Modelos matemáticos

Ulysses Sodré

Londrina-PR, 27 de Junho de 2007

Conteúdo

1 Introdução aos modelos matemáticos

Modelos matemáticos são utilizados em muitos campos da atividade humana, como: Matemática, Economia, Física, Química, Biologia, Psicologia, Comunicação, Demografia, Astronomia, Engenharia, etc.

Muitos problemas práticos necessitam usar modelos matemáticos e às vezes, as situações são muito diferentes, mas a abordagem e a filosofia subjacentes são as mesmas.

Como se vê em [2], existe uma forma matemática unificada para tratar muitas teorias científicas e matemáticas e tais técnicas podem ser descritas como uma dinâmica geral, que tem sido desenvolvida em áreas conhecidas como Teoria de Sistemas e Teoria de Controle, como é o caso do Cálculo Diferencial e Equações Diferenciais.

Há muitos textos expondo estes tópicos em todos os níveis, embora acreditemos que o conhecimento do Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais [1], poderão facilitar os trabalhos no progresso com problemas de modelagem.

2 Conceito de modelo matemático

Conceitualmente, um modelo matemático ou simplesmente modelo, pode ser apresentado como uma representação de um sistema real, o que significa que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem as modificações no mesmo.

O ato de modelar, conhecido como *modelagem*, pode ser aplicado a um grande número de problemas. Por exemplo, o estudo da análise ambiental nas proximidades de um rio, a forma da asa de um avião, um sistema econômico, uma cultura agrícola, um estudo populacional, um estudo físico, e até mesmo um sistema matemático como o conjunto dos números naturais.

O objetivo mais importante de um modelo é que ele permite o entender o próprio modelo de uma forma simples ou então descrever este modelo mais completamente, de modo que o modelo possa ser tão preciso quanto o mundo real.

Um modelo é normalmente uma simplificação do mundo real ou alguma forma conveniente de trabalhar com este mundo, mas as características essenciais do mundo real devem aparecer no modelo, de modo que o seu comportamento seja igual ou semelhante àquele do sistema modelado.

Um modelo pode ser real ou abstrato. O modelo abstrato mais simples e bonito que eu conheço é o sistema dos números naturais, esboçado por G. Peano.

Em diversos exemplos, a análise ambiental de um rio e a forma da asa de um avião ou o aerofólio de um carro de corrida, é usual construir modelos físicos e fazer as medidas nos próprios modelos.

Em um sistema econômico ou em um estudo de uma população, devemos usar um modelo abstrato e empregar a linguagem matemática para definir o modelo.

Não é normal tratar a população como *cobaia*, como acontece algumas vezes em nosso planeta.

Na seqüência, trataremos sobre modelos abstratos, que podem ser descritos por equações matemáticas, portanto usaremos o termo *modelo* para representar *modelo matemático*.

Um modelo matemático consiste de um conjunto de equações que representam de uma forma quantitativa, as hipóteses que foram usadas na construção do modelo, as quais se apoiam sobre o sistema real. Tais equações são resolvidas em função de alguns valores conhecidos ou previstos pelo modelo real e podem ser testadas através da comparação com os dados conhecidos ou previstos com as medidas realizadas no mundo real.

As equações matemáticas de um modelo não proporcionam a própria explicação científica do modelo, mas simplesmente interpretam as hipóteses de um ponto de vista quantitativo, dando-nos a condição de deduzir conseqüências e mostrar-nos onde estão os detalhes que deverão ser aceitos ou recusados.

Na seqüência, tentaremos ampliar esta definição básica detalhando outros passos importantes no processo.

3 O papel de um modelo em pesquisa científica

Ao considerar a aplicação do modelo construído para a pesquisa, podemos observar que esta pesquisa pode ser decomposta em duas grandes categorias: qualitativa e quantitativa.

Na pesquisa qualitativa algumas perguntas comuns são:

1. O que acontece?
2. Acontece alguma coisa?

Na pesquisa quantitativa algumas perguntas comuns são:

1. Quantos satisfazem o modelo?
2. Como ocorre a modificação?

Com estas perguntas, modelos matemáticos podem ser largamente utilizados e existem alguns problemas nas ciências nos quais o método não é o mais importante. Um simples raciocínio lógico é, às vezes, adequado a vários problemas e a introdução do formalismo matemático mais delicado, destrói a simplicidade do raciocínio.

Modelagem não é um método que resolve todos os problemas e aplicar a modelagem de forma desorganizada poderá levar o pesquisador a ficar frustrado e desiludido, tendo uma imagem ruim do mesmo, que não é bem aceita por todos os pesquisadores.

Muitos pesquisadores usam a *modelagem* como uma novidade, pensando que se trata de uma nova ferramenta matemática, o que não é o caso, pois modelagem nada mais é do que um teste de hipóteses quantitativo que tem sido usado com sucesso há muitas centenas de anos na Matemática e nas ciências. O que tem de novo é que está ocorrendo um uso intenso deste método em sistemas reais, ao contrário da abordagem tradicional.

O valor prático da modelagem depende da: natureza do problema, ajuda do pesquisador e tipo de modelo matemático escolhido.

4 Aspectos essenciais na construção do modelo

Vários aspectos serão discutidos com detalhes na seqüência, mas alguns pontos serão salientados:

1. Devemos possuir uma base matemática muito boa para formular as hipóteses que permitirão um melhor entendimento quantitativo dos objetos reais e a resposta no mundo real;
2. Às vezes, a construção do modelo pode ajudar a identificar informações em que o conhecimento e os dados sejam insuficientes;
3. A modelagem pode estimular idéias e abordagens experimentais;
4. A modelagem poderá reduzir a importância dos experimentos no próprio local, habilitando o modelo experimental a dar respostas a questões particulares entre algumas hipóteses alternativas;
5. Comparados com os métodos tradicionais, às vezes, modelos fazem um melhor uso dos dados, que se tornam cada vez mais precisos, porém mais difíceis de obter;
6. Informações do mundo real, podem ser passadas para o modelo matemático, dando uma abordagem unificada e muitas vezes estimulando a colaboração e o trabalho em equipe;

7. Com muita freqüência, o modelo proporciona um resumo conveniente dos dados;
8. Em modelos, podemos usar métodos de interpolação, aproximação, extrapolação ou de previsão dos dados;
9. Um bom modelo pode ser usado para sugerir prioridades para a pesquisa e desenvolvimento aplicados. Se a sugestão for usada com cautela, poderá ajudar o responsável pela pesquisa a tomar decisões importantes.

