Preliminares de Cálculo

Profs. Ulysses Sodré e Olivio Augusto Weber

Londrina, 21 de Fevereiro de 2008, arquivo: precalc.tex

. . . .

Conteúdo

1 Números reais

Seja $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R}, +, \cdot)$ o conjunto dos números reais com a operação de adição e multiplicação usuais. $\boldsymbol{R}$ é um corpo se valem os seguintes axiomas:

(A1) A operação $+$ é fechada em $\boldsymbol{R}$, isto é, se $x, y \in \boldsymbol{R}$, então $x + y \in \boldsymbol{R}$.

(A2) A operação $+$ é associativa, isto é, quaisquer que sejam $x, y, z \in \boldsymbol{R}$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

(A3) Existe um elemento nulo $0 \in \boldsymbol{R}$, tal que $0 + x = x + 0 = x$ para todo $x \in \boldsymbol{R}$. Este elemento nulo $0 \in \boldsymbol{R}$ é único.

(A4) Para cada $x \in \boldsymbol{R}$, existe um $-x \in \boldsymbol{R}$ tal que $x + (-x) = 0$. Este elemento $-x \in \boldsymbol{R}$ é o oposto de x e também é único, para cada x.

(A5) A operação $+$ é comutativa, isto é, quaisquer que sejam $x, y \in \boldsymbol{R}$

$$x + y = y + x$$

(M1) A operação $\cdot$ é fechada em $\boldsymbol{R}$, isto é, se $x, y \in \boldsymbol{R}$, então $x \cdot y \in \boldsymbol{R}$.

(M2) A operação $\cdot$ é associativa, isto é, quaisquer que sejam $x, y, z \in \boldsymbol{R}$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

(M3) Existe um elemento neutro $1 \in \boldsymbol{R}$, tal que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \boldsymbol{R}$. Este elemento neutro $1 \in \boldsymbol{R}$ é único.

(M4) Para cada $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$, existe um único $x^{-1} \in \boldsymbol{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$. O elemento $x^{-1} \in \boldsymbol{R}$ é o inverso de x que também é único.

(M5) A operação $\cdot$ é comutativa, isto é, quaisquer que sejam $x, y \in \boldsymbol{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

(D) A operação $\cdot$ é distributiva em relação à operação $+$, isto é, para quaisquer $x, y, z \in \boldsymbol{S}$, vale

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Exemplos: Algumas estruturas especiais.

1. O conjunto $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$ dos números inteiros com as operações usuais de adição e multiplicação, **não possui** a estrutura de corpo.

2. O conjunto $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{Q}, +, \cdot)$ dos números racionais com as operações usuais de adição e multiplicação, **possui** a estrutura de corpo.

3. O conjunto $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}, +, \cdot)$ dos números complexos com as operações usuais de adição e multiplicação, **possui** a estrutura de corpo.

1.1 Algumas propriedades do corpo R dos números reais

1. Para todo $x \in R$: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.
2. Quaisquer que sejam $x, y \in R$: $x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$
3. Quaisquer que sejam $x, y \in R$: $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.
4. Se $x, y \in R$ e $x \cdot y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.
5. Se $x, y \in R$ e $x \cdot y \neq 0$, então $x \neq 0$ e $y \neq 0$.
6. Se $x \in R - \{0\}$, então $(x^{-1})^{-1} = x$.
7. $-0 = 0$
8. Quaisquer que sejam $x, y \in R$: $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$
9. Quaisquer que sejam $x, y \in R$: $-(x - y) = y - x$
10. $1^{-1} = 1$.
11. Sejam $x, y \in R$ com $y \neq 0$: $\dfrac{x}{y} = 0$, se e somente se, $x = 0$.
12. Se $x, y, z \in R$ com $x \neq 0$, então $(x \cdot y = x \cdot z)$ implica que $y = z$.
13. Quaisquer que sejam $x, y, z \in R$: $y = z$ implica que $x \cdot y = x \cdot z$.
14. Quaisquer que sejam $a, b, c, d \in R$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ então
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
15. Quaisquer que sejam $a, b, c, d \in R$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ então
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
16. Quaisquer que sejam $x, y, z \in R$: $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.
17. Quaisquer que sejam $x, y, z \in R$: $(x - y) + (y - z) = x - z$.
18. Quaisquer que sejam $x, y, z \in R$: $(x - y) - (z - y) = x - z$.
19. Se $x, y, z \in R$: $(x - y) \cdot (z - w) = (x \cdot z + y \cdot w) - (x \cdot w + y \cdot z)$.
20. Sejam $x, y, z \in R$: $x - y = z - w$, se e somente se, $x + w = y + z$.
21. A equação $a \cdot x + b = 0$ possui:
    (a) possui uma única solução se $a \neq 0$.
    (b) não possui solução, se $a = 0$ e $b \neq 0$.
    (c) possui infinitas soluções, se $a = 0$ e $b = 0$.

