Matemática Essencial

Frações Decimais

Matemática - UEL - 2010 - Compilada em 26 de Março de 2010.

Prof. Ulysses Sodré

Matemática Essencial: http://www.mat.uel.br/matessencial/

Conteúdo

'Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que não se veem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê.' A Bíblia Sagrada, Hebreus 11:1-3

1 O papel das frações e números Decimais

Esta página trata do estudo de frações e números decimais, bem como seus fatos históricos, propriedades, operações e aplicações. As frações decimais e números decimais possuem notória importância cotidiana. Tais conceitos são usados em muitas situações práticas, embora, muitas vezes passem despercebidas.

Indo ao supermercado comprar 1/2 Kg de café por R$ 2,80 e pagando a compra com uma nota de R$ 5,00, obtém-se R$ 2,20 de troco. Neste exemplo, podemos observar o uso de frações e números decimais. Através deste tipo de compra, usamos o conceito de fração decimal juntamente com o sistema de pesagem (1/2 Kg), números decimais juntamente com o sistema monetário. Muitas outras situações utilizam de frações e números decimais.

Observação: Para dividir um número X por outro número Y diferente de zero, usamos com frequencia, a notação X/Y, por ser mais simples.

2 Elementos históricos sobre os números Decimais

Hoje em dia é comum o uso de frações. Houve tempo, que as mesmas não eram conhecidas. O homem introduziu o uso de frações quando começou a medir e representar medidas.

Os egípcios usavam apenas frações que tinham o número 1 dividido por um número inteiro, como por exemplo: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,... Tais frações eram denominadas frações *egípcias* e ainda hoje têm muitas aplicações práticas. Outras frações foram descobertas pelos mesmos egípcios as quais eram expressas em termos de frações egípcias, como: $5/6 = 1/2 + 1/3$.

Em geral, os babilônios usavam frações com denominador 60. É provável que o uso do número 60 pelos babilônios se deve ao fato que é um número menor do que 100 com maior quantidade de divisores inteiros. Os romanos, por sua vez, usavam constantemente frações com denominador 12. Provavelmente os romanos usavam o número 12 por ser um número que embora pequeno, possui um número expressivo de divisores inteiros. Com o passar dos tempos, muitas notações foram usadas para representar frações. A atual maneira de representação data do século XVI.

Os números decimais têm origem nas frações decimais. Por exemplo, a fração $1/2$ equivale à fração $5/10$ que equivale ao número decimal $0,5$.

Stevin (engenheiro e matemático holandês), em 1585 ensinou um método para efetuar todas as operações por meio de inteiros, sem o uso de frações, no qual escrevia os números naturais ordenados em cima de cada algarismo do numerador indicando a posição ocupada pela vírgula no numeral decimal. A notação abaixo foi introduzida por Stevin e adaptada por John Napier, grande matemático escocês.

$$\begin{array}{rcl} \ \ 123 & & \\ 1437 & & \\ \hline 1000 & = & 1{,}437 \end{array}$$

A representação dos algarismos decimais, provenientes de frações decimais, recebia um traço no numerador indicando o número de zeros existentes no denominador.

$$\frac{437}{100} = 4,\underline{37}$$

Este método foi aprimorado e em 1617 Napier propôs o uso de um ponto ou de uma vírgula para separar a parte inteira da parte decimal.

Por muito tempo os números decimais foram empregados apenas para cálculos astronômicos em virtude da precisão proporcionada. Os números decimais simplificaram muito os cálculos e passaram a ser usados com mais ênfase após a criação do sistema métrico decimal.

3 Frações e Números Decimais

Dentre todas as frações, existe um tipo especial cujo denominador é uma potência de 10. Este tipo é denominado fração decimal.

Exemplos de frações decimais, são:

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{3}{100}, \quad \frac{23}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10^3}$$

Toda fração decimal pode ser representada por um número decimal, isto é, um número que tem uma parte inteira e uma parte decimal, separados por uma vírgula.