5 Modelos mecanísticos e modelos empíricos

Existem pelo menos duas abordagens diferentes para o uso de modelos em pesquisa, sendo que cada uma delas é escolhida em função do que se espera que o modelo seja: mecanístico ou empírico. É importante que o pesquisador esteja advertido sobre os objetivos do modelo, de modo que estes sejam realísticos e isto poderá salvá-lo de comprometer-se com modelagem quando o modelo não estiver apropriado, ou quando estiver construindo uma classe errada de modelos. Os dois tipos de modelos: mecanístico ou empírico, serão considerados na seqüência.

5.1 Modelos mecanísticos

Se desejarmos entender a resposta de um sistema científico em termos de um mecanismo, um modelo mecanístico deverá ser usado. Este tipo de modelo pode ser construído pela visão da estrutura do sistema, dividindo-se o sistema em várias componentes e tentando entender o comportamento do todo o sistema através de cada parte e através das interações que ocorrem com as partes.

Ao tentar construir um modelo mecanístico, é necessário construir algumas hipóteses sobre quais devem ser as componentes (também conhecidas como variáveis) que são importantes no sistema, quais delas devem ser ignoradas e como elas devem se comportar. Estas hipóteses são a base deste tipo de modelo.

A seguir, o modelo deve ser descrito matematicamente e as hipóteses deverão aparecer nas equações.

Os dois passos mais importantes na construção desses modelos, são: construção das hipóteses e descrição matemática. Estes devem assumir que determinadas componentes devem obedecer a determinadas equações. Estas duas etapas no processo de modelagem mecanística, fornecem o conteúdo real do modelo neste estágio e elas são muito facilitadas.

Finalmente, as equações devem ser resolvidas e as soluções, que poderão ser funções ou números, serão as previsões dos dados através do modelo.

Os próximos passos analisam a solução, comparando-a com os valores previstos com os dados experimentais. Nesta fase gastamos muito tempo e cometemos erros.

Quando um modelo é testado pela comparação de suas previsões com os dados experimentais, na verdade, testamos também as hipóteses do modelo, considerando que os trabalhos algébricos e numéricos tenham sido executados sem erros.

Em virtude do enorme investimento de tempo e esforço, às vezes é necessário ver um modelo através dos dois últimos estágios, pois existe um perigo real que pode vir a ocorrer para um particular modelo. Em outras palavras, mesmo quando se percebe com o passar do tempo que as hipóteses iniciais não eram tão boas quanto se poderia esperar, algumas pesquisadores deixam de mudar as hipóteses porque isto gera a repetição do trabalho de solução e comparação. Aqui está um erro gravíssimo do pesquisador.

5.2 Modelos empíricos

É possível e às vezes valioso tentar obter e entender a resposta de um sistema sem passar pelos estágios de estruturar um sistema, fazendo hipóteses sobre as componentes do sistema e então tentando trabalhar sem usar as conseqüências matemáticas daquelas hipóteses.

Em síntese, o método empírico consiste em **ver** os dados experimentais, possivelmente fazendo alguma análise dos dados e tentando fazer alguma suposição inteligente (quase sempre muito simples) na forma de conjunto de equações ou mesmo através de explicações intuitivas, que poderão ser usadas como um modelo matemático e com os dados de uma forma conveniente.

Embora este método pareça **pobre e arbitrário**, em alguns casos ele é desejável, quando não é o único a ser usado para atacar o problema. Observamos que o modelo matemático da Geometria Euclidiana é um típico exemplo de modelo empírico.

Se uma resposta excelente for obtida com dados experimentais através da abordagem empírica, então ela pode ser supervalorizada para um mecanismo que pode levantar aquele tipo de resposta desejada, e isto tem sido realizado de uma forma normal pelos cientistas, ao fazer deduções sobre mecanismos de dados experimentais.

É necessário esclarecer que não existe uma linha bem definida entre os métodos mecanísticos e empíricos e é bastante comum, a maioria dos exercícios sobre modelagem ser realizada como uma mistura dos dois métodos.

O modelador mecanístico construirá seus modelos antes de fazer os experimentos, pensando sobre os possíveis mecanismos e deduções das suas conseqüências por meio do modelo, o experimento testará as suas hipóteses e possivelmente definirá um mecanismo ao invés de outro.

No entanto, pensando sobre o mecanismo construído na mente do modelador, ele é guiado pela existência de dados e o conhecimento para este mecanismo, pode ser aplicado para a sua própria combinação do uso empírico e da sua intuição.

Por outro lado, o modelador empírico pode fazer pressupor a existência de um mecanismo após fazer o experimento e ver os dados, assim, ela começa uma investigação como um empírico e a termina como um mecanicista.

Na prática, o modelador fica se movendo como um pêndulo entre os dois métodos de modelos: mecanístico e empírico, de modo que ele deverá fazer progresso com qualquer um dos dois métodos e possivelmente com os dois, de modo a obter resultado desejado.

5.3 Modelos, dados previstos e dados experimentais

Apresentamos abaixo um quadro com o relacionamento entre os dois tipos de modelos, mostrando as idéias sobre um modelo matemático envolvido com um sistema experimental.

Abordagem Empírica		Abordagem Mecanística		Sistema Experimental
Realidade	$\Downarrow$	Realidade	$\Downarrow$	Realidade
$\Downarrow$	$\Downarrow$	Hipóteses	$\Downarrow$	Realizar experimento
Modelo Matemático	$\Downarrow$	Modelo Matemático	$\Downarrow$	$\Downarrow$
Solução	$\Downarrow$	Solução	$\Downarrow$	Dados do experimento
Dados previstos pelo modelo	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	Comparar e testar a validade do modelo

5.4 Computação e Estatística

Dois assuntos que nem sempre são tratados com a devida atenção são, os computadores e a Estatística.

Infelizmente, alguns modelos são tão complicados de resolver manualmente que é necessário usar computadores. O computador deve ser visto como uma ferramenta útil para realizar cálculos trabalhosos. Observamos que o computador nada acrescenta de novo ao modelo, mas poderá extrair dados ou informações erradas e a validade do modelo reside quase que inteiramente em quão razoáveis devam ser as hipóteses.

Em geral, o uso de Estatística é importante em modelagem. Dados biológicos são variáveis e não existem questões em modelagem com dados perfeitos. Métodos estatísticos são exigidos para decidir quão significativo é o ajustamento e como servem para comparar a qualidade do ajuste obtido com modelos alternativos. Programas como o *Curve Expert* e o *Gnuplot* são muito valiosos para obter ajustes de curvas planas, em um nível básico.