1.2 O conjunto dos números reais positivos

Em $R = (R, +, \cdot)$ existe um subconjunto P, denominado o conjunto dos números positivos, satisfazendo às três propriedades seguintes:

1. se $x \in P$ e $y \in P$ então $x + y \in P$.
2. se $x \in P$ e $y \in P$ então $x \cdot y \in P$.
3. se $x \in R$ então, $x \in P$ ou $-x \in P$ ou $x = 0$.

Em geral, denotamos $-P = \{-x : x \in P\}$ e escrevemos

$$R = -P \cup \{0\} \cup P$$

Se $x \in P$, dizemos que x é positivo. Se $x \in -P$, dizemos que x é negativo.

1.3 Relação de ordem no corpo R dos números reais

Em $R = (R, +, \cdot)$ definimos a relação de ordem x **é menor que** y, denotada por $x < y$, se $y - x \in P$ e a relação y é maior que x, denotada por $y > x$, se $y - x \in P$. Com esta ordem, R passa a ser denominado CORPO ORDENADO.

Da definição de relação de ordem, segue que:

1. $x > 0$ equivale a $x - 0 = x \in P$
2. $x < 0$ equivale a $0 - x = -x \in P$ equivale a $x \in -P$

Notação:

1. $x \leq y$ significa $x < y$ ou $x = y$,
2. $x \geq y$ significa $x > y$ ou $x = y$.

1.4 Tricotomia

No corpo ordenado R vale **SOMENTE UMA** das três relações:

1. $x < y$,
2. $x > y$,
3. $x = y$.

1.5 Propriedades de ordem no conjunto dos números reais

1. Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.
2. Se $x < y$ então $x + z < y + z$.
3. Se $x < y$ então $x - z < y - z$.
4. Se $x < y$ e $z < w$ então $x + z < y + z$.
5. Se $x > 0$ então $x^{-1} > 0$.
6. Se $x < 0$ então $x^{-1} < 0$.
7. Se $x < y$ e $z > 0$ então $x \cdot z < y \cdot z$.
8. Se $x < y$ e $z > 0$ então $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$.
9. Se $x < y$ e $z < 0$ então $x \cdot z > y \cdot z$.
10. Se $x < y$ e $z < 0$ então $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$.
11. Se $0 < x < y$ e $0 < z < w$ então $0 < x \cdot z < y \cdot w$.
12. Se $x > 0$ e $y > 0$ então $0 < x + y$.
13. Se $x > 0$ e $y > 0$ então $0 < x \cdot y$.
14. Se $x > 0$ e $y < 0$ então $x \cdot y < 0$.
15. Se $x \in K$ então $x^2 \geq 0$.
16. Se $x \in K - \{0\}$ então $x^2 > 0$.
17. Se $0 < x < y$ então $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
18. $0 < 1$.
19. Se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$.

1.6 Módulo ou Valor absoluto

Se $x \in R$, definimos a função valor absoluto de x (ou módulo de x), por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observações: Em Cálculo e Análise, a função modular é definida por $f : R \to R$ através de $f(x) = |x|$. O módulo de x, representa geometricamente, a distância de x até 0, mesmo que x seja positivo ou negativo.

Exemplos:

1. $|0| = 0$.
2. $|5| = |-5| = 5$.
3. $|5 - \sqrt{2}| = 5 - \sqrt{2}$.
4. $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$.
5. $|5|^2 = 5^2 = 25$
6. $|(-5)|^2 = |5|^2 = 5^2 = 25$

Distância entre dois pontos na reta: A distância entre dois números $x \in R$ e $y \in R$ é definida por

$$d(x, y) = |x - y|$$

Quando $y \leq x$ (y está à esquerda de x) , a distância pode ser calculada por $d(x, y) = x - y$, sem o uso do módulo.