A fração 127/100 pode ser escrita na forma mais simples, como:

$$\frac{127}{100} = 1,27$$

onde 1 representa a parte inteira e 27 representa a parte decimal. Esta notação subentende que a fração 127/100 pode ser decomposta na seguinte forma:

$$\frac{127}{100} = \frac{100+27}{100} = \frac{100}{100} + \frac{27}{100} = 1 + 0,27 = 1,27$$

A fração 8/10 pode ser escrita na forma 0,8, onde 0 é a parte inteira e 8 é a parte decimal. Aqui observamos que este número decimal é menor do que 1 porque o numerador é menor do que o denominador da fração.

4 Leitura de números decimais

Para ler números decimais é necessário primeiramente, observar a localização da vírgula que separa a parte inteira da parte decimal.

Um número decimal pode ser colocado na forma genérica:

Centenas, Dezenas, Unidades, Décimos, Centésimos, Milésimos

Por exemplo, o número 130,824, pode ser escrito na forma:

1 Centena, 3 dezenas, 0 unidades, 8 décimos, 2 centésimos e 4 milésimos.

Exemplos:

0,6	Seis décimos
0,37	Trinta e sete centésimos
0,189	Cento e oitenta e nove milésimos
3,7	Três inteiros e sete décimos
13,45	Treze inteiros e quarenta e cinco centésimos
130,824	Cento e trinta inteiros e oitocentos e vinte e quatro milésimos

5 Transformando frações decimais em números decimais

Podemos escrever a fração decimal 1/10 como: 0,1. Esta fração é lida *um décimo*. Notamos que a vírgula separa a parte inteira da parte fracionária:

parte inteira	vírgula	parte fracionária
0	,	1

Uma outra situação nos mostra que a fração decimal 231/100 pode ser escrita como 2,31, que se lê da seguinte maneira: "dois inteiros e trinta e um centésimos". Novamente observamos que a vírgula separa a parte inteira da parte fracionária:

parte inteira	vírgula	parte fracionária
2	,	31

Em geral, transforma-se uma fração decimal em um número decimal fazendo com que o numerador da fração tenha o mesmo número de casas decimais que o número de zeros do denominador. Na verdade, realiza-se a divisão do numerador pelo denominador.

Por exemplo:

1. $130/100 = 1,30$
2. $987/1000 = 0,987$
3. $5/1000 = 0,005$

6 Transformando números decimais em frações decimais

Também é possível transformar um número decimal em uma fração decimal. Para isto, toma-se como numerador o número decimal sem a vírgula e como denominador a unidade (1) seguida de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número dado. Como exemplo, temos:

1. $0,5 = 5/10$
2. $0,05 = 5/100$
3. $2,41 = 241/100$
4. $7,345 = 7345/1000$

7 Propriedades dos números decimais

Zeros após o último algarismo significativo: Um número decimal não se altera quando se acrescenta ou se retira um ou mais zeros à direita do último algarismo não nulo de sua parte decimal. Por exemplo:

1. $0,5 = 0,50 = 0,500 = 0,5000$
2. $1,0002 = 1,00020 = 1,000200$
3. $3,1415926535 = 3,141592653500000000$

Multiplicação por uma potência de 10: Para multiplicar um número decimal por 10, por 100, por 1000, basta deslocar a vírgula para a direita uma, duas, ou três casas decimais. Por exemplo:

1. $7,4 \times 10 = 74$
2. $7,4 \times 100 = 740$
3. $7,4 \times 1000 = 7400$

Divisão por uma potência de 10: Para dividir um número decimal por 10, 100, 1000, etc, basta deslocar a vírgula para a esquerda uma, duas, três, ... casas decimais. Por exemplo:

1. $247,5 \div 10 = 24,75$
2. $247,5 \div 100 = 2,475$
3. $247,5 \div 1000 = 0,2475$

8 Operações com números decimais

8.1 Adição e Subtração

Para efetuar a adição ou a subtração de números decimais temos que seguir alguns passos:

1. Igualar a quantidade de casas decimais dos números decimais a serem somados ou subtraídos acrescentando zeros à direita de suas partes decimais. Por exemplo:
   (a) $2,4+1,723=2,400+1,723$
   (b) $2,4-1,723=2,400-1,723$
2. Escrever os numerais observando as colunas da parte inteira (unidades, dezenas, centenas, etc), de forma que:
   (a) o algarismo das unidades de um número deverá estar embaixo do algarismo das unidades do outro número,
   (b) o algarismo das dezenas de um número deverá estar em baixo do algarismo das dezenas do outro número,
   (c) o algarismo das centenas deverá estar em baixo do algarismo das centenas do outro número, etc),
   (d) a vírgula deverá estar debaixo da outra vírgula, e
   (e) a parte decimal (décimos, centésimos, milésimos, etc) de forma que décimos sob décimos, centésimos sob centésimos, milésimos sob milésimos, etc.

   Dois exemplos:

```
  2,400     2,400
+ 1,723   - 1,723
-------   -------
```

3. Realizar a adição ou a subtração.

8.2 Multiplicação

Podemos multiplicar dois números decimais transformando cada um dos números decimais em frações decimais e realizar a multiplicação de numerador por numerador e denominador por denominador. Por exemplo:

$$2,25\times 3,5=\frac{225}{100}\times\frac{35}{10}=\frac{225\times 35}{100\times 10}=\frac{7875}{1000}=7,875$$

Podemos também multiplicar os números decimais como se fossem inteiros e dar ao produto tantas casas quantas forem as casas do multiplicando somadas às do multiplicador. Por exemplo:

2,25	2 casas decimais	multiplicando
x 3,5	1 casa decimal	multiplicador
1125		
675		
7875		
7,875	3 casas decimais	Produto

8.3 Divisão com o dividendo maior que o divisor

Como visto anteriormente, se multiplicarmos tanto o dividendo como o divisor de uma divisão por 10, 100 ou 1000, o quociente não se alterará. Utilizando essas informações poderemos efetuar divisões entre números decimais como se fossem divisões de números inteiros. Por exemplo: $3,6 \div 0,4 =?$

Aqui, dividendo e divisor têm apenas uma casa decimal, logo multiplicamos ambos por 10 para que o quociente não se altere. Assim tanto o dividendo como o divisor serão números inteiros. Na prática, dizemos que "cortamos"a vírgula.

$$3,6 \div 0,4 = \frac{3,6}{0,4} = \frac{36 \times 10}{4 \times 10} = \frac{36}{4} = 9$$

Um outro exemplo:

$$0,35 \div 7 = \frac{0,35}{7} = \frac{0,35 \times 100}{7 \times 100} = \frac{35}{700} = \frac{35 \div 7}{700 \div 7} = \frac{5}{100} = 0,05$$

Neste caso, o dividendo tem duas casas decimais e o divisor é um inteiro, logo multiplicamos ambos por 100 para que o quociente não se altere. Assim tanto o dividendo como o divisor serão inteiros.

Exercício: Uma pessoa de bom coração doou 35 alqueires paulistas de terra para 700 pessoas. Sabendo-se que cada alqueire paulista mede 24.200

metros quadrados, qual será a área que cada um receberá?

8.4 Divisão com o dividendo menor que o divisor

Vamos considerar a divisão de 35 (dividendo) por 700 (divisor). Transforma-se o dividendo, multiplicando-se por 10, 100, ..., para obter 350 décimos, 3500 centésimos, ... até que o novo dividendo fique maior do que o divisor, para que a divisão se torne possível. Neste caso, há a necessidade de multiplicar por 100.

Assim a divisão de 35 por 700 será transformada numa divisão de 3500 por 700. Como acrescentamos dois zeros ao dividendo, iniciamos o quociente com dois zeros, colocando-se uma vírgula após o primeiro zero. Isto pode ser justificado pelo fato que se multiplicarmos o dividendo por 100, o quociente ficará dividido por 100.

dividendo	3500	700	divisor
resto	0	0,05	quociente

Realizamos a divisão de 3500 por 700 para obter 5, concluindo que $0,35/7 = 35/700 = 0,05$.