As equações matemáticas que aparecem no esquema podem envolver diferentes ramos da Matemática como: Conjuntos, Lógica, Cálculo, Álgebra, Trigonometria, Estatística Matemática, etc. Por exemplo, a Estatística Matemática é importante em modelos com informações estocásticas, assim, a Estatística pode ser envolvida no modelo, mas em alguns casos é desejável que a mesma seja usada para testar o modelo e para validá-lo.

Computadores devem ser usados na solução das equações de um modelo e também para testar a validade do modelo na comparação dos dados experimentais com os dados preditos. Na prática, o uso de computadores e de Estatística, podem e devem ser realizados em conjunto.

5.5 Contrastes entre os tipos de modelos

As vantagens das abordagens mecanísticas e empíricas aplicadas à modelagem serão agora apresentados, na forma de contraste.

5.5.1 Pontos fortes do método mecanístico

1. Os parâmetros do modelo devem ter significado científico e devem fornecer algum entendimento do sistema real.

2. Os parâmetros (ou variáveis) podem ser avaliados separadamente e a extensão de um parâmetro afeta a resposta de todo o sistema. De uma forma positiva, são obtidas prioridades que sugerem qual ambiente ou quais parâmetros sobre o mundo real devem ser modificados para trazer bom resultado.

3. É bom que um modelo mecanístico possua mais parâmetros do que o correspondente modelo empírico. Dessa forma, é menos apropriado para resumir os dados e mais difícil para obter cálculos de resposta do sistema ou para extrapolar os mesmos e pode ser muito menos usado para propósitos comparativos.

4. A forma disciplinada de tentar construir um modelo mecanístico que possua solução, às vezes será objeto de atenção sobre alguns aspectos do sistema que são pouco entendidos e onde existem grandes dificuldades em conhecer quais são as hipóteses razoáveis. Vale à pena fazer um pequeno modelo, com poucas variáveis, após fazer um experimento, desde que esse modelo sugira como o experimento pode ser usado para obter dados exatamente nas áreas onde ela é mais necessária.

5.5.2 Pontos fortes do método empírico

1. O principal interesse está em descrever a resposta do sistema todo e existe muito menor interesse nas razões pelas quais o sistema indique como ele é feito. Basicamente, um modelo empírico *redescreve* como são os dados e nada diz sobre o que não está nos dados.
2. Em geral, o sistema é complexo e uma análise da estrutura do sistema não é possível com o conhecimento atual, de modo que um entendimento real do funcionamento do sistema está fora de questão.
3. É bom resumir uma grande quantidade de dados em termos de poucos parâmetros bons. Um tal resumo é valioso para obter resposta para o sistema, de modo que possamos interpolar e extrapolar dados, também para os nossos propósitos de comparação.
4. Uma das vantagens da abordagem empírica é que o modelo é sempre mais simples e é mais fácil de ser construído.
5. A principal desvantagem do método empírico é que os parâmetros do modelo são usualmente quantidades sem significado físico ou biológico.
6. Ao comparar diferentes tipos de situações reais por meio de um único modelo empírico, esperamos que as diferenças desses tipos sejam refletidas na alteração de um único parâmetro do modelo e passa a ser importante atribuir algum significado científico àquele parâmetro e esta pode ser uma tentativa de construir um modelo mecanístico que dá como resultado a mesma equação ou alguma equação semelhante.

5.6 A Formulação de um modelo matemático

A formulação de um modelo matemático envolve a escolha de variáveis mais importantes para o fenômeno em estudo e de leis consideradas obedecidas pelas variáveis escolhidas.

Na formulação de um modelo, devemos decidir sobre o grau de generalidade que iremos admitir e devemos ter em mente que nem toda hipótese que *simplifica* irá facilitar o tratamento posterior do modelo, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista computacional.

5.7 Problema bem posto no sentido Hadamard

Para um modelo representar um fenômeno físico ou biológico, assumiremos alguns fatos importantíssimos:

1. **Existência de solução** que indica que o fato representado pelo modelo, possui solução e que tal solução ocorre dentro das condições estudadas.
2. **Unicidade de solução** significa que sob as mesmas condições, o comportamento do modelo sempre se repetirá.
3. **Estabilidade da solução** significa que pequenas modificações realizadas no sistema não alteram sensivelmente o fenômeno.

   Um sistema com estas três condições, recebe o nome de Problema bem posto no sentido de *Hadamard*.

   Para trabalhar com aplicações, uma quarta condição é necessária:
4. **Computação de dados** significando que deve haver um modo para calcular os valores da solução com a margem de precisão necessária.

   Atualmente as técnicas da Matemática Computacional permitem, quase sempre, encontrar um método para calcular os dados, desde que se trate de um problema bem posto no sentido de Hadamard, embora existam fenômenos aleatórios que não são apropriados a modelos que obedecem ao esquema acima.

5.8 Esquema do modelo matemático

Modelo matemático: Se estamos estudando situações que envolvem tanto a Matemática como equações, a teoria é muito importante bem como o modelo.

Modelo matemático aplicado: Quando deixamos as situações envolvendo a Matemática, a teoria torna-se menos importante que o modelo e vale a pena incluir de uma forma conveniente a teoria e o modelo em uma mesma unidade.

Modelo matemático	**Modelo matemático aplicado**
Situação real	Situação real
$\Downarrow$ Perguntas e Respostas $\Uparrow$	$\Downarrow$ Perguntas e Respostas $\Uparrow$
Modelo matemático	Modelo matemático e Teoria
$\Downarrow$ Perguntas e Respostas $\Uparrow$	$\Downarrow$ Perguntas e Respostas $\Uparrow$
Teoria	

Os modelos matemáticos explicam de forma quantitativa e de forma qualitativa os fenômenos da vida e são normalmente descritos por equações diferenciais que podem ser analisadas matematicamente. Uma parte extremamente importante do modelo é a comparação entre o mundo real e o modelo matemático.

6 Equações Diferenciais Ordinárias: y'=f(x,y)

As principais leis relacionadas com as ciências são representadas por Equações Diferenciais Ordinárias. Tais leis nos permitem investigar problemas em Mecânica dos Fluídos, Circuitos elétricos, Reações Químicas, Transferência de calor, Crescimento Populacional, Geometria e muitos outros.

