GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ
SECRETARIA DO ESTADO DA EDUCAÇÃO – SEED
SUPERINTENDÊNCIA DA EDUCAÇÃO – SUED
PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL - PDE

ROSANIA MARIA QUEIROZ

RAZÃO ÁUREA

IES: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA – UEL
ORIENTADOR: Prof. Dr. ULYSSES SODRÉ
ÁREA CURRICULAR: MATEMÁTICA

NOVEMBRO - 2007 - LONDRINA

ROSANIA MARIA QUEIROZ

RAZÃO ÁUREA: A BELEZA DE UMA RAZÃO SURPREENDENTE

Trabalho apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional.
Orientador: Prof. Dr. Ulysses Sodré

UEL - LONDRINA – 2007

SUMÁRIO

1. Introdução

Beleza é a percepção individual de características que são agradáveis aos sentidos. Alguns aspectos referentes a essas características são universais, enquanto outros são restritos a culturas, sociedades ou períodos de tempos específicos. Apesar de variação significativa, existe alto grau de concordância entre as culturas do que é considerado belo: perfeição de formas e proporções harmônicas. Segundo Tomás de Aquino: “a beleza é aquilo que agrada à mera contemplação”. Muitas coisas que são consideradas belas apresentam uma proporção chamada áurea.

2. Razão áurea

A razão áurea, também chamada segmento áureo ou proporção áurea, representa a mais agradável proporção entre duas medidas. Os gregos antigos a designavam como “divisão de um segmento em média e extrema razão” ou simplesmente “secção”. No início do século XXI convencionou-se identificá-la pela letra grega Φ (Phi maiúsculo) (lê-se: Fi), em homenagem ao arquiteto e escultor Phídias, responsável pelo templo grego Parthenon. Φ é o número irracional 1,618... obtido matematicamente através de seqüências continuas infinitas, deduções algébricas ou geométricas.

2.1. Obtenção do número Phi através de seqüências continuas infinitas

Temos aqui duas seqüências contínuas infinitas. A primeira delas é a mais simples de todas as frações continuas infinitas e a segunda é uma seqüência de radicais contínuos infinitos. Substituindo as seqüências infinitas por Φ, estaremos obtendo o valor do número Phi.

$Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$	$Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots}}}}}}$

Podemos representar as seqüências continuas acima nas formas recursivas:

$$Phi(n+1) = 1 + \frac{1}{Phi(n)}, Phi(1) = 1$$

$$Se \lim_{n \to \infty} Phi(n) = \Phi \text{, então:}$$

$$\lim_{n \to \infty} Phi(n+1) = \Phi \text{, Portanto:}$$

$$\lim Phi(n+1) = 1 + \frac{1}{\lim Phi(n)}$$

Calculando o limite quando o número de termos tende a mais infinito, obtemos

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

que pode ser escrita na forma

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

ou na forma da equação do segundo grau

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Resolvendo esta equação, obtemos

$$\Phi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \Phi'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Desprezando a raiz negativa, temos:

$$\Phi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \longrightarrow \Phi' = 1{,}618...$$

$$Phi(n+1) = \sqrt{1 + Phi(n)}, Phi(1) = 1$$

$$Se\ Phi = \lim Phi(n) \text{, então:}$$

$$Phi = \lim Phi(n+1) \text{, Portanto:}$$

$$\lim Phi(n+1) = \sqrt{1 + \lim Phi(n)}$$

$$Phi = \sqrt{1 + Phi}$$

$$Phi^2 = 1 + Phi$$

Que pode ser escrito na forma:

$$\Phi^2 = 1 + \Phi$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Resolvendo esta equação,obtemos:

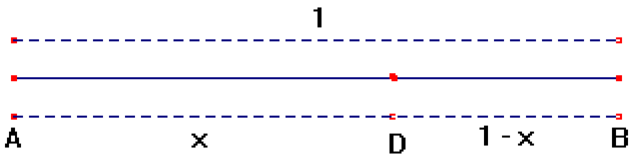
$$\Phi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \Phi'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Desprezando a raiz negativa, temos:

$$\Phi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \longrightarrow \Phi' = 1{,}618...$$

2.2.Obtenção algébrica do número Phi:

Para que possamos chegar algebricamente ao número Phi, vamos considerar m(AB)= 1 unidade, m(AD) = x e m(DB) = 1 - x



Obtemos então a divisão de um segmento em média e extrema razão:

$$\frac{m(AB)}{m(AD)} = \frac{m(AD)}{m(DB)}$$

ou seja:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Aplicamos a propriedade fundamental das proporções: O produto dos meios é igual ao produto dos extremos, obtendo uma equação de segundo grau:

$$x^2 = 1 - x \rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvemos a equação e encontramos duas raízes:

$$x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Desprezamos a raiz negativa e calculamos a razão Phi=1/x para obter

$$Phi = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

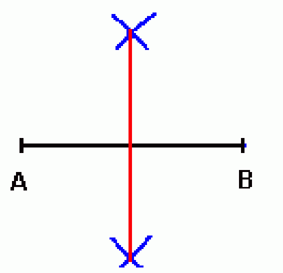
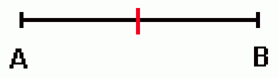
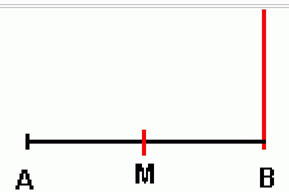
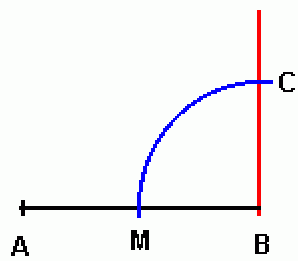
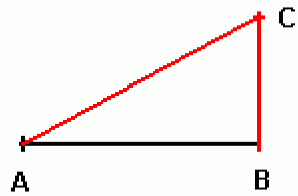
Portanto,

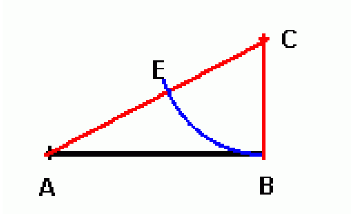
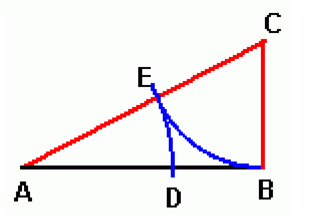
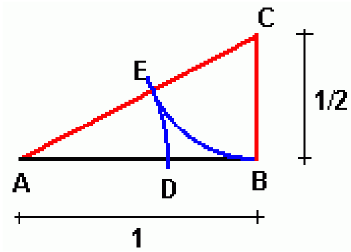
$$Phi = \frac{1}{1} \times \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+2{,}236...} = \frac{2}{1{,}236...} = 1{,}618...$$

2.3. Obtenção geométrica do número Phi

Para obter geometricamente o número Phi, podemos partir de um segmento de reta com extremidades A e B e determinar um ponto D entre A e B tal que a razão entre o segmento AB e o segmento AD seja Phi = 1,618....

Observe como obter geometricamente o ponto D

Para obter o ponto médio do segmento AB, coloque a ponta seca do compasso em um extremo, abra-o até o outro extremo e trace um arco para cima e para baixo do segmento de reta AB. Repita este processo com o outro extremo da reta, sem alterar a abertura do compasso. Os pontos onde os arcos se cruzam devem ser unidos por um segmento de reta (em vermelho) e o ponto onde este segmento cruza o primeiro segmento AB, é o ponto médio de AB;	
Agora traçaremos uma reta perpendicular a AB passando por B com a metade do comprimento de AB;	
Primeiro trace a reta perpendicular a AB usando um jogo de esquadros;	
Com a ponta seca do compasso em B, abra-o até o ponto médio M e trace um arco até que este cruze a reta perpendicular a AB;	
Temos agora uma nova reta BC perpendicular a AB com exatamente a metade do comprimento de AB;	
Una este ponto que acabou de encontrar com o ponto A da primeira reta para formar um triângulo ABC;	

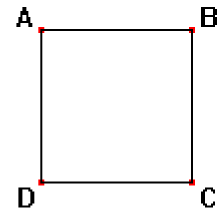
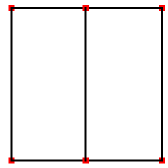
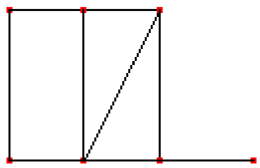
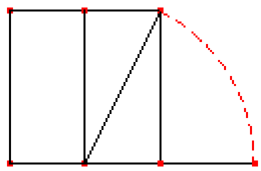
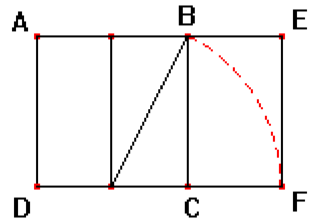
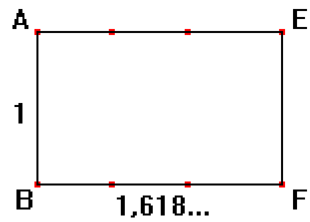
Coloque a ponta seca do compasso no vértice C do triângulo e abra-o até o ponto B. Use este raio para marcar o ponto E na hipotenusa do triângulo;	
com a ponta seca do compasso em A, abra-o até o novo ponto E marcado na hipotenusa, e use este raio para marcar o ponto D na primeira reta AB. Este ponto divide o segmento AB em duas partes e o maior segmento é 1,6183.... vezes o menor.	
Obtivemos assim o ponto D que estávamos procurando	

http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

2.4. O Retângulo Áureo

O retângulo áureo é uma figura esteticamente agradável. Ele apresenta os seus lados na razão áurea, isto é: a/b = 1,618... Este retângulo exerceu uma influência muito grande na arquitetura e na pintura. Nos dias de hoje ele é bastante utilizado no formato de cartões de crédito, carteira de identidade, carteira de habilitação, capas de livros e cadernos, cartas de baralho, blocos de papel de carta, janelas, construções, etc. Em 1876, o psicólogo alemão, Gustav Fechner, realizou uma pesquisa sobre a preferência por formato de retângulos. O resultado desta pesquisa mostrou que a maioria das pessoas prefere um certo retângulo cuja razão entre as suas medidas muito se aproxima da razão áurea. Essas pesquisas foram repetidas por Wilmar (1894), Lalo (1908) e Thorndike (1917) e em cada uma destas pesquisas os resultados foram semelhantes.

