

Matemática Básica com Excel

Ulysses Sodré

Este material é útil para alunos que tenham cursado o Ensino Médio e para docentes de Matemática do segundo grau ou de Universidades

Londrina-PR, 25 de Agosto de 2011.

Matemática Essencial: <http://www.mat.uel.br/matessencial/>

“Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que não se vêem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê.”

Carta aos Hebreus 11:1-3, A Bíblia Sagrada.

Conteúdo

1	Estudando Matemática com a Planilha Excel	1
2	Alguns detalhes sobre o programa Excel	2
2.1	Abrir o programa Excel	2
2.2	Criar um arquivo novo	2
2.3	Identificar um conjunto de células	2
2.4	Selecionar uma área contígua	2
2.5	Selecionar uma área não contígua	3
3	Sequências reais	3
3.1	Alça de preenchimento	4
3.2	Preenchimento de colunas de índices com a alça	4
3.3	Preencher colunas de índices com a tecla CTRL	5
3.4	Preencher colunas com números ímpares	5
3.5	Preencher colunas com horas	5
3.6	Preencher colunas com datas	5
3.7	Preencher colunas com datas intercaladas	5
3.8	Preencher colunas com horas intercaladas	6
3.9	Informações Estatísticas de sequências	6
4	Equação da reta que passa por dois pontos	7
4.1	Construir a equação da reta que passa por dois pontos	7
5	Alinhamento de três pontos no plano	8
5.1	Colinearidade de três pontos via determinante	9
5.2	Área de um triângulo com os vértices dados	9

5.3	Área de um triângulo, dados os vértices	10
5.4	Área de região poligonal convexa, dados os vértices	10
5.5	Área da região poligonal convexa	11
6	Algumas medidas de um polígono regular	11
6.1	Calcular algumas medidas de um polígono regular	12
7	Ajuste Linear pelos mínimos quadrados	12
7.1	A reta de ajuste pelos mínimos quadrados no Excel	13
8	Sequências Aritméticas e geométricas	14
8.1	Sequências Aritméticas	14
8.2	Progressão Aritmética	14
8.3	Sequências Geométricas	15
8.4	Progressão Geométrica	15
8.5	Interpolar termos em uma sequência	16
8.6	Interpolar termos aritméticos	16
8.7	Interpolar termos geométricos	16
9	Operações com sequências reais	17
9.1	A sequência de Fibonacci	17
9.2	Construção de uma sequência de Fibonacci com 15 termos.	17
9.3	Somas de termos de sequências	18
9.4	Somas parciais de termos de uma sequência	18
9.5	Somas de todos os termos de uma sequência	18
9.6	Somas de todos os termos de uma região contígua	18
9.7	Somas de todos os termos de uma região não contígua	19
9.8	Limites de sequências	19

9.9	Número áureo relacionado com uma sequência	19
9.10	Multiplicação de lista por um número fixo	20
9.11	Multiplicar uma lista por um número fixo	20
10	Logaritmos, Trigonometria e Triângulo de Pascal	20
10.1	Tábua de logaritmos no Excel	20
10.2	Tábua Trigonométrica	21
10.3	Tábua trigonométrica	21
10.4	Triângulo de Pascal	21
10.5	Triângulo de Pascal no Excel	22
10.6	Forma alternativa para o triângulo de Pascal	22
11	Matemática Financeira	23
11.1	Sistema Price e Financiamentos	23
11.2	Tabela para financiamento de bens no Excel	24
11.3	Modo de usar a tabela Price	25
11.4	Fluxo de caixa e taxas de juros	25
11.5	Taxa de juros	26
11.6	A função PGTO do Excel	26
11.7	Comentários sobre a função PGTO()	27
11.8	Prestações em um financiamento (end)	27
11.9	Prestações em um financiamento (begin)	28
11.10	Resgate de um empréstimo	29
11.11	Depósito em caderneta de poupança	29
12	Matrizes e sistemas lineares	30
12.1	Matrizes reais	30

12.2	Inversa de uma matriz quadrada	30
12.3	Multiplicação de matrizes	31
12.4	Soma e Subtração de matrizes	32
12.5	Determinante de uma matriz quadrada	33
12.6	Resolução de um sistema linear	34
12.7	Resolver um sistema no Excel	34
13	Gráficos de funções	35
13.1	Gráfico da função seno	35
13.2	Gráficos com seno e cosseno em uma planilha nova	35
13.3	Gráfico da função tangente	36
13.4	Gráfico de uma função quadrática	36
13.5	Obtenção de uma raiz de $f(x)=0$	37
13.6	Algumas funções matemáticas e trigonométricas	38
13.7	Funções Estatísticas (básicas)	39

1 Estudando Matemática com a Planilha Excel

Em nossos trabalhos com a Matemática, tendo já lecionado em todos os níveis de Ensino, observamos que uma das maiores dificuldades encontradas por professores e alunos, é obter programas de computador que realizam as tarefas mais simples.

Em geral, programas custam caro e programas de manipulação simbólica para realizar tais tarefas, são escritos em inglês, tornando difícil o uso por alunos e docentes no Brasil.

Para finalidades educacionais e científicas, existem vários programas, como: Maxima, Freemat, SciLab, Euler, SpeQ, etc, que podem ser obtidos gratuitamente na Internet. Existem algumas planilhas de cálculo gratuitas interessantes como a versão de avaliação de *Kyplot*, além da planilha *Calc* embutida na *suite* gratuita BrOffice.

Em geral, pessoas que usam computadores com o Windows, usam a suite Microsoft Office, contendo a planilha Excel. Embora tais programas tenham sido traduzidos para o Português com algum descuido nas notações funcionais, é o que temos por aí.

Uma planilha de cálculo é um programa para realizar algumas operações aritméticas e algébricas com alta precisão e relativa confiabilidade, permitir construções de gráficos, além de conter centenas de funções matemáticas, estatísticas, financeiras, lógicas e outras, muitas vezes desconhecidas da maioria daqueles que utilizam a própria planilha Excel.

Este pequeno material mostra algumas funções *escondidas* do Excel e um modo de tratar a Matemática tanto no âmbito do Ensino Médio como do Ensino Superior, usando a planilha Excel.

Este material não é regularmente encontrado e desconheço algum livro em língua portuguesa com este material de Matemática. Algumas funções da Planilha Excel não estão sendo bem tratadas no *Help* do Excel, como o conjunto das teclas **CONTROL**, **SHIFT** e **ENTER** que serve para a obter a inversa de uma matriz quadrada.

2 Alguns detalhes sobre o programa Excel

2.1 Abrir o programa Excel

Para abrir o programa Excel no Windows, pode-se clicar com o mouse, seguindo a ordem:

① **Iniciar** → **Programas** → **Microsoft Excel**

Normalmente, o Excel já abre com um arquivo novo, pronto para receber dados, mas podemos abrir um outro arquivo novo.

2.2 Criar um arquivo novo

No Excel, podemos abrir um arquivo novo com uma pasta de trabalho:

① **Arquivo** → **Novo...** → **Geral** → **Pasta de Trabalho** → **OK**

2.3 Identificar um conjunto de células

No Excel, o conjunto de células que vai de C1 até D4, é formado pelo conjunto: $\{C1, C2, C3, C4, D1, D2, D3, D4\}$.

	A	B	C	D	E
1	A1	B1	C1	D1	E1
2	A2	B2	C2	D2	E2
3	A3	B3	C3	D3	E3
4	A4	B4	C4	D4	E4
5	A5	B5	C5	D5	E5

O Excel entende este conjunto de células quando inserimos dois pontos na vertical entre C1 e D4, isto é, C1:D4.

2.4 Selecionar uma área contígua

Para selecionar uma área contígua (células anexas) no Excel, que vai de C1 até D4, isto é, C1:D4, podemos usar:

- ① **Colocamos o cursor do mouse sobre a posição C1, mantendo pressionada a tecla SHIFT e com as setas de deslocamento do cursor, indo até a célula D4.**

Uma forma alternativa para fazer isto, é:

- ① **Manter pressionado o botão esquerdo do mouse desde C1 até D4.**

Observação: O uso do teclado evita problemas de coordenação motora de cada pessoa ou problemas com o próprio mouse.

