Matemática Essencial

Equações do Segundo grau

Matemática - UEL - 2010 - Compilada em 18 de Março de 2010.

Prof. Ulysses Sodré

Matemática Essencial: http://www.mat.uel.br/matessencial/

Conteúdo

'Jesus disse: – Eu Sou a luz do mundo; quem me segue terá a luz da vida e nunca andará na escuridão.' *A Bíblia Sagrada, João 8:12*

1 Introdução às equações algébricas

Equações algébricas são equações nas quais a incógnita x está sujeita a operações algébricas como: adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação.

Exemplos:

1. $ax+b=0$
2. $ax^2+bx+c=0$
3. $ax^4+bx^2+c=0$

Uma equação algébrica está em sua forma canônica, quando ela pode ser escrita como:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x^1 + a_n = 0$$

onde n é um número inteiro positivo (número natural). O maior expoente da incógnita em uma equação algébrica é denominado o grau da equação e o coeficiente do termo de mais alto grau é denominado coeficiente do termo dominante.

Exemplo: A equação $4x^2+3x+2=0$ tem o grau 2 e o coeficiente do termo dominante é 4. Dizemos que esta é uma equação do segundo grau.

2 A fórmula quadrática de Sridhara (Bhaskara)

Mostraremos como o matemático Sridhara, obteve a Fórmula (conhecida como sendo) de Bhaskara, que é a fórmula geral para resolver equações do segundo grau. Um fato curioso é que a Fórmula de Bhaskara não foi descoberta por ele mas pelo matemático hindu Sridhara, pelo menos um século antes da publicação de Bhaskara, fato reconhecido pelo próprio Bhaskara, embora o material construído pelo pioneiro não tenha chegado até nós.

O fundamento usado para obter esta fórmula foi buscar uma forma de reduzir a equação do segundo grau a uma do primeiro grau, através da extração de raízes quadradas de ambos os membros da mesma.

Seja a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com $a \neq 0$. Dividindo todos os coeficientes por a, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Passando o termo constante para o segundo membro, teremos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Prosseguindo, faremos com que o lado esquerdo da equação seja um quadrado perfeito e para isto somaremos o *quadrado* de $\frac{b}{2a}$ a ambos os membros da equação para obter:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

Simplificando ambos os lados da equação, obtemos:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraindo a raiz quadrada de cada membro da equação e lembrando que a raiz quadrada de todo número real não negativo é também não negativa, obtemos duas respostas para a nossa equação:

$$x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

que alguns, por *preguiça* ou por *descuido*, escrevem:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

contendo um sinal ± que é lido como *mais ou menos*, mas lembramos que este sinal não tem qualquer significado em Matemática.

Como estamos procurando duas raízes para a equação do segundo grau, deveremos sempre escrever:

$$x' = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou

$$x'' = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

A fórmula de Bhaskara ainda pode ser escrita como:

$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde Δ (letra maiúscula *delta* do alfabeto grego) é o discriminante da equação do segundo grau, definido por $\Delta = b^2 - 4ac$.

3 Equação do segundo grau

Uma equação do segundo grau na incógnita x é da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde os números reais a, b e c são os coeficientes da equação, sendo que a deve ser diferente de zero. Essa equação é também chamada de *equação quadrática*, pois o termo de maior grau está elevado ao quadrado.

4 Equação Completa do segundo grau

Uma equação do segundo grau é completa, se todos os coeficientes a, b e c são diferentes de zero.

Exemplos:

1. $2x^2 + 7x + 5 = 0$
2. $3x^2 + x + 2 = 0$

5 Equação incompleta do segundo grau

Uma equação do segundo grau é incompleta se $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$. Na equação incompleta o coeficiente a é diferente de zero, como por exemplo:

1. $4x^2 + 6x = 0$
2. $3x^2 + 9 = 0$
3. $2x^2 = 0$

6 Resolução de equações incompletas do 2o. grau

Equações do tipo $ax^2 = 0$: Basta dividir toda a equação por a para obter:

$$x^2 = 0$$

significando que a equação possui duas raízes iguais a zero.