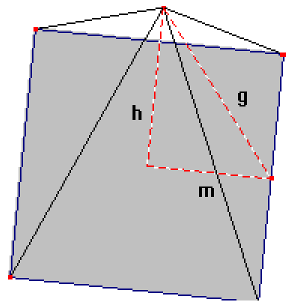
Observe como podemos construir um retângulo áureo:

Inicialmente vamos construir um quadrado cuja medida do lado seja uma unidade de comprimento;	
Unindo o ponto médio do lado AB com o ponto médio do lado DC, obtemos dois retângulos congruentes.	
Prolongamos o lado DC do quadrado e traçamos uma das diagonais do segundo retângulo, conforme o modelo ao lado.	
Com a ponta seca do compasso no vértice inferior esquerdo do segundo retângulo, abertura igual à medida da diagonal, traçamos um arco do vértice direito superior do retângulo ao prolongamento do lado DC do quadrado.	
Partindo do ponto de interseção do arco com o segmento da base, traçamos o segmento EF paralelo ao lado AD. Prolongamos o lado AB do quadrado até encontrar o segmento EFpara formar o retângulo;	
O retângulo AEFB aqui construído apresenta a razão entre suas dimensões igual a 1,618..., por isso é chamado retângulo áureo.	

3. História da razão áurea

3.1. A razão áurea e as pirâmides do Egito:

Um fato curioso em relação à razão áurea nos leva ao antigo Egito. A pirâmide de Quéops, construída entre 2551 e 2528 a.C, considerada uma das sete maravilhas do mundo antigo, logo após a sua construção, sua altura media 280 cúbitos e a medida do lado da base 440 cúbitos [2]. Consequentemente, o apótema da base é 220 cúbitos. Podemos então aplicar o teorema de Pitágoras para calcular a medida do apótema da pirâmide:



Se g é o apótema da pirâmide, h é a altura da pirâmide e m é o apótema da base da pirâmide, então

$$g^2 = h^2 + m^2$$

logo

$$g^2 = 280^2 + 220^2 = 78400+48400=126800$$

assim

$$g = 356{,}08$$

Se calcularmos a razão entre o apótema da pirâmide e o apótema da base da pirâmide, ou seja: g/m, obteremos: 356,08/220 = 1,618... (que é o número Phi). A história nos mostra que os egípcios eram exatos no contar e medir, porém, não estamos afirmando que a razão áurea foi utilizada conscientemente na construção das pirâmides, apenas mostramos que surpreendentemente ela aparece nesta maravilhosa construção do mundo antigo.

3.2. A razão áurea e os pitagóricos:

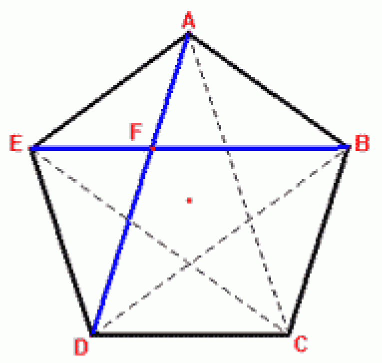
O filósofo e matemático grego Pitágoras nascido na Ásia Menor, na ilha de Samus (569 a 500 a.C), viajou ao Egito, Babilônia e outros países onde acumulou conhecimentos em Astronomia, Matemática e Filosofia. Ao retornar à Grécia, estabeleceu-se na ilha de Crotona, costa sudeste, hoje Itália, onde fundou a Escola Pitagórica, entidade parcialmente secreta envolta por muitas lendas. Os seguidores desta escola eram chamados de pitagóricos. Para eles a essência de todas as coisas é o número.

Apesar do misticismo que os envolvia, fizeram descobertas importantes sobre os números. Embora haja contradições, devido à falta de documentos da época, provavelmente os pitagóricos descobriram três dos cinco sólidos convexos regulares. Os antigos gregos associavam o cubo, o tetraedro, o octaedro e o icosaedro aos elementos componentes da natureza, respectivamente, terra, fogo, ar e água.

O último sólido convexo regular descoberto pelos pitagóricos, o dodecaedro, tem suas faces pentagonais que se relacionam fortemente com a razão áurea. Talvez por isto, os pitagóricos o consideravam digno de respeito especial. A ele foi atribuído o símbolo do universo. Platão, que viveu no quarto século a.C., chamou de "*o mais nobre corpo entre todos os outros*".

Traçando as diagonais de uma das faces pentagonais do dodecaedro obtemos a estrela de cinco pontas, também conhecida como pentagrama, que era utilizada como símbolo e emblema da Sociedade Pitagórica. Os poliedros regulares ficaram conhecidos como "*sólidos platônicos*" devido à ênfase dada a esses sólidos por Platão e seus seguidores. O pentagrama é uma das construções geométricas que mais fascinou os estudiosos. Nele há muitas razões áureas.

Neste pentágono, o ponto F, ponto de intersecção entre duas diagonais, divide cada uma delas na razão áurea.

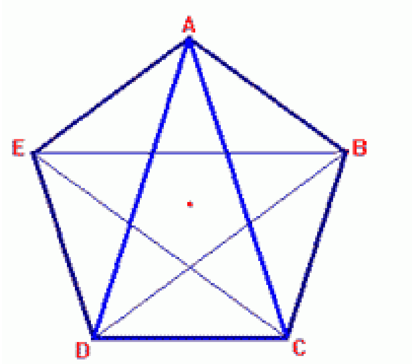


$$\frac{AD}{DF} = \Phi$$

$$\frac{EB}{BF} = \Phi$$

$$\frac{AD}{DF} = \frac{DF}{AF}$$

No pentagrama, as medidas das diagonais estão em razão áurea com as medidas dos lados do pentágono.

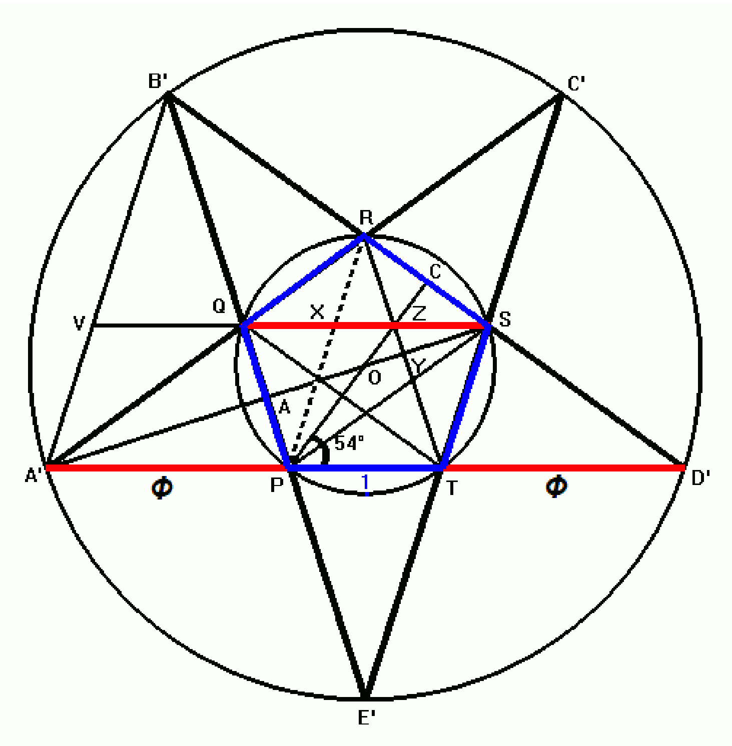


$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \Phi$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \Phi$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \Phi$$

Algumas propriedades podem ser facilmente verificadas na figura do pentagrama abaixo. Se considerarmos R e r os raios das circunferências onde os pentágonos A'B'C'D'E' e P, Q, R, S T estão respectivamente inscritos, e com comprimento igual a uma unidade, podemos observar as propriedades que Huntley em [4], relata na página 40.



