Matemática Essencial

Frações racionais

Matemática - UEL - 2010 - Compilada em 26 de Março de 2010.

Prof. Ulysses Sodré

Matemática Essencial: http://www.mat.uel.br/matessencial/

Conteúdo

1 Elementos Históricos sobre frações **1**

2 Introdução ao conceito de fração **2**

3 Elementos gerais para a construção de frações **2**

4 Definição de fração **2**

5 Leitura de frações **3**

5.1 O numerador é 1 e o denominador é um inteiro $1 < d < 10$ 3

5.2 O numerador é 1 e o denominador é um inteiro $d > 10$ 4

5.3 O numerador é 1 e o denominador é um múltiplo de 10 4

6 Tipos de frações **5**

7 Propriedades fundamentais **6**

8 A fração como uma classe de equivalência **7**

9 Número Misto **7**

10 Simplificação de Frações **7**

11 Comparação de duas frações **8**

11.1 Por redução ao mesmo denominador 8
11.2 Os numeradores e denominadores das frações são diferentes 8
11.3 As frações possuem um mesmo numerador 9

12 Divisão de frações 10

'Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que não se veem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê.' A Bíblia Sagrada, Hebreus 11:1-3

1 Elementos Históricos sobre frações

Há 3000 antes de Cristo, os geômetras dos faraós do Egito realizavam marcação das terras que ficavam às margens do rio Nilo, para a sua população. Mas, no período de junho a setembro, o rio inundava essas terras levando parte de suas marcações. Logo os proprietários das terras tinham que marcá-las novamente e para isso, eles utilizavam uma marcação com cordas, que seria uma espécie de medida, denominada *estiradores de cordas*.

As pessoas utilizavam as cordas, esticando-as e assim verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno, mas raramente a medida dava correta no terreno, isto é, não cabia um número inteiro de vezes nos lados do terreno; sendo assim eles sentiram a necessidade de criar um novo tipo de número - *o número fracionário*, onde eles utilizavam as frações.

2 Introdução ao conceito de fração

Às vezes, ao tentar partir algo em pedaços, como por exemplo, uma pizza, nós a cortamos em partes que não são do mesmo tamanho.

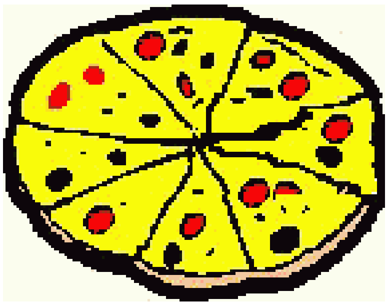

Figura 1: O fracionamento de uma pizza

Logo isso daria uma grande confusão, pois quem ficaria com a parte maior? Ou quem ficaria com a parte menor? É lógico que alguém sairia no prejuízo.

Pensemos neste exemplo: Dois irmãos foram juntos comprar chocolate. Eles compraram duas barras de chocolate iguais, uma para cada um. Iam começar a comer quando chegou uma de suas melhores amigas e vieram as perguntas: Quem daria um pedaço para a amiga? Qual deveria ser o tamanho do pedaço? Eles discutiram e chegaram à seguinte conclusão:

Para que nenhum dos dois comesse menos, cada um daria metade do chocolate para a amiga.

1. Você concorda com esta divisão? Por quê?
2. Como você poderia resolver esta situação para que todos comessem partes iguais?
3. O que você acha desta frase: *Quem parte e reparte e não fica com a melhor parte, ou é bobo ou não tem arte.*

3 Elementos gerais para a construção de frações

Para representar os elementos que não são tomados como partes inteiras de alguma coisa, utilizamos o objeto matemático denominado fração.

O conjunto dos números naturais, algumas vezes inclui o zero e outras vezes não, tendo em vista que zero foi um número criado para dar significado nulo a algo. Nesse momento o conjunto N será representado por:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$$

Logo, todos os números naturais representam partes inteiras.

Os números que não representam partes inteiras, mas que são partes de inteiros, constituem os números racionais não-negativos, aqui representados por $Q+$, onde esta letra Q significa quociente ou divisão de dois números inteiros naturais.

$$Q_{+} = \{0, ..., 1/4, ..., 1/2, ..., 1, ..., 2, ...\}$$

Numeral: Relativo a número ou indicativo de número.

Número: Palavra ou símbolo que expressa quantidade.