Equações do tipo $ax^2 + c = 0$: Novamente dividimos toda a equação por a e passamos o termo constante para o segundo membro para obter:

$$x^2 = -c/a$$

Se $c/a > 0$, não existe solução no conjunto dos números reais.

Se $c/a < 0$, a equação terá duas raízes com o mesmo valor absoluto (módulo) mas de sinais contrários.

Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$: Neste caso, fatoramos a equação para obter:

$$x(ax + b) = 0$$

e a equação terá duas raízes:

$$x' = 0 \quad \text{ou} \quad x" = -b/a$$

7 Exemplos gerais

$$\begin{aligned} 4x^2 = 0 &\quad \text{possui duas raízes nulas.} \\ 4x^2 - 8 = 0 &\quad \text{possui duas raízes: } x' = \sqrt{2} \text{ ou } x" = -\sqrt{2} \\ 4x^2 + 5 = 0 &\quad \text{não possui raízes reais.} \\ 4x^2 - 12x = 0 &\quad \text{possui duas raízes reais: } x' = 3 \text{ ou } x" = 0 \end{aligned}$$

Exercícios: Resolver as equações incompletas do segundo grau.

1. $x^2 + 6x = 0$
2. $2x^2 = 0$
3. $3x^2 + 7 = 0$
4. $2x^2 + 5 = 0$
5. $10x^2 = 0$
6. $9x^2 - 18 = 0$

8 Resolução de equações completas do 2o. grau

Como vimos, uma equação do tipo: $ax^2+bx+c = 0$, é uma equação completa do segundo grau e para resolvê-la basta usar a fórmula quadrática (atribuída a Bhaskara), que pode ser escrita na forma:

$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação.

Para este discriminante Δ há três possíveis situações:

1. Se $\Delta < 0$, não há solução real, pois não existe raiz quadrada real de número negativo.
2. Se $\Delta = 0$, há duas soluções iguais:
$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$
3. Se $\Delta > 0$, há duas soluções reais e diferentes:
$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplos: Preencher a tabela com os coeficientes e o discriminante de cada equação do segundo grau, analisando os tipos de raízes da equação.

Equação	a	b	c	Δ	Tipos de raízes
$x^2 - 6x + 8 = 0$	1	-6	8	4	reais e diferentes
$x^2 - 10x + 25 = 0$					
$x^2 + 2x + 7 = 0$					
$x^2 + 2x + 1 = 0$					
$x^2 + 2x = 0$					

9 O uso da fórmula de Bhaskara

Você pode realizar o Cálculo das Raízes da Equação do segundo grau com a entrada dos coeficientes a, b e c em um formulário, mesmo no caso em que Δ é negativo, o que força a existência de raízes complexas conjugadas. Para estudar estas raízes, visite o nosso link urlmedio/ncomplex/ncomplex.htm sobre Números Complexos.

Mostraremos agora como usar a fórmula de Bhaskara para resolver a equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

1. Identificar os coeficientes: $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$
2. Escrever o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Calcular $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$
4. Escrever a fórmula de Bhaskara:
$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x" = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
5. Substituir os valores dos coeficientes a, b e c na fórmula:
$$x' = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(5 + 1) = 3, \quad x" = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(5 - 1) = 2$$

10 Exercícios

1. Usando o discriminante, analisar as raízes de cada equação:

   (a) $x^2 + 9x + 8 = 0$

   (b) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

   (c) $x^2 - 2x + 4 = 0$

   (d) $3x^2 - 15x + 12 = 0$

2. Resolver as equações:

   (a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

   (b) $3x^2 - x + 3 = 0$

   (c) $2x^2 - 2x - 12 = 0$

   (d) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

11 Equações fracionárias do segundo grau

Equações fracionárias são equações do segundo grau em que a incógnita aparece no denominador.