I. $A'P = \Phi$

II. $OA/r = \Phi/2$

III. $OA'/r = \Phi^2$

IV. $OA'/AO = 2\Phi$

V. $QS = \Phi$

VI. $SX/XQ = \Phi$,

$PX/XR = \Phi$

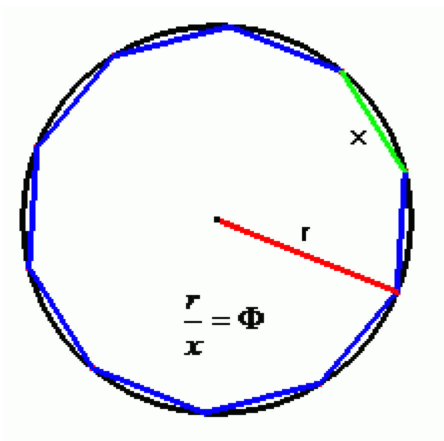
$A'P/PQ = \Phi$

VII. $B'V/VA' = \Phi$

$B'Q/QP = \Phi$

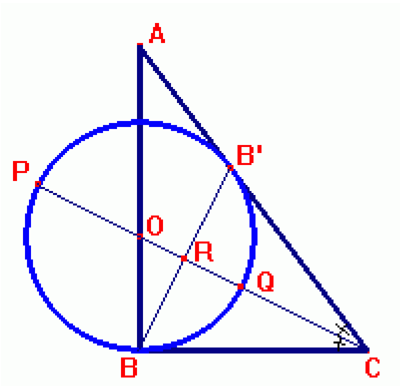
$B'S/SD' = \Phi$

Também era de conhecimento dos pitagóricos que a razão entre a medida do raio do círculo que circunscreve o decágono regular e a medida de um dos lados deste polígono é a razão áurea



3.3 Razão áurea e o Teorema de Pitágoras:

Os egípcios conheciam e utilizavam o triângulo na proporção 3:4:5 para realizar medidas agrárias e sabiam que esse triângulo possui um ângulo reto. Segundo Huntley [4], se fizermos algumas construções geométricas neste triângulo, descobriremos que ali também aparece o número Phi.



A bissetriz do ângulo C intersecta o lado AB em O, logo podemos construir um círculo com centro em O, raio OB. A hipotenusa AC tangencia o círculo no ponto B'. O segmento BB' intersecta o segmento CO no ponto R. O segmento CO corta o círculo no ponto Q e o ponto Q divide o segmento CP na proporção áurea. Ou seja:

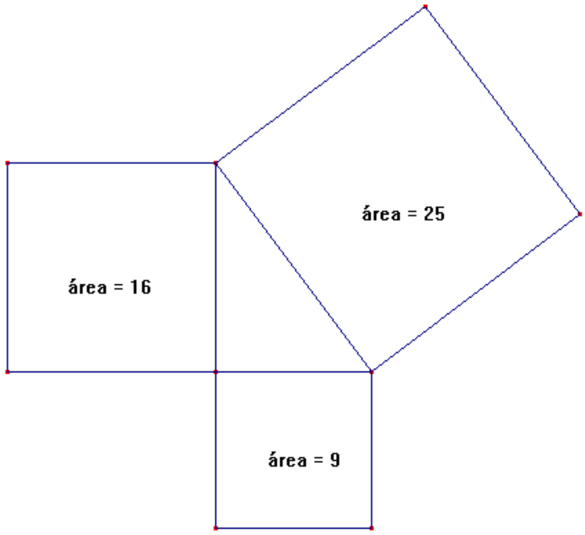
$CP/PQ = \Phi$, $PQ/CQ = \Phi$ e $OR/RQ = \Phi/2$

Embora não haja documentos da época, provavelmente foi Pitágoras quem descobriu as relações entre os lados do triângulo retângulo: "*A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*", relação esta conhecida como "*Teorema de Pitágoras*". Se *a* é a medida da hipotenusa e se *b* e *c* são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Considerando que o quadrado da medida da hipotenusa equivale à área de um quadrado cuja medida do lado é igual à medida da hipotenusa, podemos enunciar o Teorema de Pitágoras de outra forma: "*Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados a medida de cada um dos catetos*".

Geometricamente, temos:

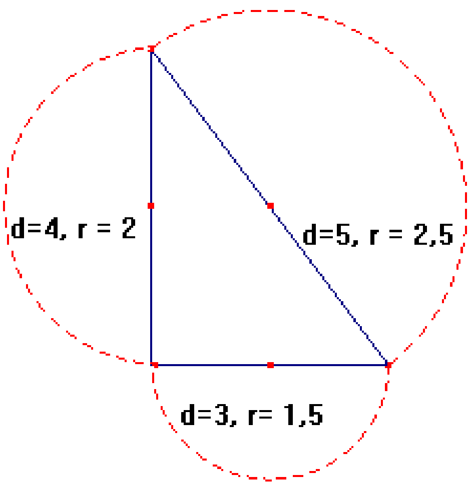


Se o triângulo retângulo acima é um triângulo na proporção 3:4:5, aplicando Pitágoras, observamos que:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Por esta e outras descobertas importantes sobre os números, Pitágoras ficou conhecido como o "*pai da matemática*".

Se ao invés de construirmos quadrados sobre a hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo na proporção 3:4:5, construirmos semicírculos, poderemos afirmar que a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos?



Área do semicírculo 1	Área do semicírculo 2 =	Área do semicírculo 3 =
3,14. $2,5^2$ /2	3,14. 2^2/2 =	3,14 .$1,5^2$/2 =
3,14 x 6,25/2	3.14 x 4/2 =	3,14 x 2,25/2 =
19,625/2	12,56/2 =	7,065/2 =
9,8125	6,28	3,5325

Por Pitágoras, temos:

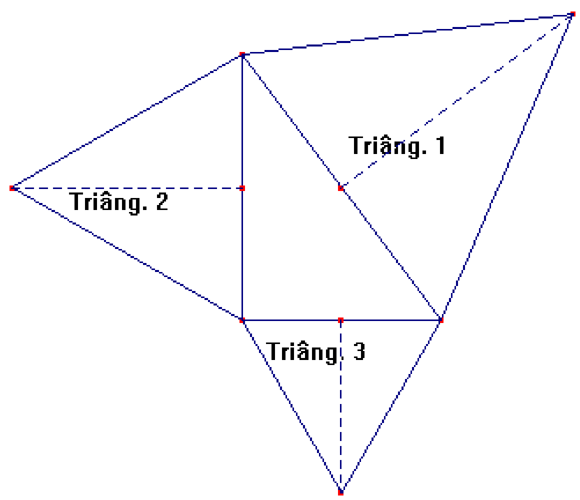
Área do semicírculo 1 = área do semicírculo 2 + área do semicírculo 3

9,8125 = 6,28 + 3,5325

9,8125 = 9,8125

Portanto, ao construirmos sobre a hipotenusa e sobre os catetos semicírculos, verificamos o Teorema de Pitágoras.

Se construirmos sobre os catetos e a hipotenusa triângulos eqüiláteros, será possível verificarmos o Teorema de Pitágoras?



Cálculo das medidas das alturas dos triângulos eqüiláteros construídos sobre a hipotenusa e os catetos:

Altura do Triângulo 1	Altura do Triângulo 2	Altura do Triângulo 3:
$5^2 = 2,5^2 + x^2$	$4^2 = 2^2 + x^2$	$3^2 = 1,5^2 + x^2$
$25 = 6,25 + x^2$	$16 = 4 + x^2$	$9 = 2.25 + x^2$
$25 – 6,25 = x^2$	$x^2 = 16 – 4$	$9 – 2,25 = x^2$
$x^2 = 18,75$	$x^2 = 12$	$x^2 = 6,75$
x = 4.330	x = 3,464	x = 2,598

Cálculo das áreas dos triângulos:

Área do triângulo 1	Área do triângulo 2	Área do triângulo 3
S = b x h/2	S = b x h/2	S = b x h/2
S = 5 x 4,330/2	S = 4 x 3,464/2	S = 3 x 2,598/2
S = 10,825	S = 6,928	S = 3,897

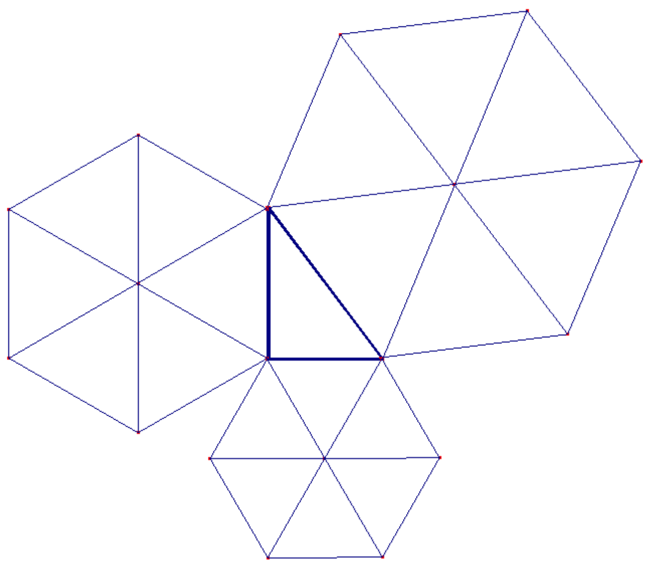
Verificação do Teorema de Pitágoras:

Área do triângulo 1 = área do triângulo 2 + área do triângulo 3

10,825 = 6,928 + 3,897

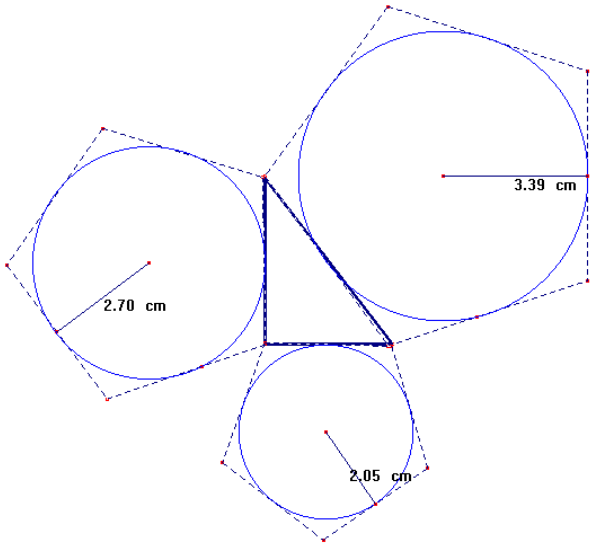
10,825 = 10,825

Se construirmos sobre os catetos e a hipotenusa hexágonos regulares, será possível verificarmos o Teorema de Pitágoras?