2.5 Selecionar uma área não contígua

Para selecionar uma área com vários blocos de células não contíguos (não estão juntos), podemos usar:

- ① **Selecionar a primeira área.**
- ② **Pressionar a tecla CTRL (control) e manter pressionada esta tecla enquanto durar a próxima etapa.**
- ③ **Selecionar a segunda área com o Mouse e então soltar a tecla CTRL.**
- ④ **Para anexar uma outra região devemos, pressionar a tecla CTRL e manter pressionada esta tecla enquanto durar a próxima etapa.**
- ⑤ **Selecionar a terceira área com o Mouse e então soltar a tecla CTRL.**
- ⑥ **Assim, continuamos ...**

3 Sequências reais

Em Matemática, o uso de sequências reais é muito intenso. Este conceito é utilizado desde o início do processo de contagem nos primeiros anos escolares e continua sendo usado nas sequências aritméticas, geométricas, tábuas de logaritmos, tábuas trigonométricas, chegando ao estudo de limites de funções reais, que é fundamental nos cursos superiores de Ciências Exatas.

Uma sequência real é uma função $f : N \rightarrow R$ que associa a cada número natural n , um único número real $f(n)$. Alguns exemplo:

$$f(n) = \frac{1}{n} \quad f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad f(n) = n^2 \quad f(n) = f(1) + (n - 1)r$$

Uma sequência f é uma função, mas muitas vezes é confundida com a imagem de N por f , denotada por $f(N)$, que é um conjunto que permite entender tal conceito. Por exemplo, vamos considerar $f(n) = n^2$, e usar $f(N) = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$.

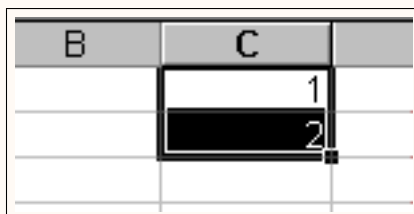
O Excel opera com sequências com um número finito de termos. Para obter uma sequência $f = f(n)$, construímos uma tabela com duas ou mais colunas. A primeira coluna terá índices $n = 1, 2, 3, 4, \dots, 15$ e a segunda coluna terá termos correspondentes da sequência f . Nossas sequências terão poucos índices mas o leitor poderá ampliar tal quantidade de termos, se tiver necessidade. Vamos colocar os nossos índices na coluna C.

3.1 Alça de preenchimento

No processo de selecionar células, aparece um quadradinho de cor preta no canto inferior direito da região selecionada, que é denominado **alça de preenchimento** ou simplesmente **alça**.

3.2 Preenchimento de colunas de índices com a alça

- ① Colocar 1 na célula C1 e 2 na célula C2
- ② Selecionar a região C2:C3, para ver algo como



- ③ Arrastar a alça (quadradinho) para baixo de C3 até a célula C11.
- ④ Observar o resultado obtido.

3.3 Preencher colunas de índices com a tecla CTRL

- ① Colocar 1 na célula A2.
- ② Pressionar a tecla CTRL (control) e manter pressionada esta tecla enquanto durar a próxima etapa.
- ③ Arrastar a alça para baixo desde A2 até A11.
- ④ Comparar com o caso anterior.

3.4 Preencher colunas com números ímpares

- ① Colocar 1 na célula B2 e por 3 na célula B3.
- ② Selecionar a região B2:B3.
- ③ Arrastar a alça para baixo até a célula B11
- ④ Comparar com o caso anterior.

3.5 Preencher colunas com horas

- ① Colocar 08:40 na célula D2.
- ② Clicar com o mouse na célula D2.
- ③ Arrastar a alça para baixo até a célula D11

3.6 Preencher colunas com datas

- ① Colocar 12/07/99 na célula E2.
- ② Clicar com o mouse na célula E2.
- ③ Arrastar a alça para baixo até a célula E11

3.7 Preencher colunas com datas intercaladas

- ① Colocar 12/07/99 na célula F2 e por 14/07/99 na célula F3.
- ② Selecionar a região F2:F3.
- ③ Arrastar a alça para baixo até a célula F11

3.8 Preencher colunas com horas intercaladas

- ① Colocar 12:45 na célula G2.
- ② Colocar 12:49 na célula G3.
- ③ Selecionar a região G2:G3.
- ④ Arrastar a alça para baixo até a célula G11

3.9 Informações Estatísticas de sequências

No Excel existem várias funções internas para realizar estatísticas básicas sobre uma certa sequência ou intervalo com valores numéricos. Tais estatísticas são obtidas com algumas funções estatísticas como as que estão indicadas na tabela abaixo, que é similar a uma planilha.

A	B	C
1	=CONT.NÚM(A1:A11)	Número de Termos
5	=CONT.SE(A1:A11;">=10")	No. de termos ≥ 10
3	=CONT.VALORES(A1:A11)	No. de valores não vazios
	=CONTAR.VAZIO(A1:A11)	Valores vazios
54	=MÁXIMO(A1:A11)	Máximo termo
54	=MÍNIMO(A1:A11)	Mínimo termo
67	=MÉDIA(A1:A11)	Média Aritmética
	=MÉDIA.GEOMÉTRICA(A1:A11)	Média Geométrica
4	=MÉDIA.HARMÔNICA(A1:A11)	Média Harmônica
434	=MODOS(A1:A11)	No. que mais aparece
4	=ORDEM(A9;A1:A11)	Ordem do número B9

- ① **Vá ao menu e insira uma nova planilha para construir a tabela.**
- ② **Escreveremos os nomes dessas funções mas na sequência aprenderemos a buscar tais funções no local adequado.**
- ③ **Uma célula vazia não deve ter conteúdo. Digitando um número em uma célula e depois apagando este número com a tecla DELETE, a célula deixará de estar vazia.**

- ④ Para limpar completamente esta célula, selecione:
menu **Editar** → **Limpar** → **Tudo**.
- ⑤ Construa a coluna A da tabela que segue, deixando vazias as células A4 e A8.
- ⑥ Digite com muito cuidado a coluna B.
- ⑦ Digite a coluna C.

Exercício: Pesquise uma outra função interessante que possa ser explorada com dados de um intervalo.

4 Equação da reta que passa por dois pontos

Quando temos dois pares ordenados de pontos no plano cartesiano, dados por $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, podemos obter a equação da reta que passa por estes pontos.

Uma análise mais fina poderá nos indicar se os pontos P e Q estão numa mesma reta vertical e em caso negativo podemos continuar com o nosso objetivo de construir os coeficientes angular e linear da reta.

Matematicamente, a reta será da forma $y = kx + w$, onde:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$w = -\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1}$$

Exercício: Obter a equação da reta que passa pelos pontos $P = (3, 7)$ e $Q = (12, 23)$.

4.1 Construir a equação da reta que passa por dois pontos

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Colocar 3 na célula A1 e 7 na célula B1
- ③ Colocar 12 na célula A2 e 23 na célula B2

- ④ Colocar $k=$ na célula C1 e $w=$ na célula C2
- ⑤ Na célula D1, escrever $= (B2-B1) / (A2-A1)$
- ⑥ Na célula D2, escrever $= - (A1*B2-A2*B1) / (A2-A1)$
- ⑦ Em A4 escrever $y=$, em B4 escrever $=D1$ e em C4 escrever x
- ⑧ Na célula D4, escrever $=SE(D2<=0; "-" ; "+")$.
- ⑨ Na célula E4, escrever $=ABS(D2)$
- ⑩ Selecionar A4:E4, formatar em negrito e com fonte de tamanho 16 e fundo amarelo.

Exercício: Obter a reta que passa pelos

1. pontos (0,0) e (3,4).
2. Refazer o exercício com os pontos (1,3) e (1,5).
3. Refazer o exercício com os pontos (3,1) e (5,1).

Ocorreu algo interessante nos dois últimos exercícios?

5 Alinhamento de três pontos no plano

Um fato importante do ponto de vista matemático e que também serve para obter a equação geral de uma reta no plano é a condição de alinhamento de três pontos no plano.

Quando temos três pontos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ e $R = (x_3, y_3)$, podemos verificar esta condição de alinhamento se é nulo o determinante da matriz que tem os elementos dispostos de acordo com a tabela:

Primeira linha	x_1	y_1	1
Segunda linha	x_2	y_2	1
Terceira linha	x_3	y_3	1

Exercício: É verdade que os pontos $P = (1, 3)$, $Q = (3, 5)$ e $R = (8, 12)$ são colineares?

5.1 Colinearidade de três pontos via determinante

- ① Inserir uma nova planilha.
- ② Existe um quadrado de cor cinza à esquerda da letra **A** da primeira linha guia localizado sobre o número **1** da primeira coluna guia.
- ③ Clicando sobre este quadrado, você seleciona toda a planilha e poderá mudar o tamanho da fonte para **16**.
- ④ Em **A1** escrever **1**, em **B1** escrever **3** e em **C1** escrever **1**.
- ⑤ Em **A2** escrever **3**, em **B2** escrever **5** e em **C2** escrever **1**.
- ⑥ Em **A3** escrever **8**, em **B3** escrever **10** e em **C3** escrever **1**.
- ⑦ Em **A5**, escrever **det=**
- ⑧ Em **B5**, escrever **=MATRIZ.DETERM(A1:C3)**
- ⑨ Em **D5**, escrever **=SE(B5=0;"Colineares";"Não colineares")**
- ⑩ Selecionar **A5:G7**, formatar em **negrito**, **fundo amarelo** e **tamanho da fonte 16**.