8.5 Divisão de números naturais com quociente decimal

A divisão de 10 por 16 não fornecerá um inteiro no quociente. Como $10 < 16$, o quociente da divisão não será um inteiro, assim para dividir o número 10 por 16, montamos uma tabela semelhante à divisão de dois números inteiros.

10	16
	??

(1) Multiplicando o dividendo por 10, o quociente ficará dividido por 10. Isto justifica a presença do algarismo 0 seguido de uma vírgula no quociente.

100	16
	0,

(2) Realizamos a divisão de 100 por 16. O resultado será 6 e o resto será 4.

100	16
-96	0,6
4	

(3) O resto 4 corresponde a 4 décimos = 40 centésimos, razão pela qual colocamos um zero (0) à direita do número 4.

100	16
-96	0,6
40	

(4) Dividimos 40 por 16 para obter o quociente 2 e o novo resto será 8.

100	16
-96	0,62
40	
-32	
8	

(5) O resto 8 corresponde a 8 centésimos = 80 milésimos, razão pela qual inserimos um 0 à direita do número 8. Dividimos 80 por 16 para obter o quociente 5 e o resto igual a 0.

100	16
-96	0,625
40	
-32	
80	
-80	
0	

A divisão 10/16 é igual a 0,625. O o quociente é um número decimal exato, embora não seja um inteiro.

9 Comparação de números decimais

A comparação de números decimais pode ser feita analisando-se as partes inteiras e decimais desses números. Para isso, faremos uso dos sinais: > (que se lê: maior); < (que se lê: menor) ou = (que se lê: igual).

9.1 Números com partes inteiras diferentes

O maior número é aquele que tem a parte inteira maior. Por exemplo:

1. $4,1 > 2,76$ pois 4 é maior do que 2.
2. $3,7 < 5,4$ pois 3 é menor do que 5.

9.2 Números com partes inteiras iguais

Igualamos o número de casas decimais acrescentando zeros tantos quantos forem necessários. Após esta operação, teremos dois números com a mesma parte inteira mas com partes decimais diferentes. Basta comparar estas partes decimais para constatar qual é o maior deles. Alguns exemplos, são:

1. $12,4 > 12,31$ pois 12,4=12,40 e 40 é maior que 31.
2. $8,032 < 8,47$ pois 8,47=8,470 e 032 é menor que 470.
3. $4,3 = 4,3$ pois 4=4 e 3=3.

10 Porcentagem

Ao abrir um jornal, ligar uma televisão, olhar vitrines, é comum depararmos com expressões do tipo:

1. A inflação do mês foi de 4% (lê-se quatro por cento)
2. Desconto de 10% (dez por cento) nas compras à vista.

3. O índice de reajuste salarial de março é de 0,6% (seis décimos por cento)

A porcentagem é um modo de comparar números usando a proporção direta, onde uma das razões da proporção é uma fração cujo denominador é 100. Toda razão $\frac{a}{b}$ na qual $b = 100$ é denominada *porcentagem*.

Exemplos:

1. Se há 30% de meninas em uma sala de alunos, pode-se comparar o número de meninas com o número total de alunos da sala, usando para isto uma fração de denominador 100, para significar que se a sala tivesse 100 alunos então 30 desses alunos seriam meninas. Trinta por cento é o mesmo que

$$\frac{30}{100} = 30\%$$

2. Calcular 40

$$\frac{40}{100} = \frac{X}{300}$$

   Como o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, podemos realizar a multiplicação cruzada para obter: $100X = 12000$, assim $X = 120$

   Logo, 40% de R$300,00 é igual a R$120,00.

3. Li 45% de um livro que tem 200 páginas. Quantas páginas ainda faltam para ler?

$$\frac{45}{100} = \frac{X}{200}$$

   o que implica que $100X = 9000$, logo $X = 90$. Como eu já li 90 páginas, ainda faltam ler 200-90=110 páginas.