Já verificamos que se construirmos triângulos eqüiláteros, o Teorema de Pitágoras se verifica. Se traçarmos algumas diagonais, o hexágono pode ser transformado em triângulos eqüiláteros. Portanto, não há necessidade de calcularmos a área de cada hexágono para sabermos que é possível demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Se construirmos três pentágonos regulares, cujas medidas de seus lados correspondam às medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo, verificaremos o Teorema de Pitágoras na relação entre as suas áreas.



Cálculo da área dos pentágonos:

Sabemos que para calcularmos a área de um polígono regular podemos utilizar a fórmula S = a x P/2, ou seja: Superfície = apótema x Perímetro/2

Pentágono 1	Pentágono 2	Pentágono 3
S = a x P/2 S = 3,39 x 25/2 S = 3,39 x 12.5 S = 42,375	S = a x P/2 S = 2,7 x 20/2 S = 2,7 x 10 S = 27	S = a x P/2 S = 2,05 x 15/2 S = 2,05 x 7,5 S = 15,375

Verificação do Teorema de Pitágoras:

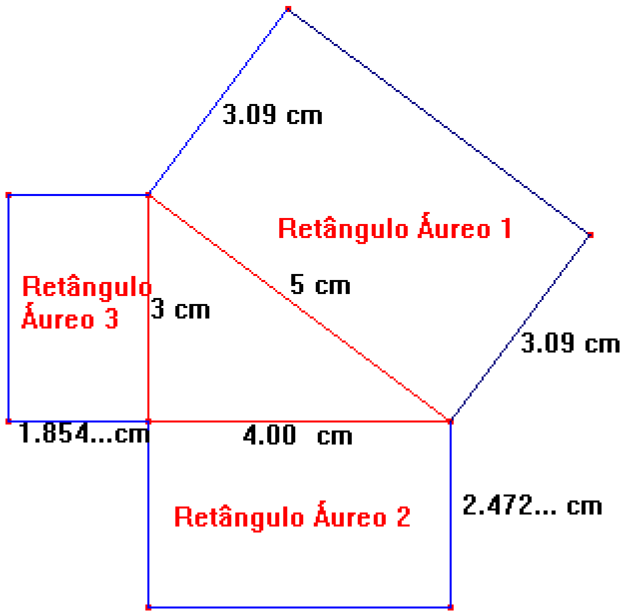
Superfície Pentágono 1 = Superfície Pentágono 2 + Superfície Pentágono 3

42,375 = 27 + 15,375

42,375 = 42,375

Conclusão: a área do pentágono regular construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos pentágonos regulares construídos sobre os catetos.

Se construirmos sobre a hipotenusa e sobre os catetos retângulos áureos, a área do retângulo áureo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos retângulos áureos construídos sobre os catetos?



Calculando a área dos retângulos áureos construídos sobre a hipotenusa e sobre os catetos, obtemos:

Área do Retângulo 1	Área do Retângulo 2	Área do Retângulo 3
S = 5 x 3,09=15,45	S = 4 x 2,472 = 9,888	S = 3 x1,854 = 5,562

Verificando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$SR1 = SR2 + SR3$$

$$15,45 = 9,888 + 5,562$$

$$15,45 = 15,45$$

Conclusão: A área do retângulo áureo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos retângulos áureos construídos sobre os catetos.

3.4 Razão áurea e o Parthenon Grego

No Parthenon Grego, templo representativo do século de Péricles, construído por volta de 447 a 433 a.C, quando seu frontispício ainda estava intacto, a razão entre a largura e a altura, era um número que muito se aproximava do número Phi. Isto nos faz perceber a preocupação do arquiteto em construir uma obra com proporções harmônicas. Phidias foi escultor e arquiteto do projeto e em sua homenagem no início deste século convencionou-se representar a razão áurea por Phi, que são as iniciais do seu nome.

3.5. Razão áurea e Fibonacci

Leonardo Pisano, nasceu em Pisa (Itália) no ano de 1175, filho de Bonacci, ficou conhecido como Fibonacci (filius Bonacci), foi um matemático que viajou muitas vezes com seu pai ao norte da África. Estudou com um professor muçulmano e viajou pelo Egito, Síria e Grécia onde conheceu o sistema de numeração hindu. Em 1202, com 27 anos de idade, quando retornou à sua terra natal, publicou *Liber Abaci* (Livro do Ábaco), que chegou a nós graças a sua segunda edição de 1228, o qual descreve inicialmente sobre "*as nove cifras indianas*" (nove algarismos) e o símbolo 0. É um tratado sobre métodos e problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado. Em [4], Huntley informa que este livro foi o principal veículo de introdução, em [1], Boyer afirma que este livro foi importante na transmissão do sistema de numeração hindu-arábico nas camadas cultas da Europa. A teoria nele contida é ilustrada com muitos problemas que representam uma grande parte do livro. Dentre os problemas, destacamos o dos pares de coelhos que deu origem a importante seqüência de Fibonacci. Nesta seqüência os dois primeiros números são iguais a 1 e a partir daí, cada número da seqüência é igual à soma dos seus dois antecessores. Observe a seqüência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots u_n \ldots$$

onde

$$u(n)=u(n-1)+u(n-2)$$

Esta seqüência tem uma característica especial chamada recursividade:
O 1° termo somado com o 2° termo resulta o 3° termo.
O 2° termo somado com o 3° termo resulta o 4° termo.
O 3° termo somado com o 4° termo resulta o 5° termo.
E assim sucessivamente...

Vamos ao problema dos coelhos, que deu origem a esta importante seqüência de números:

> **Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a reprodução de um novo par e um par se torna produtivo quando completa dois meses de vida**?

No início do primeiro mês de vida, temos um par de coelhos recém nascidos (1 casal)
No início do segundo mês de vida, temos um par de coelhos jovem que ainda não gerou nenhum coelho. (1 casal)
No início do terceiro mês de vida o casal de coelhos jovens tornou-se adulto e gerou um casal de coelhos recém nascido. Por isso, temos dois pares de coelhos. (2 casais)
No início do quarto mês de vida, o casal adulto gerou mais um casal recém nascido. Temos aí um casal adulto, um casal jovem que ainda não gerou e um casal recém nascido.(3 casais)
No início do quinto mês, temos dois casais adultos, dois casais recém nascidos gerados pelos adultos férteis e um casal jovem ainda não fértil. (5 casais)
No início do sexto mês, temos três casais adultos férteis, três casais recém nascidos e dois casais jovens não férteis. (8 casais).
No início do sétimo mês, temos cinco casais adultos férteis, cinco casais recém nascidos gerados pelos adultos férteis e três casais jovens ainda não férteis. (13 casais).
No início do oitavo mês, temos oito casais adultos férteis, oito casais recém nascidos gerados pelos adultos férteis e cinco casais jovens ainda não férteis. (21 casais).
No início do nono mês, temos treze casais adultos férteis, treze casais recém nascidos gerados pelos adultos férteis e oito casais jovens ainda não férteis. (34 casais)
No início do décimo mês, temos vinte e um casais adultos férteis, vinte e um casais recém nascidos gerados pelos adultos férteis e treze casais jovens ainda não férteis. (55 casais).

No início do décimo primeiro mês, temos trinta e quatro casais adultos férteis, trinta e quatro casais gerados pelos adultos férteis e vinte e um casais jovens ainda não férteis. (89 casais).

No início do décimo segundo mês, temos cinqüenta e cinco casais adultos férteis, cinqüenta e cinco casais recém nascidos gerados pelos adultos férteis e trinta e quatro casais jovens ainda não férteis. (144 casais)

O total de casais gerados por um único casal de coelhos durante um ano é 143 mais o casal inicial, nos dá o total de 144 casais. Os resultados obtidos, assim como os que poderiam ser obtidos se continuássemos este processo, são números da sequência de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Como dissemos anteriormente, o problema dos coelhos foi o que deu origem a sequência de Fibonacci porém, temos outras situações na Natureza nas quais a seqüência se faz presente: Se observarmos o número de pétalas em algumas flores comuns, perceberemos que são números da seqüência de Fibonacci: íris: três pétalas, primavera: cinco pétalas, tasneira: treze pétalas, margarida: trinta e quatro pétalas. Algumas plantas apresentam seus talos dispostos esquematicamente, a medida que ela se desenvolve, a soma dos galhos novos e velhos formarão no plano horizontal a seqüência de Fibonacci. É o caso da planta Achillea ptarmica (espirradeira).