6.1 Elementos gerais de EDO

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de Primeira Ordem pode ser escrita na forma $y' = f(x,y)$ onde $f = f(x,y)$ depende das variáveis x e y. Alguns exemplos:

1. $y' = x + 5$
2. $y' = y \exp(x)$
3. $y' = x^2 y$
4. $y' = x^2 y, x + y = 3$
5. $y' = \sin(y)$
6. $y' = \sqrt{y}$

Uma equação diferencial ordinária da forma $y' = f(x,y)$ pode ser classificada por um dos quatro tipos: **S**eparável, **H**omogênea, **E**xata e **L**inear.

6.2 EDO Separável

Quando $f = f(x,y)$ pode ser escrita como o produto de duas funções contínuas $g = g(x)$ e $h = h(y)$, isto é,

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

que também pode ser escrita na forma separável (elementos com a variável x estão de um lado e elementos com a variável y estão do outro lado da igualdade):

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

Exemplo: A EDO $\sin(x)dx + y^2dy = 0$ é Separável.

6.3 EDO Homogênea

Uma função real $f : R^2 \to R$ é denominada homogênea de grau n, se para todo $t \in R, (t \neq 0)$, vale a relação:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Exemplo: A função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é homogênea de grau 2, enquanto que $f(x, y) = x^2 + y$ não é uma função homogênea.

Uma equação diferencial da forma $y' = f(x, y)$ é Homogênea, se a função $f = f(x, y)$ é homogênea de grau 0 (zero), isto é:

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

Exemplo: A EDO $y' = (x + y)/x$ é homogênea pois

$$f(tx, ty) = \frac{tx + ty}{tx} = \frac{x + y}{x} = f(x, y)$$

6.4 EDO Exata

Uma EDO exata é aquela que pode ser escrita na forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ sendo $M = M(x, y)$ e $N = N(x, y)$ funções continuamente diferenciáveis e satisfazendo à igualdade

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Exemplo: A EDO $3x^2ydx + (y + x^3)dy = 0$ é Exata, pois $M(x, y) = 3x^2y$ e $N(x, y) = y + x^3$ e além disso

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

mas a EDO $x^2dx + xydy = 0$ não é exata.

6.5 EDO Linear

Uma EDO linear $y' = f(x, y)$ é aquela em que $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$ e que, em geral, pode ser reescrita como:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Neste caso, as potências de y e de y' são exatamente iguais a 1.

Exemplo: A EDO $y' = \sin(x)y + \exp(x)$ é Linear, mas a EDO $y' = \sin(x)y + \exp(x)\sqrt{y}$ não é linear.

6.6 Solução de uma EDO da forma y'=f(x,y)

Solução de uma equação diferencial da forma $y' = f(x, y)$ é uma função $y = g(x)$ que satisfaz a identidade

$$g'(x) \equiv f(x, g(x))$$

Exemplos:

1. A EDO de primeira ordem $y' = y$ tem uma solução $y = \exp(x)$, pois

$$y'(x) = (\exp(x))' = \exp(x) = y(x)$$

2. A função $y_1(x) = \sin(x)$ é solução da EDO $y' - \cos(x) = 0$, pois

$$y_1'(x) - \cos(x) = (\sin(x))' - \cos(x) = 0$$

3. A função $y_2(x) = \sin(x) + 5$ é solução da EDO $y' - \cos(x) = 0$, pois

$$y_2'(x) - \cos(x) = (\sin(x) + 5)' - \cos(x) = 0$$

6.7 Aplicações das EDO

Problema Geométrico: Determinar o Lugar Geométrico de todos os pontos (x, y) em R^2 cuja inclinação da curva $y = f(x)$, dada por $y' = y'(x)$ é igual ao produto das coordenadas x e y no ponto genérico (x, y). A EDO que rege tal situação é $y' = x \cdot y$.

Problema de Física: Uma partícula de massa m move-se ao longo do eixo OX, sujeita a duas forças: uma força F_d proporcional ao seu deslocamento a partir de um ponto fixo 0 da trajetória e uma força F_a de atrito contrária ao movimento, proporcional à velocidade da partícula.

A EDO que exprime a força resultante F_r pode ser obtida com:

$$F_r = F_d - F_a$$

A primeira força pode ser expressa por:

$$F_d = k_1 x$$

Sabendo-se que a velocidade $v = \dfrac{dx}{dt}$ da partícula é dada pela primeira derivada do deslocamento com relação à variável tempo, então a força de atrito é dada por:

$$F_a = k_2 \frac{dx}{dt}$$

onde k_1 e k_2 são constantes de proporcionalidade.

Sabendo-se que a aceleração da partícula é a segunda derivada do deslocamento em relação ao tempo, isto é, $a = \dfrac{d^2x}{dx^2}$, então, expressamos pela Lei de Newton:

$$F_r = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dx^2}$$

Assim, a EDO que rege o deslocamento desta partícula em função do tempo é:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dx^2} = k_1 x + k_2 \frac{dx}{dt}$$

7 Modelos Populacionais

Em 1798, o economista inglês Thomas Malthus, no trabalho *"An Essay on the Principle of Population"* formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo.

Considerou $N = N(t)$ o número de indivíduos de uma população, sendo N_0 esta população no instante $t = 0$.

Considerou a hipótese que os nascimentos e mortes naquele ambiente eram proporcionais à população presente e que a variação da população era conhecida entre dois períodos, num lapso de tempo Δt.

Se ΔN é a variação da população, temos

$$\Delta N = a\ N(t)\ \Delta t - b\ N(t)\ \Delta t$$

onde $aN(t)\Delta t$ é o número de nascimentos e $bN(t)\Delta t$ é o número de mortes no período.

Dessa forma

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = r\ N(t)$$

onde $r = a - b$.

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtemos

$$\frac{dN}{dt} = r\ N$$

que é a EDO que rege o fenômeno populacional, segundo o ponto de vista de Malthus.

Para resolver a equação acima, necessitamos conhecer o método de resolução de equações separáveis.

7.1 Resolução de EDO separáveis

Seja uma EDO separável escrita na forma $h(y) \cdot y' = g(x)$ onde $g = g(x)$ e $h = h(x)$ são funções reais contínuas.

Para resolver tal equação, procuraremos uma função $F = F(x)$ que seja solução da EDO e para tal podemos reescrever a EDO acima na forma:

$$h(y)dy = g(x)dx$$

Integrando em ambos os lados da igualdade, obteremos:

$$\int dy = H(y) + C_1, \qquad \int dx = G(x) + C_2$$

A solução será apresentada na forma implícita por:

$$H(y) + C_1 = G(x) + C_2$$

ou seja

$$H(y) = G(x) + C$$

onde $C = C_2 - C_1$ também é uma constante arbitrária.