Exemplo: $d(-10, 15) = |(-10) - (15)| = |-25| = 25$.

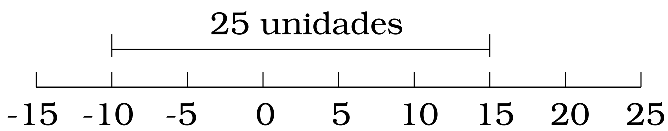

Figura 1: Distância entre pontos na reta

1.7 Algumas propriedades importantes do valor absoluto

Para quaisquer $x, y, z \in R$, valem as seguinte propriedades modulares:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $|x^2| = |x|^2$
6. $|x| \leq y$, sse, $-y \leq x \leq y$
7. $|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$
8. $-|x| \leq x \leq |x|$
9. $|x + y| \leq |x| + |y|$
10. $|x - y| \leq |x| + |y|$
11. $|\,|x| - |y|\,| \leq |x \pm y|$
12. $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$

1.8 Máximo e mínimo entre dois números

Sejam $x, y \in R$. Definimos o máximo e o mínimo entre x e y, como:

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{se} \quad y \leq x \\ y & \text{se} \quad x < y \end{cases} \qquad \min(x, y) = \begin{cases} y & \text{se} \quad y \leq x \\ x & \text{se} \quad x < y \end{cases}$$

Observação: Desenhe em uma reta numerada um valor de x à esquerda de y e constate que $\min(x, y) = x$ e que $\max(x, y) = y$.

1.9 O corpo R dos números reais é completo

Existem diversas formas analíticas para caracterizar o fato que o conjunto R dos números reais é COMPLETO. Do ponto de vista geométrico, afirmar que o conjunto R dos números reais é completo, significa que existe uma função bijetora que associa a cada número de R um único ponto em uma reta geométrica. Por causa deste fato, muitas propriedades envolvendo os números reais podem ser obtidas tanto do ponto de vista analítico, como do ponto de geométrico.

1.10 Os racionais e os irracionais são densos em R

Afirmar que o conjunto Q dos números racionais é DENSO no conjunto R dos números reais, equivale a dizer que todo intervalo (por menor que seja) aberto (a, b) onde $a, b \in R$ possui infinitos números racionais. A densidade também é válida para o conjunto dos números irracionais. Sob este ponto de vista, entre dois valores aproximados de π, como por exemplo, $3,14$ e $3,15$, existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

2 Equações e curvas no plano cartesiano

2.1 O sistema cartesiano

O sistema cartesiano ortogonal é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais. Em geral, $(x, y) \neq (y, x)$. Tal sistema possui dois eixos OX e OY que se cortam formando um ângulo reto, daí o termo *ortogonal*. Um par ordenado $P = (x, y)$ possui duas coordenadas x e y, sendo a medida x a abscissa de P e a medida y a ordenada de P. O eixo OX (horizontal) é o eixo das abscissas e o eixo OY (vertical) é eixo das ordenadas. Este sistema possui quatro regiões denominadas quadrantes.

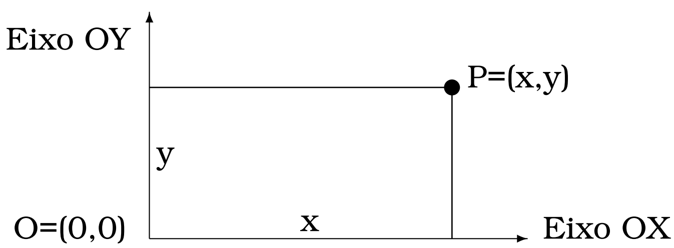

Figura 2: Ponto no sistema cartesiano

2.2 Teorema de Pitágoras

No triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa a é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos b e c, isto é, $a^2 = b^2 + c^2$.

