Matemática Essencial

Números Racionais

Matemática - UEL - 2010 - Compilada em 25 de Março de 2010.

Prof. Ulysses Sodré

Matemática Essencial: http://www.mat.uel.br/matessencial/

Conteúdo

'Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que não se veem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê.' A Bíblia Sagrada, Hebreus 11:1-3

1 Relacionando números racionais com frações

Um número racional é o que pode ser escrito na forma

$$\frac{m}{n}$$

onde m e n são números inteiros, sendo que n deve ser não nulo, isto é, n deve ser diferente de zero. Frequentemente usamos m/n para significar a divisão de m por n. Quando não existe possibilidade de divisão, simplesmente usamos uma letra como q para entender que este número é um número racional.

Como podemos observar, números racionais podem ser obtidos através da razão (em Latim: *ratio=razão=divisão=quociente*) entre dois números inteiros, razão pela qual, o conjunto de todos os números racionais é denotado por Q. Assim, é comum encontrarmos na literatura a notação:

$$Q = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in Z, n \neq 0\right\}$$

Quando há interesse, indicamos Q_+ para entender o conjunto dos números racionais positivos e Q_- o conjunto dos números racionais negativos. O número *zero* é também um número racional.

No nosso link sobre Frações, já detalhamos o estudo de frações e como todo número racional pode ser posto na forma de uma fração, então todas as propriedades válidas para frações são também válidas para números racionais. Para simplificar a escrita, muitas vezes usaremos a palavra racionais para nos referirmos aos números racionais.

2 Dízima periódica

Uma dízima periódica é um número real da forma:

$$m, npppp...$$

onde m, n e p são números inteiros, sendo que o número p se repete indefinidamente, razão pela qual usamos os três pontos: . . . após o mesmo. A parte que se repete é denominada período.

Em alguns livros é comum o uso de uma barra sobre o período ou uma barra debaixo do período ou o período dentro de parênteses.

Exemplos: Dízimas periódicas

1. $0,33333... = 0,\overline{3}$
2. $1,66666... = 1,\overline{6}$
3. $12,1212... = 12,\overline{12}$
4. $0,99999... = 0,\overline{9}$
5. $7,13333... = 7,1\overline{3}$

Uma dízima periódica é simples se a parte decimal é formada apenas pelo período. Alguns exemplos são:

1. $0,333333... = 0,(3) = 0,\overline{3}$
2. $3,636363... = 3,(63) = 3,\overline{63}$

Uma dízima periódica é composta se possui uma parte que não se repete entre a parte inteira e o período. Por exemplo:

1. $0,83333333... = 0,8\overline{3}$
2. $0,72535353... = 0,72\overline{53}$

Uma dízima periódica é uma soma infinita de números decimais. Alguns exemplos:

1. $0,3333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ...$
2. $0,8333... = 0,8 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ...$
3. $4,7855... = 4,78 + 0,005 + 0,0005 + ...$
4. $0,1010... = 0,1 + 0,001 + 0,00001 + ...$

3 A conexão entre números racionais e números reais

Um fato importante que relaciona os números racionais com os números reais é que todo número real que pode ser escrito como uma dízima periódica é um número racional. Isto significa que podemos transformar uma dízima periódica em uma fração.

O processo para realizar esta tarefa será mostrado na sequência com alguns exemplos numéricos. Para pessoas interessadas num estudo mais aprofundado sobre a justificativa para o que fazemos na sequência, deve-se aprofundar o estudo de séries geométricas no âmbito do Ensino Médio ou mesmo estudar números racionais do ponto de vista do Cálculo Diferencial e Integral ou da Análise na Reta no âmbito do Ensino Superior.

4 A geratriz de uma dízima periódica

Dada uma dízima periódica, qual será a fração que dá origem a esta dízima? Esta fração é de fato um número racional denominado a geratriz da dízima periódica. Para obter a geratriz de uma dízima periódica devemos trabalhar com o número dado pensado como uma soma infinita de números decimais. Para mostrar como funciona o método, utilizaremos diversos exemplos numéricos.

1. Seja S a dízima periódica $0,3333333...$, isto é, $S = 0,\overline{3}$. Observe que o período tem apenas 1 algarismo. Iremos escrever este número como uma soma de infinitos números decimais da forma:

   $$S = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + ...$$

   Multiplicando esta soma *infinita* por $10^1 = 10$ (o período tem 1 algarismo), obtemos:

   $$10S = 3 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ...$$

   Observe que são iguais as duas últimas expressões que aparecem em cor vermelha!

