícil de se responder! Como resolver problemas?

No livro "A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático", G. Polya dá as mais valiosas pistas de como se poderia resolver problemas com ferramentas matemáticas. No entato, o que são Ferramentas Matemáticas? O que é Matemática?

É concenso de que não há uma definição consolidada sobre Matemática. Porém, uma possível tentativa de definição seria: **Matemática é a arte de pensar**.

O pensar consiste basicamente em (mas não limita-se):

i. procurar padrões
ii. relacionar objetos no sentido amplo
iii. inferir, conjecturar, axiomatizar, definir
iv. demonstrar
v. etc .....

de modo que o grande desafio da Matemática está na demonstração.

# Problema, Matemática, Modelo

Quanto as Ferramentas Matemáticas, podemos dizer que são elementos que auxiliam a estruturação do pensamento. Por exemplo, são elas:

- Lema, Teorema, Corolário, Axiomas
- Lógica, Técnicas Demonstrativas
- Linguagem Simbólica
- Equacionamentos
- Algoritmos
- Elementos de Visualização
- e muitas outras coisas mais ...

Desta forma, se somos resilientes no aspecto do pensar e perseverantes em conhecer e dominar Ferramentas Matemáticas – até mesmo produzir novas – então temos grandes chances de desenvolvermos Modelos Matemáticos aplicados e resolvê-los.

# Problema, Matemática, Modelo

Do livro "A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático" - G. Polya, é possível estabelecer as seguintes reflexões:

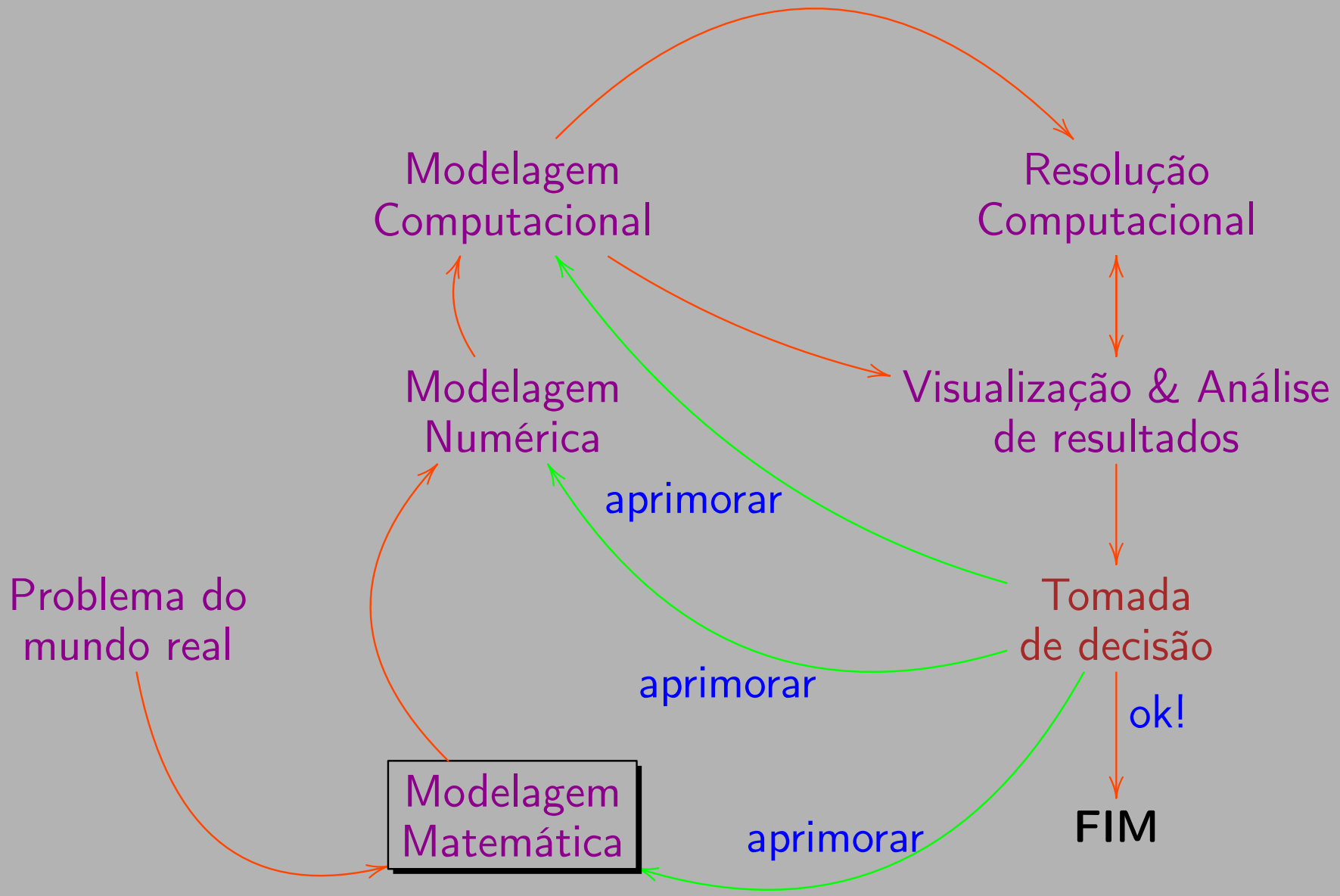
1. para se conseguir algum êxito na resolução de problemas, precisamos peremptoriamente considerar 4 instâncias
   - compreender o problema
   - ver como as incógnitas se ligam aos dados
   - executar uma estratégia resolutiva
   - analisar o resultado encontrado;

2. modelar matematicamente um problema não é uma tarefa simples, e na maioria das vezes não é algo definitivo;

   Modelo/Modelar é uma tentativa de imitar algo de modo a descrever todas as peculiaridades deste.

3. modelar matematicamente um problema é a arte de criar uma estrutura, escrita por elementos da Matemática, de tal forma a imitar: os detalhes, as nuances, as restrições, de quem se está modelando.

# Problema, Matemática, Modelo



# Problema, Matemática, Modelo

Existem diversas ferramentas matemáticas para modelar muitos problemas reais. Por exemplo temos:

- Cálculo Diferencial e Integral – escalar/vetorial
- Cálculo Tensorial
- Álgebra Linear
- Teoria dos Números
- Grafos
- Otimização
- Estatística
- Equações Diferenciais
- etc .....

tal que uma (ou mais) destas ferramentas pode ser usada na modelagem de um problema real.

# Problema, Matemática, Modelo

É comum num problema de espalhamento de vírus (por exemplo COVID-19) utilizar:

Eq.'s Dif.'s Ordinárias – Otimização – Estatística – Álgebra Linear

**Modelo para a COVID19 – DOI: 10.5540/tcam.2021.022.03.00435**

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} SI \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} SI - (\gamma_R + \gamma_D) I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_R I \qquad \frac{dD}{dt} = \gamma_D I$$

onde:

- $t$, $S$, $I$, $R$, $D$ são as variáveis: tempo, sucetíveis, infectados, recuperados e mortos, e $N$ é o valor populacional
- $\beta$ é a taxa de infecção, e $\gamma_R$ e $\gamma_D$ são as taxas de recuperados e mortos

# Sumário

2 Conceitos Básicos Sobre Modelagem Matemática: Parte II

- Problemas bem Postos
- Solução
- Ensaio Matemático

# Problemas bem Postos

O termo "Problema bem Posto" foi introduzido/definido pelo matemático francês **Jacques Salomon Hadamard** (1865-1963). O mesmo acreditava que a solução de modelos matemáticos deveria ter as seguintes propriedades:

1. existência
2. unicidade
3. dependência contínua das condições auxiliares.

Todo Problema bem Posto tem grande potencial de ser resolvido computacionalmente por um método numérico. Porém, se o método é instável são grandes as chances de a solução não ser condizente com o problema.

Um método é estável quando pequenas perturbações nos dados conduzem a pequenas oscilações na solução. Caso contrário – em que pequenas perturbaçoes nos dados implicam em grandes oscilações na solução – o método é definido ser instável.

# Solução

Em Matemática, basicamente, há dois tipos de soluções:

1. Solução Analítica – deduzida e escrita por uma expressão em termos matemáticos elementares, que nos dá acesso a resultados exatos;

2. Solução Numérica – obtida por método numérico, em geral escrita por conjunto de números, que nos dá acesso a resultados aproximados.

Por trás de todo método numérico há um algoritmo. Então, devemos sempre medir a qualidade/validade da solução numérica encontrada. A validação é o ato de validar, de tornar algo válido e legítimo.

Portanto, todo problema precisa ser bem posto, aliado a algum método numérico com condições de estabilidade garantida, que nos permite encontrar soluções numéricas a serem validadas, para que tenhamos a segurança de estar lidando com resultados legítimos. Caso contrário, presisamos remodelar o problema. Este é o cerne da Modelagem Matemática.

# Ensaio Matemático

Um Ensaio Matemático nada mais é que um Ensaio Acadêmico/Científico. O ensaio é textual, com exibição de fórmulas quando necessário, com a exposição da opinião do autor. No ensaio são discutidas as principais ideias desenvolvidas por outros autores, e a opinião do autor que escreve o ensaio. No entanto, o autor que escreve o ensaio deve fundamentar a sua opinião em outros autores e publicações.

Um ensaio não é o mesmo que um artigo. O ensaio é mais simplificado que o artigo. Ademais, a principal diferença é que no ensaio podemos expressar a nossa opinião/reflexão.

Basicamente, a estrutura de um ensaio é dada por:

- ✓ **título**
- ✓ **afiliação**
- ✓ **resumo**
- ✓ **introdução**
- ✓ **desenvolvimento/ fundamentação**
- ✓ **conclusão**
- ✓ **bibliografias**

# Ensaio Matemático

- ✓ **título**
  - o que descreve o ensaio
- ✓ **afiliação**
  - nome do(s) autor(es), curso, universidade
- ✓ **resumo**
  - conciso, escrito sem parágrafos, e descreve o tema do ensaio
- ✓ **introdução**
  - descreve o assunto, o caso ou problema analisado, os objetivos propostos e a justificativa
- ✓ **desenvolvimento/fundamentação**
  - pode ser dividido em tópicos, e precisa conter: exposição, fundamentação teórica, avaliação, discussão, posicionamento
- ✓ **conclusão**
  - descreve o problema contextualizado com o objetivo e análise posicionada
- ✓ **bibliografias**
  - apresentação dos textos citados no ensaio

# Sumário

3 Modelos Clássicos da Física
- Vibração
- Circuito elétrico
- Atividade

# Vibração

Consideremos o esticamento/compressão de um objeto de massa $m$, conectado a uma mola de massa desprezível, que poderiam estar posicionados na vertical ou horizontal conforme a Figura 1, modelado a partir da Lei de Hooke.