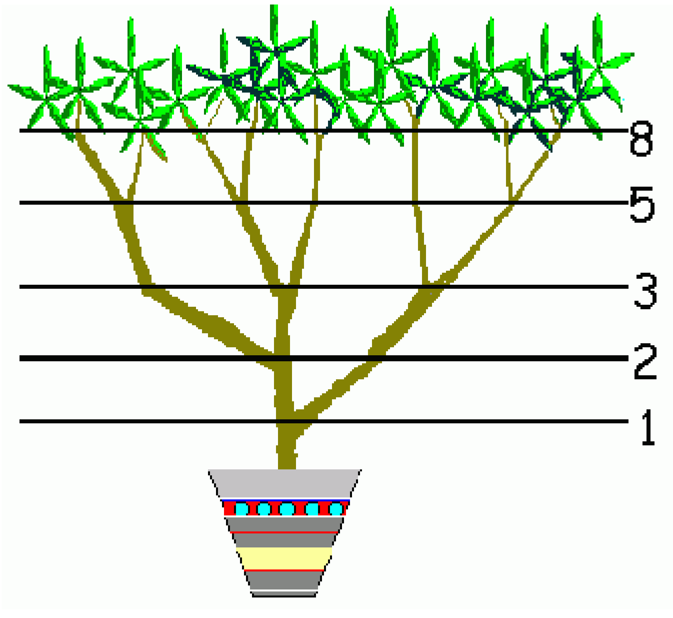


Figura obtida em http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

Temos ainda a disposição das folhas nos ramos de algumas plantas como roseiras, salgueiros e pessegueiros (Filotaxia)

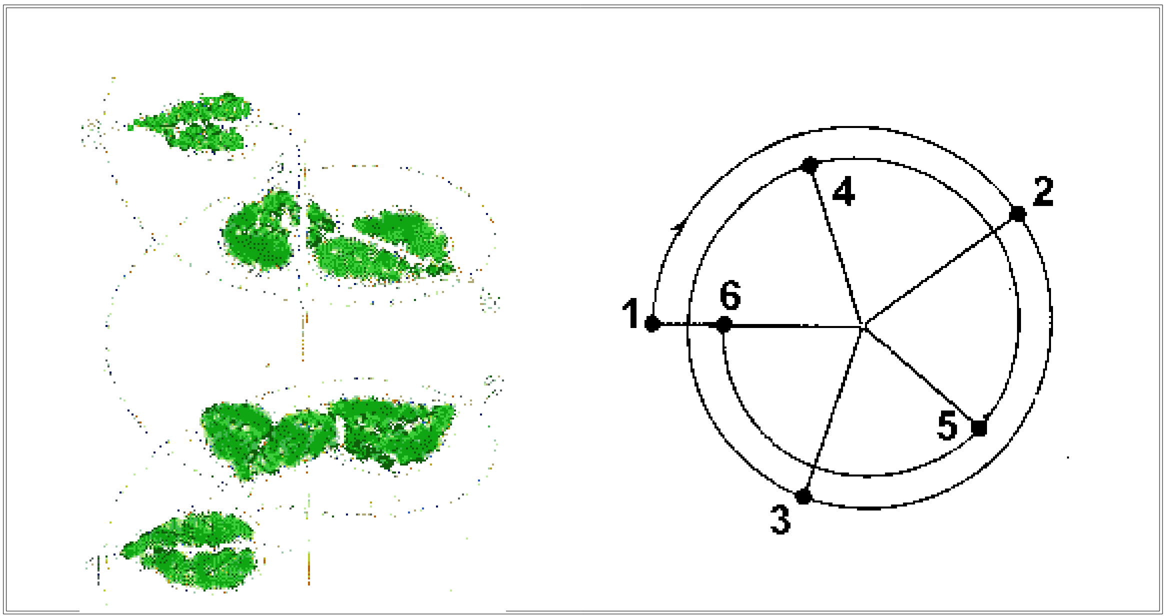


Figura obtida em: http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

Na figura da esquerda, vista lateral e na figura da direita, vista de cima.

Podemos observar na figura que o padrão com cinco folhas é repetido após duas voltas completas da espiral. Cada volta completa corresponde a 360°. Se temos duas voltas completas, multiplicamos 360° por 2 o que resulta 720°. Se em cada período temos 5 folhas, basta dividirmos 720° por 5, obtendo assim, 120°. Esse resultado obtido, significa que a separação angular das bases de duas folhas sucessivas é 120°. Podemos indicar por **p** o número de voltas da espiral até nascer uma nova folha que se sobreponha a primeira e por **n** o número de bases de folhas contidas em cada período. Então **p/n** é uma fração característica da planta. O termo técnico utilizado para representar esta fração é "Divergência" das folhas. No caso específico das roseiras, salgueiros, pessegueiros e macieiras a fração que representa a divergência das folhas é 2/5. Um outro exemplo que podemos citar são as gramíneas comuns, nelas a fração que representa a divergência de folhas é 1/2: uma volta da espiral, contendo duas bases de folhas, quando então nasce uma folha que se sobrepõe à primeira. No caso das gramíneas comuns, a separação angular das bases de duas folhas é 180°. Segundo estudos realizados, a divergência das folhas nas várias plantas geralmente é representada pelas seguintes frações:

1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, 8/21...

Como se pode perceber, tanto o numerador quanto o denominador destas frações, que representam a divergência das folhas nas várias plantas, tendem a ser elementos da seqüência de Fibonacci.

3.6 A seqüência de Fibonacci e a espiral

Um retângulo áureo tem a interessante propriedade de, se o dividirmos num quadrado e num retângulo, o novo retângulo é também áureo. Repetindo este processo infinitamente e unindo os cantos dos quadrados formados, obtém-se uma espiral a que se dá o nome de espiral áureo.

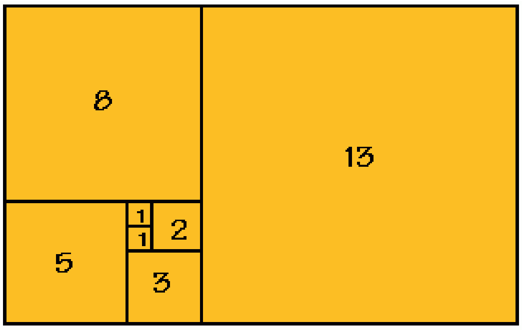
A espiral sempre foi conhecida por uma variedade de nomes, correspondentes a uma ou outra característica. Descartes em 1638, designou-a de espiral eqüiangular, porque o ângulo em que um raio vetor corta a curva, em qualquer ponto, é constante.

Foi chamada de espiral geométrica porque seu raio aumenta em progressão geométrica. Jakob Bernoulli (1654-1705), que era fascinado pela beleza matemática da curva, observou que seu tamanho aumenta, mas sua forma não se altera, por isso, chamou-a de espiral logarítmica.

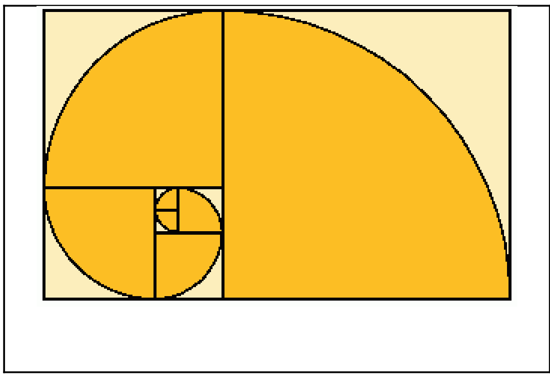
Considerando esta característica, Bernoulli a descreveu como *spira mirabilis*.

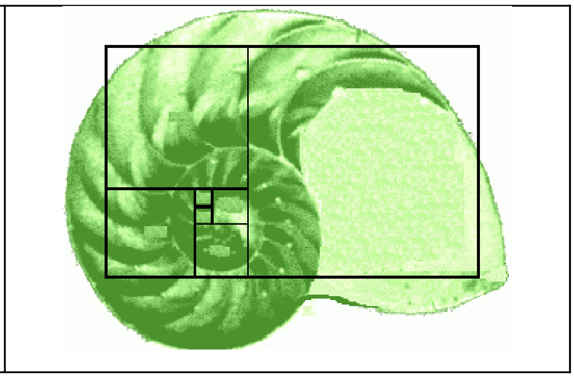
Anexando dois quadrados com lado = 1 unidade, teremos um retângulo 2x1, sendo o lado maior igual à soma dos quadrados anteriores.

Anexando agora outro quadrado com lado = 2 unidades (o maior lado do retângulo 2x1), obteremos um retângulo 3x2. Se continuarmos este processo, a seqüência dos lados dos próximos quadrados será: 5, 8, 13..que é a seqüência de Fibonacci.



Utilizando um compasso e traçando um quarto de círculo no maior quadrado de lado = 13 e em seguida traçando quartos de círculos nos quadrados de lado L=8, L=5, L=3, L=2, L=1 e L=l, obtemos uma espiral como a do Nautilus Marinho.



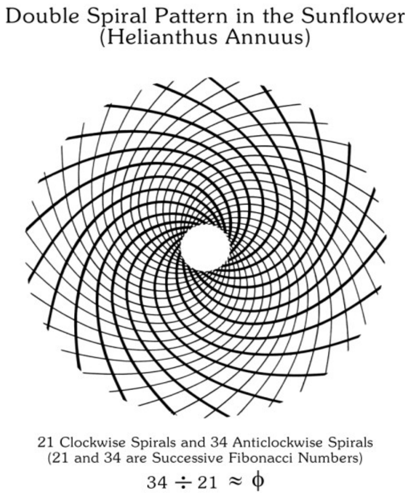


Figuras obtidas em: **http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm**

As sementes de girassol formam espirais tanto para a esquerda como para a direita. Numa boa amostra, vê-se uma característica importante: dois conjuntos de espirais sobrepostas ou entrelaçadas, um à direita e outro à esquerda, onde os flósculos desempenham um duplo papel, por pertencerem a duas espirais.