   Subtraindo membro a membro a penúltima expressão da última, obtemos:

   $$10S - S = 3$$

   donde segue que

   $$9S = 3$$

   Simplificando, obtemos:

   $$S = 1/3 = 0,33333... = 0,\overline{3}$$

Exercício: Usando o mesmo argumento que antes, você saberia mostrar que:

$$0,99999... = 0,\overline{9} = 1$$

2. Vamos tomar agora a dízima periódica T=0,313131..., isto é, $T = 0,\overline{31}$. Observe que o período tem agora 2 algarismos. Iremos escrever este número como uma soma de infinitos números decimais da forma:

$$T = 0,31 + 0,0031 + 0,000031 + ...$$

O produto desta soma *infinita* por $10^2 = 100$ (o período tem 2 algarismos), gera:

$$100T = 31 + 0,31 + 0,0031 + 0,000031 + ...$$

Observe que são iguais as duas últimas expressões que aparecem em cor vermelha, assim:

$$100T = 31 + T$$

de onde segue que

$$99T = 31$$

Simplificando, temos que

$$T = 31/99 = 0,31313131... = 0,\overline{31}$$

3. Um terceiro tipo de dízima periódica é $T = 7,1888...$, isto é, $T = 7,1\overline{8}$. Observe que existe um número com 1 algarismo após a vírgula enquanto que o período tem também 1 algarismo. Escreveremos este número como uma soma de infinitos números decimais da forma:

$$R = 7,1 + 0,08 + 0,008 + 0,0008 + ...$$

Manipule a soma *infinita* como se fosse um número comum e passe a parte que não se repete para o primeiro membro para obter:

$$R - 7,1 = 0,08 + 0,008 + 0,0008 + ...$$

Multiplique agora a soma *infinita* por $10^1 = 10$ (o período tem 1 algarismo), para obter:

$$10(R - 7,1) = 0,8 + 0,08 + 0,008 + 0,0008 + ...$$

Observe que são iguais as duas últimas expressões que aparecem em cor vermelha!

Subtraia membro a membro a penúltima expressão da última para obter:

$$10(R-7,1)-(R-7,1)=0,8$$

Assim:

$$10R-71-R+7,1=0,8$$

Para evitar os números decimais, multiplicamos toda a expressão por 10 e simplificamos para obter:

$$90R=647$$

Obtemos então:

$$T=647/90=7,1888...=7,1\overline{8}$$

4. Um quarto tipo de dízima periódica é $T = 7,004004004...$, ou seja, $U = 7,\overline{004}$. Observe que o período tem 3 algarismos, sendo que os dois primeiros são iguais a zero e apenas o terceiro é não nulo. Decomporemos este número como uma soma de infinitos números decimais da forma:

$$U=7+0,004+0,004004+0,004004004+...$$

Manipule a soma *infinita* como se fosse um número comum e passe a parte que não se repete para o primeiro membro para obter:

$$U-7=0,004+0,004004+0,004004004+...$$

Multiplique agora a soma *infinita* por $10^3 = 1000$ (o período tem 3 algarismos), para obter:

$$1000(U-7)=4+0,004+0,004004+0,004004004+...$$

Observe que são iguais as duas últimas expressões que aparecem em cor vermelha!

Subtraia membro a membro a penúltima expressão da última para obter:

$$1000(U-7)-(U-7)=4$$

Assim:

$$1000U - 7000 - U + 7 = 4$$

Obtemos então

$$999U = 6997$$

que pode ser escrita na forma:

$$T = 6997/999 = 7,004004... = 7,\overline{004}$$

5 Números irracionais

Um número real é dito um número irracional se ele não pode ser escrito na forma de uma fração ou nem mesmo pode ser escrito na forma de uma dízima periódica.

Exemplo: O número real abaixo é um número irracional, embora pareça uma dízima periódica:

$$x = 0,10100100010000100000...$$

Observe que o número de zeros após o algarismo 1 aumenta a cada passo. Existem infinitos números reais que não são dízimas periódicas e dois números irracionais muito importantes, são:

$$e = 2,718281828459045..., \qquad pi = 3,141592653589793238462643...$$

que são utilizados nas mais diversas aplicações práticas como: cálculos de áreas, volumes, centros de gravidade, previsão populacional, etc...