Exemplo: A solução da EDO $y' = xy$ pode ser obtida reescrevendo esta EDO na forma:

$$\frac{dy}{y} = x\ dx$$

de onde segue que

$$\log(y) = \frac{1}{2}x^2 + K$$

ou seja

$$y(x) = K\exp(\frac{1}{2}x^2)$$

O gráfico de uma solução que passa *próximo da origem* é dado por:

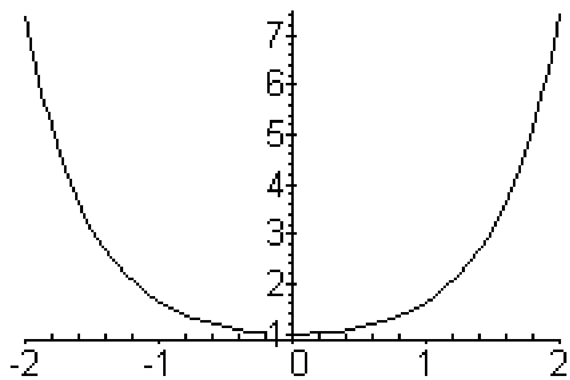

Figura 1: Gráfico de uma solução que passa próximo da origem

Temos infinitas soluções que dependem da constante K.

A solução da EDO $N' = r\ N$, obtida pelo método das variáveis separáveis é dada por:

$$N(t) = C\exp(r\ t)$$

Se no instante $t = 0$, a população tem N_0 indivíduos, então a constante C pode ser tomada como $C = N_0$ e desse modo:

$$N(t) = N_0\exp(r\ t)$$

é a solução da equação populacional de Malthus, mas o gráfico correto para esta função depende dos valores de N_0 e r.

Como a solução $N = N(t)$ é uma função exponencial, o seu gráfico terá a mesma forma que o gráfico da função $y = \exp(x)$.

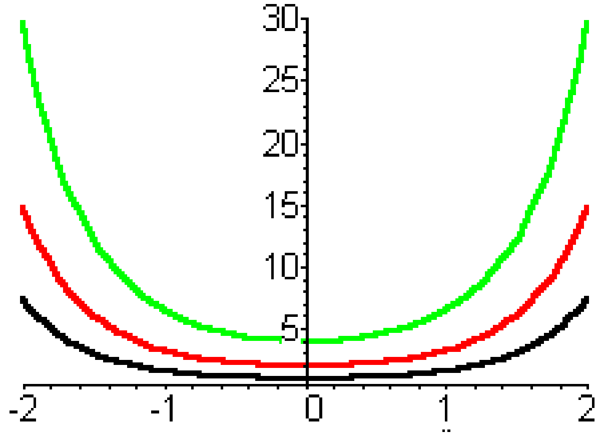

Figura 2: Várias soluções dependentes da constante K

Este modelo que estudamos supõe que o meio ambiente tenha pouca ou nenhuma influência sobre a população, logo, ele funciona melhor como um indicador do potencial de sobrevivência e de crescimento de uma certa espécie de população do que como um modelo para mostrar o que realmente ocorre.

De acordo com esta equação se uma população de bactérias duplicasse a cada 20 minutos, dentro de dois dias, estariam formando uma camada em volta da Terra com 30 cm de espessura. Assim, segundo este modelo, enquanto os efeitos do meio ambiente são nulos, os dados da população obedecem à função: $N(t) = N_0 \exp(rt)$.

Na realidade, quando $N = N(t)$ aumenta, o meio ambiente oferece resistência ao seu crescimento populacional e tende a manter a população sob controle, e, alguns desses fatores são: a quantidade de alimentos, acidentes, guerras, epidemias, ...

Em 1837, Verhulst propôs uma modificação no modelo de Malthus, levando em conta estes fatores limitadores para a população.

Verhulst assumiu a existência de uma população limite L se o tempo fosse muito grande, pois os alimentos se reduziriam ao mínimo quando $t \to \infty$.

Verhulst fez a suposição que:

1. A taxa de variação da população em relação ao tempo deveria ser proporcional à população presente (o mesmo que Malthus),

2. Acrescentou uma nova hipótese. A taxa de variação da população em relação ao tempo deveria ser proporcional à fração da população ainda não utilizada até o momento da análise, identificada com $\dfrac{L - N(t)}{L}$.

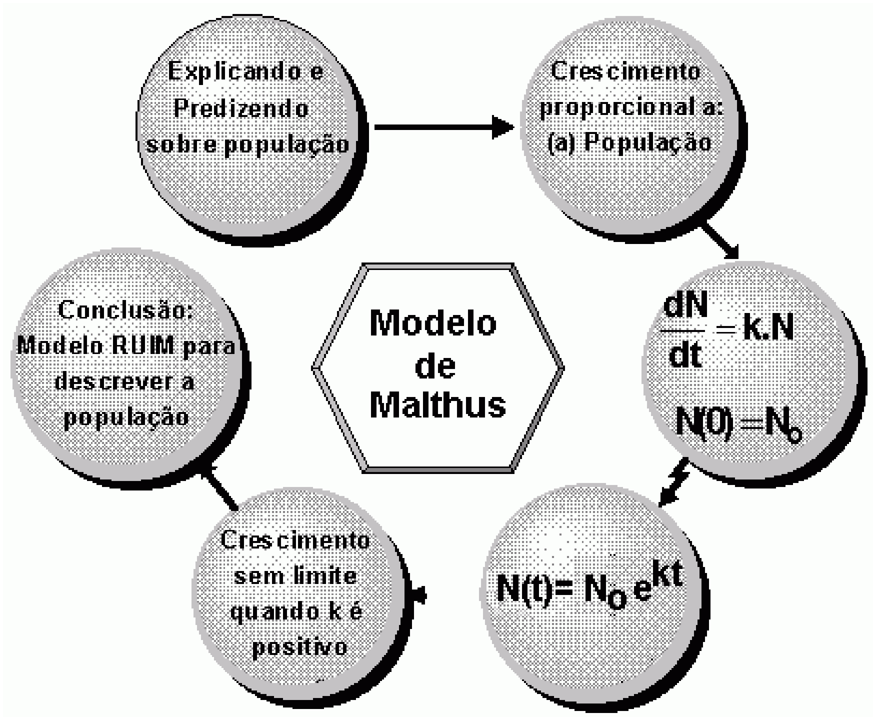

Figura 3: Modelo de Malthus

Assim, foi montada a EDO:

$$N'(t) = r\ N(t)\ \frac{L - N(t)}{L}$$

O gráfico que segue mostra a situação deste modelo.

