Cálculo I - Curso de Matemática - Matutino - 6MAT005

Prof. Ulysses Sodré - Londrina-PR, 17 de Abril de 2008 - provas2005.tex

TOME CUIDADO COM OS GRÁFICOS E DETALHES DA SUBSTITUIÇÃO UTILIZADA.

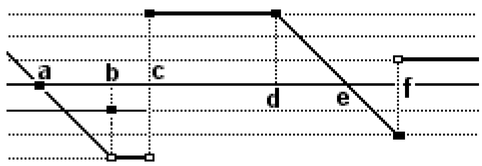
........................................................................................................

*"Porque está escrito: Por minha vida, diz o Senhor, diante de mim se dobrará todo joelho, e toda língua louvará a Deus."* Carta aos Romanos 14:11 A Bíblia Sagrada.

........................................................................................................

# 1 Funções Reais

1. Determinar o conjunto dos números reais para os quais é verdadeira a desigualdade $|2x-3| \leq |6-x|$. Justifique todos os passos utilizados.
2. (a) Definir função ímpar, (b) apresentar uma função ímpar, (c) mostrar que a função apresentada é ímpar e (d) plotar o gráfico da referida função.
3. (a) Construir um esboço gráfico, (b) determinar o domínio, (c) contradomínio e (d) imagem da função real definida por $f(x) = \sqrt{(x^2-16)(x+1)}$.
4. Seja a função $f : R \to R$ definida por $f(x) = 37\sin[0.2(x-100)] + 25$. Explique o significado geométrico das quatro constantes: 37, 0.2, 100 e 25.
5. (a) Apresentar o modo usado no Gnuplot para plotar $f : (-1,1) \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ no intervalo $(-1,1)$. (b) Obter a inversa da função real:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$
6. Analisar os limites laterais da função plotada, nos pontos `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`.




7. Apresentar 8 relações mostrando diferenças entre a trigonometria circular (à esquerda) e a trigonometria hiperbólica (à direita).
8. (a) Apresentar cinco propriedades das funções trigonométricas circulares. (b) Demonstrar uma das propriedades.
9. (a) Descrever o Problema-aplicação Número _ Página _ deixado para casa. (b) Explicar a utilidade e aplicação do problema. (c) Resolver o problema.

10. Apresentar pelo menos quatro (4) regras para calcular limites de funções, apresentando um exemplo simples para cada uma. Divida a área de trabalho em quatro partes, indicando com as letras (a), (b), (c) e (d).

## 2 Derivadas

1. Determinar a derivada da função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^x$.

2. Determinar a reta tangente e a reta normal ao gráfico da função $f : R \to R$ definida por $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ no ponto $x = \pi/4$.

3. Seja $f : [0, \infty) \to R$ a função definida $f(x) = \sqrt{x}$. Determinar o limite

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

4. Seja $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$. Determinar: (a) os pontos críticos de $f$, (b) os intervalos onde a função é côncava para cima ou para baixo, (c) os pontos de máximo, de mínimo ou de inflexão. (d) Construir um esboço do gráfico de $f$.

5. Dado o ponto $P = (3, 4)$ da curva $C$ definida por $x^2 + y^2 = 25$, obter a equação da: (a) reta tangente a $C$ no ponto $P$ e (b) reta normal a $C$ no ponto $P$.

6. Construir um esboço gráfico de uma curva contínua $y = f(x)$, sabendo-se que

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 2 | 0 | $-2$ |
| $f'(x)$ | 3 | 0 | não existe | $-3$ |
| $f''(x)$ | 0 | $-1$ | não existe | 0 |

7. Qual é a ligação entre a segunda derivada e a concavidade de uma curva plana? À luz do que você escreveu, analise a concavidade da curva $y = x^{2005}$.

8. Utilizando o teste da primeira derivada, identificar os intervalos de crescimento ou de decrescimento da função $f(x) = e^x(x^2 - 1)$.

9. Enunciar o Teorema do Valor Médio e apresentar uma aplicação deste teorema.

10. Escolher uma das questões: (a) Calcular $y' = y'(x)$ se $x^3 - y^3 + 9xy = 0$. (b) Usando derivada logarítmica, calcular a derivada de $f(x) = x^x$.

11. Um gerador de corrente contínua tem força eletromotriz de E volts e resistência interna de r ohms, onde E e r são constantes. Se R ohms for a resistência externa, a resistência total será de $(r + R)$ ohms e se P watts for a potência, então

$$P = \frac{R.E^2}{(r+R)^2}$$

Mostre que a potência máxima será consumida quando as resistências interna e externa forem iguais.

12. Um tanque cilíndrico aberto, deve ter um revestimento externo com $2cm$ de espessura. Se o raio interno for de $6m$ e a altura de $10m$, encontre, por diferenciais, a quantidade de material necessária para o revestimento.

13. Um tanque tem a forma de um cone circular reto invertido, com $4m$ de altura e $2m$ de raio de base. Se a água entra no tanque à razão de $0,001m^3/min$, calcule a razão na qual o nível de água está subindo quando a profundidade é de $1m$.