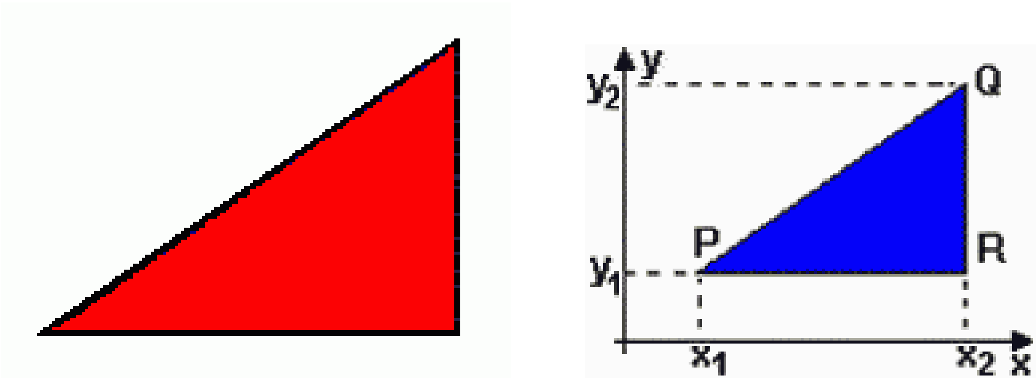

Figura 3: Um triângulo retângulo e a Distância entre dois pontos

2.3 Distância entre dois pontos no plano cartesiano

Para obter a distância entre os pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ do sistema cartesiano, traçamos as projeções destes pontos sobre os eixos coordenados e assim nós identificamos um triângulo retângulo e usamos o Teorema de Pitágoras para obter a hipotenusa. Você sabe qual é a origem da palavra *hipotenusa*?

A distância entre P e Q é a medida do segmento PQ que corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo PQR, sendo que o segmento PR é um cateto e o segmento QR é o outro cateto, logo:

$$[d(P,Q)]^2 = [d(P,R)]^2 + [d(Q,R)]^2$$

Como

$$\begin{aligned} d^2(P,R) &= |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 \\ d^2(Q,R) &= |y_1 - y_2|^2 = (y_1 - y_2)^2 \end{aligned}$$

então

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Exemplos: A distância entre $P = (2,3)$ e $Q = (5,12)$ é dada por:

$$d(P,Q) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-12)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

A distância entre a origem $O = (0,0)$ e um ponto $P = (x,y)$ é dada por:

$$d(P,Q) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2.4 Ponto médio e centro de gravidade

Ponto médio de um segmento: Dados os pares ordenados $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, obtemos o ponto médio $M = (x_m, y_m)$ localizado entre P e Q por duas médias aritméticas, uma para as abscissas e outra para as ordenadas, isto é:

$$M = (x_m, y_m) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

Centro de gravidade: O centro de gravidade de um triângulo plano cujos vértices são $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ é dado por duas médias aritméticas, uma para as abscissas e outra para as ordenadas:

$$G = (\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$$

2.5 Lugar geométrico

Lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos de uma região (plana ou espacial) que satisfazem a uma ou mais condições geométricas dadas.

Na seqüência, apresentaremos alguns LUGARES GEOMÉTRICOS especiais encontrados no plano cartesiano R^2 e normalmente tratados em Geometria Analítica.

Circunferência (Figura 4) é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in R^2$ que estão a uma MESMA DISTÂNCIA r de um ponto fixo $(a, b) \in R^2$. r é a medida do raio da circunferência e o ponto (a, b) é o centro da circunferência. Este conjunto de pontos pode ser descrito por:

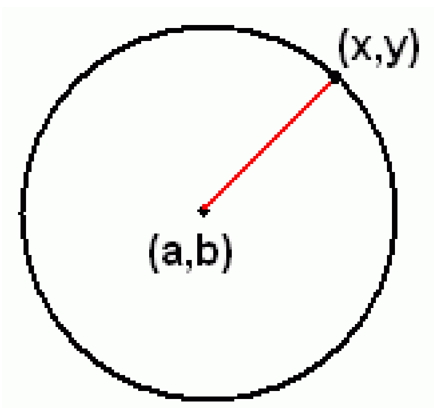

Figura 4: Uma circunferência no plano cartesiano

$$C = \{(x, y) \in R^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

Parábola (Figura 5) é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in R^2$ que estão a uma MESMA DISTÂNCIA de um ponto fixado $F \in R^2$ e de uma reta fixada no plano. O ponto F é o foco da parábola e a reta fixada recebe o nome de **diretriz** da parábola. Como um caso particular, se

