

Matemática Financeira com a HP-12C

Ulysses Sodré

Matemática - UEL - Londrina - Paraná - Brasil

XXIV Semana da Matemática: 2008

Mensagem bíblica

O dinheiro na Bíblia Sagrada

Ezequiel 18:8

Não dando o seu dinheiro à usura, e não recebendo demais, desviando a sua mão da injustiça, e fazendo verdadeiro juízo entre homem e homem;

I Timóteo 6:10

Porque o amor ao dinheiro é a raiz de toda a espécie de males; e nessa cobiça alguns se desviaram da fé, e se traspassaram a si mesmos com muitas dores.

- 1 Detalhes gerais sobre o mini-curso
- 2 Matemática Comercial e Financeira
- 3 Matemática comercial
- 4 Matemática financeira
- 5 Taxas e Descontos
- 6 Sistema Price
- 7 HP-12C - Elementos gerais sobre a calculadora
- 8 HP-12C - Funções de porcentagem e de calendário
- 9 HP-12C - Amortização de financiamento pelo Sistema Price
- 10 HP-12C - Taxa Interna de Retorno e Análise investimentos

Matemática Financeira com a HP-12C

Detalhes gerais Matemática Comercial e Financeira

- Curso de Matemática Financeira com HP-12C.
- Elementos: Capital, Juros, notações e compatibilidade dos dados.
- Fluxos de caixa: objetos essenciais na Matemática Financeira.
- Juros compostos e Montante composto.
- Fator de Acumulação de Capital e Fator de Valor Atual.
- Taxas nominal, efetiva, real, proporcional e equivalentes.
- Descontos em Matemática Financeira.
- Financiamentos pelo Sistema Price.

Matemática Financeira com a HP-12C

Detalhes gerais sobre a Calculadora HP-12C

- A calculadora e a notação polonesa reversa (RPN).
- Operações básicas e a pilha operacional da HP-12C.
- Funções de porcentagem e diferença percentual.
- Funções de calendário.
- Juros simples e compostos.
- Financiamentos e amortização pelo Sistema Price.
- Taxa interna de retorno.
- Análise de investimentos com o Valor Presente Líquido.

Matemática Comercial e Financeira

O papel da Matemática Financeira

Para que serve a Matemática Financeira?

- Para analisar alternativas de investimentos ou financiamentos.
- Utiliza o mecanismo de *Fluxo de Caixa* e processos matemáticos.
- Estuda o Capital aplicado em alguma operação financeira.

Capital e notações

- Capital = Principal = Valor Atual = Valor Presente = Valor Aplicado.
- Valor Presente (em inglês: *Present Value*), é indicado na HP-12C pela tecla PV.
- Em geral, C indica o Capital em uma operação.

Juros e notações

- Juros são pagamentos pelo uso do Capital.
- Juros capitalizados em regimes: simples, compostos ou mistos.
- Quanto ao regime de juros, há duas formas de juros:
 - Simples: Somente o principal rende juros.
 - Compostos: Após cada período, os juros são incorporados ao Capital, gerando juros sobre juros.

Notações comuns

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| • n : número de períodos | • J : juros compostos |
| • j : juros simples | • P : Principal ou valor atual |
| • i : taxa unitária de juros | • M : Montante simples |
| • r : taxa percentual de juros | • S : Montante composto |

Matemática Comercial e Financeira

Compatibilidade de dados

Compatibilidade de dados

- Taxa de juros e número de períodos devem ser compatíveis, coerentes ou homogêneos.
- Para taxa **mensal**, o número de períodos estará em **meses**.
- Para taxa **anual**, o número de períodos estará em **anos**.
- Para taxa **trimestral**, o número de períodos estará em **trimestres**.
- Outras situações são analisadas à parte para a conversão das unidades.

Uma típica fórmula

Na fórmula

$$F(i, n) = 1 + in$$

a taxa unitária de juros i e o número n de períodos devem estar na mesma unidade de tempo.