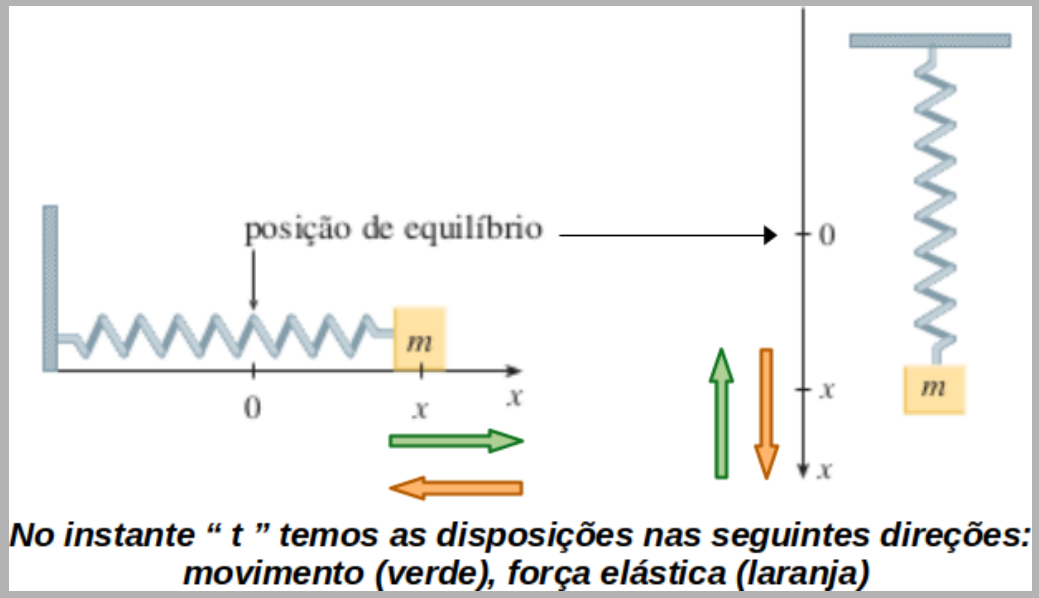



Figura 1: Massa mola (Adap. da referência (6))

Assim, a força elástica $F_e = -kx$, onde $k$ é a constante elástica da mola. Desprezando resistências externas, da 2º Lei de Newton temos então:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_e \qquad \Leftrightarrow \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

# Vibração

O modelo matemático do esticamento/compressão fica dado então sob a forma

$$M_1 \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx &= 0 \\ x(0) &= x_0 \qquad (x_0 \text{ é a posição inicial}) \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} &= x_0' \qquad (x_0' \text{ é a velocidade inicial}) \end{cases}$$

de modo que podemos fazer as seguintes considerações:

1. o problema é bem posto
2. possui solução analítica (já foi demonstrada matematicamente)
3. muito artificial e não realístico, pois
   - a massa da mola é desprezível
   - a força elástica muitas vezes não responde de forma linear tipo $kx$
   - não podemos negar forças externas como a resistência do ar – ou outro fluido – gravidade, etc ...

# Vibração com amortecimento

Objetivando realismo, consideremos uma força de amortecimento $F_a$ (Ex.'s: atrito, resistência de um fluido, etc.) como apresentado na Figura 2.

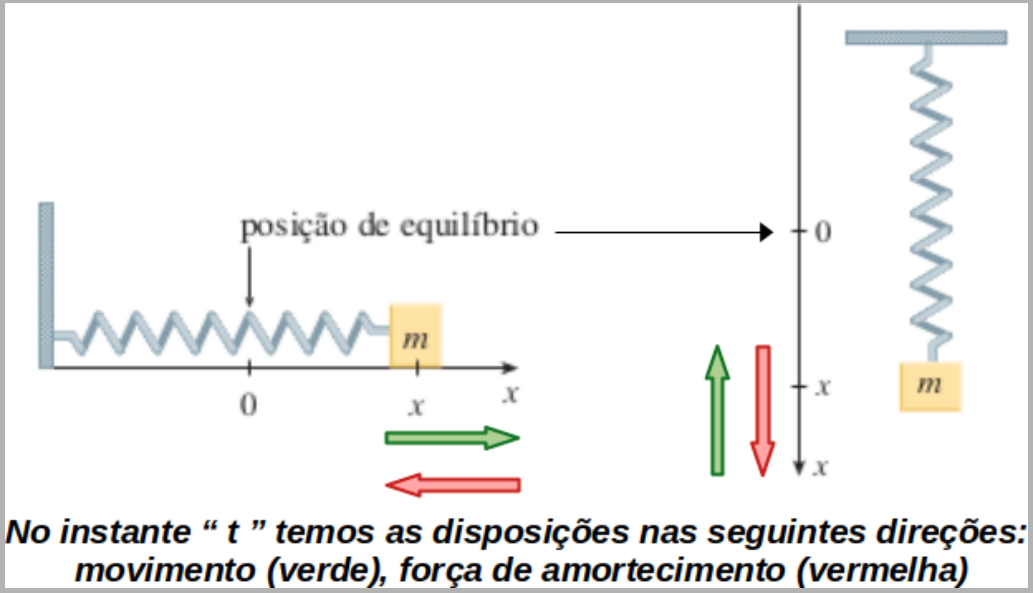



Figura 2: Massa mola amortecido (Adap. da referência (6))

Se $F_a$ é proporcional à velocidade da massa $m$, e atua na direção contrária ao movimento, então $F_a = -c\dfrac{dx}{dt}$ com $c$ sendo a constante de amortecimento.

Logo, aprimoramos o modelo anterior e a 2º Lei de Newton fica então:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_e + F_a \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

# Vibração com amortecimento

O modelo matemático do esticamento/compressão com amortecimento fica dado então sob a forma

$$M_2 \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx &= 0 \\ x(0) &= x_0 \qquad (x_0 \text{ é a posição inicial}) \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} &= x_0' \qquad (x_0' \text{ é a velocidade inicial}) \end{cases}$$

diante disto podemos fazer as seguintes considerações:

1. o problema é bem posto
2. possui solução analítica (já foi demonstrada matematicamente)
3. menos artificial com algum realístico, pois
   - a massa da mola é desprezível
   - a força elástica muitas vezes não responde de forma linear tipo $kx$
   - o amortecimento nem sempre responde de forma linear tipo $c\dfrac{dx}{dt}$
   - não podemos negar forças externas como a gravidade, e outras mais ...

# Vibração com amortecimento e forçado

Objetivando mais realismo, adicionamos uma força externa ao modelo anterior. Se $F_{ex}$ é uma força exterior, então aprimoramos ainda mais o modelo anterior e a 2º Lei de Newton ficaria então:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_e + F_a + F_{ex} \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad ; \quad F_{ex} = F(t)$$

logo, o modelo matemático ficaria

$$M_3 \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx &= F(t) \\ x(0) &= x_0 \qquad (x_0 \text{ é a posição inicial}) \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} &= x_0' \qquad (x_0' \text{ é a velocidade inicial}) \end{cases}$$

# Vibração com amortecimento e forçado

Diante do apresentado até aqui podemos fazer as seguintes considerações:

- a força $F_{ex}$ poderia resultar de outras forças de campo (gravidade, magnética, elétrica) e/ou de contato (pressão, cisalhamento, normal, tração). Contudo, poderiam existir mais forças .....
- por outro lado, o modelo mais realístico até poderia ainda ser bem posto. Mas possivelmente sem solução analítica;
- se fossem modeladas forças elásticas/de amortecimento não lineares, ainda nos dois primeiros modelos apresentados anteriormente, possivelmente já não teríamos solução analítica.

São estes alguns dos desafios a serem superados ainda, num problema relativamente elementar que é o de vibração de uma massa conectada a uma mola.

# Circuito elétrico

Numa outra linha de raciocínio, consideremos o circuito elétrico da Figura 3.

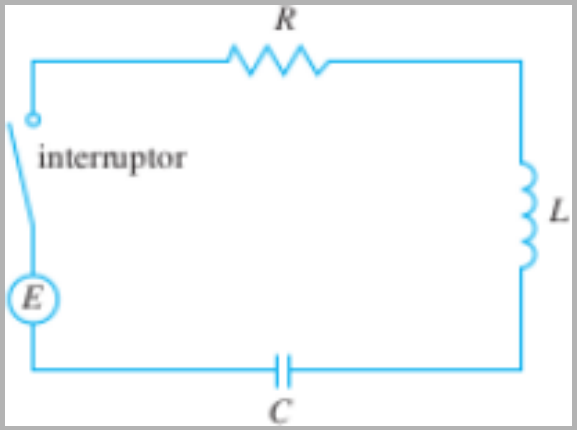



Figura 3: Circuito elétrico simples (Adap. da referência (6))

Se a carga no capacitor é $Q = Q(t)$, então $I = \dfrac{dQ}{dt}$ é a corrente elétrica. As quedas de voltagem no Resistor, Indutor, e Capacitor são respectivamente $RI$, $L\dfrac{dI}{dt}$ e $\dfrac{Q}{C}$, e a Lei de Voltagem de Kirchhoff diz que a força eletromotriz $E(t)$ para todo t é:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t) \qquad \Longrightarrow \qquad L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

# Circuito elétrico

O modelo matemático da variação de carga no circuito fica dado então sob a forma

$$M_4 \left\{ \begin{array}{rcl} L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q & = & E(t) \\ Q(0) & = & Q_0 \quad ; \quad \left.\dfrac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = I_0 \end{array} \right.$$

de modo que o problema é bem posto; possui solução analítica quando considerado casos especiais para $E(t)$ que é escolhida de modo conveniente.

Derivando a equação da carga e considerando $I = \dfrac{dQ}{dt}$, conseguimos obter o seguinte modelo para a variação da corrente elétrica

$$M_5 \left\{ \begin{array}{rcl} L\dfrac{d^2I}{dt^2} + R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C}I & = & \dfrac{dE}{dt} \\ I(0) & = & I_0 \quad ; \quad \left.\dfrac{dI}{dt}\right|_{t=0} = I_0' \end{array} \right.$$

que também é bem posto e possui solução analítica para casos especiais de $E(t)$.

# Atividade

Encontre exemplos modelados como: $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ e $M_5$.

Resolva-os e apresente uma análise sobre os resultados.

Envie o pdf da atividade para o email: ercirilo@uel.br

$M_1$: Luan / Nathalia

$M_2$: Larissa / Maria Graziela

$M_3$: Tainá / Talita

$M_{4/5}$: Monique / Guilherme

# Sumário

4 Modelos Clássicos da Economia

- Modelos econômicos de Leontief
- Modelo de Black e Scholes

# Modelos econômicos de Leontief

O economista Wassily Leontief (1905 - 1999) propôs um modelo matemático, no qual os insumos e produtos numa economia têm suas ligações interpretadas por meio da Álgebra Linear. Leontief foi ganhador do Nobel de economia em 1973 pela apresentação da **matriz Insumo-Produto** aplicada à economia.

Leontief se deparou com a seguinte questão econômica!

*Qual nível de saída os produtos devem ter*
*– num nível necessário e suficiente – para atender*
*à demanda total da economia para esses produtos?*

Leontief queria compreender e modelar a estrutura dos setores econômicos, queria compreender como os setores influenciavam uns aos outros.