Exercício: Determinar a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede 1 metro. O resultado numérico é um número irracional e pode ser obtido através da relação de Pitágoras. O resultado é a raiz quadrada de 2, denotada aqui por $\sqrt{2}$ para simplificar as notações estranhas.

6 Representação, ordem e simetria dos racionais

Podemos representar geometricamente o conjunto Q dos números racionais através de uma reta numerada. Consideramos o número 0 como a origem e o número 1 em algum lugar e tomamos a unidade de medida como a distância entre 0 e 1 e por os números racionais da seguinte maneira:

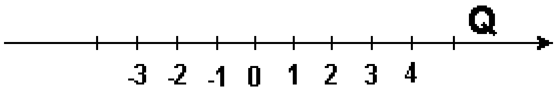

Figura 1: O conjunto dos números racionais

Ao observar a reta numerada notamos que a ordem que os números racionais obedecem é crescente da esquerda para a direita, razão pela qual indicamos com uma seta para a direita. Esta consideração é adotada por convenção, o que nos permite pensar em outras possibilidades.

Dizemos que um número racional r é menor do que outro número racional s se a diferença r-s é positiva. Quando esta diferença r-s é negativa, dizemos que o número r é maior do que s. Para indicar que r é menor do que s, escrevemos:

$$r < s$$

Do ponto de vista geométrico, um número que está à esquerda é menor do que um número que está à direita na reta numerada.

Todo número racional q exceto o zero, possui um elemento denominado simétrico ou oposto -q e ele é caracterizado pelo fato geométrico que tanto q como -q estão à mesma distância da origem do conjunto Q que é 0. Como exemplo, temos que:

1. O oposto de 3/4 é -3/4.
2. O oposto de 5 é -5.

Do ponto de vista geométrico, o simétrico funciona como a imagem virtual de algo colocado na frente de um espelho que está localizado na origem. A distância do ponto real q ao espelho é a mesma que a distância do ponto virtual -q ao espelho.

7 Módulo de um número racional

O módulo ou valor absoluto de um número racional q é maior valor entre o número q e seu elemento oposto -q, que é denotado pelo uso de duas barras verticais | |, por:

$$|q| = \max(-q, q)$$

Exemplos: $|0| = 0$, $|2/7| = 2/7$ e $|-6/7| = 6/7$.

Do ponto de vista geométrico, o módulo de um número racional q é a distância comum do ponto q até a origem (zero) que é a mesma distância do ponto -q à origem, na reta numérica racional.

8 A soma (adição) de números racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos a adição entre os números racionais a/b e c/d, da mesma forma que a soma de frações, através de:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Propriedades da adição de números racionais:

Fecho: O conjunto Q é fechado para a operação de adição, isto é, a soma de dois números racionais ainda é um número racional.

Associativa: Para todos $a, b, c \in Q$:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Comutativa: Para todos $a, b \in Q$:

$$a + b = b + a$$

Elemento neutro: Existe $0 \in Q$, que adicionado a todo $q \in Q$, proporciona o próprio q, isto é:

$$q + 0 = q$$

Elemento oposto: Para todo $q \in Q$, existe $-q \in Q$, tal que

$$q + (-q) = 0$$

Subtração de números racionais: A subtração de dois números racionais p e q é a própria operação de adição do número p com o oposto de q, isto é:

$$p - q = p + (-q)$$

Na verdade, esta é uma operação desnecessária no conjunto dos números racionais.

9 A Multiplicação (produto) de números racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos o produto de dois números racionais a/b e c/d, da mesma forma que o produto de frações, através de:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

O produto dos números racionais a e b também pode ser indicado por $a \times b$, axb, $a.b$ ou ainda ab sem nenhum sinal entre as letras.

Para realizar a multiplicação de números racionais, devemos obedecer à mesma regra de sinais que vale em toda a Matemática:

$$\begin{gathered}(+1) \times (+1) = (+1)\\(+1) \times (-1) = (-1)\\(-1) \times (+1) = (-1)\\(-1) \times (-1) = (+1)\end{gathered}$$

Podemos assim concluir que o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo, mas o produto de dois números com sinais diferentes é negativo.