O número de espirais em cada direção quase sempre são números vizinhos na seqüência de Fibonacci.

Se calcularmos a razão entre esses dois números chegaremos ao número Phi ou a um número próximo de Phi.



Figuras obtidas: http://www.hypatia-lovers.com/geometry/Divine_Proportion.html

Muitos abacaxis possuem 13 diagonais num sentido e 8 diagonais no outro sentido. Se calcularmos a razão entre esses números, encontraremos o Phi.

3.7 Relação entre os números de Fibonacci e o número Φ

Agora vamos observar a conexão que existe entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea. A seqüência da Fibonacci é dada por:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

e os termos desta seqüência são denominados números de Fibonacci.

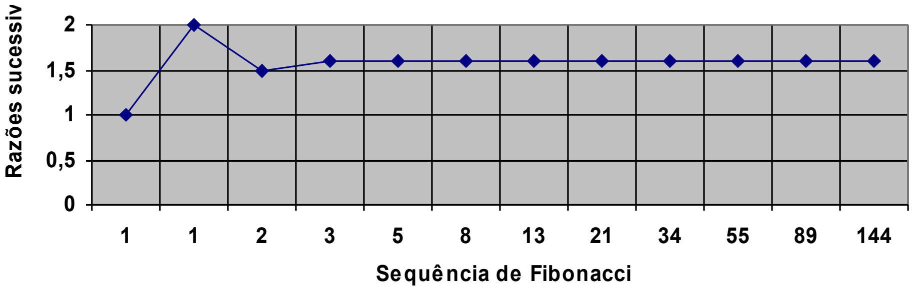
Se tomarmos as razões de cada termo pelo seu antecessor, obteremos uma outra seqüência numérica cujo termo geral é dado por: f(n)=u(n+1)/u(n) .

A nova seqüência obtida será:

1/1=1, 2/1=2, 3/2=1,5, 5/3=1,666...8/5=1,6, 13/8=1,625, 21/13=1,6153846..., 34/21=1,6190476..., 55/34=1,617647..., 89/55=1,61818...144/89= 1,6179775..., 233/144=1,6180555..., ..., 6765/4181=1,6180339..., 10946/6765 = 1,6180339... ou seja:

1; 2; 1,5; 1,666...; 1,6; 1,625; 1,6153846...; ...; 1,6180339...; 1,6180339...

Ao colocar estas razões sucessivas em um gráfico em que o eixo horizontal indica os elementos da sequência de Fibonacci, as razões vão se aproximando do número: 1,6180339



Com aproximação até a sétima casa decimal, o número **1,6180339** é o limite da sequência das razões, é um número muito especial, que é representado pela letra grega **Phi** ou pelo símbolo **Φ**. É a **razão áurea**. Matematicamente podemos afirmar:

Quando n tende a infinito, o limite é Phi que é a razão áurea. Utilizando a linguagem matemática formal, podemos escrever:

Phi = Φ = Lim u(n+1)/u(n) = 1,618033988749895

Temos assim duas seqüências:

Seqüência Fibonacci	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Razão áurea		1	2	1,5	1,666...	1,6	1,625	1,615...	1,619...	1,617...	1,618...

3.8. Algumas propriedades dos números de Fibonacci

3.8.1. Soma dos n primeiros números de Fibonacci

$$u(1) + u(2) + u(3) + ... + u(n-1) + u(n) = u(n+2) - 1$$

Observe:

$$u(1) = u(3) - u(2)$$
$$u(2) = u(4) - u(3)$$
$$u(3) = u(5) - u(4)$$
$$u(4) = u(6) - u(5)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$u(n-1) = u(n+1) - u(n)$$
$$u(n) = u(n+2) - u(n+1)$$

Exemplo: Vamos somar os dez primeiros números da seqüência de Fibonacci:

$$u(1) + u(2) + u(3) + u(4) + u(5) + u(6) + u(7) + u(8) + u(9) + u(10) = u(12) - 1$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 144 - 1 = 143$$

3.8.2. Soma dos termos de Fibonacci de ordem par

$$u(2) + u(4) + u(6) + \ldots = u(2n) = u(2n+1) - 1$$

Para uma melhor compreensão, vamos somar os cinco primeiros números de ordem par da seqüência. Observe que o quinto número de ordem par corresponde ao décimo número da seqüência de Fibonacci.

$$u(2) + u(4) + u(6) + u(8) + u(10) = u(11) - 1$$

$$1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 89 - 1 = 88$$

3.8.3. Soma dos termos de Fibonacci de ordem ímpar

$$u(1) + u(3) + u(5) + \ldots + u(2n-1) = u(2n)$$

Exemplificando esta propriedade, vamos somar os sete primeiros números de ordem ímpar da seqüência. Observe que o 7° número de ordem ímpar corresponde ao 13° número da seqüência de Fibonacci.

$$u(1) + u(3) + u(5) + u(7) + u(9) + u(11) + u(13) = u(12)$$

$$1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 + 233 = 377$$

3.8.4. Soma dos quadrados dos números de Fibonacci

$$u^2(1) + u^2(2) + u^2(3) + u^2(4) + ... + u^2(n) = u(n)\ u(n+1)$$

Para melhor compreensão, vamos efetuar a soma dos quadrados dos primeiros seis números da seqüência de Fibonacci:

$$u(1)^2 + u(2)^2 + u(3)^2 + u(4)^2 + u(5)^2 + u(6)^2 = u(6)\ \ u(7)$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \times 13 = 104$$

3.8.5. Diferença de quadrados de números consecutivos de ordem par (ímpar)

$$u^2(n+1) – u^2(n-1) = u(2n) \text{ ou ainda, } u(2n) = u^2(n + 1) – u^2(n – 1)$$

Exemplificando, vamos calcular a diferença entre os quadrados do oitavo e do sexto termos da seqüência de Fibonacci (consecutivos de ordem par).

$$u^2(n+1) – u^2(n-1) = u(2.n)$$

$$u(2x7) = u(14) = u(8)^2 – u(6)^2 = 21^2 - 8^2 = 441 – 64 = 377$$

Vamos calcular também a diferença entre os quadrados do sétimo e do quinto termos da seqüência de Fibonacci (consecutivos de ordem ímpar)

$$u(n+1) – u(n-1) = u(2.n)$$

$$u(2x6) = u(12) = u(7)^2 – u(5)^2 = 13^2 – 5^2 = 169 – 25 = 144$$

Além destas, existem outras propriedades dos números de Fibonacci.

3.9 Números de Fibonacci , o triângulo de Pascal e o triângulo chinês

O triângulo de Pascal é um padrão numérico infinito muito antigo. Foi utilizado por Pascal para determinar os coeficientes do desenvolvimento binomial$(a + b)^n$ e para solucionar problemas combinatórios. A sua construção é muito simples: no vértice do seu ponto mais elevado, temos o algarismo 1 (fileira n = 0). Na fileira n = 1, temos os algarismos 1 e 1. Cada um dos outros números é a soma do número logo acima com o número à esquerda (da linha anterior).

Por exemplo:

1 + 1 = 2

1 + 3 = 4

3 + 3 = 6

1 + 4 = 5

4 + 6 = 10

Deslocando os números do triângulo de Pascal para a esquerda, chegamos ao "*triângulo chinês*", que era conhecido de Fibonacci, onde n = linha e p = coluna. A coluna p=2 contém os números triangulares (porque formam triângulos) para espaço bidimensional: 1, 3, 6, 10... e a coluna p = 3 contém os números triangulares para espaço tridimensional, também conhecidos como números tetraédricos (porque formam tetraedros): 1, 4, 10...

Triângulo de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Triângulo chinês

	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5
n=0	1					
n=1	1	1				
n=2	1	2	1			
n=3	1	3	3	1		
n=4	1	4	6	4	1	
n=5	1	5	10	10	5	1

Ao examinar este triângulo, Fibonacci percebeu uma característica: a soma das diagonais são números da nossa conhecida seqüência: (1, 1, 2, 3, 5, 8,....)