Leontief apresentou dois modelo, a saber: o primeiro denominado Aberto e o segundo Fechado, com base na tabela de transações.

# Modelos econômicos de Leontief

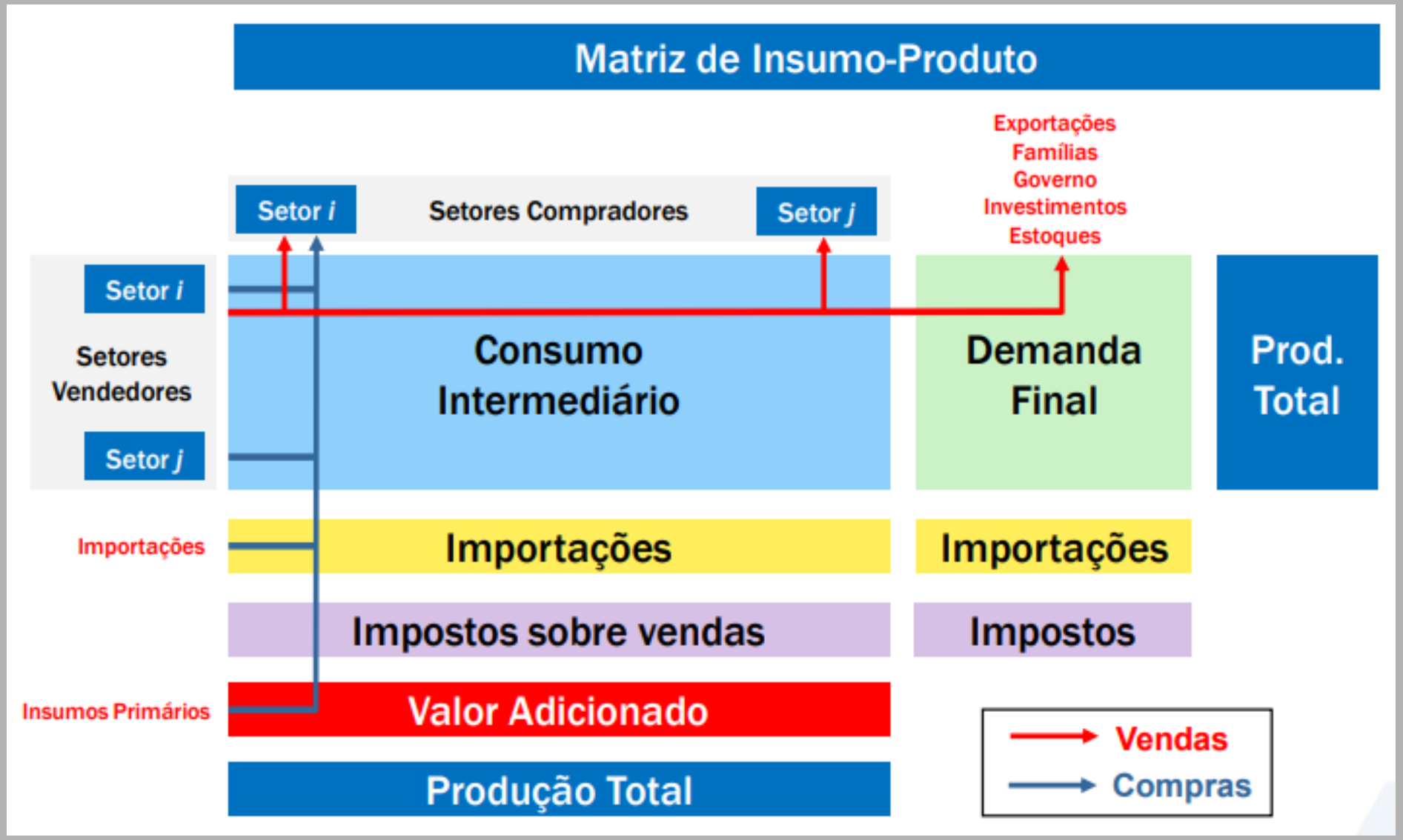



Figura 4: Esquema da tabela de transações (Adap. da referência (8))

# Modelos econômicos de Leontief

**Exemplo de uma tabela de insumo-produto com 2 setores**

| Matriz IP | | Setores | | Demanda Final (Y) | | | | Demanda Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | S1 | S2 | Consumo da Famílias (C) | Governo (G) | Investimento (I) | Exportações (E) | X |
| Setores | S1 | $z_{11}$ | $z_{12}$ | $c_1$ | $g_1$ | $i_1$ | $e_1$ | $x_1$ |
| | S2 | $z_{21}$ | $z_{22}$ | $c_2$ | $g_2$ | $i_2$ | $e_2$ | $x_2$ |
| Importação | | $M_1$ | $M_2$ | $M_c$ | $M_g$ | $M_i$ | | m |
| Impostos | | $t_1$ | $t_2$ | $t_c$ | $t_g$ | $t_i$ | $t_e$ | t |
| Valor Adicionado | W | $w_1$ | $w_2$ | | | | | w |
| Produto Total | X | $x_1$ | $x_2$ | c | g | i | e | |

$z_{ij}$ - fluxo monetário entre os setores *i* e *j*

$c_i$ - consumo das famílias dos produtos do setor *i*

$g_i$ - gasto do governo junto ao setor *i*

$i_i$ - demanda por bens de investimento produzidos no setor *i*

$e_i$ - total exportado pelo setor *i*

$x_i$ - total de produção do setor *i*

$M_i$ - importação total realizada pelo setor *i*

$t_i$ - total de impostos indiretos líquidos pagos por *i*

$w_i$ - valor adicionado gerado pelo setor *i*

Figura 5: Tabela de transações (Adap. da referência (8))

# Modelos econômicos de Leontief

- Modelo fechado ou input-output:

O modelo adota a igualdade entre o valor das despesas de cada setor e o valor das suas receitas, de modo a garantir o equilíbrio do sistema econômico constituído por um número finito de setores.

- Modelo aberto:

Adiciona-se ao modelo fechado, a procura exterior – ou também conhecida como demanda final/externa – e teremos assim o modelo aberto.

# Modelos econômicos de Leontief

- Modelo aberto:

  Sejam 3 setores interagindo, segundo a Tabela 1, com valores em reais.

| Insumo \ Produtos | Agricultura | Manufaturas | Serviços | Demanda externa | Demanda total |
|---|---|---|---|---|---|
| Agricultura | 45 | 60 | 90 | 105 | 300 |
| Manufaturas | 90 | 30 | 135 | 345 | 600 |
| Serviços | 60 | 180 | 0 | 210 | 450 |

Tabela 1: Tabela Insumo-Produto (Adap. da referência (7))

Na Tabela 1, pela ótica das linhas, os valores em:

vermelho - são vendas feitas pelos setores para os setores listados nas colunas, é o consumo intermediário/intersetorial

verde - são vendas feitas pelos setores para a demanda final externa (consumidores)

magenta - são os resultados finais de demanda total,

e pela ótica das colunas os dados em vermelho são fontes de insumos para produção dos setores.

# Modelos econômicos de Leontief

Em outras palavras, denotando $A$ - Agricultura, $M$ - Manufaturas, $S$ - Serviços, $DE$ - Demanda externa, e $DT$ - Demanda total, então temos que o setor:

1. $A$ vende \$45 para $A$, \$60 para $M$, \$90 para $S$, e \$ 105 para $DE$, totalizando uma $DT$ de \$300
2. $M$ vende \$90 para $A$, \$30 para $M$, \$135 para $S$, e \$ 345 para $DE$, totalizando uma $DT$ de \$600
3. $S$ vende \$60 para $A$, \$180 para $M$, \$0 para $S$, e \$ 210 para $DE$, totalizando uma $DT$ de \$450

| Produtos / Insumo | Agricultura | Manufaturas | Serviços | Demanda externa | Demanda total |
|---|---|---|---|---|---|
| Agricultura | 45 | 60 | 90 | 105 | 300 |
| Manufaturas | 90 | 30 | 135 | 345 | 600 |
| Serviços | 60 | 180 | 0 | 210 | 450 |

# Modelos econômicos de Leontief

Rotulando $x_{i,j}$ como a venda do setor $i$ para o setor $j$, e $d_i$ como a demanda externa demandada do setor $i$, matematicamente escrevemos:

$$DT_i = x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} + d_i \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Os coeficiente técnicos de insumo, valores da tabela insumo-produto normalizados, são calculados por meio de:

$$t_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{DT_j} \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{2}$$

então obtemos a Tabela 2, tecnológica de Insumo-Produto.

| Produtos / Insumo | 1 - Agricultura | 2 - Manufaturas | 3 - Serviços |
|---|---|---|---|
| 1 - Agricultura | 0.15 | 0.10 | 0.20 |
| 2 - Manufaturas | 0.30 | 0.05 | 0.30 |
| 3 - Serviços | 0.20 | 0.30 | 0.00 |

Tabela 2: Tabela tecnológica de Insumo-Produto (Adaptado da "dissert. de Sérgio José Rech")

# Modelos econômicos de Leontief

Agora, substituindo a relação (2) na igualdade (1) encontramos:

$$DT_i = t_{i,1}DT_1 + t_{i,2}DT_2 + t_{i,3}DT_3 + d_i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3}$$

que é uma igualdade válida de fato para nosso exemplo. Basta ver que

$$\begin{aligned} DT_1 &= t_{1,1}DT_1 + t_{1,2}DT_2 + t_{1,3}DT_3 + d_1 \\ DT_2 &= t_{2,1}DT_1 + t_{2,2}DT_2 + t_{2,3}DT_3 + d_2 \\ DT_3 &= t_{3,1}DT_1 + t_{3,2}DT_2 + t_{3,3}DT_3 + d_3 \end{aligned} \tag{4}$$

ou

$$\begin{aligned} 300 &= 0.15 \times 300 + 0.10 \times 600 + 0.20 \times 450 + 105 \\ 600 &= 0.30 \times 300 + 0.05 \times 600 + 0.30 \times 450 + 345 \\ 450 &= 0.20 \times 300 + 0.30 \times 600 + 0.00 \times 450 + 210. \end{aligned}$$

Em outras palavras, as demandas totais (produções totais) de cada setor suprem as demandas normalizadas dos setores e a demanda externa.

# Modelos econômicos de Leontief

Por outro lado, já se sabe atualmente que:

1. os coeficiente técnicos são fixos, os setores usam insumos em proporções fixas já bem conhecidas, com a garantia de alguma qualidade aos produtos

mas não se controla (são desconhecidas)

2. a demanda externa
3. e a demanda total.