Exercício: Verificar se os pontos $(0, 0)$, $(2, 2)$ e $(20, 20)$ são colineares.

5.2 Área de um triângulo com os vértices dados

Podemos obter a área de um triângulo a partir do conhecimento dos seus vértices, dados por $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ e $R = (x_3, y_3)$.

Para obter a área deste triângulo, basta construir a matriz 3×3 com os elementos de acordo com a tabela:

Primeira linha	x_1	y_1	1
Segunda linha	x_2	y_2	1
Terceira linha	x_3	y_3	1

e obter a metade do valor absoluto do determinante da matriz 3×3 .

Exercício: Obter a área do triângulo cujos vértices são identificados pelos pontos $P = (1, 3)$, $Q = (3, 5)$ e $R = (8, 12)$.

5.3 Área de um triângulo, dados os vértices

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Formatar a planilha toda para ter a fonte tamanho 16.
- ③ Em A1 escrever 1, em B1 escrever 3 e em C1 escrever 1.
- ④ Em A2 escrever 3, em B2 escrever 5 e em C2 escrever 1.
- ⑤ Em A3 escrever 8, em B3 escrever 10 e em C3 escrever 1.
- ⑥ Na célula A5, escrever Área=
- ⑦ Na célula B5, escrever =ABS(MATRIZ.DETERM(A1:C3)/2)
- ⑧ Selecionar A5:B5 e formatar em negrito com fundo amarelo.

Exercício:

1. Comparar a construção acima com a construção da planilha de colinearidade de pontos.
2. Calcular a área de um triângulo cujos vértices sejam dados por você.

5.4 Área de região poligonal convexa, dados os vértices

Para obter a área de uma região poligonal convexa, com os seus n vértices, dados por:

$$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3), P_4 = (x_4, y_4), \dots, P_n = (x_n, y_n)$$

devemos construir a matriz $(n + 1) \times 2$ com os elementos:

Linha 1	x_1	y_1
Linha 2	x_2	y_2
Linha 3	x_3	y_3
...		
Linha n	x_n	y_n
Linha 1	x_1	y_1

realizar multiplicações com as diagonais para baixo e para cima, para obter

$$2A = (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \dots + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + \dots + x_1y_n)$$

Exercício: Qual é a área da região poligonal convexa cujos vértices são: $P = (1, 3)$, $Q = (3, 5)$, $R = (8, 12)$, $S = (34, 24)$ e $T = (25, 19)$.

5.5 Área da região poligonal convexa

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Nas primeiras células da planilha (A1:B6), escrever duas colunas:

1	3
3	5
8	12
34	24
25	19
1	3

- ③ Pintar de amarelo as células da região A1:B6
- ④ Em C1 escrever =A1*B2 e copiar C1 para a região C1:C6
- ⑤ Em D1 escrever =A2*B1 e copiar D1 para a região D1:D6
- ⑥ Em B7 escrever Somas
- ⑦ Em C7 escrever =SOMA(C1:C6) e em D7 escrever =SOMA(D1:D6)
- ⑧ Em B8, escrever Área= e em D8 escrever =ABS(C6-D6)/2

6 Algumas medidas de um polígono regular

Em Geometria, no estudo de polígonos regulares, é comum precisarmos obter relações com o número de lados, os ângulos internos, externos, número de diagonais e outras. Por exemplo, o quadrado tem 4 lados, 4 ângulos internos de 90 graus, 4 ângulos externos de 90 graus e 2 diagonais. Como ficam tais dados no hexágono?

Para um polígono regular, se n é o número de lados, então:

1. soma dos ângulos internos é igual a $180n - 360$;
2. Cada ângulo interno é dado por $180 - 360/n$;
3. Cada ângulo externo é dado por $360/n$;
4. número de diagonais é dado por $n(n - 3)/2$.

6.1 Calcular algumas medidas de um polígono regular

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Colocar os dados de acordo com a tabela abaixo.

A	B	C	D	E	F
1	Polígono	Lados	SomaAngInt	ÂngInterno	Diagonais
2	Regular	n	$180n-360$	$180-360/n$	$n(n-3)/2$
3	triângulo	3	$=180*C3-360$	$=180*C3-360$	$=C3*(C3-3)/2$
4	quadrado	4			
5	pentágono	5			
6	hexágono	6			
7	heptágono	7			
8	octógono	8			
9	eneágono	9			
10	decágono	10			

- ③ Selecione D3:F3 e copie os dados até D10:F10.

7 Ajuste Linear pelos mínimos quadrados

Após realizar um experimento, obtemos uma coleção de pares ordenados de dados e podemos tentar construir uma função afim $y = kx + w$ (parece linear) que se ajusta aos dados, isto é, desejamos obter uma reta que passa o mais próximo possível dos pontos obtidos no experimento.

O Método dos Mínimos Quadrados, estudado em Estatística e também tratado no Excel, fornece uma resposta adequada ao problema.

A seguir, vamos inserir os dados nas colunas A e B, os valores conhecidos ficarão em branco e os dados sobre os quais desejamos obter mais informações ficam em cinza na linha 10 e na linha 11.

Exercício: Obter a reta dos mínimos quadrados que se ajusta aos pares ordenados de dados:

x	1	3	5	7	10	13	15	17	25
y	2	5	8	10	18	25	30	39	50

7.1 A reta de ajuste pelos mínimos quadrados no Excel

Com a mesma coleção de dados apresentada antes, obteremos a reta que melhor se ajusta, aos dados, no sentido dos mínimos quadrados.

A	B	C	D	E
1	1	2	Coefficiente angular	=INCLINAÇÃO(C1:C9;B1:B9)
2	3	5	Intercepto com OY	=INTERCEPÇÃO(C1:C9;B1:B9)
3	5	8		
4	7	10		
5	10	18		
6	13	25		
7	15	30		
8	17	39		
9	25	50		
10	18		Tendência para A10	=TENDÊNCIA(C1:C9;B1:B9;B10)
11	19		Tendência para A11	=TENDÊNCIA(C1:C9;B1:B9;B11)

A tendência para B10 significa o valor de y quando $x=B10$ na reta de melhor ajuste $y = kx + w$.

Exercício: Criar uma sequência de pares ordenados e obter a reta de ajuste aos dados no sentido dos mínimos quadrados.

8 Sequências Aritméticas e geométricas

8.1 Sequências Aritméticas

É essencial estudar sequências aritméticas, pois elas estão relacionadas com sequências lineares em função de seus comportamentos gráficos. Uma sequência aritmética é uma função $f : N \rightarrow R$ definida por

$$f(n) = f(1) + (n - 1)r$$

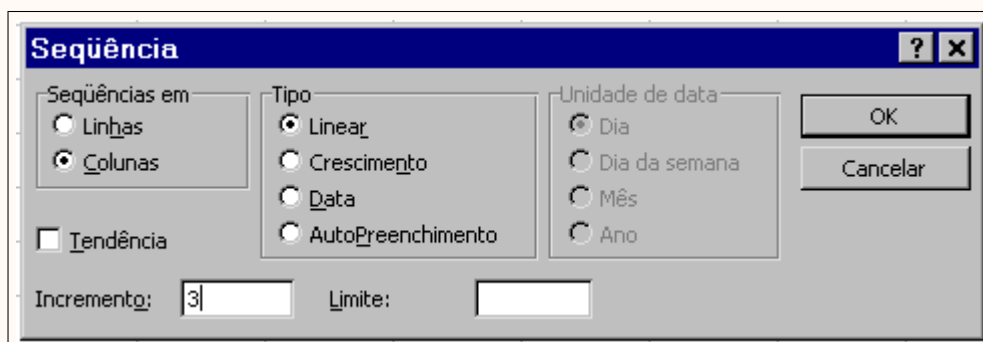
onde a_1 é o primeiro termo, n é o número de termos e r é a razão da sequência, que coincide com a diferença de dois termos consecutivos da sequência quando tratada no conjunto $f(N)$.

O Excel está preparado para construir sequências aritméticas.