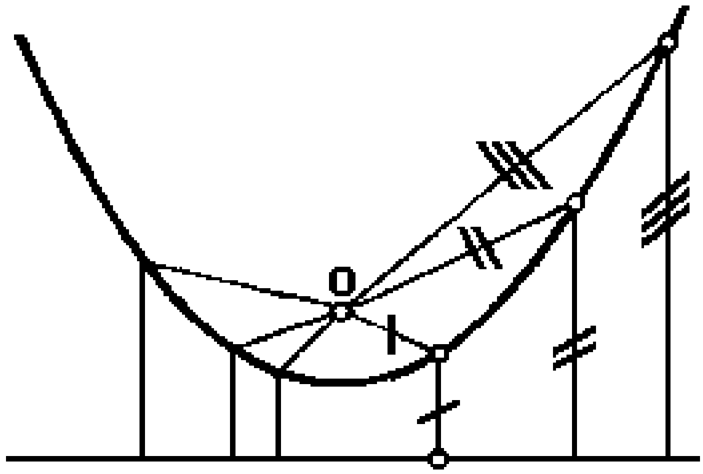

Figura 5: Uma parábola no plano cartesiano

$F = (c, 0)$ e a distância entre o foco F e a reta diretriz é dada por $2c$, a parábola pode ser descrito por:

$$C = \{(x, y) \in R^2 : 4cx = y^2\}$$

Elipse é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in R^2$ cuja SOMA DAS DISTÂNCIAS destes pontos a dois pontos fixos $F_1, F_2 \in R^2$ é constante. F_1 e F_2 são os focos da elipse. Como um caso particular, quando $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, a distância focal é dada por $d(F_1, F_2) = 2c$, e a elipse é dada pelo conjunto:

$$C = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

onde $2a$ é a medida do eixo contendo os focos F_1 e F_2, $2b$ é a medida do eixo transversal e além disso vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Na elipse, a excentricidade é definida por $\varepsilon = c/a$.

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in R^2$ cuja DIFERENÇA DAS DISTÂNCIAS destes pontos a dois pontos fixos $F_1, F_2 R^2$ é constante. F_1 e F_2 são os focos da hipérbole. Como um caso particular, quando $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, a distância focal é dada por $d(F_1, F_2) = 2c$, e a hipérbole é dada pelo conjunto:

$$C = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

onde $2a$ é a medida do eixo contendo os focos F_1 e F_2, $2b$ é a medida do eixo transversal e além disso vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$. Na hipérbole, a excentricidade é definida por $\varepsilon = c/a$.

Lemniscata (em grego: em forma de cinta) é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in R^2$ cujo PRODUTO DAS DISTÂNCIAS de tais pontos a dois pontos fixos $F_1, F_2 \in R^2$ é constante. F_1 e F_2 são os focos da lemniscata.

2.6 Circunferências no plano cartesiano

Uma circunferência no plano euclidiano com centro (h, k) e raio $r > 0$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in R^2$ tal que $d[(x, y), (h, k)] = r$ que é equivalente a

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevando a quadrado, obtemos

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

e esta é a equação canônica da circunferência.

Exemplo: A equação da circunferência com centro $(-1, 2)$ e raio $r = 6$ é dada por $(x+1)^2+(y-2)^2 = 36$. Os PONTOS NOTÁVEIS desta circunferência são $(-5, 2)$ (ponto mais em cima), $(-7, 2)$ (ponto mais à esquerda), $(-1, 8)$ (ponto mais à direita) e $(-1, -4)$ (ponto mais em baixo).

Na sequência, completaremos alguns quadrados. Se $a \neq 0$, então

$$\begin{aligned} aS^2 + bS + c &= aS^2 + 2\frac{b}{2a}S + c \\ &= a(S^2 + 2\frac{b}{2a}S + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a(S + \frac{b}{2a})^2 + -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Exemplo: Dada a forma canônica da equação da circunferência C por

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y - 9 = 0.$$

obteremos o centro e o raio da circunferência, completando os quadrados

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 = 9 + 36 + 4$$

para obter

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 49 = 7^2$$

O centro é $(6, 2)$ e o raio é 7. Os pontos $(-1, 2)$, $(13, 2)$, $(6, -5)$ e $(6, 9)$ estão na circunferência.