Denotando então $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} DT_1 \\ DT_2 \\ DT_3 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$

escrevemos as equações (4) sob a forma matricial $\mathbf{w} = \mathbf{T}.\mathbf{w} + \mathbf{d}$, ou ainda

$$\mathbf{w} - \mathbf{T}.\mathbf{w} = \mathbf{d} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{I} - \mathbf{T})\,\mathbf{w} = \mathbf{d} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}.\mathbf{w} = \mathbf{d} \quad \text{com} \quad \mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})$$

Da Álgebra linear temos finalmente que $\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{d}$, e $\mathbf{M}^{-1}$ é conhecida como a matriz inversa de Leontief. Ademais, só faz sentido no contexto econômico considerar $\mathbf{M}$ não singular, $\mathbf{T} \geq 0$, $\mathbf{d} \geq 0$, e $\mathbf{w} \geq 0$.

# Modelos econômicos de Leontief

## Cenário (1)

Considerando os dados $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 105 \\ 345 \\ 210 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.05 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0.00 \end{bmatrix}$ temos:

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1.3459 & 0.2504 & 0.3443 \\ 0.5634 & 1.2676 & 0.4930 \\ 0.4382 & 0.4304 & 1.2167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 105 \\ 345 \\ 210 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 600 \\ 450 \end{bmatrix}$$

que confirma nossos dados para a demanda total.

## Cenário (2)

Considerando os dados $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 210 \\ 345 \\ 210 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.05 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0.00 \end{bmatrix}$ temos:

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1.3459 & 0.2504 & 0.3443 \\ 0.5634 & 1.2676 & 0.4930 \\ 0.4382 & 0.4304 & 1.2167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 210 \\ 345 \\ 210 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 441.31 \\ 659.15 \\ 496.01 \end{bmatrix}$$

que implica nos aumentos de demanda total de: 47% na Agricultura, 9,8% na Manufatura, e 10,2% em Serviços.

# Modelos econômicos de Leontief

- Modelo fechado:

O modelo fechado é constituído pelas seguintes considerações:

A - os setores constituem um sistema onde realizam operações de trocas entre si;

B - não ocorre entrada ou saída de produtos do sistema constituído pelos setores;

C - o consumo total de cada produto é o mesmo que a sua produção total;

D - os custos são integralmente pagos pelos lucros.

Portanto, o sistema se encontra em equilíbrio, conservado.

# Modelos econômicos de Leontief

Por exemplo, numa situação idealizada, considere 3 setores interagindo, segundo a Tabela 3, com valores em reais.

| Insumo \ Produtos | Caça | Pesca | Agricultura |
|---|---|---|---|
| Caça | 2 | 4 | 4 |
| Pesca | 1 | 5 | 4 |
| Agricultura | 6 | 1 | 3 |

Tabela 3: Tabela Insumo-Produto (Adap. da referência (9))

Na Tabela 3, pela ótica das linhas, os valores em vermelho são vendas feitas pelos setores para os setores listados nas colunas, é o consumo intermediário/intersetorial.

Observe que a soma para cada coluna é conservativa.

# Modelos econômicos de Leontief

Rotulando $x_{i,j}$ como a venda do setor $i$ para o setor $j$, matematicamente escrevemos:

$$DT_i = x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Os coeficiente técnicos de insumo são normalizados por 10, cada setor fornece 10 unidades na comercialização. Ver a Tabela tecnológica 4.

| Insumo \ Produtos | 1 - Caça | 2 - Pesca | 3 - Agricultura |
|---|---|---|---|
| 1 - Caça | 0.2 | 0.4 | 0.4 |
| 2 - Pesca | 0.1 | 0.5 | 0.4 |
| 3 - Agricultura | 0.6 | 0.1 | 0.3 |

Tabela 4: Tabela tecnológica de Insumo-Produto (Adap. da referência (9))

Além disso, os coeficentes técnicos também são escritos pela relação

$$t_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{DT_j} \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{6}$$

# Modelos econômicos de Leontief

Denotando então $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} DT_1 \\ DT_2 \\ DT_3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$ escrevemos as equações (5), considerando (6), sob a forma matricial $\mathbf{w} = \mathbf{T}.\mathbf{w}$, ou ainda

$$\mathbf{w} - \mathbf{T}.\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{I} - \mathbf{T})\,\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}.\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{com} \quad \mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})\,.$$

Da Álgebra linear temos que $\mathbf{T}.\mathbf{w} = \mathbf{w}$ é um problema de autovalor/autovetor, com autovalor já definido igual a 1.

Só há sentido no contexto econômico considerar $\mathbf{M}$ tipo singular. De outra forma, só teremos o vetor solução trivial, que não tem interesse no contexto econômico.

Ademais, só faz sentido também no contexto econômico considerar $\mathbf{T} > 0$, e $\mathbf{w} > 0$.

Note que para o problema apresentado temos $det\,(\mathbf{M}) = 0$, logo $\mathbf{M}$ é singular.

# Modelos econômicos de Leontief

Cenário (1)

Considerando $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.4 \\ -0.1 & 0.5 & -0.4 \\ -0.6 & -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$

então segue que

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa \\ \kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \kappa \in \Re^{+} - \{0\}\,.$$

# Modelos econômicos de Leontief

Mais explicitamente, por exemplo quando $\kappa = 50$, ocorre que:

$$\begin{aligned} 50 &= 0.2 \times 50 + 0.4 \times 50 + 0.4 \times 50 \\ 50 &= 0.1 \times 50 + 0.5 \times 50 + 0.4 \times 50 \\ 50 &= 0.6 \times 50 + 0.1 \times 50 + 0.3 \times 50. \end{aligned}$$

Em outras palavras, as demandas totais (produções totais) de cada setor suprem as demandas normalizadas dos setores.

O que significa dizer que o sistema estará em equilíbrio sempre que $DT_i$ seguir a proporção escrita em $\mathbf{w}$ para todo $i$, qualquer que seja o $\kappa$ considerado.

# Modelo de Black e Scholes

O matemático Fischer S. Black (1938 - 1995) junto com o economista Myron S. Scholes (1905 - atual) chegaram a uma fórmula no final da década de 1960 que modelava a evolução da precificação de ativos por meio de um processo estocástico.

Em 1973 Black e Scholes publicaram o artigo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities (O preço das opções e passivos corporativos)*, detalhando a fórmula que hoje é conhecida como equação de Black-Scholes.

O Matemático Robert C. Merton (1944 - atual) expande as ideias sobre o modelo de Black-Scholes, e publica o artigo *Theory of Rational Option Pricing (Teoria do preço de opções racionais)*.

Em 1997, Merton e Scholes dividem o nobel de economia pelos estudos desenvolvidos no mercado de ações. Inelegível pela morte, Fischer S. Black é homenagiado pela Academia Sueca que premia com o Nobel.

# Modelo de Black e Scholes

O termo "opção" é um contrato que dá ao titular o direito (de comprar/vender) um determinado ativo-objeto (ação/título/bem), por um valor definido, em uma data determinada no futuro.

O que se negocia no presente, com preço definido e data para efetivação da operação, é o direito de compra ou venda de algo no futuro!

Existe a opção de compra que dá direito de compra do ativo, e a opção de venda que dá direito a venda do ativo.

Existem a opção americana, e a opção europeia. Em particular, a opção europeia é um contrato que permite o exercício do direito de compra ou de venda do ativo somente na data de vencimento.

A fórmula de Black-Scholes é um modelo:

- de precificação de opções tipo européia;
- que precifica o valor do contrato de opções via uma EDP de 2º ordem com termo fonte não nulo.

# Modelo de Black e Scholes

"Exemplo fictício: Hoje é 13/10/23, e o preço de mercado (PM) da ação da Petrobras **PETR** é de R$18,00"

| **mês** | J | F | M | A | M | J | J | A | S | O | N | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **call** | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
| **put** | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X |

**Opção de Compra $\longleftrightarrow$ call**

PETRA**20** $\Longleftrightarrow$ **R$1,00**

- PETR é o ativo objeto
- A é o mês de vencimento
- **20** é o preço de exercício (PE)
- **R$1,00** é o prêmio

Titular: paga o prêmio, tem direito de comprar

Lançador: recebe o prêmio, tem obrigação de vender

*In the money (itm)*: PE < PM

*Out the money (otm)*: PE > PM

**Opção de Venda $\longleftrightarrow$ put**

PETRM**18** $\Longleftrightarrow$ **R$1,00**

- PETR é o ativo objeto
- M é o mês de vencimento
- **18** é o preço de exercício (PE)
- **R$1,00** é o prêmio

Titular: paga o prêmio, tem direito de vender

Lançador: recebe o prêmio, tem obrigação de comprar

*In the money (itm)*: PE > PM

*Out the money (otm)*: PE < PM

# Modelo de Black e Scholes

Considerações:

1. o proprietário da opção adquire este direito de "propriedade" em um instante $t$ pagando um **prêmio** – que é o preço da opção – de compra $c_t$ ou de venda $v_t$;
2. $K$ é o preço de exercício (strike) definido no contrato da opção;
3. o tempo de vida – ou maturidade – de um contrato é definido por $T$;
4. no tempo $t = T$, vencimento do contrato, o proprietário decide se adquire ou vende a ação pelo preço $K$;
5. o preço à vista de uma ação na opção é definido por $X(t)$
6. os preços de opções de compra ou venda são definidos sob a forma $c = f(X(t), t) \equiv f(x, t)$, e $v = g(X(t), t) \equiv g(x, t)$, respectivamente;
7. uma call será vantajosa para o titular, se no vencimento $X(T) > K$
8. uma put será vantajosa para o titular se no vencimento $X(T) < K$

# Modelo de Black e Scholes

A questão fundamental modelada por Fischer S. Black, Myron S. Scholes e Robert C. Merton foi:

Para um tempo $t < T$,

qual é o valor do preço justo

$c = f(X(t), t)$ ou $v = g(X(t), t)$?

Existe algum modelo

que possa definir esse preço justo?

# Modelo de Black e Scholes

Equipe 1:

https://conteudos.xpi.com.br/aprenda-a-investir/relatorios/mercado-de-opcoes/

Equipe 2:

https://www.infomoney.com.br/guias/mercado-de-opcoes/

# Modelo de Black e Scholes

A dedução da EDP de Black e Scholes necessita de conceitos sobre Processos Estocásticos Geométricos Brownianos, e de hipóteses do mercado de ações. A bibliografia 10 deduz o modelo Black e Scholes, para uma call, sob a forma:

$$M_1 \begin{cases} \dfrac{\partial c\,(x,t)}{\partial t} + rX\dfrac{\partial c}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 X^2 \dfrac{\partial^2 c\,(x,t)}{\partial x^2} = rc\,(x,t) \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} c\,(x,t) = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to\infty} c\,(x,t) = X \quad ; \quad \lim\limits_{t\to T} c\,(X\,(t)\,,t) \end{cases}$$

cuja solução é dada por:

$$c\,(X(t)\,,t) = X(t)\,N\,(d_1) - Ke^{-r\tau}N\,(d_2)\,; \quad 0 \leq t < T; \quad X(T) > 0$$

com $\tau = T - t$, $d_1 = \dfrac{ln\left(\frac{X(t)}{K}\right) + \left(r + 0.5\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ e $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$, onde $r$ é a taxa de retorno do ativo livre de risco, $\sigma$ é a volatilidade, e $N$ é a distribuição normal acumulada.