8.2 Progressão Aritmética

Para construir uma Progressão Aritmética (PA) com 15 termos, onde o primeiro termo é $a_1 = 7$ e a razão é $r = 3$, usamos:

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Colocar 7 na célula A1
- ③ Selecionar a região A1:A15
- ④ Editar → Preencher → Sequência



- ⑤ Colocar 3 na caixa de Incremento
- ⑥ Clicar no Tipo: Linear → OK

8.3 Sequências Geométricas

O estudo das sequências geométricas está relacionado com a idéia de crescimento populacional, decaimento radioativo, variação de temperatura em um corpo, Matemática Financeira e outras situações muito comuns de nossa vida.

Uma sequência geométrica é uma função $f : N \rightarrow R$ definida por

$$f(n) = f(1) \cdot q^{n-1}$$

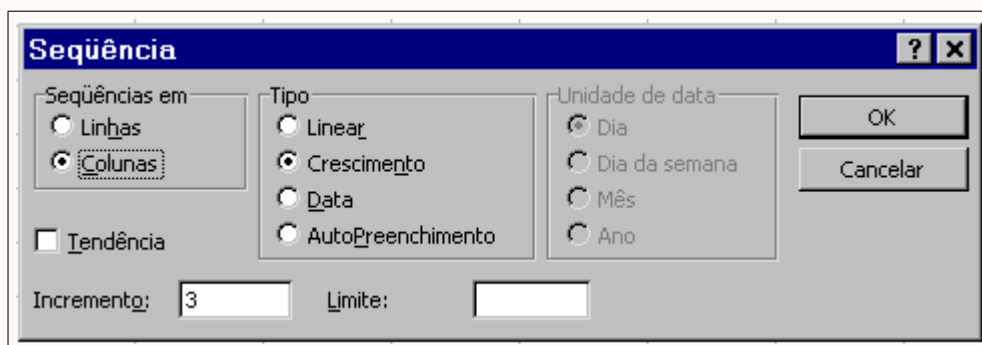
onde a_1 é o primeiro termo, n é o número de termos e q é a razão da sequência, que coincide com o quociente entre dois termos consecutivos da sequência quando tratada no conjunto $f(N)$.

O Excel está adaptado para construir tais sequências geométricas.

8.4 Progressão Geométrica

Para construir uma Progressão Geométrica (PG) com 15 termos, onde o primeiro termo é $a_1 = 7$ e a razão é $q = 3$, podemos usar:

- ① **Inserir uma nova planilha**
- ② **Colocar 7 na célula A1**
- ③ **Selecionar a região A1:A15**
- ④ **Editar → Preencher → Sequência**



- ⑤ **Colocar 3 na caixa de Incremento**
- ⑥ **Clicar no Tipo: Crescimento → OK**

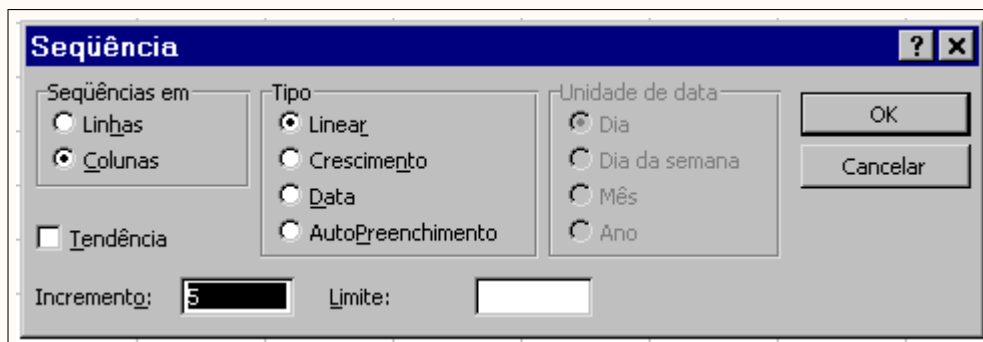
8.5 Interpolar termos em uma sequência

Quando temos dois valores, o processo de inserir números entre estes dois valores seguindo algum procedimento, é denominado *interpolação*. Podemos ter vários processos de interpolação mas a aritmética e a geométrica são as mais comuns.

8.6 Interpolar termos aritméticos

Para interpolar aritmeticamente 10 números reais entre $a_1 = 7$ e $a_n = 62$, podemos usar um processo semelhante ao da construção de uma PA, lembrando que temos 10 termos entre os 2 outros dados (extremos), o que significa um total de 12 termos.

- ① **Inserir uma nova planilha**
- ② **Na célula A1 escrever 7 e na célula A12 escrever 62.**
- ③ **Selecionar a região A1:A12**
- ④ **Editar → Preencher → Sequência**

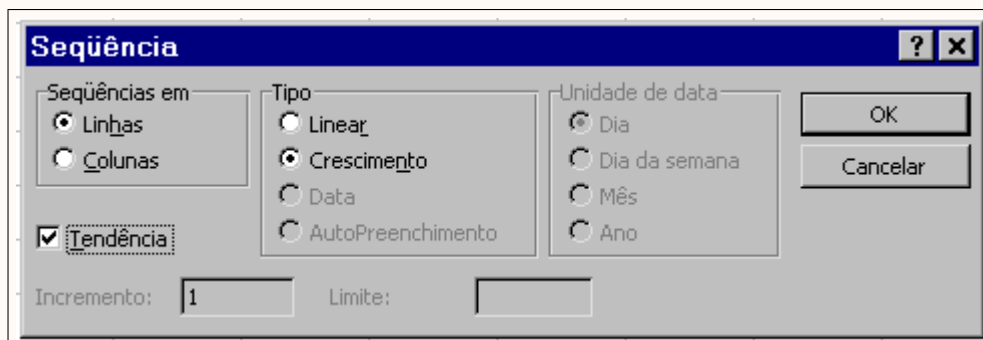


- ⑤ **Aparece Incremento: 5, pois a planilha já calculou a razão da PA.**
- ⑥ **Clicar no Tipo Linear → OK**

8.7 Interpolar termos geométricos

Para interpolar 10 meios aritméticos entre $a_1 = 5$ e $a_n = 10240$, usamos um processo similar ao da construção de uma PG com 12 termos, pois 10 termos entre os 2 outros dados (extremos).

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Colocar 5 na célula A1 e 10240 na célula A12
- ③ Selecionar a região A1:A12
- ④ Editar → Preencher → Sequência



- ⑤ Marcar Tendência
- ⑥ Clicar no Tipo: Crescimento → OK

9 Operações com sequências reais

9.1 A sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci aparece em aplicações matemáticas, em Beleza, em Filotaxia e Geometria. Ela pode ser gerada com dois valores iniciais $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ com a relação recursiva $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para n natural. Se $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, os termos consecutivos da sequência são $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, \dots$

9.2 Construção de uma sequência de Fibonacci com 15 termos.

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Colocar 1 na célula A1 e 1 na célula A2;
- ③ Escrever na célula A3: =A1+A2
- ④ Selecionar A3, arrastar a alça de A3 até A15.

- ⑤ Colocar 10 na célula B1 e 12 na célula B2;
- ⑥ Escrever na célula B3: $=B1+B2$
- ⑦ Selecionar B3, arrastar a alça de B3 até B15.

9.3 Somas de termos de sequências

O Excel pode realizar somas parciais e somas de todos os termos de uma sequência numérica. Para isto, basta ter uma sequência, que pode ser qualquer uma daquelas já construídas antes.

9.4 Somas parciais de termos de uma sequência

- ① Inserir uma nova planilha.
- ② Vá à planilha com a sequência de Fibonacci e faça uma cópia da mesma para a planilha que você acabou de criar.
- ③ No próximo passo, tome cuidado com o \$.
- ④ Escrever na célula B1: $=SOMA(\$A\$1:A1)$
- ⑤ Copiar B1 para a região B1:B15

9.5 Somas de todos os termos de uma sequência

- ① Escrever na célula F4: $=SOMA(A1:A15)$
- ② Compare os dois últimos resultados obtidos.

9.6 Somas de todos os termos de uma região contígua

- ① Escrever na célula F5: $=SOMA(A1:B15)$

9.7 Somas de todos os termos de uma região não contígua

- ① Em F6, digite =
- ② Acione a função SOMA
- ③ Quando aparecer a caixa de diálogo cinza, arraste-a um pouco para baixo
- ④ Dê um clique na área marcada da caixa de diálogo
- ⑤ Selecione a área A1:A10, pressione CTRL e mantenha esta tecla pressionada enquanto seleciona com o mouse, a área B1:B3.
- ⑥ Clique sobre o botão OK.