Exemplo: Para obter a equação da circunferência C com centro em $(-1, 1)$, passando pelo ponto $(1, 2)$, devemos calcular o raio de C. Como o raio é a distância do centro a qualquer ponto da circunferência, temos que

$$r = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \approx 2.236.$$

A equação toma a forma

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5.$$

Exemplo: Se um diâmetro da circunferência C liga os pontos $(-2,-5)$ e $(4,3)$, podemos obter o centro de C que é o ponto médio do diâmetro, como $C = ((-2+4)/2, (-5+3)/2) = (1,-1)$. A equação de C é

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = R^2.$$

Para obter o raio, observe que $(4,3)$ está na circunferência, assim

$$(4-1)^2 + (3+1)^2 = R^2$$

garantindo que $R = 5$. A equação da circunferência é

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$

Os pontos $(-2,-5)$, $(4,3)$, $(-4,-1)$, $(6,-1)$, $(1,4)$ e $(1,-6)$ estão sobre a circunferência.

Exemplo: Para obter a forma canônica da circunferência C que passa pelos pontos $(1,1)$, $(0,1)$ e $(1,2)$, devemos determinar o centro (h,k) de C que é o ponto eqüidistante dos pontos dados, obtido pela resolução do sistema

$$\begin{aligned}(h-1)^2 + (k-1)^2 &= h^2 + (k-1)^2\\ (h-1)^2 + (k-1)^2 &= (h-1)^2 + (k-2)^2\end{aligned}$$

O sistema fornece $h = \frac{1}{2}$, $k = \frac{3}{2}$ e o centro de C é $(h,k) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

O raio de C é a distância do centro a um ponto em C, por exemplo $(0,1)$:

$$\sqrt{(1/2)^2 + [(3/2)-1]^2} = \sqrt{2}/2$$

A equação toma a forma

$$(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

Exemplo: Para obter a equação da circunferência C centrada em $(3,4)$ e tangente à reta $x - 2y + 3 = 0$, calcularemos o raio de C como a distância do centro C à reta tangente r pela fórmula da distância de P a r:

$$r = d(P,r) = |\frac{3 - 2\cdot 4 + 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

A equação é

$$(x-3)^2 + (x-4)^2 = \frac{4}{5}$$

2.7 Círculos no plano cartesiano R2

Um círculo em R^2 com centro em (h, k) e raio $r > 0$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in R^2$ tal que $d[(x, y), (h, k)] \leq r$ que é equivalente a

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} \leq r$$

Elevando a quadrado, obtemos

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 \leq r^2$$

Exemplo: Sejam os círculos

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \\ R_2 &= \{(x, y) \in R^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

Com um gráfico, observe que a região $R_1 - R_2$ é composta da área dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ mas fora da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

2.8 Curvas cônicas de uma forma unificada

Uma curva cônica é definida como sendo o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in R^2$ tal que as distâncias destes pontos $P = (x, y)$ até um ponto fixo (foco) $F = (c, 0) \in R^2$ sejam proporcionais às distâncias destes pontos $P = (x, y)$ a uma reta d fixa (diretriz) no plano R^2.

A relação de proporcionalidade é dada por:

$$\varepsilon = \frac{PF}{Pd} = \frac{d(P, F)}{d(P, d)}$$

A constante de proporcionalidade ε é a **excentricidade** da curva e dependendo de seu valor numérico teremos tipos diferentes de curvas cônicas:

1. Se $\varepsilon = 1$ a curva será denominada parábola.
2. Se $\varepsilon < 1$ a curva será denominada elipse.
3. Se $\varepsilon > 1$ a curva será denominada hipérbole.

Se a diretriz da curva cônica for a reta $x = 0$, o foco $F = (c, 0)$, $P = (x, y)$ e $D = (0, y)$ está sobre a diretriz, então $PF = \varepsilon \; PD$.

Como $PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ e $PD = |x|$, temos que:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon \; |x|$$

Elevando ao quadrado, simplificando e tomando $\varepsilon = 1$ obtemos a parábola:

$$y^2 = 2c(x - \frac{c}{2})$$

Se fizermos a translação desta curva com a mudança de variáveis

$$Y = y \qquad X = x - \frac{c}{2}$$

teremos a curva simplificada nas novas variáveis

$$Y^2 = 2cX$$

Se $\varepsilon \neq 1$, faremos a mudança de variáveis

$$X = x - \frac{c}{1-\varepsilon^2}, \qquad Y = y$$

para obter a curva nas novas variáveis

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

onde usamos

$$a = \frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, \qquad b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$$

Esta elipse tem focos em $F_1 = (-a\varepsilon, 0)$ e $F_2 = (a\varepsilon, 0)$. As diretrizes são $x = -a/\varepsilon$ e $x = a/\varepsilon$. Tomando a se aproximando de $b = r$, as elipses se transformarão em uma circunferência de raio r. A excentricidade não é 0 mas nós a tomaremos como um número se aproximando de 0, razão pela qual consideramos a circunferência como uma elipse degenerada.