Propriedades da multiplicação de números racionais:

Fecho: O conjunto Q é fechado para a multiplicação, isto é, o produto de dois números racionais ainda é um número racional.

Associativa: Para todos $a, b, c \in Q$:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

Comutativa: Para todos $a, b \in Q$:

$$a \times b = b \times a$$

Elemento neutro: Existe $1 \in Q$, que multiplicado por todo $q \in Q$, proporciona o próprio q, isto é:

$$q \times 1 = q$$

Elemento inverso: Para todo $q = a/b \in Q$, q diferente de zero, existe $q^{-1} = b/a \in Q$, tal que

$$q \times q^{-1} = 1$$

Esta última propriedade pode ser escrita como:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

Divisão de números racionais: A divisão de dois números racionais p e q é a própria operação de multiplicação do número p pelo inverso de q, isto é:

$$p \div q = p \times q^{-1}$$

Provavelmente você já deve ter sido questionado: Porque a divisão de uma fração da forma a/b por outra da forma c/d é realizada como o produto da primeira pelo inverso da segunda?

A divisão de números racionais esclarece a questão:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Na verdade, a divisão é um produto de um número racional pelo inverso do outro, assim esta operação é também desnecessária no conjunto dos números racionais.

10 Propriedade distributiva (mista)

Distributiva: Para todos $a, b, c \in Q$:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

11 Potenciação de números racionais

A potência q^n do número racional q é um produto de n fatores iguais. O número q é denominado a base e o número n é o expoente.

$$q^n = q \times q \times q \times q \times \ldots \times q, \qquad \text{(q aparece n vezes)}$$

Exemplos:

1. $(\frac{2}{5})^3 = (\frac{2}{5})(\frac{2}{5})(\frac{2}{5}) = \frac{8}{125}$
2. $(-\frac{1}{2})^3 = (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$
3. $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$
4. $(+5)^2 = (+5) \times (+5) = 25$

Observação: Se o expoente é n=2, a potência q^2 pode ser lida como: q elevado ao quadrado e se o expoente é n=3, a potência q^3 pode ser lida como: q elevado ao cubo. Isto é proveniente do fato que área do quadrado pode ser obtida por $A = q^2$ onde q é a medida do lado do quadrado e o volume do cubo pode ser obtido por $V = q^3$ onde q é a medida da aresta do cubo.

12 Raízes de números racionais

A raiz n-ésima (raiz de ordem n) de um número racional q é a operação que resulta em um outro número racional r que elevado à potência n fornece o número q. O número n é o índice da raiz enquanto que o número q é o radicando (que fica sob o estranho sinal de radical).

Leia a observação seguinte para entender as razões pelas quais evito usar o símbolo de radical neste trabalho. Assim:

$$r = \sqrt[n]{q} \quad \text{equivale a} \quad q = r^n$$

A raiz quadrada (raiz de ordem 2) de um número racional q é a operação que resulta em um outro número racional r não negativo que elevado ao quadrado seja igual ao número q, isto é, $r^2 = q$.

Não tem sentido $\sqrt{-1}$ no conjunto dos números racionais.

Exemplos:

1. $\sqrt[3]{125} = 5$ pois $5^3 = 125$.
2. $\sqrt[3]{-125} = -5$ pois $(-5)^3 = -125$.
3. $\sqrt{144} = 12$ pois $12^2 = 144$.
4. $\sqrt{144} \neq -12$ mas $(-12)^2 = 144$.

Observação: Não existe a raiz quadrada de um número racional negativo no conjunto dos números racionais. A existência de um número cujo quadrado seja igual a um número negativo só será estudada mais tarde no contexto dos Números Complexos.

Erro comum: Frequentemente lemos em materiais didáticos e até mesmo ocorre em algumas aulas o aparecimento de:

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

mas isto está errado. O certo é:

$$\sqrt{9} = +3$$

Não existe um número racional não negativo que multiplicado por ele mesmo resulte em um número negativo.

A raiz cúbica (de ordem 3) de um número racional q é a operação que resulta na obtenção de um um outro número racional que elevado ao cubo seja igual ao número q. Aqui não restringimos os nossos cálculos são válidos para números positivos, negativos ou o próprio zero.

Exemplos:

1. $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.
2. $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.
3. $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$.
4. $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$.