Quando $N(t)$ se aproxima de 0, tem-se

$$\frac{L - N(t)}{L} \to 1$$

e o modelo se parece com o modelo de Malthus:

$$\frac{dN}{dt} \to rN$$

Quando $N(t)$ se aproxima de L, tem-se

$$\frac{L - N(t)}{L} \to 0$$

e a população tende a decrescer:

$$\frac{dN}{dt} \to 0$$

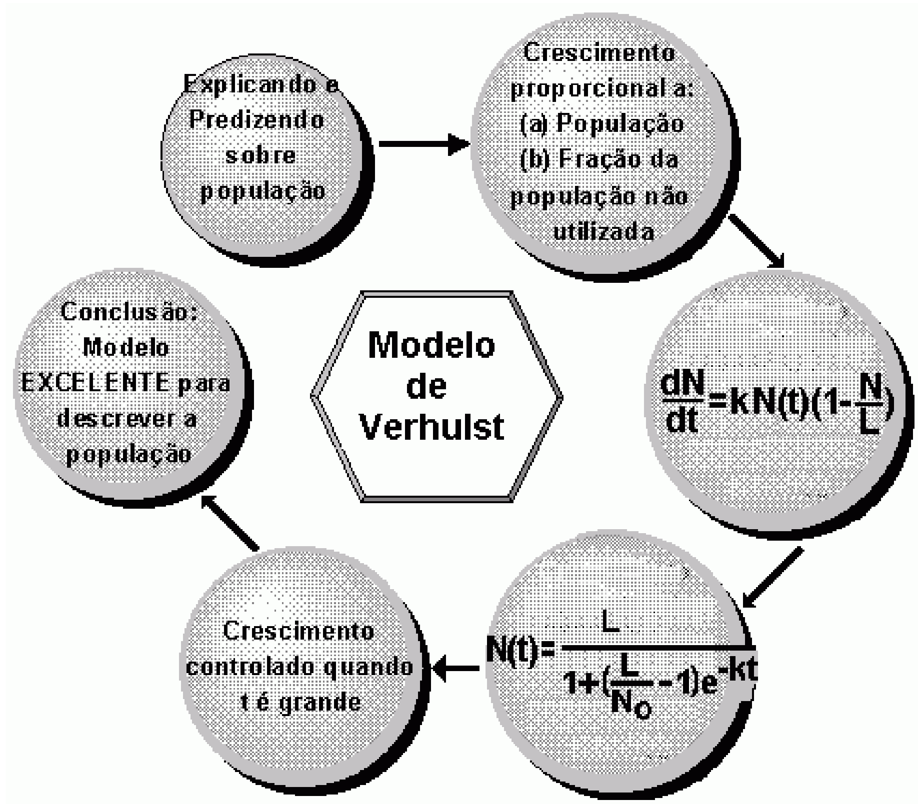

Figura 4: Modelo de Verhulst

Observação: O termo matemático $\dfrac{L-N(t)}{L}$ é conhecido como *fator de correção*.

A EDO

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\frac{L-N(t)}{L}$$

é equivalente a:

$$\frac{dN}{dt} = r(1-\frac{N(t)}{L})N(t)$$

e esta equação é *não-linear* porque a variável de estado $N = N(t)$ aparece com um expoente diferente de 1.

O número L, denominado *capacidade máxima do ambiente*, é o número máximo de indivíduos que o ambiente permite. A reta $N(t) = L$ é uma assíntota horizontal para a curva sigmóide.

Para resolver a EDO não-linear

$$\frac{dN}{dt} = r(1-\frac{N(t)}{L})N(t)$$

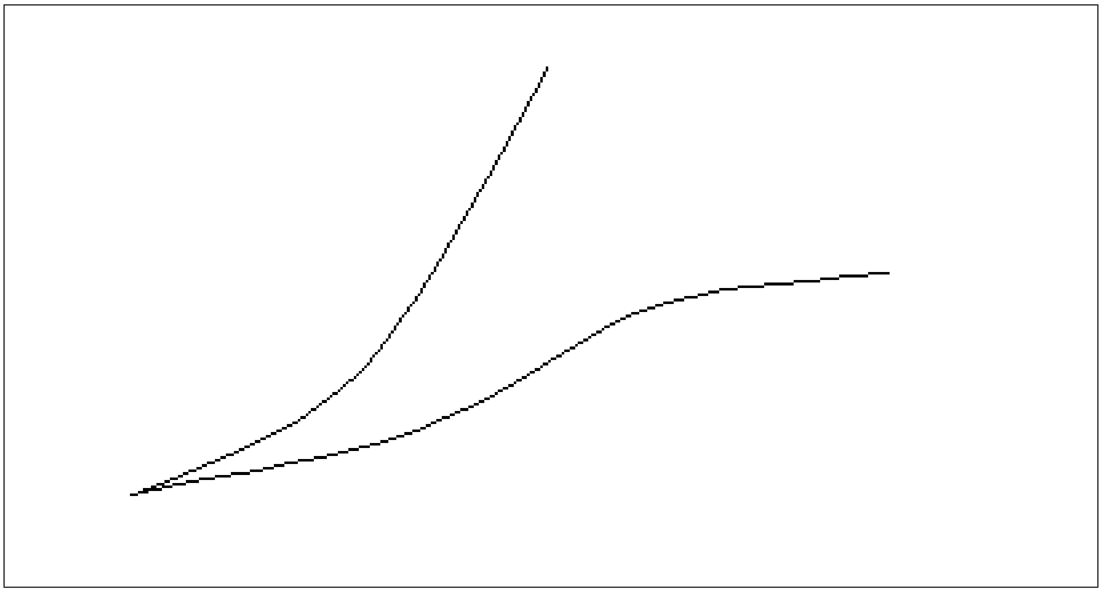

Figura 5: Modelo de Verhulst versus modelo de Malthus

usamos o método de separação das variáveis, para escrever

$$\frac{dN}{(1-\dfrac{N(t)}{L})\ N(t)} = rdt$$

Usando a decomposição em frações parciais, obtemos:

$$[\frac{1}{N} + \frac{1}{L}(\frac{1}{1-N/L})]dN = rdt$$

Integrando ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$\int \frac{dN}{N} + \frac{1}{L}\int \frac{dN}{1-N/L} = \int rdt$$

que garante que:

$$\ln(N) - \ln(1-N/L) = r\ t + A$$

Tomando $t=0$ segue que $N(0)=N_0$ e obtemos

$$A = \ln(\frac{N_0}{1-N_0/L})$$

e substituindo esta constante, segue que:

$$\frac{N(t)}{1-N(t)/L} = \frac{N_0 \exp(r\ t)}{1-N_0/L}$$

Explicitando $N = N(t)$, obtemos:

$$N(t) = \frac{L}{1 + (\frac{L}{N_0} - 1)\exp(r\ t)}$$

Quando $t \to \infty$, a população $N = N(t)$ se aproxima de L que é o máximo possível no ambiente, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = L$$

A adequação ao modelo de Verhulst já foi comprovada para muitas espécies populacionais, em experiências de laboratório e também em modelos populacionais estáveis.