2.9 Parábola

Parábola é o LG dos pontos $P = (x, y) \in R^2$ que estão a uma mesma distância de um ponto fixo (foco) $F = (c, 0) \in R^2$ e de uma reta fixa d (diretriz) no plano R^2. O ponto da parábola mais próximo da diretriz é o vértice V. A reta perpendicular à diretriz passando por V é o eixo de simetria. O número c é o parâmetro focal. Para obter a equação da parábola, tomamos o eixo OX como o eixo de simetria, o vértice como $V = (0, 0)$, o foco $F = (c, 0)$ e a diretriz d como a reta $x = -c$.

Se $P = (x, y)$ é um ponto genérico da parábola, então $d(P, F) = d(P, d)$.

Tomando $d(P, F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ e $d(P, d) = |x + c|$, obteremos

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x + c|$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos uma equação da parábola:

$$y^2 = 4cx$$

Exemplo: $y = x^2$ e $x = y^2$ são parábolas que passam pela origem.

3 Exercícios para casa e para primeira prova

1. Obter o conjunto solução de números reais para cada desigualdade.

   (a) $5 < 3 - 2x < 12$

   (b) $5 \leq 3 - 2x < 12$

   (c) $5 < 3 - 2x \leq 12$

   (d) $5 \leq 3 - 2x \leq 12$

   (e) $\dfrac{5}{x+2} < \dfrac{3}{x-4}$

   (f) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$

2. Obter o conjunto solução para cada expressão matemática.

   (a) $|5x - 3| = 12$

   (b) $|5x - 3| < 12$

   (c) $|5x - 3| > 12$

   (d) $|5x - 3| \leq 12$

   (e) $|5x - 3| \geq 12$

   (f) $|5x - 3| = |x - 8|$

   (g) $\dfrac{|x-3|}{|x-8|} = 12$

   (h) $\dfrac{|5x-3|}{|3x+8|} = 12$

   (i) $|2x - 3| \leq |6 - x|$

   (j) $\dfrac{|x-3|}{|x-8|} \leq 12$

   (k) $\dfrac{|5x-3|}{|3x+8|} \geq 12$

3. Obter os domínios das funções reais.

   (a) $f(x) = \sqrt{-x^2}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

   (c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

   (d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   (e) $f(x) = \sqrt{(x^2 - 16)(x + 1)}$

   (f) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{1 - x}$

4. Demonstrar que para quaisquer $x, y \in R$:

   (a) $\max(x, -x) = |x|$

   (b) $\min(x, -x) = -|x|$

   (c) $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$

   (d) $\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$

   (e) $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$

   (f) $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

   (g) $\min(-x, -y) = -\max(x, y)$

5. Obter formas gerais para $\max(x, y, z)$ e $\min(x, y, z)$.

6. Obter formas gerais para $\max(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $\min(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

7. Obter formas gerais para $\max(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\min(x_1, x_2, ..., x_n)$.

8. Mostre que $(4, 2)$ e $(-2, -6)$ são pontos antípodas da circunferência centrada em $(1, -2)$ e raio 5.

9. Obter a equação da circunferência que passa por $(-1, 2)$ e possui centro em $(1, 3)$. Resposta: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$

10. O diâmetro de uma circunferência C possui extremidades em $A = (1, 2)$ e $B = (3, 4)$. Mostre que C é dada por $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

11. Obter a forma canônica da circunferência que passa pelos pontos $(-1,1)$, $(1,-2)$, e $(0,2)$. Resposta: $(x-\frac{9}{10})^2+(y-\frac{1}{10})^2=\frac{221}{50}$.

12. Um ponto $P=(x,y)\in R^2$ com coordenadas inteiras foi tomado ao acaso tal que $|x|\le 4$ e $|y|\le 4$. Se todos os pontos têm igual probabilidade de escolha, qual é a probabilidade que a distância de ponto $P=(x,y)$ até a origem $O=(0,0)$ seja no máximo igual a 2?

13. Para cada circunferência: (1) obter a forma canônica, (2) obter o centro C, (3) obter o raio r, (4) desenhar a circunferência e (5) indicar no desenho os quatro pontos notáveis.