Exemplos:

1. $\dfrac{3}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-3}=0$

2. $\dfrac{3}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}=0$

Resolvemos este tipo de equação, eliminando os valores de x que anulam os denominadores, pois tais valores não são raízes da equação. Depois, extraímos o mínimo múltiplo comum dos termos dos denominadores das frações e agrupamos os termos sobre um mesmo denominador.

1. Seja o primeiro exemplo:

$$\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-3}=0$$

Devemos exigir que $x \neq 3$, $x \neq 2$ e $x \neq -2$, para podermos obter o *mínimo múltiplo comum* entre os termos como:

$$MMC(x)=(x^2-4)(x-3)$$

Reduzimos as frações ao mesmo denominador, para obter:

$$\frac{3(x-3)+1(x^2-4)}{(x^2-4)(x-3)}=0$$

o que significa que o numerador deverá ser:

$$3(x-3)+1(x^2-4)=0$$

que desenvolvido nos dá:

$$x^2+3x-13=0$$

Esta é uma equação do segundo grau. Usando a fórmula de Bhaskara, observamos que não existem números reais satisfazendo a esta equação.

2. Seja agora o segundo exemplo:

$$\frac{x+3}{2x-1} = \frac{2x}{x+4}$$

Aqui, $MMC = (2x-1)(x-4)$ (o produto entre estes fatores) e este MMC somente se anula se $x = 1/2$ ou $x = -4$. Multiplicando os termos da equação pelo MMC, obtemos uma sequência de expressões como:

$$\begin{aligned}(x+3)(x+4) &= 2x(2x-1)\\ x^2+7x+12 &= 4x^2-2x\\ -3x^2+9x+12 &= 0\\ x^2-3x-4 &= 0\\ (x-4)(x+1) &= 0\end{aligned}$$

Esta última equação possui as soluções: $x' = 4$ ou $x" = -1$.

3. Estudemos outro exemplo:

$$\frac{3}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} = 0$$

Aqui, $MMC = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ e este MMC só se anula se $x = 2$ ou $x = -2$. Multiplicando os termos da equação pelo MMC, obtemos:

$$3 + (x+2) = 0$$

cuja solução é $x = -5$

Exercícios: Resolver as seguintes equações fracionárias:

1. $\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{2x}{x-4}$
2. $\dfrac{2-x}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{x}$
3. $\dfrac{x+2}{x-2} + \dfrac{x-2}{x+2} = 1$

12 Equações bi-quadradas

São equações do 4o. grau na incógnita x, da forma geral:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Na verdade, esta é uma equação que pode ser escrita como uma equação do segundo grau através da substituição $y = x^2$ para gerar

$$ay^2 + by + c = 0$$

Aplicamos a fórmula quadrática para resolver esta última equação e obter as soluções y' e y'' e o procedimento final deve ser mais cuidadoso, pois

$$x^2 = y' \qquad \text{ou} \qquad x^2 = y''$$

e somente existem soluções para x se $y' \geq 0$ ou $y'' \geq 0$.

Exemplos:

1. Resolvemos $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, com $y = x^2$, para obter $y^2 - 13y + 36 = 0$, cujas raízes são $y' = 4$ ou $y'' = 9$, assim:

   $$x^2 = 4 \qquad \text{ou} \qquad x^2 = 9$$

   o que garante que o conjunto solução é $S = \{2, -2, 3, -3\}$.

2. Resolvemos $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$, com $y = x^2$, para obter $y^2 - 5y - 36 = 0$, cujas raízes são $y' = -4$ ou $y'' = 9$ e desse modo:

   $$x^2 = -4 \qquad \text{ou} \qquad x^2 = 9$$

   o que garante que o conjunto solução é $S = \{3, -3\}$.

3. Tomando $y = x^2$ na equação $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$, obtemos $y^2 + 13y + 36 = 0$, cujas raízes são $y' = -4$ ou $y'' = -9$ e assim:

   $$x^2 = -4 \quad \text{ou} \quad x^2 = -9$$

   o que garante que o conjunto solução é vazio.