Combinações no triângulo chinês	A soma das diagonais são números da seqüência de Fibonacci

C0,0					
C1,0	Cl,1		**S=5**		
C2,0	C2,1	**C2,2**			
C3,0	**C3,1**	C3,2	C3,3		
C4,0	C4,1	C4,2	C4,3	C4,4	
C5,0	C5,1	C5,2	C5,3	C5,4	C5,5

	S=1				
1	S=1	S=2			
1	1	S=3	**S=5**		
1	2	**1**	S=8		
1	**3**	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Outra maneira de construí-lo é através de combinações. Designamos por Cn,p a combinação de *n* elementos tomados *p a p.* Se quisermos calcular o elemento da linha 5 (n=5), coluna 2 (p = 2), substituímos esses valores na fórmula:

$$Cn,p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

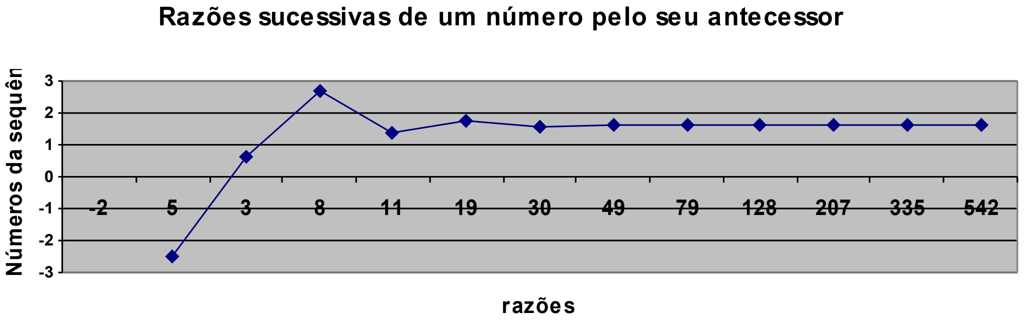
obtemos

$$C5,2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5.4.3!}{2.1.3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Utilizando esse mesmo processo, encontramos qualquer outro elemento deste triângulo. Tartaglia nascido em Bréscia (Itália), em 1500, utilizou-o para determinar os coeficientes do desenvolvimento binomial $(1+x)^n$. Sabemos que: $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$. Os coeficientes deste desenvolvimento encontram-se na terceira fileira (porque n = 3): 1, 3, 3 e 1. Se desenvolvermos o binômio $(1+x)^5$, teremos: $1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$. Observe que os coeficientes do desenvolvimento deste binômio encontram-se na quinta fileira (porque n = 5): 1, 5, 10, 10, 5 e 1.

3.10 Razão áurea e a Seqüência de Lucas

Edward Lucas em 1877, após analisar a seqüência de Fibonacci, formou outras seqüências de números inteiros obedecendo a seguinte lei de formação: u(n-1)+u(n)=u(n+1). Vamos formar ao acaso uma outra seqüência de números inteiros obedecendo essa lei de formação: -2, +5, 3, 8, 11, 19, 30, 49, 79, 128, 207, 335, 542, ... Após formar a seqüência, vamos calcular a razão de cada termo pelo seu antecessor e representar essas razões em um gráfico.



Observando o gráfico, podemos perceber que quanto maiores forem os números da seqüência, as respectivas razões sucessivas mais se aproximam do número Phi. Matematicamente podemos dizer: quando n tende a infinito, o limite é Phi, a razão áurea. Utilizando a linguagem matemática formal, podemos escrever:

$$\textbf{Phi} = \Phi = \textbf{Lim } u(n+1) / u(n) = 1{,}618$$

Lucas concluiu que, quaisquer que sejam os dois primeiros termos de uma seqüência de números inteiros, desde que a lei de formação dessa seqüência tenha a característica da recursividade ($u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$), quando n tende a infinito, o limite é a surpreendente razão áurea.

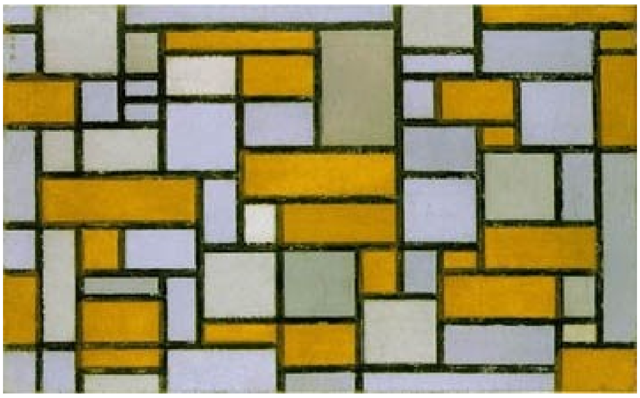
3.11 Razão áurea e Mondrian

Pieter Cornelis Mondrian nasceu em Amersfoort na Holanda em 1872 e apesar das objeções da família, estudou na Academia de Belas Artes de Amsterdã de 1892 a 1895 e depois começou a pintar.

Nas suas últimas composições, Mondrian, como ficou conhecido, utilizou linhas pretas horizontais e verticais que delimitam blocos na cor branco, vermelho, amarelo ou azul. Na busca da harmonia e da beleza, Pieter Mondrian encontrou a matemática. Descobriu o número de ouro e com ele chegou ao retângulo de ouro, que passou a ser presença constante nas suas pinturas.

Alguns quadros onde se observa retângulos de ouro:

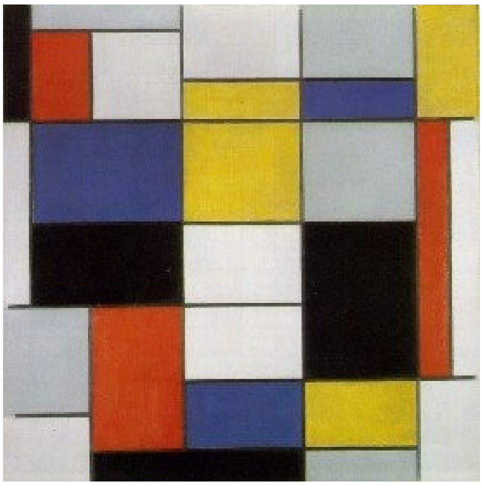
- "Composition in Blue-B" no ano de 1917,
- "Composition With Gray and Light Brown" - 1918,
- "Composition A" - 1920,
- "Composition in Red, Yellow and Blue" no ano de 1921,
- "Composition With large blue plane, red back, yellow and gray" em 1921,
- "Lozenge composition with, yellow, black, blue, red and gay" – 1921.



"Composition With Gray and Light Brown" -1918

Medidas do quadro: 80,2 x 49,9 cm

Obtida na página http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Mondrian2.htm



“Composition A” – 1920.

Medidas do quadro: 49 x 60,5 cm

Obtida na página: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Mondrian2.htm

3.12 Razão áurea e o Renascimento

No século XV, com a queda de Constantinopla, muitos refugiados que se abrigaram na Itália levaram manuscritos de antigos tratados gregos. Possivelmente por isto, o Renascimento tenha se inspirado na Antiguidade Clássica, destacando o corpo humano na escultura e na pintura. Isso fez com que os artistas se voltassem para a matemática e a anatomia, estudando as leis de perspectivas, proporção e construção do corpo humano. Uma das obras mais notáveis na pintura desta época é a Mona Lisa de Leonardo da Vinci (1452-1519). Em vários pontos da obra, tais como nas relações entre seu tronco e cabeça, ou entre os elementos do rosto, aparece a razão áurea. A principal característica na arquitetura era criar espaços proporcionais de modo que o observador possa compreender a lei que o organiza de qualquer ângulo visual. Podemos destacar na arquitetura a construção da Basílica de São Pedro pelo arquiteto Giuliano de Sangallo (1445–1516) .

Inspirado na obra “*De Architectura*” do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (viveu no século I a.C), a qual apresenta um modelo ideal para o ser humano, cujas proporções entre as partes do corpo são perfeitas, Leonardo da Vinci, que dedicou-se aos estudos de perspectivas, proporções e anatomia, realizou o seu desenho mais famoso: “*O Homem Vitruviano*”. Nesse trabalho, Leonardo da Vinci desenhou o corpo de um homem dentro de um círculo e de um quadrado, com braços e pernas estendidos, tendo o umbigo como o centro do círculo, demonstrando a proporcionalidade entre as partes do corpo. Tais proporções aparecem destacadas na gravura abaixo.

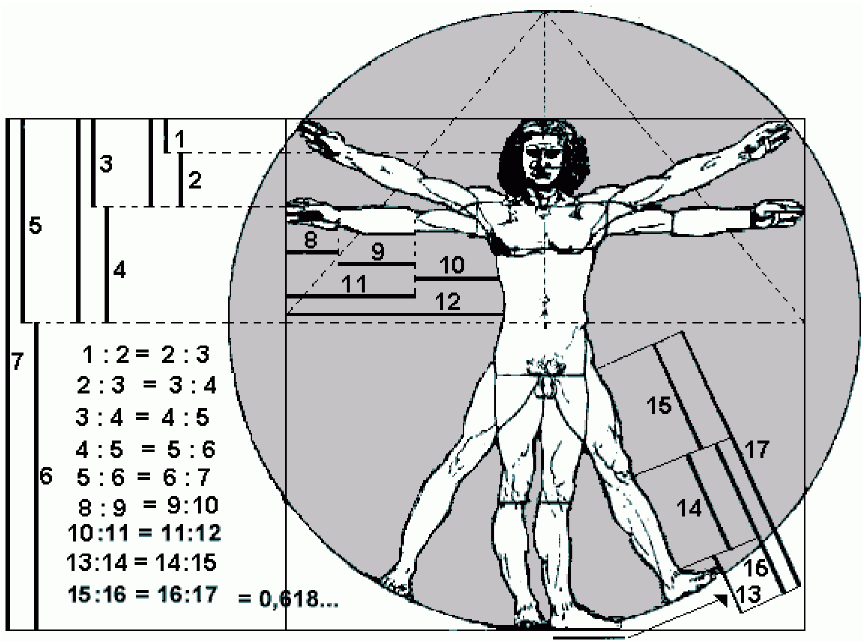


Figura obtida em: http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

A maioria das pessoas, que são consideradas belas, apresenta proporções harmônicas entre as partes do corpo. Proporções estas, cujas razões muito se aproximam do número Phi. Vamos destacar aqui algumas destas razões:
A razão entre a altura de uma pessoa e a medida do umbigo até o chão; razão entre o comprimento do braço e a medida do cotovelo até a extremidade do dedo médio (12/11); razão entre o comprimento da perna e a medida do joelho até o chão (17/16). Podemos observar outras razões que se encontram destacadas na figura anterior. Além das razões, temos as proporções. Para sabermos se o nosso corpo apresenta proporções harmônicas, basta verificarmos as proporções abaixo:

$\frac{3}{2}=\frac{2}{1}$	$\frac{5}{4}=\frac{4}{3}$	$\frac{7}{6}=\frac{6}{5}$	$\frac{11}{9}=\frac{9}{8}$	$\frac{12}{11}=\frac{11}{10}$	$\frac{17}{16}=\frac{16}{15}$	$\frac{16}{14}=\frac{14}{13}$

Você já verificou se o seu corpo apresenta proporções harmônicas?