4 Definição de fração

Os numerais que representam números racionais não-negativos são chamados *frações* e os números inteiros utilizados na fração são chamados numerador e denominador, separados por uma linha horizontal ou *traço de fração*.

$$\frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$

onde *Numerador* indica quantas partes são tomadas do inteiro, isto é, o número inteiro que é escrito sobre o traço de fração e *Denominador* indica em quantas partes dividimos o inteiro, sendo que este número inteiro deve necessariamente ser diferente de zero.

Observação: A linguagem HTML (para construir páginas da Web) não proporciona ainda um método simples para a implementar a barra de fração, razão pela qual, às vezes usaremos a barra / ou mesmo o sinal ÷, para entender a divisão de dois números.

Exemplo: Consideremos a fração 1/4, que pode ser escrita como:

$$\frac{1}{4}$$

Em linguagem matemática, as frações podem ser escritas tanto como no exemplo acima ou mesmo como 1/4, considerada mais comum.

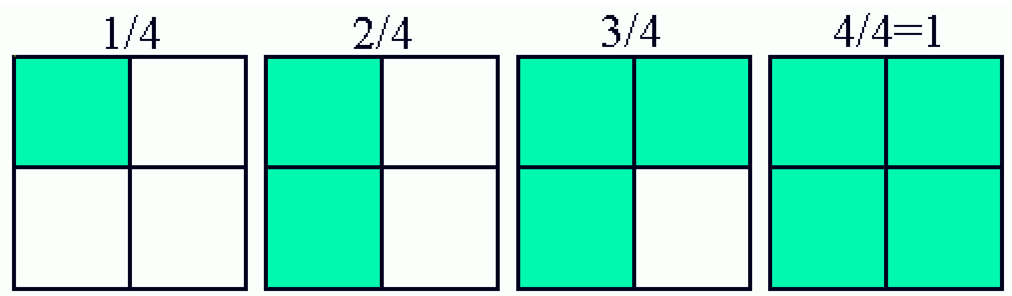

Figura 2: Frações múltiplas de um quarto

A unidade foi dividida em quatro partes iguais. A fração pode ser visualizada através da figura anexada, sendo que foi sombreada uma dessas partes.

5 Leitura de frações

5.1 O numerador é 1 e o denominador é um inteiro $1 < d < 10$

A leitura de uma fração da forma 1/d, onde d é o denominador que é menor do que 10 é feita como:

1/2	um meio
1/3	um terço
1/4	um quarto
1/5	um quinto
1/6	um sexto
1/7	um sétimo
1/8	um oitavo
1/9	um nono

5.2 O numerador é 1 e o denominador é um inteiro $d > 10$

Quando a fração for da forma $1/d$, com d maior do que 10, lemos: *1, o denominador e acrescentamos a palavra avos.*

Avos é um substantivo masculino usado na leitura das frações, designa cada uma das partes iguais em que foi dividida a unidade e se cujo denominador é maior do que dez.

Fração	Leitura
1/11	um onze avos
1/12	um doze avos
1/13	um treze avos
1/14	um quatorze avos
1/15	um quinze avos
1/16	um dezesseis avos
1/17	um dezessete avos
1/18	um dezoito avos
1/19	um dezenove avos

5.3 O numerador é 1 e o denominador é um múltiplo de 10

Se o denominador for múltiplo de 10, lemos:

Fração	Leitura	Leitura Comum
1/10	um dez avos	um décimo
1/20	um vinte avos	um vigésimo
1/30	um trinta avos	um trigésimo
1/40	um quarenta avos	um quadragésimo
1/50	um cinqüenta avos	um qüinquagésimo
1/60	um sessenta avos	um sexagésimo
1/70	um setenta avos	um septuagésimo
1/80	um oitenta avos	um octogésimo
1/90	um noventa avos	um nonagésimo
1/100	um cem avos	um centésimo
1/1000	um mil avos	um milésimo
1/10000	um dez mil avos	um décimo milésimo
1/100000	um cem mil avos	um centésimo milésimo
1/1000000	um milhão avos	um milionésimo

Observação: A fração 1/3597 pode ser lida como: *um, três mil quinhentos e noventa e sete avos.*

6 Tipos de frações

A representação gráfica mostra a fração 3/4 que é uma fração cujo numerador é um número natural menor do que o denominador.