As populações de germes de fermento e de moscas aquáticas, por exemplo, crescem a uma taxa que não se afasta muito da que é dada pelo modelo. Você já experimentou fazer iogurte em sua casa? Você saberia construir um modelo para o crescimento populacional deste tipo de lactobacilo do iogurte?

No entanto, quando o modelo é aplicado a comunidades humanas, às vezes, os resultados não são confiáveis principalmente quando o intervalo de tempo é muito grande. Isto ocorre porque as comunidades humanas são muito instáveis.

A população dos Estados Unidos, entre 1790 e 1930 (um período relativamente longo) satisfez com boa aproximação este modelo como mostra o quadro seguinte.

Anos	População Real	Cálculo com a equação	Erro relativo
1790	3.900.000	3.900.000	0,000%
1800	5.300.000	5.300.000	0,000%
1810	7.200.000	7.200.000	0,000%
1820	9.600.000	9.700.000	1,042%
1830	12.900.000	13.000.000	0,775%
1840	17.100.000	17.400.000	1,754%
1850	23.200.000	23.000.000	0,862%
1860	31.400.000	30.200.000	3,822%
1870	38.600.000	38.100.000	1,295%
1880	50.200.000	49.900.000	0,598%
1890	62.900.000	62.400.000	0,795%
1900	76.000.000	76.500.000	0,658%
1910	92.000.000	91.600.000	0,435%
1920	106.500.000	107.000.000	0,469%
1930	123.200.000	122.000.000	0,974%

Os dados e informações correspondentes a este período parecem sugerir uma população crítica, para os Estados Unidos, de aproximadamente 200 milhões de habitantes. Como a população americana ultrapassou os 200 milhões desde 1970, e está duplicando a cada 35 anos, o quadro parece assustador.

A Segunda Guerra Mundial fez com que tal modelo não mais servisse para descrever o crescimento da população americana, mostrando que é necessário um modelo mais refinado, que responda bem, à extrapolação da população e para a estimativa da população crítica como funções do tempo.

Observa-se com grande importância que o modelo de Malthus não é apropriado para descrever populações humanas, porém este tipo de modelo é utilizado em muitas outras situações como os modelos do tipo exponencial, como: Decaimento radioativo, Carga e descarga de um capacitor em um circuito elétrico RC, Inflação, Juros compostos e Temperatura de um corpo.

7.2 Esquema usado para o modelo populacional

1. Considerar o crescimento proporcional à população atual.
2. Montar a EDO $\dfrac{dN}{dt} = kN, \quad N(0) = N_0$.
3. Obter a solução $N(t) = N_0 \exp(k\,t)$.
4. Verificar que o crescimento é ilimitado se $k > 0$.
5. Concluir que o modelo é **ruim** para esta população no período 1820-1930.
6. Refazer o processo fazendo previsões sobre população, usando agora o modelo de Verhulst, que considera duas situações
   (a) O crescimento é proporcional à população atual (Malthus).
   (b) O crescimento é proporcional à fração não utilizada.
7. Montar a EDO $\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{L})N$.
8. Obter a solução $N(t) = \dfrac{L}{1 + (\dfrac{L}{N_0} - 1)\exp(r\,t)}$.
9. Analisar a solução e verificar que $N(t) \to L$ quando $t \to \infty$ e como conseqüência segue que $\dfrac{dN}{dt} \to 0$.
10. Concluir que o modelo é **excelente** para a população americana em 1820-1930.

8 Modelos Matemáticos como uma disciplina

Em 2001, apresentei uma sugestão ao Conselho Estadual de Educação do Paraná, para que fosse incluída uma disciplina denominada *Modelos matemáticos* em todos os cursos de Matemática do estado do Paraná. Algumas das sugestões apresentadas estão abaixo:

1. Disciplina: Modelos matemáticos
2. Carga horária: 04 hs/sem $\times$ 30 semanas $=$ 120 horas aulas.
3. Ementa: Conceito de modelo matemático. Modelos matemáticos abstratos. Fases de discussão de uma modelagem. Conexão entre modelos matemáticos e Equações Diferenciais. Modelos matemáticos no Ensino de Matemática do Fundamental e Médio.
4. Programa: Modelos matemáticos abstratos. A construção de teorias matemáticas como: o Conjunto dos Números Naturais, a Teoria dos Conjuntos, a Geometria Euclidiana e geometrias não-Euclidianas. Fases de discussão do processo de modelagem: Experimentar, Abstrair, Resolver, Validar, Modificar e Aplicar. Ligação entre modelos matemáticos e Equações Diferenciais.
5. Tópicos relativos a modelos matemáticos aplicados ao Ensino de Matemática no Fundamental e Médio.
   (a) Estudo da Beleza e Estética em Matemática, através do estudo da seqüência de Fibonacci e da Divina Proporção, culminando com o estudo do crescimento de plantas como o feijão, abacaxi e outras, onde se observa relações matemáticas associadas à filotaxia. Analisar a espiral de Arquimedes e o seu aparecimento na natureza.
   (b) O conjunto dos números Naturais como um modelo matemático abstrato, para mostrar como se pode construir relações e funções úteis da Matemática, fortemente apoiadas numa base abstrata.
   (c) Explorar a construção da Geometria Euclidiana em todas as situações possíveis e em especial como um modelo matemático, usando ruas, logradouros, prédios, etc. como uma situação prática.
   (d) Construir a Teoria dos Conjuntos como um modelo matemático, mostrando que é possível classificar conjuntos de pessoas e objetos de um local e fazer análises com reuniões e interseções de conjuntos.
   (e) Modelo matemático com as funções trigonométricas, para estudar alguns ritmos biológicos e da natureza.

(f) Modelo matemático para o cálculo de áreas de regiões planas e a estrutura do Cálculo Integral por Riemann. Analisar diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras usando áreas. Construir uma clara conexão entre assuntos tratados na Universidade e aqueles tratados no Ensino Fundamental.