Observação: Obedecendo à regra dos sinais para a multiplicação de números racionais, concluímos que:

1. Se o índice n da raiz for par, não existe raiz de número racional negativo.
2. Se o índice n da raiz for ímpar, é possível extrair a raiz de qualquer número racional.

13 Média aritmética e média ponderada

Média aritmética: Seja uma coleção formada por n números racionais: x_1, x_2, x_3, ..., x_n. A média aritmética entre esses n números é a soma dos mesmos dividida por n, isto é:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Exemplo: Se um grupo de 9 pessoas tem as idades:

$$12, 54, 67, 15, 84, 24, 38, 25, 33$$

então a idade média do grupo pode ser calculada pela média aritmética:

$$A = \frac{12 + 54 + 67 + 15 + 84 + 24 + 38 + 25 + 33}{9} = \frac{352}{9} = 39,11$$

o que significa que a idade média está próxima de 39 anos.

Média aritmética ponderada: Consideremos uma coleção formada por n números racionais: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, de forma que cada um esteja sujeito a um peso, respectivamente, indicado por: p_1, p_2, p_3, ..., p_n. A média aritmética ponderada desses n números é a soma dos produtos de cada um por seu peso, dividida por n, isto é:

$$P = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

Exemplo: Um grupo de 64 pessoas, que trabalha (com salário por dia), em uma empresa é formado por sub-grupos com as seguintes características:

1. 12 ganham R$ 50,00
2. 10 ganham R$ 60,00
3. 20 ganham R$ 25,00
4. 15 ganham R$ 90,00
5. 07 ganham R$ 120,00

Para calcular a média salarial (por dia) de todo o grupo devemos usar a média aritmética ponderada:

$$P = \frac{50 \times 12 + 60 \times 10 + 25 \times 20 + 90 \times 15 + 120 \times 7}{12 + 10 + 20 + 15 + 7} = \frac{3890}{64} = 60,78$$

14 Médias geométrica e harmônica

Média geométrica: Consideremos uma coleção formada por n números racionais não negativos: x_1, x_2, x_3, ..., x_n. A média geométrica entre esses n números é a raiz n-ésima do produto entre esses números, isto é:

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n}$$

Exemplo: A a média geométrica entre os números 12, 64, 126 e 345, é dada por:

$$G = \sqrt[4]{12 \times 64 \times 126 \times 345} = 76,013$$

Aplicação prática: Dentre todos os retângulos com a área igual a 64 cm^2, qual é o retângulo cujo perímetro é o menor possível, isto é, o mais econômico? A resposta a este tipo de questão é dada pela média geométrica entre as medidas do comprimento a e da largura b, uma vez que a.b=64.

A média geométrica G entre a e b fornece a medida desejada.

$$G = \sqrt{a \times b} = \sqrt{64} = 8$$

Resposta: É o retângulo cujo comprimento mede 8 cm e é lógico que a altura também mede 8 cm, logo só pode ser um quadrado! O perímetro neste caso é p=32 cm. Em qualquer outra situação em que as medidas dos comprimentos forem diferentes das alturas, teremos perímetros maiores do que 32 cm.

Interpretação gráfica: A média geométrica entre dois segmentos de reta pode ser obtida geometricamente de uma forma bastante simples.

Sejam AB e BC segmentos de reta. Trace um segmento de reta que contenha a junção dos segmentos AB e BC, de forma que eles formem segmentos consecutivos sobre a mesma reta.

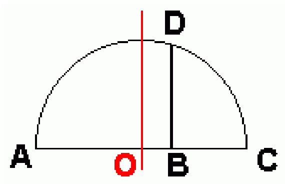

Figura 2: Obtenção da média geométrica

Dessa junção aparecerá um novo segmento AC. Obtenha o ponto médio O deste segmento e com um compasso centrado em O e raio OA, trace uma semi-circunferência começando em A e terminando em C. O segmento vertical traçado para cima a partir de B encontrará o ponto D na semi-circunferência. A medida do segmento BD corresponde à média geométrica das medidas dos segmentos AB e BC.

Média harmônica: Seja uma coleção formada por n números racionais positivos: x_1, x_2, x_3, ..., x_n. A média harmônica H entre esses n números é a divisão de n pela soma dos inversos desses n números, isto é:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

Aplicações práticas: Para as pessoas interessados em muitas aplicações do conceito de harmônia, média harmônica e harmônico global, visite o nosso link sobre Harmonia.