14. Usando a Regra de L'Hôpital, calcular o limite $K = \lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$.

## 3 Integrais

1. Calcular o comprimento do arco da curva $y = x^2$ para $0 \leq x \leq 10$.

2. Calcular a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = |x|$.

3. Utilizando o método de integração por partes, resolver o PVI:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + x + 1)e^{4x}, \qquad y(0) = 10$$

4. Utilizando o método das frações parciais, calcular a integral

$$I = \int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

5. Sem uso da tabela e justificando todos os passos, determinar a fórmula para:

$$F = \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

6. Calcular a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ no intervalo $[0, \pi]$.

7. Usando o método das Seções transversais, mostrar que o volume do sólido obtido pela rotação do círculo $x^2 + y^2 \leq r^2$ em torno do eixo y=0, é $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

8. Calcular o comprimento da curva $y = x^{3/2}$ desde $P = (0, 0)$ até $Q = (4, 8)$.

9. (a) Enunciar o Teorema do Valor Médio para integrais. (b) Obter o valor médio da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[-1, 5]$.

10. Resolver o PVI $\dfrac{dy}{dx} = 4x\sqrt[3]{x^2 + 8}$ tal que $y(0) = 0$.

11. (a) Qual é a principal diferença entre a regra de Simpson e a regra trapezoidal? (b) Usando a Regra trapezoidal, calcular a integral da função $f(x) = x^3$ sobre o intervalo $[-5, 5]$, utilizando 10 subintervalos (11 pontos na partição).

12. (a) Enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo. (b) Explicar a razão pela qual este teorema é **Fundamental** em Cálculo? (c) Apresentar uma aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo.

13. Enunciar as proposições ou definições: (a) Função contínua real. (b) Critério para máximos e mínimos. (c) Definição e exemplo de diferencial

14. Quais são as principais relações existentes entre derivadas e integrais de funções reais? Apresentar exemplos para justificar as suas respostas.

15. Descreva a ligação existente entre as somas de Riemann, partições de um intervalo, limites de sequências e a integral de uma função $f : [a, b] \to R$.

16. Usando o cálculo integral, calcular a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ no intervalo $[-1, 1]$.

17. Calcular o volume do sólido com seção transversal quadrada cujo lado da base possui extremidades nos pontos $(x, y)$ e $(x, -y)$ que estão na curva $x^2 + y^2 = 1$.

18. Calcular o comprimento do arco da curva $x^2 + y^2 = r^2, (r > 0)$, pelo uso de uma forma parametrizada $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

19. (a) Enunciar o Teorema do Valor Médio para integrais. (b) Calcular o valor médio da função $f(x) = x^2$ sobre $[-1, 1]$.

20. Resolver o Problema com Valor Inicial $\dfrac{dy}{dx} = y$ tal que $y(0) = 3$.

21. (a) Para que serve a regra de Simpson? (b) Usando a Regra de Simpson, calcular a integral de $f(x) = x^2$ sobre o intervalo $[-5, 5]$, com 10 subintervalos (11 pontos na partição).

22. Descrever a ligação existente entre somas, partições do intervalo $[a, b]$, limites de seqüências e a fórmula com integral que permite calcular o comprimento de arco de uma curva $y = f(x)$ onde $f : [a, b] \to R$ é uma função contínua.

23. Resolver a EDO de variáveis separáveis $\quad \dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1 - y^2} \quad$ onde $-1 < y < 1$.

24. Calcular a derivada de $y(x) = -\ln(x\sqrt{x + 1})$.

25. Usando a trigonometria hiperbólica, calcular a integral

$$I_3 = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

26. Simplificar o máximo possível a funcão $f : R \to R$ definida por

$$f(x) = \ln\{\cosh(x) + \sinh(x)\} + \ln\{\cosh(x) - \sinh(x)\}$$

27. Calcular a área da região delimitada pelas curvas $y = \dfrac{2\log_2(x)}{x}$ e $y = \dfrac{8\log_8(x)}{x}$ entre $x = 1$ e $x = e$. Qual é a proporção entre a área maior e a área menor?

28. Demonstrar (com todos os detalhes) a fórmula:

$$\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + K$$

29. Usando o método de *completar os quadrados* (com todos os detalhes) calcular:

$$I_7 = \int_2^4 \frac{2dx}{x^2 - 6x + 10}$$

30. Usando *integração por partes* (com todos os detalhes), calcular a integral

$$I_8 = \int (x^2 + x + 1)\ e^x\ dx$$

31. Usando o método das *frações parciais* (com todos os detalhes), calcular a integral

$$I_9 = \int \frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 - 10x}\ dx$$

32. Calcular o comprimento do arco da curva $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\log(x)}{4}$ para $1 \le x \le e$.

33. Mostrar que o volume do sólido obtido pela rotação da curva $x^2+y^2 = r^2$ $(r > 0)$ em torno do eixo $OX$ é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

34. Dividir a página em 4 partes e enunciar as seguintes proposições ou definições: (a) Teorema Fundamental do Cálculo. (b) Derivada de uma função real. (c) Teorema dos Valores Extremos. (d) Definição e exemplo de diferencial.

35. Apresentar dez (10) propriedades com derivadas e integrais, sendo 5 para a função logaritmo (esquerda) e 5 para a função exponencial (direita).

36. Qual é a principal diferença entre uma integral de $f$ e a área sob a função $f$? Apresentar pelo menos dois exemplos para justificar a sua resposta.

37. Utilizando o método de integração por partes, resolver a EDO $\dfrac{dy}{dx} = x^2 e^{4x}$.

38. Com o método das frações parciais, calcular $I = \displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\ dx$.

39. Com uma substituição trigonométrica da forma $x = a\cos(u)$, calcular a integral

$$J = \int \frac{x^3}{\sqrt{9 - x^2}}\ dx$$