(g) Mostrar a grande quantidade de modelos matemáticos úteis na vida que aparecem quando se estuda a Análise Combinatória e elementos de Probabilidade. Analisar fatores genéticos, situações de loterias e de placas de veículos, analisar jogos de tabuleiro como o Xadrez e o jogo de Damas.

(h) Uso de permutação no cálculo de diagonais de uma figura plana regular.

(i) Modelo de escala musical, envolvido com os conceitos de médias aritmética, geométrica e harmônica, além de aprofundar estudos sobre números racionais e frações.

(j) Modelo com Relações e Funções no estudo de fórmulas matemáticas da Física como queda livre e lançamento de projéteis, Química com a lei de Boyle-Mariotte e Biologia com o crescimento de células.

(k) Modelo matemático das seções cônicas, com detalhes sobre a elipse, parábola, hipérbole e circunferência. A parábola pode ser estudada com as suas propriedades geométricas para mostrar que existem diversas aplicações desta curva na transmissão de ondas por satélites ou através de sistemas de micro-ondas ou na emissão de luz de faróis de carros. Para a hipérbole, podem ser estudadas as lentes usadas em óculos e para a elipse, podem ser estudados elementos Mecânica Newtoniana e de Astronomia.

(l) Estudar o modelo de alguns ciclos astronômicos envolvidos com as noções de dia, mês e ano, através dos conceitos de Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum. Explorar situações de carros em corridas com estes dois conceitos matemáticos.

(m) Modelo matemático da estrutura de Grupo e construções de ligações químicas em compostos carbônicos. Estudos de simetrias e assimetrias na natureza.

(n) Modelos matemáticos ligados a sistemas de numeração decimal e binária, alertando para a utilidade destes processos matemáticos no uso de computadores.

(o) Estudar o conceito de ordem no Sistema dos números Naturais, com os processos de classificação de objetos e seres vivos.

Referências para estas notas de aulas

[1] Bassanezi, R. C. Ferreira Jr., W. C. *Equações Diferenciais com aplicações*, Editora Harbra Ltda., São Paulo, 1988.

[2] Bertalanffy, L. *Teoria Geral dos Sistemas*, Editora Vozes, 1973, Petrópolis.

[3] Bezerra, M. J. Putnoki, J. C. *Novo Bezerra Matemática*, Editora Scipione, São Paulo, 1994.

[4] Bolt, B. *Actividades Matemáticas*, Coleção Prazer da Matemática, Editora Gradiva - Portugal

[5] Bolt, B. *Mais actividades matemáticas*, Coleção Prazer da Matemática, Editora Gradiva - Portugal

[6] Bolt, B. *Matemáquinas*, Coleção Prazer da Matemática, Editora Gradiva - Portugal

[7] Burghes, D. N. Borrie, M. S. *Modelling with Differential Equations*, Ellis Horwood Ltd., 1981.

[8] Costa, N. C. A. *O conceito de estrutura em Ciência*, in Boletim Sociedade Paranaense de Matemática 2ª. Série, vol.8 (1987)

[9] Dym, C. L. Ivey, Elizabeth S. *Principles of Mathematical Modeling*, Academic Press, N.York, 1980.

[10] Gardner, M. *Ah, Descobri!*, Coleção Prazer da Matemática, Editora Gradiva, Portugal

[11] Glen, W. H. Johnson, Donovan A. *Invitation to Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York

[12] Hole, V. *Como ensinar Matemática no básico e no secundário*, Biblioteca do Educador Profissional, Livros Horizonte. Lisboa. 1977

[13] Huntley, E. *A Divina Proporção: Um ensaio sobre a Beleza na Matemática*, Editora Universidade de Brasília, Brasília, 1985.

[14] Ifrah, G. *Os números: A história de uma grande invenção*, Editora Globo, 3a. edição, São Paulo, 1989.

[15] Ignatiev, I. *En el Reino del Ingenio*, Coleção Ciência Popular, Editorial Mir Moscu

[16] Korovkin, P. *Inequalities*, Little Mathematics Library, Mir Publishers - Moscow

[17] Langue, N. *Problemas Experimentales Ingeniosos de Física*, Editorial Mir - Moscu

[18] Lichnerowicz, A. *A Nova Matemática*, Biblioteca Salvat de Grandes Temas, Livros GT, Salvat Editora do Brasil S.A., Rio de Janeiro, 1979.

[19] Margenau, H. e outros, *O Cientista*, Biblioteca Científica Life,Livraria José Olímpio Edit,Rio, 1966.

[20] Mathematical Association, *Applications of sixth form Mathematicas*, A compendium prepared for The Mathematical Association, G. Bell Sons Ltd. London

[21] Mathematical Association, *Applications of Elementary Mathematics*, A compendium prepared for The Mathematical Association, G. Bell Sons Ltd. London

[22] Oech, R. *Um ´Toc' na cuca*, Livraria Cultura, São Paulo.

[23] Oech, R. *Um chute na rotina*, Livraria Cultura, São Paulo.

[24] PATTEN, B.C. *Systems Analysis and Simulation in Ecology*, vol. I, Academic Press, N. York, 1971.

[25] Perelman, Y.I. *Brincando com Astronomia*, Editora Fulgor, São Paulo, 1961.

[26] Perelman, Y.I. *Algebra Recreativa*, Coleção Ciência Popular, Editorial Mir - Moscu

[27] Perelman, Y.I. *Matemáticas Reacreativas*, Coleção Ciência Popular, Editorial Mir - Moscu

[28] Perelman, Y.I. *Problemas y Experimentos Recreativos*, Editorial Mir. Moscu

[29] Polya, G. *A arte de resolver problemas*, Editora Interciência, Rio. 1986

[30] Sociedade Brasileira de Matemática, REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, Sociedade Brasileira de Matem tica, IMPA - Rio

[31] Sodré, U. *Modelos Matemáticos*, Notas de aulas. Dep. de Matemática da UEL, 1987.

[32] Solodovnikov, A. S. *Sistemas de desigualdades lineales*, Lecciones populares de matemáticas, Editorial Mir - Moscu

[33] Trota, Imenes Jabucovic, *Matemática Aplicada*, 1a., 2a. e 3a. séries do segundo grau (três livros), Editora Moderna Ltda, São Paulo, 1980.

[34] Uspensky, V.A. *Pascal's Triangle-Certain Applications of Mechanics to Mathematics*, Mir Publ.,Moscow, 1976.

[35] Zaro, Milton Hillebrand, Vicente *Matemática Experimental*, Editora Ática 1990