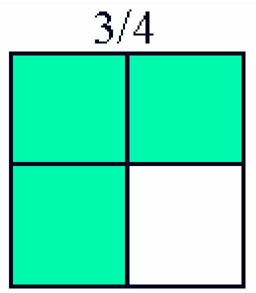

Figura 3: Três quartos

A fração cujo numerador é menor que o denominador, isto é, a parte é tomada dentro do inteiro, é chamada *fração própria*. A fração cujo numerador é maior do que o denominador, isto é, representa mais do que um inteiro dividido em partes iguais é chamada *fração imprópria*.

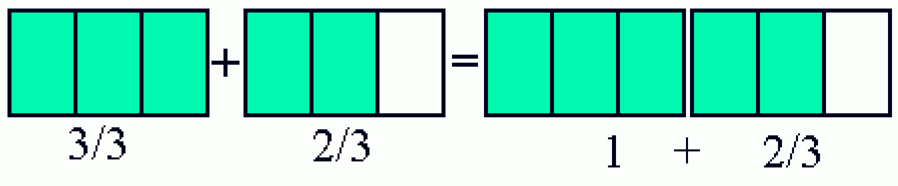

Figura 4: 3/3 + 2/3 = 5/3

Fração aparente: é aquela cujo numerador é um múltiplo do denominador e aparenta ser uma fração mas não é, pois representa um número inteiro. Como um caso particular, o zero é múltiplo de todo número inteiro, assim as frações 0/3, 0/8, 0/15 são aparentes, pois representam o número inteiro zero.

Frações Equivalentes: São as que representam a mesma parte do inteiro. Se multiplicarmos os termos (numerador e denominador) de uma fração sucessivamente pelos números naturais, teremos um conjunto infinito de frações que constitui um conjunto que é conhecido como a classe de equivalência da fração dada.

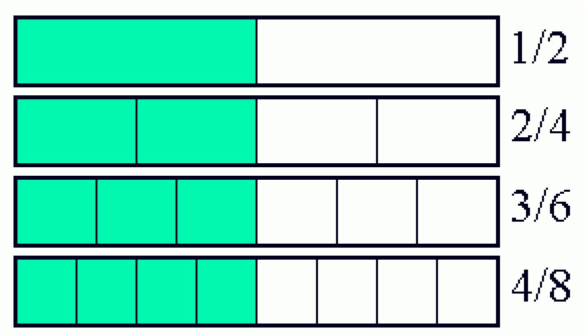

Figura 5: Equivalência com a fração 1/2

7 Propriedades fundamentais

1. (1) Se multiplicarmos os termos (numerador e denominador) de uma fração por um mesmo número natural, obteremos uma fração equivalente à fração dada:

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{2}{4}$$

2. (2) Se é possível dividir os termos (numerador e denominador) de uma fração por um mesmo número natural, obteremos uma fração equivalente à fração dada:

$$\frac{12}{16} = \frac{12 \div 2}{16 \div 2} = \frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

8 A fração como uma classe de equivalência

A classe de equivalência de uma fração é o conjunto de todas as frações equivalentes à fração dada. Ao invés de trabalhar com todos os elementos deste conjunto infinito, simplesmente poderemos tomar a fração mais simples deste conjunto que será a representante desta classe. Esta fração será denominada um número racional. Aplicando a propriedade fundamental, podemos escrever o conjunto das frações equivalentes a $1/3$, como:

$$C(1/3) = \{1/3, 2/6, 3/9, 4/12, 5/15, 6/18, ...\}$$

9 Número Misto

Quando o numerador de uma fração é maior que o denominador, podemos realizar uma operação de decomposição desta fração em uma parte inteira e uma parte fracionária e o resultado é denominado número misto.

Transformação de uma fração imprópria em um número misto:

$$\frac{17}{4} = \frac{16+1}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$$

Transformação de um número misto em uma fração imprópria:

$$4\frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

10 Simplificação de Frações

Simplificar frações é o mesmo que escrevê-la em uma forma mais simples, para que a mesma se torne mais fácil de ser manipulada.

O objetivo de simplificar uma fração é torná-la uma fração irredutível, isto é, uma fração para a qual o Máximo Divisor Comum entre o Numerador e o Denominador seja 1, ou seja, o Numerador e o Denominador devem ser primos entre si. Essa simplificação pode ser feita através dos processos de divisão sucessiva e pela fatoração.