9.8 Limites de sequências

O Excel pode calcular o valor aproximado do limite de uma sequência. O limite de uma sequência escrita na forma (x_n) é um número real (único) para o qual a sequência se aproxima à medida que os índices n naturais crescem para mais infinito.

Um limite muito interessante que é utilizado na prática em diversas situações é o número de Ouro, também denominado razão de ouro. Este número é obtido como o limite da razão entre 2 termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Para obtê-lo, devemos construir uma sequência das razões, a partir do primeiro termo.

Para os nossos cálculos, usaremos a sequência de Fibonacci que construímos antes.

9.9 Número áureo relacionado com uma sequência

- ① Inserir uma nova planilha.
- ② Copiar a sequência de Fibonacci para esta nova planilha
- ③ Escrever na célula B1: =A2/A1
- ④ Selecionar B1 e arrastar a alça de B1 até B13.

Os valores numéricos se estabilizam em torno de um valor próximo de 1,618034, conhecido como o *número de Ouro*.

9.10 Multiplicação de lista por um número fixo

Para multiplicar uma lista (linha ou coluna) por um mesmo número, digamos 3,1416, deve-se ter a lista, que pode ser qualquer uma das anteriores. Copiaremos a sequência de Fibonacci para uma nova planilha a ser criada. Observe o sinal de dollar \$ antes dos objetos da coluna, da linha ou de ambos, para fixar a coluna, fixar a linha ou fixar ambos os indicadores.

9.11 Multiplicar uma lista por um número fixo

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Construir um sequência em A1:A10
- ③ Escrever na célula B1: 3,1416
- ④ Escrever na célula C1: =\$B\$1*A1
- ⑤ Copiar C1 para a região C1:C10

10 Logaritmos, Trigonometria e Triângulo de Pascal

O logaritmo é útil em situações onde manipulamos valores numéricos grandes como medidas astronômicas ou valores pequenas da química. Construiremos uma tábua de logaritmos com valores de $N = 1$ a $N = 20$.

10.1 Tábua de logaritmos no Excel

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Na célula A1, escrever n
- ③ Na célula B1, escrever Log(n)
- ④ Colocar 1 na célula A2, manter CTRL pressionada e arrastar a alça de A2 até a célula A21
- ⑤ Na célula B2, escrever: =LOG10(A2)
- ⑥ Arrastar a alça de preenchimento de B2 até B21.

10.2 Tábua Trigonométrica

A trigonometria serve para construir objetos matemáticos como triângulos, e também para obter medidas entre pontos de locais inacessíveis. Para trabalhar com a trigonometria devemos conhecer as funções trigonométricas mais importantes.

Exercício: Construir uma tábua trigonométrica com 30 valores com as funções seno, cosseno, tangente, de $x = 0$ até $x = 3,1416 = PI()$.

10.3 Tábua trigonométrica

- ① **Abrir uma nova planilha e escrever Arco em A1**
- ② **Escrever Ângulo em B1, Seno em C1 e Cosseno em D1**
- ③ **Escrever Tangente em E1, 0 em A2 e =PI() na célula A31**
- ④ **Selecionar a região A2:A31 e acionar**
Menu Editar → Preencher → Sequência. Clicar em Tendência → Linear → OK
- ⑤ **Em B2 escrever =GRAUS(A2)**
- ⑥ **Em C2 escrever =SEN(A2), em D2 =COS(A2) e em E2: =TAN(A2)**
- ⑦ **Copiar B2:E2 para a região B2:E31**
- ⑧ **Selecionar todas as colunas desde A até E e acionar**
Formatar → Células → Número → Número → Casas decimais: 4 → OK

10.4 Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal pode ser usado para expandir a expressão matemática $f(x) = (x + a)^n$, onde n é um número natural.

Para construir o Triângulo de Pascal, pode-se usar a função COMBIN que calcula a combinação de m elementos tomados p a p ou o processo de somar dois elementos de uma linha, colocando a soma logo abaixo do segundo elemento na linha de baixo.

1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

10.5 Triângulo de Pascal no Excel

- ① **Abrir uma nova planilha**
- ② **Escrever 1 na célula A1 e arrastar a alça de A1 para baixo até A10**
- ③ **Colocar o valor 1 nas células: B1, C2, D3, E4, F5, G6, H7, I8, J9 e K10**
- ④ **Na célula B2, escrever =A1+B1**
- ⑤ **Arrastar a alça de B2 até B10, de B3 até C3 e de C3 até C10**
- ⑥ **Arrastar a alça de C4 até D4, de D4 até D10 e de D5 até E5**
- ⑦ **Arrastar a alça de E5 até E10, de E6 até F6 e de F6 até F10**
- ⑧ **Arrastar a alça de F7 até G7, de G7 até G10 e de G8 até H8**
- ⑨ **Arrastar a alça de H8 até H10, de H9 até I9 e de I9 até I10**
- ⑩ **Arrastar a alça de I10 até J10**

10.6 Forma alternativa para o triângulo de Pascal

- ① **Abra uma nova planilha, pressione CTRL+T para selecionar a mesma e depois pressione Formatar, Coluna, Largura: 4, OK.**
- ② **Colocar 0 na célula A1, mantenha pressionada a tecla CTRL e arraste a alça de A1 para baixo até A13**
- ③ **Na célula B1 colocar 0, mantenha pressionada a tecla CTRL e arraste a alça para a direita de B1 até N1**
- ④ **Na célula B2 escrever =COMBIN(\$A2;B\$1). Cuidado com os \$.**
- ⑤ **Copiar a célula B2 para a região B2:N13**
- ⑥ **Você verá muitos símbolos estranhos na tela.**

- ⑦ **Vá à célula B2 e pressione a tecla F2 para editar a mesma. No lugar da expressão que você vê, mude para**

`=SE($A2>=B$1;COMBIN($A2;B$1);"")`
- ⑧ **Copiar a célula B2 para a região B2:N13, observando que melhorou a saída de tela.**
- ⑨ **Selecione B2:N13 e vá ao menu Formatar e marque Formatação Condicional. Aparecerá uma caixa de diálogo.**
- ⑩ **Nesta caixa, clique em Condição 1: “O valor da célula é”, depois “maior do que” na caixa seguinte e escreva 0 na última caixa. Ainda sem fechar a caixa de diálogo, pressione o botão Formatar e marque Fonte, vermelha e negrito, pressionando OK.**

Exercício: Com o Excel, crie um triângulo especial com características interessantes do ponto de vista matemático.

11 Matemática Financeira

11.1 Sistema Price e Financiamentos

O sistema Price (Richard Price) é usado em financiamentos de bens de consumo. O sistema foi primeiramente utilizado na França, razão pela qual é denominado Sistema francês. Neste sistema, a identificação dos objetos matemáticos envolvidos ocorre com a relação matemática

$$V = R \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

onde V é o valor efetivamente financiado, R é a prestação, n é o número de períodos e i é a taxa ao período. A expressão complicada que está à direita de R na fórmula acima, recebe o nome de Fator de Valor Atual para uma série uniforme, denotada pela sigla FVAs.

A manipulação do FVAs é difícil quando se trata de trabalhar com programação de computadores, assim devemos usar o método iterativo de

Newton-Raphson das aproximações sucessivas para obter cálculos com boa precisão.

A função que fornece o Fator de Valor Atual para Séries uniformes (FVAs) gera coeficientes que dependem de n (número de períodos) e i (taxa unitária cobrada por período).

Construiremos agora uma tabela com finalidade didática e econômica, com esses coeficientes para financiamentos. Esta tabela aparece calculada nos principais jornais de Economia no Brasil.

A palavra *didática* foi usada aqui porque desejamos mostrar que, toda pessoa pode construir esta tabela, enquanto a palavra *econômica* sugere que o próprio construtor da tabela poderá guardar a mesma no bolso (pois não será fácil levar um computador!) quando for realizar as suas compras e deixar de ser enganado por comerciantes.

11.2 Tabela para financiamento de bens no Excel

Inicie com uma nova planilha.

- ① Em A1 escrever: **Tabela de Financiamento**
- ② Em A2 escrever: **FVAs(i,n)**
- ③ Deixe a linha 3 em branco, mas em A4 escrever: **Taxa - Nper**
- ④ Em B4, escrever 1 e arrastar a alça de B4 até a célula M4.
- ⑤ Em A5, escrever 0 e em A44, escrever 0,1
- ⑥ Preencher a região A5:A44 com tendência linear, aproveitando a região selecionada para formatá-la com porcentagem e duas casas decimais
- ⑦ Voltar à célula A5 para escrever 0,00001
- ⑧ Em B5, escrever com **MUITO CUIDADO**:
$$=((1+\$A5)^(B\$4)-1)/(\$A5*(1+\$A5)^(B\$4))$$
- ⑨ Observe que existe um \$ antes de A e um \$ depois de B.
- ⑩ Copiar B5 para a região B5:M44. Formatar a região B5:M44 com Número com 3 decimais.