# Modelo de Black e Scholes

A versão do modelo para uma put, é dada por:

$$M_2 \begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} + rX\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 X^2 \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = rv(x,t) \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} v(x,t) = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to\infty} v(x,t) = X \quad ; \quad \lim\limits_{t\to T} v(X(T),T) \end{cases}$$

cuja solução é dada por:

$$v(X(T),t) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - X(T)N(-d_1); \quad 0 \le t < T; \quad X(T) > 0.$$

Os modelos $M_{1/2}$ estão ainda um pouco longe de exibir resultados com acurada precisão. Um dos principais fatores que dificultam a obtenção de resultados mais precisos é a Volatilidade Implícita.

Não há concenso sobre a definição de Volatilidade Implícita, mas a melhor menciona que:

é uma expectativa da volatilidade do ativo-objeto refletida nos preços das opções negociadas.

# Modelo de Black e Scholes

As sensibilidades – medidoras do prêmio – denominadas Gregas, são definidas na tabela abaixo:

| Indicador | Call | Put |
|---|---|---|
| $\Delta = \left[\frac{\partial}{\partial X}\right]$ | $N(d_1)$ | $N(d_1) - 1$ |
| $\Gamma = \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2}\right]$ | $\frac{1}{X\sigma\sqrt{\tau}}\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}$ | |
| $\nu = \left[\frac{\partial}{\partial \sigma}\right]$ | $X\sqrt{\tau}\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}$ | |
| $\Theta = \left[\frac{\partial}{\partial t}\right]$ | $-\frac{X\sigma}{2\sqrt{\tau}}\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} - rKe^{-r\tau}N(d_2)$ | $-\frac{X\sigma}{2\sqrt{\tau}}\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} + rKe^{-r\tau}N(-d_2)$ |
| $\rho = \left[\frac{\partial}{\partial r}\right]$ | $K\tau e^{-r\tau}N(d_2)$ | $-K\tau e^{-r\tau}N(-d_2)$ |

# Modelo de Black e Scholes

Considerando que

$$N(\#) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\#} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

então temos

$$\begin{aligned} N'(\#) &= \frac{d}{d\#} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\#} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\#} \int_{-\infty}^{\#} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\#^2}. \quad \text{(T.F.C)} \end{aligned}$$

Ademais, de $d_1$ e $d_2$ vale o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} ln\left(\frac{X(t)}{K}\right) + \left(r + 0.5\sigma^2\right)\tau &= d_1 \sigma \sqrt{\tau} \\ ln\left(X(t)\right) - ln\left(K\right) + r\tau &= \frac{1}{2}\left[d_1^2 - \left(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\right)^2\right] \\ ln\left(X(t)\right) - \frac{1}{2}d_1^2 &= ln\left(K\right) - r\tau - \frac{1}{2}d_2^2 \end{aligned}$$

# Modelo de Black e Scholes

$$
\begin{aligned}
ln\left(X(t)\right) + ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}d_1^2 &= ln\left(K\right) - r\tau + ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}d_2^2 \\
ln\left[X(t)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\right] &= ln\left[Ke^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_2^2}\right] \\
X(t)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2} &= Ke^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_2^2} \\
X(t)\,N'\left(d_1\right) &= Ke^{-r\tau}N'\left(d_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad N'\left(d_1\right) = \frac{Ke^{-r\tau}}{X(t)}N'\left(d_2\right).
$$

De fato $\Delta\left(c\right) = \dfrac{\partial c}{\partial X} = N\left(d_1\right)$, pois:

$$
\frac{\partial c}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\left[X(t)\,N\left(d_1\right) - Ke^{-r\tau}N\left(d_2\right)\right]
$$

# Modelo de Black e Scholes

ou ainda

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X}\left[X(t)\,N\left(d_1\right) - Ke^{-r\tau}N\left(d_2\right)\right] \\
&= N\left(d_1\right) + X(t)\,N'\left(d_1\right)\frac{\partial d_1}{\partial X} - Ke^{-r\tau}N'\left(d_2\right)\frac{\partial d_2}{\partial X} \\
&= N\left(d_1\right) + X(t)\,N'\left(d_1\right)\frac{\partial d_1}{\partial X} - Ke^{-r\tau}N'\left(d_2\right)\frac{\partial}{\partial X}\left[d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\right] \\
&= N\left(d_1\right) + X(t)\,N'\left(d_1\right)\frac{\partial d_1}{\partial X} - Ke^{-r\tau}N'\left(d_2\right)\frac{\partial d_1}{\partial X} \\
&= N\left(d_1\right) + X(t)\,N'\left(d_1\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}X(t)} - Ke^{-r\tau}N'\left(d_2\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}X(t)} \\
&= N\left(d_1\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[N'\left(d_1\right) - \frac{Ke^{-r\tau}}{X(t)}N'\left(d_2\right)\right] \\
&= N\left(d_1\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ 0\ \right] = N\left(d_1\right)
\end{aligned}
$$

A dedução das outras gregas seguem de modo análogo!

# Modelo de Black e Scholes

Se $X$ é variável, $PE = 27.19$, $\sigma = 62.90$, $r = 13.25$ e $\tau = 0.16$ temos:

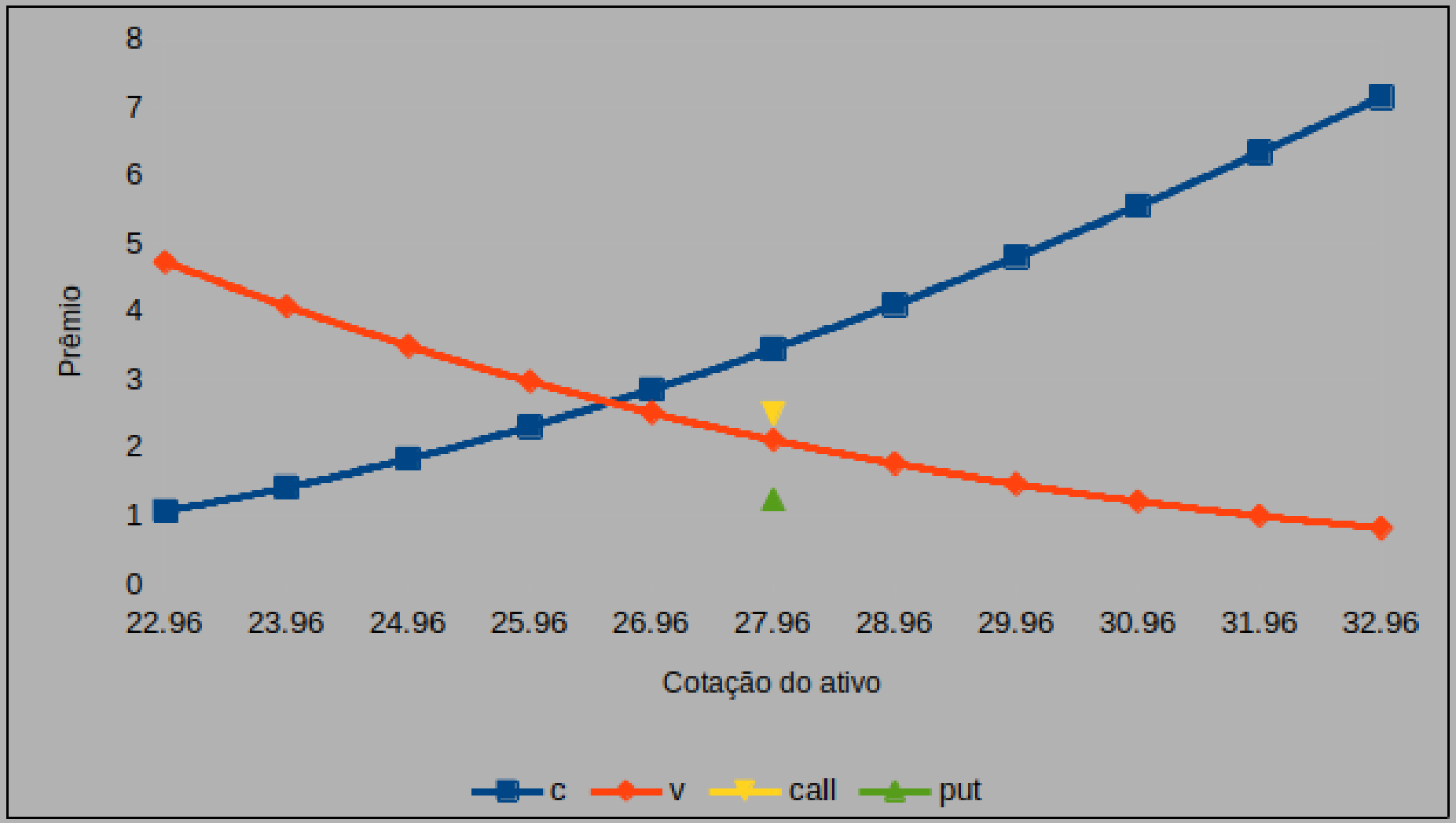



Figura 6: Aproximação da grega $\Delta$

# Modelo de Black e Scholes

Se $X = 27.96$, $PE$ é variável, $\sigma = 62.90$, $r = 13.25$ e $\tau = 0.16$ temos:

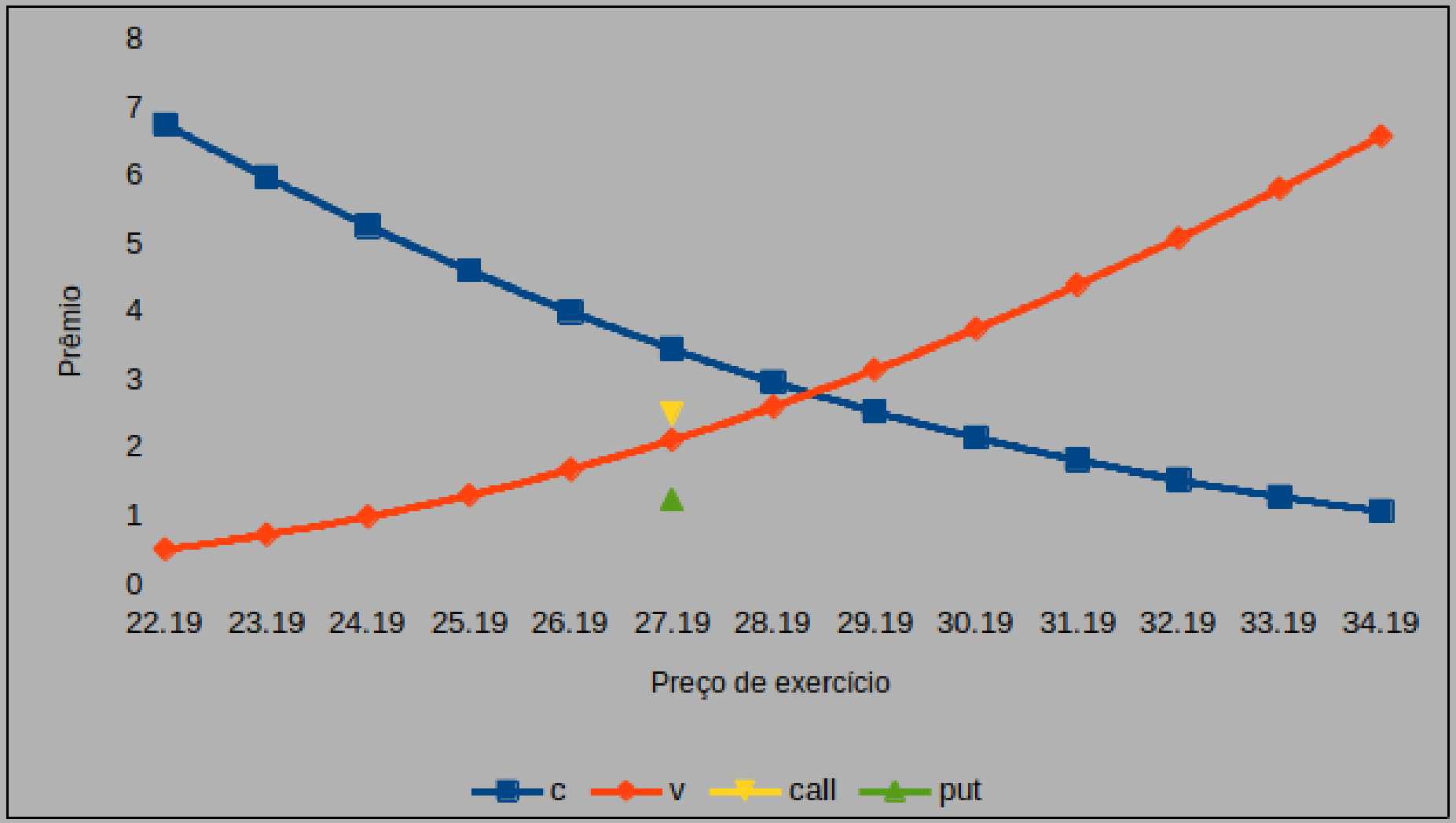



Figura 7: Aproximação da grega $\Gamma$

# Modelo de Black e Scholes

Se $X = 27.96$, $PE = 27.19$, $\sigma$ é variável, $r = 13.25$ e $\tau = 0.16$ temos:

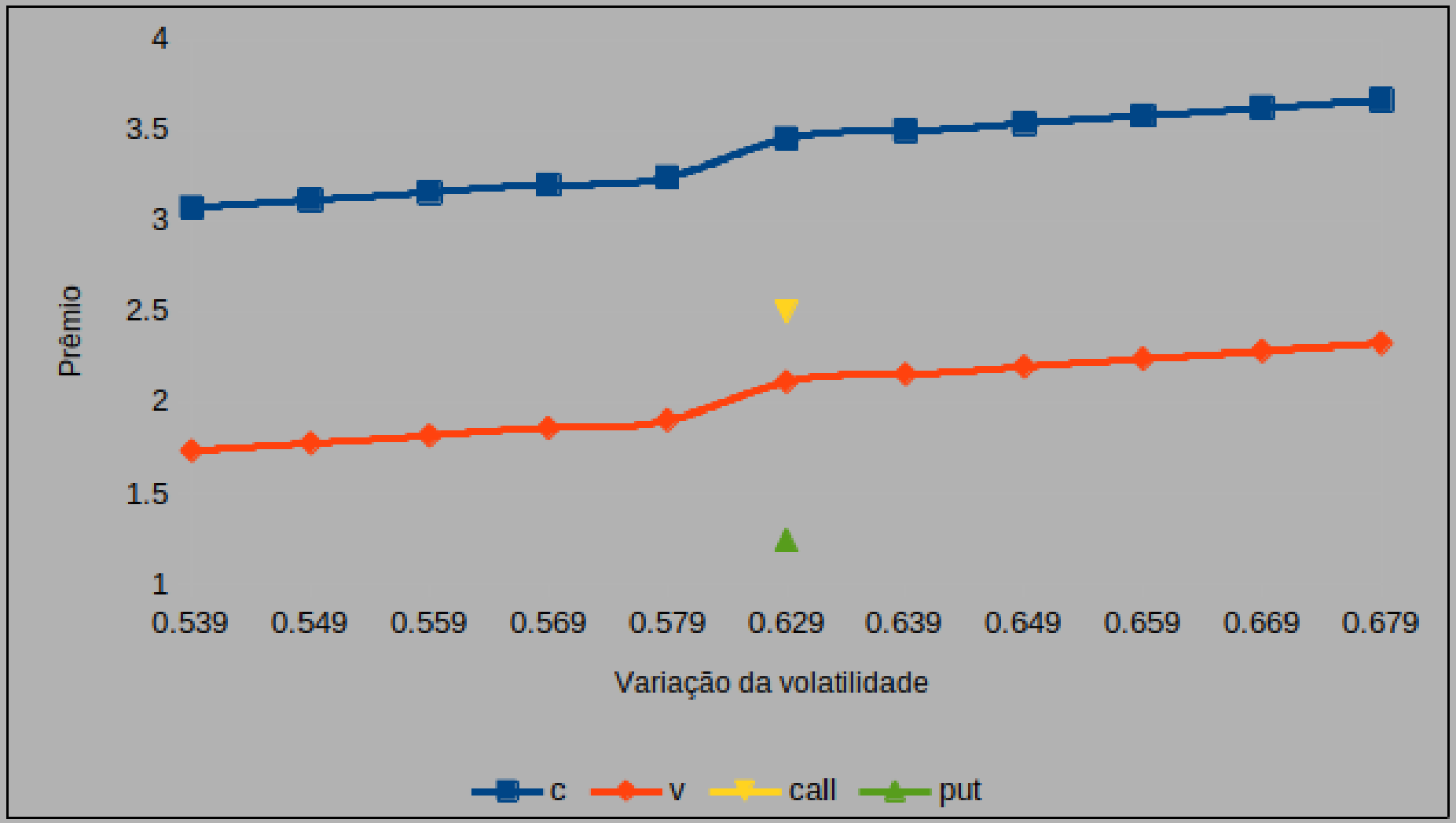



Figura 8: Aproximação da grega $\nu$

# Modelo de Black e Scholes

Se $X = 27.96$, $PE = 27.19$, $\sigma = 62.90$, $r$ é variável e $\tau = 0.16$ temos:

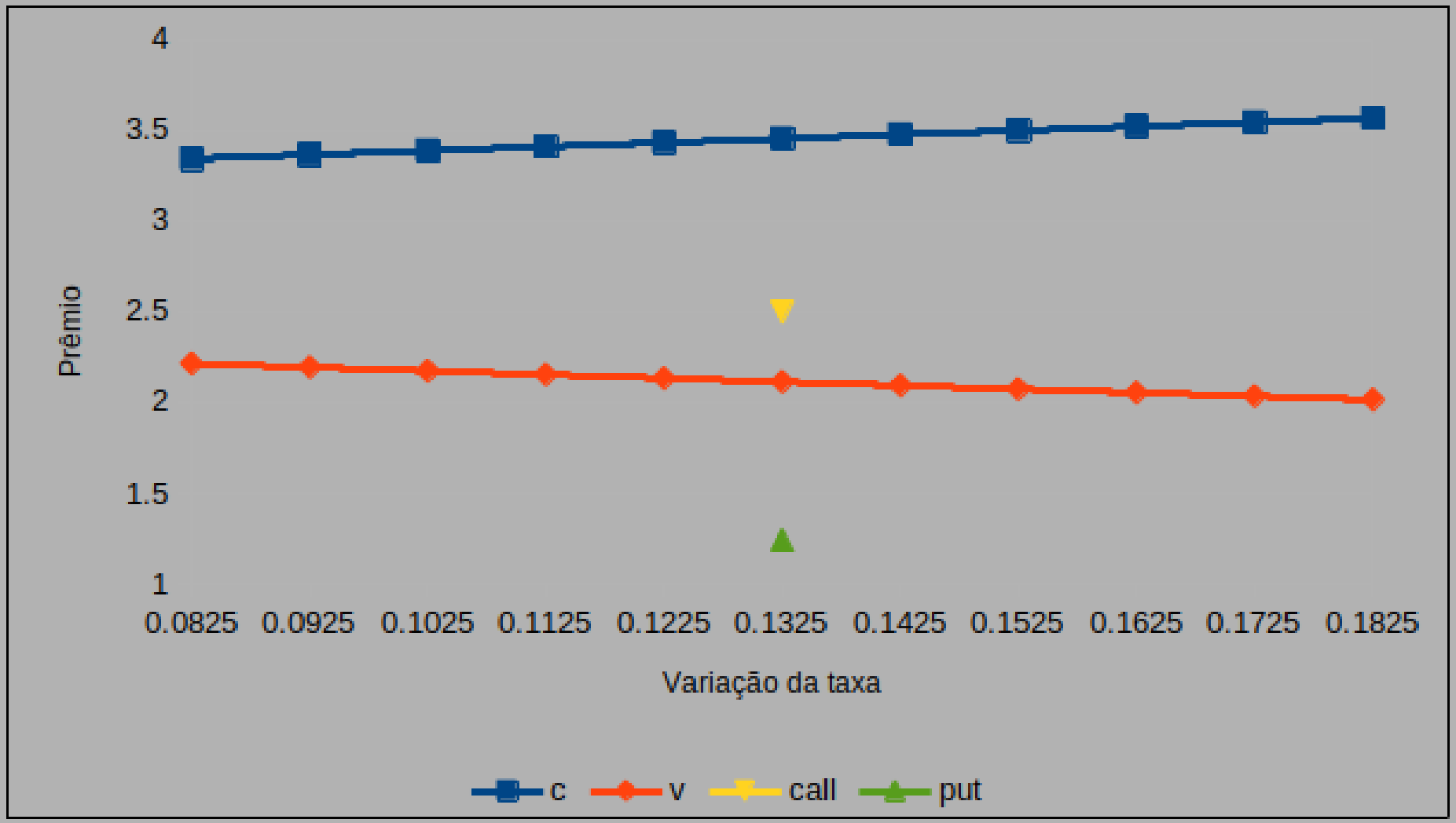



Figura 9: Aproximação da grega $\rho$

# Modelo de Black e Scholes

Se $X = 27.96$, $PE = 27.19$, $\sigma = 62.90$, $r = 13.25$, e $\tau$ é variável temos:

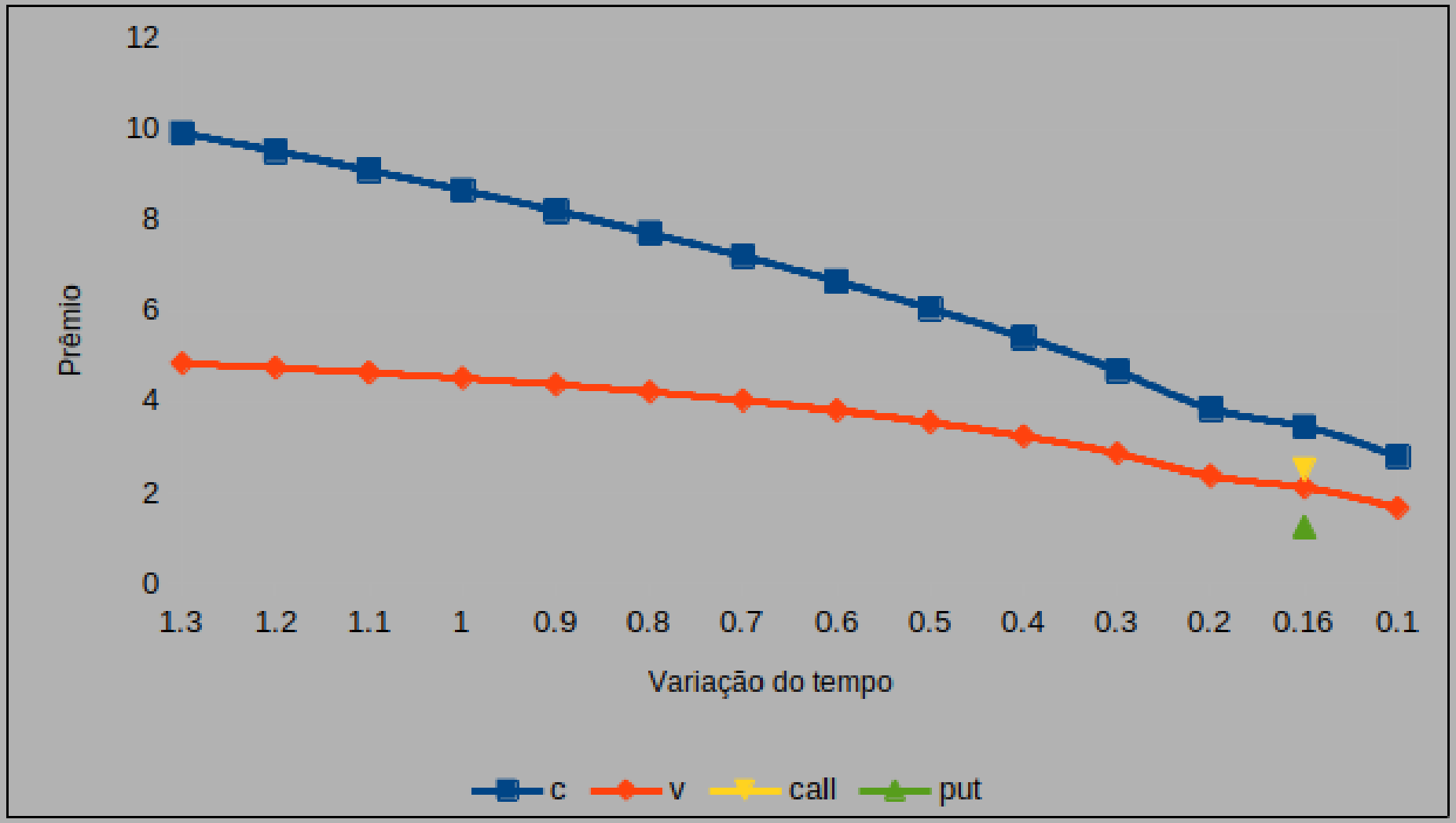



Figura 10: Aproximação da grega $\Theta$

# Sumário

5 Modelos Clássicos da Dinâmica Populacional

- Equação Reativa-Difusiva
- Equação Telegráfica-Reativa-Difusiva

# Equação Reativa-Difusiva

Consideremos as seguintes premissas:

A: 1º lei de Fick

$$J = -D\frac{\partial S}{\partial x} \tag{7}$$

B: Lei da Continuidade

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} + F(S), \tag{8}$$

então substituindo (7) em (8) temos

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-D\frac{\partial S}{\partial x}\right] + F(S) = D\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + F(S)$$

e portanto escrevemos que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + F(S) \tag{9}$$

onde $t$ é o tempo, $x$ a dimensão espacial, $S$ a densidade populacional de indivíduos invasores, $D$ o coeficiente de difusão destes invasores, $J$ é o fluxo de invasão, e finalmente $F(S)$ é o termo que governa o crescimento do número de indivíduos em termos da densidade populacional.

# Equação Reativa-Difusiva

Um modelo matemático que descreve a variação da densidade populacional (ocupação) no espaço unidimensional fica dado sob a forma

$$M_1 \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} &= D\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} + F(S) \\ S(0,x) &= S_0 & \text{(condição inicial)} \\ S(t,0) &= S(t,L) = 0 & \text{(condições de contorno)} \end{cases}$$

de modo que podemos fazer as seguintes considerações:

1. o problema é bem posto
2. possui solução analítica quando $F(S) = KS$ com $K \in \mathbb{R}$
3. muito artificial, pois
   - raramente observa-se fenômenos biológicos governados por crescimento do tipo $F(S) = KS$
   - a velocidade de propagação da onda é "infinita", e isto não é realístico em problemas biológicos

# Equação Reativa-Difusiva

Na referência bibliográfica (11) é mostrada a solução analítica do modelo $M_1$, considerando $F(S) = KS$, escrita por:

$$S(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(K - \frac{n^2\pi^2 D}{L^2}\right)t} \tag{10}$$

com $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L S_0 sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$.

Ademais, de $K - \frac{n^2\pi^2 D}{L^2} = 0$ deduz-se $L_c = \pi\sqrt{\frac{D}{K}}$ nomeado por comprimento crítico.

A população permanece constante se $L = L_c$ (quando as forças difusiva e reativa se igualam), aumenta quando $L > L_c$ (a força reativa é dominante), e decai se $L < L_c$ (a força difusiva é dominante). Este fato permite concluir que o tamanho do domínio também interfere na dinâmica da população.

# Equação Reativa-Difusiva

Equipe 1:

Deduzir a 1º lei de Fick

$$J = -D\frac{\partial S}{\partial x}$$

Equipe 2:

Deduzir a Lei da Continuidade

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} + F\left(S\right),$$

# Equação Telegráfica-Reativa-Difusiva

Um outro modelo matemático que descreve a variação da densidade populacional (ocupação) no espaço unidimensional fica dado sob a forma

$$M_2 \begin{cases} \tau \dfrac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \left[1 - \tau \dfrac{d}{dS} F(S)\right] \dfrac{\partial S}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} + F(S) \\ S(0,x) = S_0 \quad \dfrac{\partial S(0,x)}{\partial t} = 0 \qquad \text{(condições iniciais)} \\ S(t,0) = S(t,L) = 0 \qquad \text{(condições de contorno)} \end{cases}$$

de modo que podemos fazer as seguintes considerações:

1. o problema é bem posto
2. não possui solução analítica qualquer que seja a função $F(S)$
3. é um aprimoramento quando comparado ao modelo reativo-difusivo, pois
   - a velocidade de propagação da onda não é "infinita", e isto é realístico em problemas biológicos
   - contempla o parâmetro $\tau$ que modela o atraso com que as variações de $S$ ocorrem no domínio com o passar do tempo.

# Sumário

6 Modelo Clássico da Dinâmica dos Fluidos

- Conceitos Introdutórios
- Equação de Conservação da Massa
- Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

# Conceitos Introdutórios

As equações da mecânica dos fluidos são derivadas dos princípios de conservação: da massa e da quantidade de movimento para um fluido.

As variáveis de interesse das equações evolutivas são:

- a massa específica ($\rho(t, \mathbf{x})$)
- e a velocidade ($\mathbf{v}$)

onde $t$ é o tempo e $\mathbf{x}$ a posição no espaço.

As leis matemáticas que modelam os princípios de conservação em fluidos podem ser deduzidas pelo uso de sistemas, volumes e superfícies de controle, cujo vínculo entre estes é dado pelo Teorema do Transporte de Reynolds.

Por definição um sistema é uma certa quantidade de material (substância) composto sempre pelas mesmas partículas, que escoa e interage com o meio. O volume de controle é um volume no espaço através do qual o fluido escoa e a superfície de controle é a face deste volume (12).

# Conceitos Introdutórios

Considere $N$, um parâmetro físico (**propriedade extensiva**), e $n$ a quantidade deste parâmetro por unidade de massa (**propriedade intensiva**).

Seja ainda $m$ a massa de uma porção analisada tal que $N = m.n$, então o Teorema de Transporte de Reynolds é formulado como:

$$\left.\frac{DN}{Dt}\right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} n\rho dV + \int_{sc} n\rho\left(\mathbf{v}.\mathbf{n}\right)dA \tag{11}$$

onde:

- $\left.\frac{DN}{Dt}\right|_{\text{sistema}}$ é a taxa temporal da propriedade extensiva no sistema
- $\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} n\rho dV$ é a taxa temporal da propriedade extensiva no volume de controle $vc$
- $\int_{sc} n\rho\left(\mathbf{v}.\mathbf{n}\right)dA$ é a vazão líquida da propriedade extensiva através da superfície de controle $sc$.

# Conceitos Introdutórios

$$\left.\frac{DN}{Dt}\right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} n\rho dV + \int_{sc} n\rho\left(\mathbf{v}.\mathbf{n}\right) dA$$