    (a) $x^2+y^2-2y=35$
    Dica: $x^2+(y-1)^2=36, C=(0,1), r=6$

    (b) $x^2+4x+y^2-2y=20$
    Dica: $(x+2)^2+(y-1)^2=25, C=(-2,1), r=5$

    (c) $x^2+4x+y^2-2y=5$
    Dica: $(x+2)^2+(y-1)^2=10, C=(-2,1), r=\sqrt{10}$

    (d) $2x^2-8x+2y^2=16$
    Dica: $(x-2)^2+y^2=12, C=(2,0), r=2\sqrt{3}$

    (e) $4x^2+4x+\frac{15}{2}+4y^2-12y=0$
    Dica: $(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{5}{8}, C=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}), r=\sqrt{\frac{5}{8}}$

    (f) $3x^2+2x\sqrt{3}+5+3y^2-6y\sqrt{3}=0$
    Dica: $(x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{5}{3}, C=(-\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}), r=\sqrt{\frac{5}{3}}$

14. Um diâmetro de uma circunferência C possui extremidades nos pontos $(a,0)$ e $(-a,b)$. Obter a circunferência e os pontos da interseção desta curva com o eixo OX. Que condição deve ser exigida sobre os valores a e b para que existam dois pontos nesta interseção?

15. Considere as seguintes regiões do plano cartesiano:

$$R_1=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 9\}$$
$$R_2=\{(x,y)\in R^2 : (x+2)^2+y^2\le 1\}$$
$$R_3=\{(x,y)\in R^2 : (x-2)^2+y^2\le 1\}$$
$$R_4=\{(x,y)\in R^2 : x^2+(y+1)^2\le 1\}$$
$$R_5=\{(x,y)\in R^2 : |x|\le 3, |y|\le 3\}$$
$$R_6=\{(x,y)\in R^2 : |x|\ge 2, |y|\ge 2\}$$

e construa um esboço gráfico de cada um dos conjuntos seguintes:

(a) $R_1-(R_2\cup R_3\cup R_4)$	(c) R_1-R_6
(b) R_5-R_1	(d) $R_2\cup R_3\cup R_6$

16. Determinar a equação da parábola da forma $y = ax^2 + bx + c$ que passa pelos pontos $(0, 0)$, $(-2, 4)$ e $(2, 4)$.

17. Obter a equação da parábola da forma $y = ax^2 + bx + c$ que passa pelos pontos $(-1, 1)$, $(0, -4)$ e $(2, 4)$.

18. Determinar se é possível garantir que os pontos $(-1, 1)$, $(0, -4)$ e $(2, 4)$ pertencem a uma hipérbole cuja forma canônica é dada por da forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

19. Determinar a equação canônica da elipse cuja distância focal mede $2c = 6$ unidades e e cujo eixo maior mede $2a = 10$ unidades.

20. Obter a equação canônica de uma elipse cujos semi-eixos medem $a = 12$ e $b = 16$ unidades.

21. Obter a equação canônica de uma hipérbole cujos semi-eixos medem $a = 12$ e $b = 16$ unidades.

22. A curva $xy = 16$ é uma elipse, parábola ou hipérbole?

23. A curva $(x - 3)(y - 4) = 16$ é uma elipse, parábola ou hipérbole?

24. Desenhar o lugar geométrico dos pontos de R^2 tal que $(x - y)^2 = 16$. Como você poderia descrever esta *curva*?

25. Desenhar o lugar geométrico dos pontos de R^2 tal que $|x - y| = 4$. Como você poderia descrever este *objeto geométrico*?

26. Desenhar o lugar geométrico dos pontos de R^2 tal que $x^2 - y^2 = 0$. Como você poderia descrever este *objeto geométrico*?

27. Desenhar o lugar geométrico dos pontos de R^2 tal que $x^2 - y^2 = 1$. Como você poderia descrever este *objeto geométrico*?

28. Desenhar o lugar geométrico dos pontos de R^2 tal que $x^2 - y^2 = -1$. Como você poderia descrever este *objeto geométrico*?

29. Desenhar o lugar geométrico dos pontos de R^2 tal que $xy = -1$. Como você poderia descrever este *objeto geométrico*?

30. Você conhece alguma aplicação prática para a hipérbole?

Dica

Caso você encontre algum erro nesta apostila, procure imediatamente o seu professor para realizar a correção.