A divisão sucessiva corresponde a dividir os dois termos da fração por um mesmo número (fator comum) até que ela se torne irredutível.

$$\frac{36}{60} = \frac{36 \div 2}{60 \div 2} = \frac{18}{30} = \frac{18 \div 2}{30 \div 2} = \frac{9}{15} = \frac{9 \div 3}{15 \div 3} = \frac{3}{5}$$

Respectivamente, dividimos os termos das frações por 2, 2 e 3.

Observação: Outra maneira de divisão das frações é obter o Máximo Divisor Comum entre o Numerador e o Denominador e simplificar a fração diretamente por esse valor.

Exemplo: Simplificaremos a fração $54/72$, usando o Máximo Divisor Comum. Como $MDC(54,72) = 18$, então $54 : 18 = 3$ e $72 : 18 = 4$, logo:

$$\frac{54}{72} = \frac{54 \div 18}{72 \div 18} = \frac{3}{4}$$

11 Comparação de duas frações

11.1 Por redução ao mesmo denominador

Se duas frações possuem denominadores iguais, a maior fração é a que possui maior numerador. Por exemplo:

$$\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

11.2 Os numeradores e denominadores das frações são diferentes

Devemos reduzir ambas as frações a um denominador comum e o processo depende do cálculo do Mínimo Múltiplo Comum entre os dois denominadores e este será o denominador comum às duas frações. Na seqüência, divide-se o denominador comum pelo denominador de cada fração e multiplica-se o resultado obtido pelo respectivo numerador.

Exemplo: Vamos comparar as frações 2/3 e 3/5. Como os denominadores são 3 e 5, temos que MMC(3,5)=15. Reduzindo ambas as frações ao mesmo denominador comum 15, aplica-se a regra de dividir o denominador comum pelo denominador de cada fração e na seqüência multiplica-se esse respectivo número pelo numerador.

$$\frac{2}{3} ??? \frac{3}{5}$$

Multiplicando os termos da primeira fração por 5 e multiplicando os termos da segunda fração por 3, obteremos:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 5}{3\times 5} ??? \frac{3\times 3}{5\times 3} = \frac{3}{5}$$

Temos então os mesmos denominadores, logo:

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} ??? \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

e podemos garantir que

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} > \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

11.3 As frações possuem um mesmo numerador

Se os numeradores de duas frações forem iguais, será maior a fração cujo denominador for menor.

Exemplo: Uma representação gráfica para a desigualdade

$$\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$$

pode ser dada geometricamente por:

$$3/4 = 6/8$$

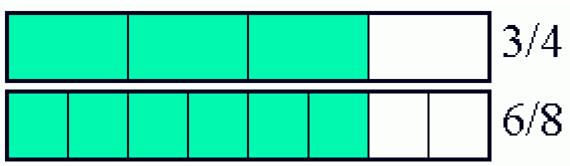

Figura 6: Equivalência entre 3/4 e 6/8

Observe que a área amarelada é maior na primeira figura.

12 Divisão de frações

Consideremos inicialmente uma divisão D de duas frações, denotada por:

$$D = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$$

Um modo fácil para explicar esta divisão é tomar as duas frações com o mesmo denominador e realizar a divisão do *primeiro numerador* pelo *segundo numerador*, isto é:

$$D = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{6} \div \frac{4}{6}$$

pois 1/2 equivale a 3/6 e 2/3 equivale a 4/6. O desenho abaixo mostra as frações 1/2 e 2/3, através de suas respectivas frações equivalentes: 3/6 e 4/6.

Realizar a divisão entre dois números fracionários ou não A e B, é o mesmo que procurar saber quantas partes de B estão ocupadas por A. Quantas partes da fração 4/6 estão ocupadas pela fração 3/6?

No desenho, os numeradores das frações estão em cor amarela. Como temos 3 partes em amarelo na primeira fração e 4 partes em amarelo na segunda fração, a divisão corresponde à fração *3/4*, ou seja, em cada *4* partes amarelas, *3* estão ocupadas.

Este argumento justifica a divisão de duas frações pela multiplicação da primeira fração pelo inverso da segunda fração e observamos que de fato isto funciona neste caso:

$$D = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{6} \times \frac{6}{4} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Na verdade, há um tratamento mais geral que o deste caso particular. A divisão de um número real $\frac{a}{b}$ pelo número real $\frac{c}{d}$ é, por definição, a multiplicação do número $\frac{a}{b}$ pelo inverso de $\frac{c}{d}$ que é a fração $\frac{d}{c}$, assim:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$$