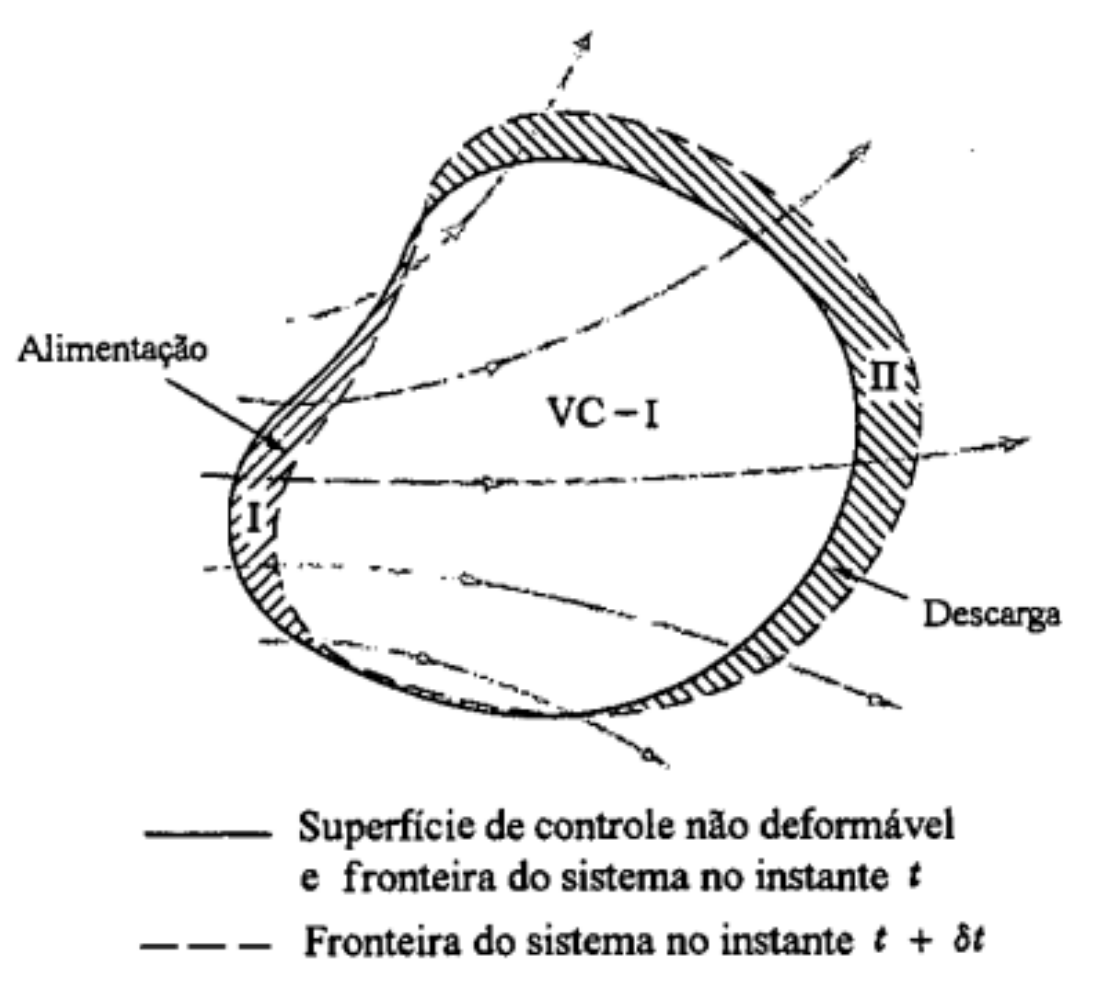



Figura 11: Volume e sistema na perspectiva de um observador junto ao volume.

# Equação de Conservação da Massa

Admitindo que:

1. a massa total do sistema seja $\mathrm{M}_{\text{sistema}} = \int_{sistema} \rho dV$
2. e as propriedades extensiva e intensiva sejam $N = \mathrm{M}_{\text{sistema}}$, e $n = 1$,

de (11) obtemos $\frac{D}{Dt}\int_{sistema} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho\left(\mathbf{v}.\mathbf{n}\right) dA.$

Se o princípio de conservação da massa é assumido, a taxa de variação da massa do sistema deve ser nula, logo a forma integral fica

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho\left(\mathbf{v}.\mathbf{n}\right) dA = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho dV + \int_{vc} div\left(\rho\mathbf{v}\right) dV.$$

Permutando a derivação com a integração e agrupando, pode-se escrever $\int_{vc}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)\right) = 0$, que implica afirmar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0. \quad \textbf{(eq. de cons. da massa)}$$

# Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

Se considerarmos uma partícula com massa $\rho dV$ movimentando-se a uma velocidade $\mathbf{v}$, a quantidade de movimento será $\rho dV\mathbf{v}$, logo a quantidade de movimento para um sistema ficará $\int_{sistema} \rho \mathbf{v} dV$.

Mas sabemos da $2^a$ lei de Newton para o sistema que

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_{\text{sistema}} &= m.\mathbf{a} = m.\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt}(m.\mathbf{v})_{\text{sistema}} \\ &= \frac{D}{Dt}\left(\int_{sistema} \rho \mathbf{v} dV\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Se o volume de controle coincide com o sistema, as forças no sistema atuam no conteúdo do volume de controle (cvc), assim é verdade que

$$\sum \mathbf{F}_{\text{sistema}} = \sum \mathbf{F}_{\text{cvc}} \tag{13}$$

# Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

Agora, se as propriedades extensiva e intensiva são respectivamente $N = \int_{sistema} \rho \mathbf{v} dV$ e $n = \mathbf{v}$, então de (11) obtemos

$$\frac{D}{Dt}\int_{sistema} \rho \mathbf{v} dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \mathbf{v} dV + \int_{sc} \rho \mathbf{v}\,(\mathbf{v}.\mathbf{n}) dA. \tag{14}$$

Combinando então (12), (13) e (14) a formulação matemática para da $2^a$ lei de Newton para volumes será

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_{\text{sistema}} &= \sum \mathbf{F}_{\text{cvc}} \\ \frac{D}{Dt}\left(\int_{sistema} \rho \mathbf{v} dV\right) &= \sum \mathbf{F}_{\text{cvc}} \\ \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \mathbf{v} dV + \int_{sc} \rho \mathbf{v}\,(\mathbf{v}.\mathbf{n}) dA &= \sum \mathbf{F}_{\text{cvc}} \end{aligned}$$

que resulta, via o Teorema de Gauss, na equação

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dV + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) dV = \sum \mathbf{F}_{\text{cvc}}$$

# Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

As forças que agem sobre o conteúdo do volume de controle são:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{cvc}} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b$$

onde $\mathbf{F}_s$ é a força total de contato (pressão e/ou cisalhamento) e $\mathbf{F}_b$ alguma(s) força(s) de campo (gravidade), então

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dV + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) dV = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b.$$

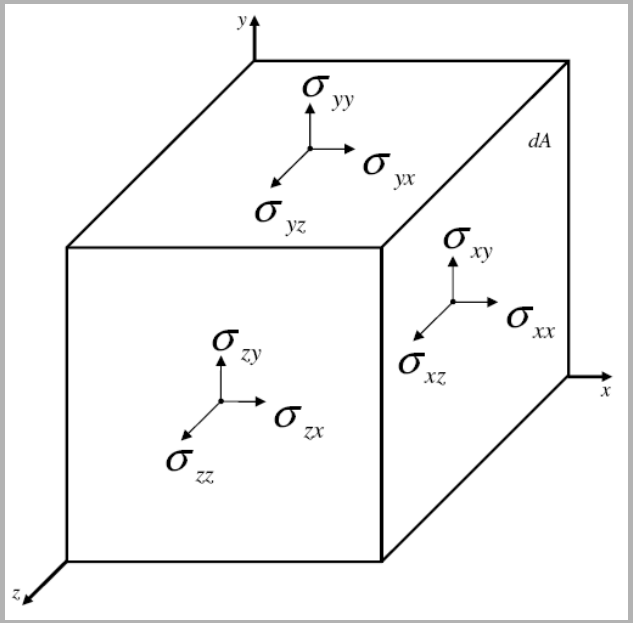



Figura 12: Ilustração das forças de tensão agindo sobre as faces de um volume.

# Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

A força $\mathbf{F}_s$ que age na superfície de um elemento de área $dA$ é dada por $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}dA$, figura 12, disto a força de contato total que age por toda a superfície de controle resulta em $\int_{sc} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}dA$; e a força $\mathbf{F}_b$ é dada por $\int_{vc} \rho\mathbf{g}dV$. Desta forma, a equação anterior é escrita por

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)dV + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)dV = \int_{sc} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}dA + \int_{vc} \rho\mathbf{g}dV \tag{15}$$

O $\boldsymbol{\sigma}$ é um tensor que modela a pressão e a tensão de cisalhamento. A pressão age para manter a integridade do volume, ela ocorre em sentido contrário ao vetor normal e a tensão cisalhante ocorre na face do mesmo.

Denotando os termos de pressão e cisalhamento como $\mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\tau}$ respectivamente, o tensor tensão fica

$$\sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \tag{16}$$

# Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

Note que a tensão de cisalhamento é um tensor de 9 componentes, então sua notação passa a ser na forma $\tau_{ij}$. Se o vetor $\mathbf{g} = g_i$, então as integrais do lado direito de (15) ficam

$$\int_{sc} \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} dA = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \qquad \text{e} \qquad \int_{vc} \rho \mathbf{g} dV = \int_{vc} \rho g_i dV$$

e finalmente (15) é escrita por

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dV + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) dV = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV + \int_{vc} \rho g_i dV$$

que é a **equação de conservação da quantidade de movimento** na forma integral. A equação acima é válida para todo $vc$, após algumas poucas manipulações matemáticas pode-se encontrar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \rho g_i \tag{17}$$

que é nomeada **equação de conservação da quantidade de movimento** na forma diferencial.

# Equação de Conservação da Quantidade de Movimento

Finalmente, um modelo geral para a dinâmica dos fluidos é escrito por:

$$M\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) &= 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) &= \dfrac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} + \rho g_i. \end{cases}$$

Vários modelos específicos podem ser construídos tais como:

- para fluidos compressíveis ou incompressíveis;
- newtonianos ou não-newtonianos;
- com superfície livre ou confinado;
- em regime laminar ou turbulento.

ou modelos muito mais sofisticados, por exemplo:

- problemas multifluidos, com interação entre fluidos;
- estudos em microfluidica aplicada em nanotecnologia;
- associados ao magnetismo, problemas de magnetohidrodinâmica;
- entre outros .....

# Sumário

7 Referências

- Referências

# Referências


1. James Stewart - 7º edição - V.2
2. Sérgio José Rech. Aplicação da Teoria das Matrizes Não-negativas e Matrizes-M ao Modelo de Leootief.
   https://lume.ufrgs.br/handle/10183/118197
3. Alexandre Porsse, Vinícius Vale. Insumo-Produto: Introdução e Modelos Regionais.
   https://nedur.ufpr.br/wp-content/uploads/2020/08/08-insumo-produto-modelos-regionais.pdf
4. Martim Novais Cálão. Álgebra Linear: Prova oral.
   https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~ppinto/AL1314/martim.pdf
5. José Lucian Brites Pinto. Estudo do Modelo de Precificação de Opções de Black Scholes.
   https://repositorio.unipampa.edu.br/jspui/handle/riu/7757

# Referências


6. James Stewart - 7º edição - V.2
7. Sérgio José Rech. Aplicação da Teoria das Matrizes Não-negativas e Matrizes-M ao Modelo de Leootief.
   https://lume.ufrgs.br/handle/10183/118197
8. Alexandre Porsse, Vinícius Vale. Insumo-Produto: Introdução e Modelos Regionais.
   https://nedur.ufpr.br/wp-content/uploads/2020/08/08-insumo-produto-modelos-regionais.pdf
9. Martim Novais Cálão. Álgebra Linear: Prova oral.
   https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~ppinto/AL1314/martim.pdf
10. José Lucian Brites Pinto. Estudo do Modelo de Precificação de Opções de Black Scholes.
    https://repositorio.unipampa.edu.br/jspui/handle/riu/7757

# Referências


11. Cirilo, E.; Petrovskii, S.; Romeiro, N., Natti, P. Investigation into the Critical Domain Problem for the Reaction-Telegraph Equation Using Advanced Numerical Algorithms. Int. J. Appl. Comput. Math (2019) 5: 54. doi: 10.1007/s40819-019-0633-z
https://link.springer.com/article/10.1007/s40819-019-0633-z

12. B. R. Munson and D. F. Young and T. H. Okiishi. Fundamentos da Mecânica dos Fluidos. Editora Edgard Blücher. 2004.