11.3 Modo de usar a tabela Price

Qual é a taxa mensal cobrada para financiar um Objeto pelo Sistema Price, sabendo-se que o mesmo custa R\$10.000,00, com uma entrada de R\$ 1.000,00 mais 11 prestações iguais no valor de R\$ 1.200,00 cada?

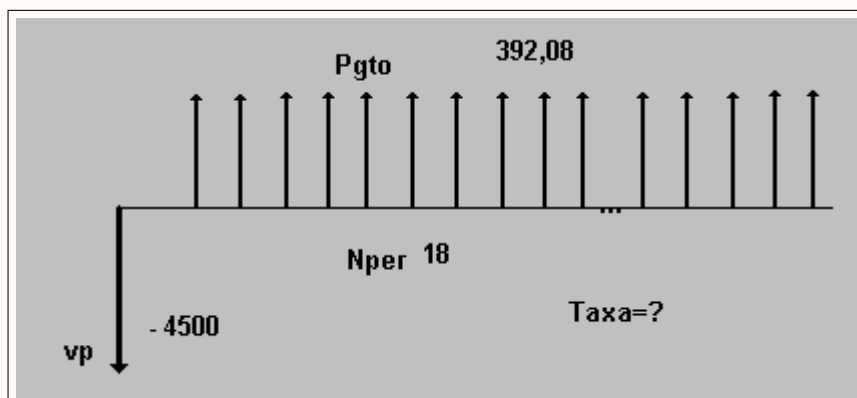
O Valor efetivamente financiado é R\$ 9.000,00 e o número de parcelas é $n = 11$, pois a primeira parcela (entrada) já foi realizada e não devemos pagar juros da mesma. Monte a tabela abaixo na planilha

A	B
Preço Total do Objeto	10000
Entrada (Pagamento à vista)	1000
Valor Efetivamente Financiado	=B1-B2
Prestação mensal	1200
Divisão (Coeficiente da tabela)	=B3/B4

Após a divisão procure na coluna de $n=11$, o valor mais próximo da divisão $C3/C4=7,5$ que corresponde à linha de 6,95 (quase 7%). Esta é a taxa mensal cobrada pela empresa.

11.4 Fluxo de caixa e taxas de juros

Fluxo de Caixa é um gráfico que representa uma operação financeira, indicando com uma seta para baixo (-) a saída do Capital e uma seta para cima (+) a entrada do Capital.



Retirando R\$4500 de uma loja, a loja toma tal fato como negativo e quando restituímos as parcelas mensais a loja toma tal fato como positivo.

11.5 Taxa de juros

- ① Inserir uma nova Planilha
- ② Preencher as colunas como na tabela, o Valor financiado **vp** negativo e as indicações sobre o mesmo tipo de período e **Pgto** o valor da prestação.

A	B	C
Taxa de Juros		=TAXA(B3;B4;B5;B6;B7)
Nper	18	
Pgto	392,08	
Vp	-4500	
Vf	0	
Tipo	0	

11.6 A função PGTO do Excel

A função financeira PGTO, retorna o pagamento periódico de uma anuidade (ou prestação ao período) com pagamentos constantes e uma taxa de juros constante. Na planilha Excel, a sintaxe é

$$=PGTO(\text{taxa}; \text{nper}; \text{vp}; \text{vf}; \text{tipo})$$

onde

taxa é a taxa de juros por período.

nper é o número total de pagamentos pelo empréstimo.

Vp é o valor presente total a ser financiado

Vf é o valor futuro que se deseja obter depois do último pagamento, que será Vf=0 se for omitido por você.

Tipo é o número 0 (omitido) se as datas de vencimento forem no final do período e 1 se forem no início.

11.7 Comentários sobre a função PGTO()

1. O valor retornado por PGTO inclui o principal e os juros e não inclui taxas, pagamentos de reserva ou tarifas, às vezes associados a empréstimos.
2. Verifique que ocorrer consistência quanto às unidades usadas para especificar taxa e nper.
3. Quando realizar pagamentos mensais por um empréstimo de 4 anos com juros de 12% ao ano, use 12%/12 para obter a taxa mensal e 4*12 para obter o número de meses nper.
4. Com pagamentos anuais para o mesmo empréstimo, use 12% para taxa e 4 para nper.

A expressão matemática para obter o PGTO P em função do Valor efetivamente financiado V , é a mesma que já apresentamos antes com P no lugar de Pgto. Esta relação depende da taxa de juros ao período e do número n de períodos.

A expressão matemática à direita de V na fórmula abaixo é o inverso de FVAs que vimos antes.

$$P = V \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Infelizmente, a taxa i está apresentada de uma forma implícita e não é fácil (ou às vezes impossível) obter a mesma em função das outras informações, razão pela qual a planilha Excel entra com força neste contexto.

Para obter o cálculo da taxa de juros on-line, você poderá acessar a área Financeira da Página Matemática Essencial, localizada no endereço eletrônico <http://mat.uel.br/matessencial/>

11.8 Prestações em um financiamento (end)

Quando temos um empréstimo com taxa anual pagável mensalmente no final de cada período. Neste caso:

Taxa=8%	Nper=10	Vp=10000	Vf=???	Tipo=0
---------	---------	----------	--------	--------

A função

$$\text{PGTO}(8\%/12; 10; 10000) = -1037,03$$

fornece o pagamento mensal por um empréstimo de \$10.000 a uma taxa de 8% a.a. que você deve pagar em 10 meses no final de cada mês.

No Excel:

	A	B	C
1	Taxa	8%	
2	Nper	10	
3	Vp	10000	
4	Vf		=PGTO(B1/12;B2;B3)
5	Tipo		

11.9 Prestações em um financiamento (begin)

Empréstimo com taxa anual pagável mensalmente no início de cada período.
Tomemos:

Taxa=8%	Nper=10	Vp=10000	Vf=???	Tipo=1
---------	---------	----------	--------	--------

A função

$$\text{PGTO}(8\%/12; 10; 10000; 0; 1) = -1030,16$$

fornece a prestação mensal por um empréstimo de \$10.000 a uma taxa de 8% a.a. que você deve pagar em 10 meses no início de cada mês.

	A	B	C
1	Taxa	8%	
2	Nper	10	
3	Vp	10000	
4	Vf	0	=PGTO(B1/12;B2;B3;B4;B5)
5	Tipo	1	

11.10 Resgate de um empréstimo

Resgate mensal de empréstimo com taxa anual, pagável no final de cada período. A função

$$\text{PGTO}(12\%/12; 5; -5000) = 1030,20$$

gera o valor a ser recebido mensalmente se você emprestar a alguém \$5.000,00 a 12% ao ano, para receber em 5 meses o seu empréstimo.

Taxa=12%	Nper=5	Vp=5000	Vf=???	Tipo=0
----------	--------	---------	--------	--------

	A	B	C
1	Taxa	12%	
2	Nper	5	
3	Vp	-5000	
4	Vf		=PGTO(B1/12;B2;B3)
5	Tipo		

11.11 Depósito em caderneta de poupança

Podemos usar a função PGTO para obter pagamentos ao invés de empréstimos. Por exemplo, o Depósito em caderneta de Poupança com taxa anual de 6% capitalizados mensalmente com depósitos feitos no final de cada mês.

Para guardar \$50.000 em 18 anos com uma mesma quantia todo mês, determina-se o valor do depósito mensal, com a função:

$$\text{PGTO}(6\%/12; 18*12; ; 50000;0) = -129,08$$

Os juros anuais são de 6% em seus depósitos.

Taxa=6%	Nper=18	Vp=???	Vf=50000	Tipo=0
---------	---------	--------	----------	--------

	A	B	C
1	Taxa	6%	
2	Nper	18	
3	Vp	=PGTO(B1/12;B2*12; ;B4;B5)	
4	Vf	50000	
5	Tipo	0	

12 Matrizes e sistemas lineares

12.1 Matrizes reais

O uso de matrizes é intenso em Matemática e suas aplicações. Uma matriz encontra o local adequado para receber tratamento numérico numa planilha Excel. A Planilha Excel pode ser usada para resolver, com uma boa precisão numérica, equações diferenciais ordinárias e parciais.

No Excel, trabalhamos com matrizes o tempo todo. Todas as operações básicas conhecidas para matrizes podem ser executadas: Soma, subtração e produto. Pode-se também obter o determinante e resolver sistemas lineares.