3.13 Razão áurea e o Modulor

Em 1946, o arquiteto suíço-francês **Le Corbusier** (1887-1965), criou um modelo de padrões de dimensões harmônicas à escala humana, aplicáveis a Arquitetura e ao Desenho Industrial, denominado pelo autor de **Modulor**, o qual fazia a aproximação entre o sistema métrico empregado na França e Alemanha e o sistema inglês, de polegadas, usado na Inglaterra e Estados Unidos. Assim, o **Modulor** passou a determinar alturas e larguras para o desempenho de várias atividades domésticas e de trabalho, sendo largamente adotado por arquitetos e desenhistas industriais pelo mundo afora.

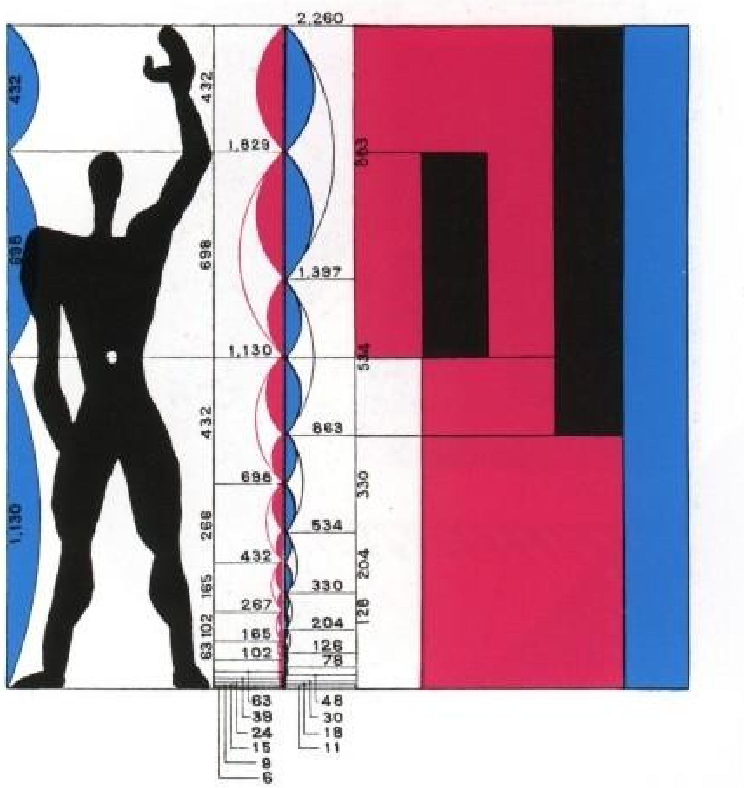


Figura obtida em: http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf

O Modulor foi publicado em 1950 e depois do grande sucesso, Le Corbusier veio a publicar em 1955, o “Modulor 2”.

A partir da altura máxima de ocupação de espaço pelo corpo humano (desde o chão às pontas dos dedos com o braço levantado) e da metade dessa altura até o plexo solar, criou duas séries de valores em razão áurea. Essas séries foram obtidas a partir da divisão harmônica desses comprimentos, que constituem uma série de medidas humanas.

3.14 Razão áurea na odontologia

O posicionamento correto da arcada dentária, mais precisamente os quatro dentes frontais de cada lado da arcada superior, encontram-se na razão áurea uns com os outros. Por isto, em reconstruções estéticas dos dentes, utiliza-se a razão áurea para obter um conjunto proporcional e harmonioso, não deixando de considerar características individuais em cada caso.

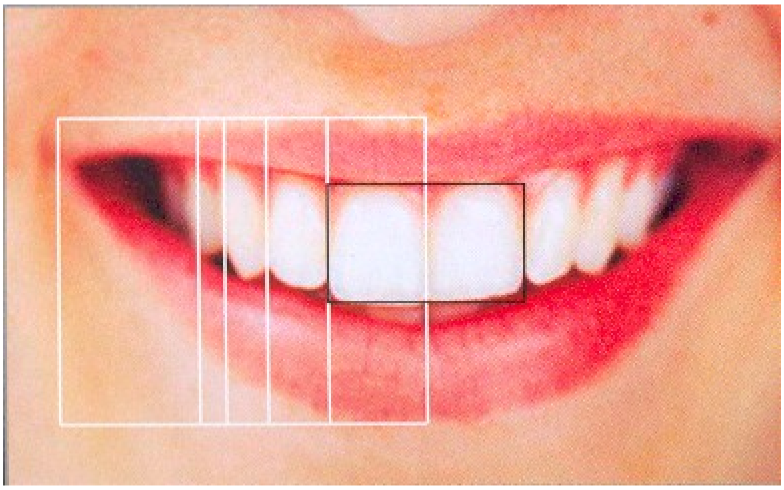


Imagem obtida em www.labordental.com.br/GOLDENSECTION.htm

De acordo com a labordental [12], a razão entre a largura do incisivo central e a largura do incisivo lateral é igual à razão entre a largura do incisivo lateral e a largura do canino, que também é igual a razão entre a largura do canino e a largura do primeiro pré-molar. O valor desta razão é o número Phi.
A razão entre o segmento “incisivo central até o primeiro pré-molar” e o segmento “incisivo central ao canto da boca”, é a razão áurea.

Os segmentos que representam a medida da largura dos dois incisivos centrais a medida da altura deles, formam um retângulo áureo. Segundo o que já estudamos a razão entre as dimensões de um retângulo áureo é o número Phi.

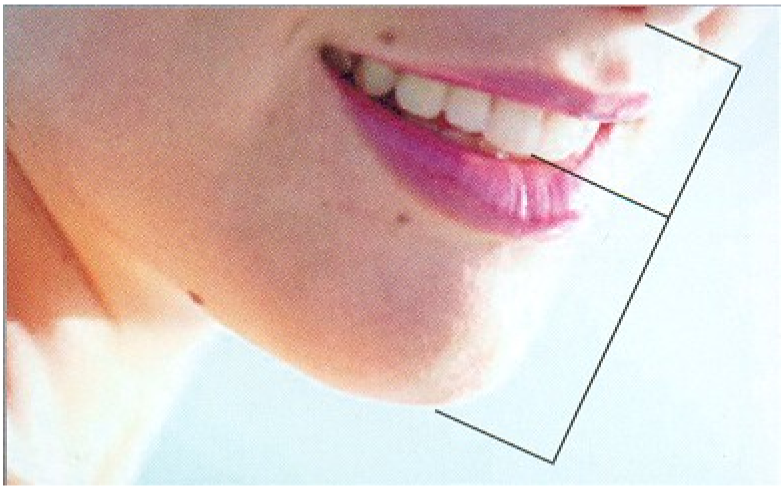


Imagem obtida na página www.labordental.com.br/GOLDENSECTION.htm

Ainda, segundo a labordental [12], a razão entre os segmentos que representam a medida “da linha dos lábios até o queixo” e a medida “da ponta do nariz à linha dos lábios” é o número Phi.

Imagem obtida na página www.labordental.com.br/GOLDENSECTION.htm

Muitos protéticos utilizam as “Marcas da Seção Áurea”, impressas em papel para trabalhos sobre modelos.

4. Conclusão

A razão áurea surge inesperadamente em diferentes contextos transmitindo sempre a sensação de estética e beleza, por isto ela é surpreendente. Não pudemos deixar de admirar a beleza do girassol, da concha marinha, do retângulo áureo, do segmento áureo, da pirâmide, do pentagrama, do pentágono, do decágono, das proporções harmônicas no nosso corpo, da pintura e da arquitetura. Sabemos da sua importância no passado: arte, arquitetura, pintura e também da sua importância no presente: arquitetura, arte, natureza, estética, formato de cartões de crédito e documentos, aparelhos eletrônicos (televisão, computador), cadernos e livros. Tudo isto nos leva a perceber a importância desta razão e o motivo pelo qual foi chamada de razão áurea.

5. Bibliografia:

[1] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974. 488p.

[2] EVES, Howard **Tópicos de História da Matemática**. São Paulo: Atual Editora Ltda, 1997. 77p.

[3] GOMBRISH, E.H. **A história da arte.** Rio de Janeiro: LTC; 2006.

[4] HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção – Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática.** Brasília: Universidade de Brasília, 1985. 178p.

[5] PROENÇA, Graça **História da Arte.** Editora Ática 279p.

[6] http://pt.wikipedia.org acesso em 16/05/2007 às 9h 40 min

[7] http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

[8] http://www.dentalpress.com.br acesso em 16/05/2007 às 17 horas

[9] http:// www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/fibonacci.html

[10] http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf

[11] http://www.tvcultura.com.br.artematemática/educação.html acesso em jul/2007.

[12] www.labordental.com.br acesso em 06/07/2007 às 9h