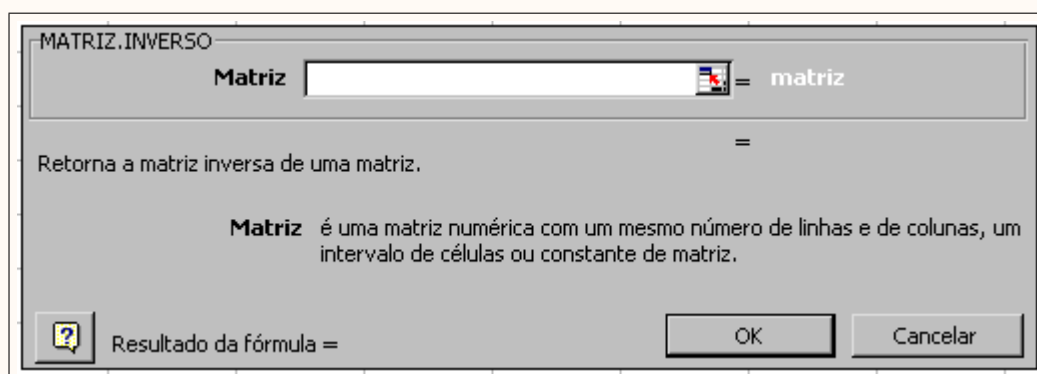
Para inverter uma matriz quadrada $n \times n$, deve-se reservar uma área com n linhas e n colunas para conter a matriz inversa. A inversa clássica de uma matriz só é possível se o determinante da mesma for não nulo.

12.2 Inversa de uma matriz quadrada

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Entrar com a matriz apresentada abaixo na região A1:C3
- ③ Selecionar a região D1:F3 e digitar o sinal =
- ④ Sobre as letras das colunas A, B, C, ... veremos uma palavra, (SOMA), uma seta para baixo e três sinais: um X, um V e um =. A palavra indica a última função usada e a seta à direita da palavra indica a coleção de todas as funções disponíveis.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	2	3	=			
2	2	6	6				
3	0	3	23				
4							

- ⑤ Clicar na seta → Mais funções... → Matemática e Trigonometria → MATRIZ.INVERSO
- ⑥ Aparecerá então a caixa de diálogo



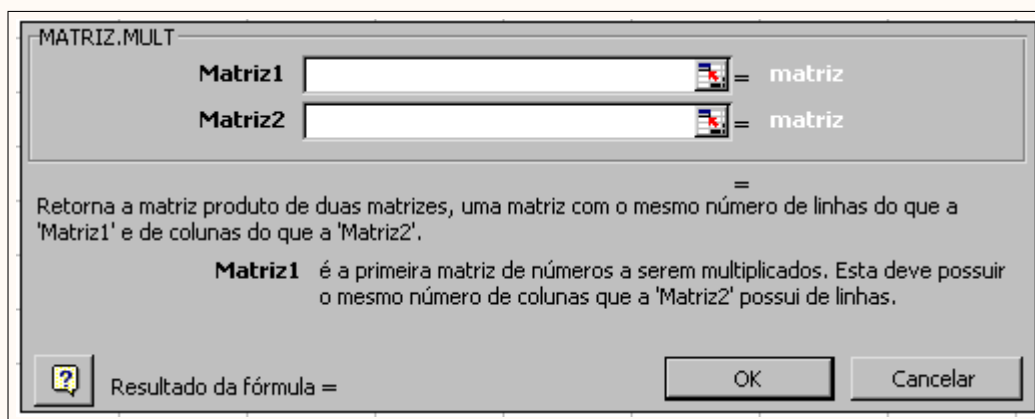
- ⑦ Clique em algum lugar da parte cinza desta caixa e arraste-a um pouco para baixo para que você possa ver a matriz e também o lugar onde será colocada a inversa da matriz dada.
- ⑧ Clique com o Mouse na área branca da caixa de diálogo e coloque o mouse na planilha, selecionando a região A1:C3
- ⑨ NÃO PRESSIONE A TECLA [OK].
- ⑩ Para obter a inversa, pressione ao mesmo tempo as TRÊS teclas:

Control + Shift + <ENTER>

12.3 Multiplicação de matrizes

Para multiplicar duas matrizes, aproveitaremos a matriz dada e a inversa recém construída.

- ① Selecionar a região G1:I3 e digitar o sinal =
- ② Clicar na seta → Mais funções... → Todas → MATRIZ.MULT
- ③ Aparecerá a caixa de diálogo intitulada Matriz.Mult



- ④ Arraste-a um pouco para baixo para poder ver as suas matrizes e também o lugar onde será posta a matriz produto das duas primeiras matrizes
- ⑤ Clique com o Mouse na área branca identificada com Matriz1
- ⑥ Com o mouse selecione a região A1:C3.
- ⑦ Clique com o Mouse na área branca identificada com Matriz2
- ⑧ Selecione a região D1:F3 com o Mouse ou coloque esta região manualmente
- ⑨ NÃO PRESSIONE A TECLA [OK].
- ⑩ Para ver o produto, pressione ao mesmo tempo as TRÊS teclas:

Control + Shift + <ENTER>

Você obterá a identidade, se a matriz original tem determinante não nulo.

12.4 Soma e Subtração de matrizes

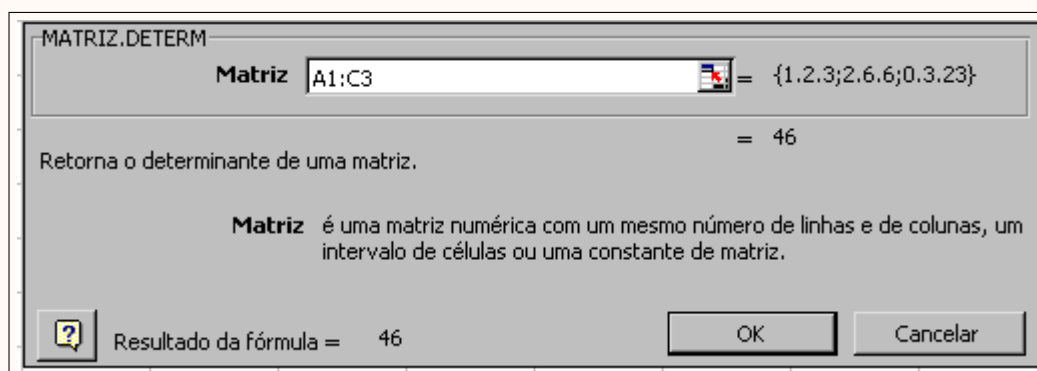
- ① Inserir uma nova planilha
- ② Digitar números na região A1:C3
- ③ Digitar números na região E1:G3

- ④ Na célula A5 digitar =A1+E1
- ⑤ Copiar a célula A5 para toda a região A5:C7
- ⑥ Na célula E5 digitar =A1-E1
- ⑦ Copiar a célula E5 para toda a região E5:G7

Exercício: Construa matrizes de ordens 10x8 e realize operações de adição, subtração e multiplicação por escalar.

12.5 Determinante de uma matriz quadrada

- ① Entrar com a matriz na região A1:C3
- ② Digitar o sinal de = na célula D1
- ③ Aparecerá a lista de funções
- ④ Clicar na seta → Mais funções... → Todas → MATRIZ.DETERM
- ⑤ Aparecerá a caixa de diálogo



- ⑥ Arraste-a para baixo para ver a matriz e o lugar onde ficará o determinante da matriz dada.
- ⑦ Clique com o mouse na área branca da caixa de diálogo
- ⑧ Selecione a região A1:C3 com o mouse ou indique a região manualmente
- ⑨ Para obter o determinante, pressione OK.

12.6 Resolução de um sistema linear

Para resolver um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas, basta multiplicar a inversa da matriz dos coeficientes (se existir) pela matriz dos termos independentes.

$$\begin{aligned}2x + 3y - 4z &= 87 \\ -7x + 8y - 12z &= -77 \\ 3x - 9y + 11z &= 55\end{aligned}$$

$$\text{Matriz coeficientes} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -7 & 8 & -12 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}, \quad \text{Matriz constantes} = \begin{pmatrix} 87 \\ -77 \\ 55 \end{pmatrix}$$

12.7 Resolver um sistema no Excel

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Inserir a matriz dos coeficientes na região A1:C3
- ③ Escrever x em E1, y em E2 e z em E3
- ④ Escrever os termos constantes em G1:G3
- ⑤ Obter a inversa da matriz que está em A1:C3 e colocar o resultado na região A6:C8.
- ⑥ Não se esqueça do Control + Shift + <ENTER>
- ⑦ Calcular o produto da matriz1 que está em A6:C8 pela matriz2 na região G1:G3.
- ⑧ Não se esquecer de pressionar ao mesmo tempo as TRÊS teclas:
Control + Shift + <ENTER>.
- ⑨ Escrever x= em F6, y= em F7 e z= em F8.
- ⑩ O resultado deverá ficar em G6:G8.

O vetor obtido (com três números) é a solução do sistema se a matriz dos coeficientes tem determinante não nulo

13 Gráficos de funções

13.1 Gráfico da função seno

- ① Criar uma planilha nova e escrever “Ângulo em graus” em A1.
- ② Escrever SENO em B1, seno em D1, 0 em A2 e 5 em A3
- ③ Selecionar a região A2:A3 e arrastar a alça desta região até a célula A? que tem 360 como resultado.
- ④ Em B2 escrever $=\text{SEN}(A2*\text{PI}()/180)$ e arrastar a alça de B2 até B?
- ⑤ Selecionar a região A2:B? e escolha Inserir, Gráfico, Tipo de Gráfico e Linha, escolha o que tem o nome Linhas
- ⑥ Clique no botão Avançar, na pasta Sequência e depois em Remover a Sequência1
- ⑦ Clique na caixa em branco que está na frente das palavras Rótulos do eixo das categorias X e selecione a região localizada na coluna A.
- ⑧ Clique no botão Avançar. Embora existam outras opções, clique no botão Concluir Gráfico com as funções Seno e Cosseno

13.2 Gráficos com seno e cosseno em uma planilha nova

- ① Em A1 escrever Ângulo em graus, em B1 escrever Seno, em C1 escrever Cosseno e em E1 escrever Funções seno e cosseno
- ② Em A2 escrever 0 e em A3 escrever 5
- ③ Selecionar a região A2:A3 e arrastar a alça da mesma à célula A? que tenha 360 como resultado.
- ④ Em B2 escrever $=\text{SEN}(A2*\text{PI}()/180)$ e em C2 escrever $=\text{COS}(A2*\text{PI}()/180)$
- ⑤ Copiar a região B2:C2 sobre a região B2:C?
- ⑥ Selecionar a região A2:C?
- ⑦ Inserir → Gráfico → Tipo de Gráfico → Linha
- ⑧ Escolha o primeiro que tem o nome Linhas, clique no botão Avançar e depois na pasta Sequência → Remover a Sequência1

- ⑨ Clique na caixa em branco que está na frente das palavras Rótulos do eixo das categorias X e selecione a região localizada na coluna A.
- ⑩ Clique no botão Avançar. Embora existam outras opções, clique no botão Concluir

13.3 Gráfico da função tangente

- ① Inserir uma planilha nova
- ② Em A1 escrever Ângulo em graus e em B1 escrever Tangente
- ③ Em D1 escrever Gráfico da função tangente
- ④ Em A2 escrever -89 e em A41 escrever +89
- ⑤ Selecionar A2:A41 e depois
Editar → Preencher → Sequência → Tendência → Linear
- ⑥ Na célula B2, digite =TAN(A2*PI()/180)) e copie B2 sobre a região B2:B41
- ⑦ Selecionar a região A2:B41 e Inserir → Gráfico → Tipo de Gráfico → Linha
- ⑧ Escolher o primeiro que tem o nome Linhas e depois
Avançar → Sequência → Remover a Sequência1
- ⑨ Clique na caixa em branco localizada na frente das palavras Rótulos do eixo das categorias X
- ⑩ Com o mouse, selecione a região sob trabalho que está localizada na coluna A e clique no botão Concluir.

13.4 Gráfico de uma função quadrática

Construiremos agora o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 7x$.

- ① Crie uma planilha nova e em A1 escrever -2 e em A20 escrever 10
- ② Preencher A1:A20 com sequência linear
- ③ Na célula B1, digite =A1^2-7*A1
- ④ Copiar B1 sobre a região B1:B20 e selecionar a região A1:B20
- ⑤ Inserir → Gráfico → Tipo de Gráfico → Linha

- ⑥ Escolha o primeiro que tem o nome Linhas, clique no botão Avançar, depois clique na pasta Sequência e em Remover a Sequência1
- ⑦ Clique na caixa em branco que está na frente das palavras Rótulos do eixo das categorias X
- ⑧ Com o mouse, selecione a região de trabalho localizada na coluna A
- ⑨ Clique no botão Avançar (Veja que há outras opções)
- ⑩ Clique no botão Concluir

13.5 Obtenção de uma raiz de $f(x)=0$

Para uma função real $f = f(x)$, pode-se tentar obter os seus zeros (raízes das equações $f(x) = 0$) com o procedimento interno Atingir Meta do Excel.

Mostraremos como funciona o processo, obtendo uma raiz da equação polinomial $f(x) = 0$ onde:

$$f(x) = 12x^3 - 7x^2 + 20x - 35$$

- ① Inserir uma nova planilha
- ② Em A1 escrever X
- ③ Em B1, escrever F(X)
- ④ Pinte a célula A2 com a cor amarela
- ⑤ Em A2, escrever um número (p. exemplo=5)
- ⑥ Em B2, escrever $=12*(A2)^3-7*(A2)^2+20*(A2)-35$
- ⑦ Ferramentas → Atingir Meta...
- ⑧ Definir célula: B2, Para valor: 0
- ⑨ Variando célula: A2 e clicar OK
- ⑩ Observar a raiz na célula A2 (amarela)

13.6 Algumas funções matemáticas e trigonométricas

ABS	Valor absoluto
ACOS, ASEN, ATAN	Arco cosseno (seno,tangente)
ACOSH, ASENH	Cosseno (seno) hiperbólico
ARRED	Arredonda para no. de dígitos
ARREDONDAR.PARA.BAIXO	Arredonda número para baixo
ARREDONDAR.PARA.CIMA	Arredonda número para cima
COMBIN	Combinação de n com taxa p
COS,COSH	Cosseno (hiperbólico)
EXP, FATORIAL	Exponencial e Fatorial
GRAUS	Converte radianos em graus
INT	Parte inteira de um número
LN,LOG10	Logaritmo natural (base 10)
LOG	Logaritmo em uma base
MATRIZ.DETERM	Determinante de uma matriz
MATRIZ.INVERSO	Matriz inversa de matriz
MATRIZ.MULT	Matriz produto de matrizes
MDC	Máximo divisor comum
MMC	Mínimo múltiplo comum
MOD	Resto de uma divisão
PI	Valor de $\text{Pi}=3,1415926535\dots$
POTÊNCIA	Número elevado a uma potência
QUOCIENTE	Parte inteira de uma divisão
RADIANOS	Converte graus em radianos
RAIZ	Raiz quadrada positiva
ROMANO	Converte arábico em romano
SEN, SENH	Seno (hiperbólico) de número
SINAL	Sinal de um número
SOMA, SOMAQUAD	Soma (dos quadrados)
SOMARPRODUTO	Soma dos produtos
SOMASE	Soma célula se ...
SOMA.SEQUÊNCIA	Soma sequência de potências
SUBTOTAL	Subtotal de lista/banco de dados
TETO	Arredonda para próximo inteiro

13.7 Funções Estatísticas (básicas)

ALEATÓRIO	Número aleatório entre 0 e 1
ALEATÓRIOENTRE	Número aleatório entre dois números
CONT.NÚM	Conta os números que estão na lista
CONT.SE	número de células sob um dado critério
CONT.VALORES	número de valores existentes na lista
CONTAR.VAZIO	número de células vazias na lista
INCLINAÇÃO	inclinação de linha de regressão linear
INTERCEPÇÃO	coeficiente linear da regressão linear
MÁXIMO	valor máximo em uma lista
MÉDIA	média aritmética da lista
MÉDIA.GEOMÉTRICA	média geométrica da lista
MÉDIA.HARMÔNICA	média harmônica
MÍNIMO	valor mínimo em uma lista
MODO	valor mais comum da lista
MULTINOMIAL	Multinomial de um conjunto de números
ORDEM	ordem de um número na lista
PERMUT	número de permutações de um número
PREVISÃO	valor ao longo de uma tendência linear
PROJ.LIN	parâmetros de uma tendência linear
PROJ.LOG	parâmetros de uma tendência exponencial
SOMAXMY2	Soma dos quadrados das diferenças
SOMAX2DY2	Soma da diferença dos quadrados
SOMAX2SY2	Soma da soma dos quadrados de valores
TENDÊNCIA	valores para uma tendência linear