Fórmula para a taxa unitária anual

Se n é o numero de periodos, i é a taxa unitária ao período e P é o valor principal, então os juros simples são calculados por:

$$j = P \times i \times n$$

Exemplo com a taxa unitária anual

Os juros simples obtidos por um capital $P = 1.250,00$ durante 4 anos à taxa de 14% ao ano são dados por:

$$j = 1.250,00 \times 0,14 \times 4 = 700,00$$

Fórmula para a taxa percentual anual

Se a taxa é percentual, substituímos i por $r/100$ para obter:

$$j = P \times \frac{r}{100} \times n$$

Exemplo com a taxa percentual anual

Os juros simples obtidos por um capital $P = 1.250,00$ durante 4 anos à taxa de 14% ao ano são:

$$j = 1250,00 \times \frac{14}{100} \times 4 = 700,00$$

Fórmula para a taxa percentual mensal

Se a taxa é $r\%$ ao mês e m é o número de meses, a fórmula é:

$$j = P \times \frac{r}{100} \times m$$

Exemplo com a taxa percentual mensal

Os juros simples obtidos por um capital $P = 1.250,00$ durante 4 anos (48 meses) à taxa de 2% ao mês são dados por:

$$j = 1.250,00 \times \frac{2}{100} \times 48 = 1.200,00$$

Matemática comercial

Juros simples - IV

Fórmula para a taxa percentual diária

Se a taxa é $r\%$ ao dia, usamos d como o número exato de dias para obter os juros exatos ou comerciais simples com:

$$j = P \times \frac{r}{100} \times d$$

Exemplo com a taxa percentual diária

Os juros simples de um capital $P = 1.250,00$ nos 6 primeiros meses de 1999 (civil=180 dias e exato=181 dias) à taxa de 0,02% ao dia são dados por:

Juros normais $j = 1.250,00 \times (0,02/100) \times 180 = 45,00$

Juros exatos $j = 1.250,00 \times (0,02/100) \times 181 = 45,25$

Matemática comercial

Juros simples - V

Problema de juros simples com contagem de dias

Qual é o valor dos juros simples pagos à taxa $i = 25\%$ ao ano, se o valor principal é $P = \$1.000$ e a dívida contraída no dia 10 de janeiro, deve ser paga no dia 12 de abril do mesmo ano?

Solução

Data inicial	Data final	Número de dias	Total acumulado
10/01	31/01	21 dias	21 dias
01/02	28/02	28 dias	49 dias
01/03	31/03	31 dias	80 dias
01/04	12/04	12 dias	d = 92 dias

Com a fórmula $j = P \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{d}{365}$ segue que $j = 1000(0,25)\frac{92}{365} = 63,01$.

Montante simples

- Montante, também conhecido como *Valor Futuro*, é a soma do Capital com os juros.
- O montante é indicado na HP-12C pela tecla FV (Future Value, em inglês).

Fórmula do Montante simples

$$M = P + j = P(1 + in)$$

Problema de Montante simples

Com uma taxa de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado em regime de capitalização simples?

Solução

1 Objetivo: $M = 2P$.

2 Dado: $i = \frac{150}{100} = 1,5$.

3 Fórmula: $M = P(1 + in)$.

4 Ação: Como $2P = P(1 + 1,5n)$, então

$$2 = 1 + 1,5n$$

logo $n = 2/3$ de ano = 8 meses.

Taxas e Descontos

Taxas proporcionais

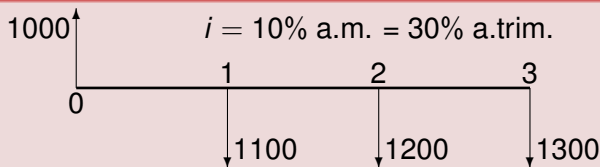
Taxas proporcionais (mesmos: capital, tempo e montante)

Duas taxas i_1 e i_2 são proporcionais, quando aplicadas ao mesmo Capital P durante o mesmo tempo t , em sistemas diferentes de capitalização simples, geram o mesmo montante S .

Exemplo sobre taxas proporcionais

Aplicar \$1.000 em regime de juros simples, à taxa de 10% ao mês por 3 meses equivale a aplicar \$1.000 à taxa de 30% ao trimestre.

Fluxo de Caixa



Matemática financeira

Fluxos de caixa - I

Fluxo de Caixa na Página Matemática Essencial

<http://www.mat.uel.br/matessencial/financeira/flcaixa.htm>

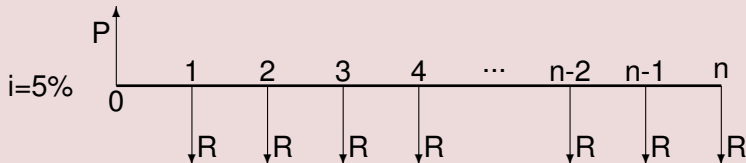
Fluxos de caixa e alguns elementos

- Fluxo de Caixa é um *gráfico* com informações sobre Entradas e Saídas de capital, realizadas em determinados períodos.
- Pode ser criado com uma linha horizontal com os tempos e os valores aplicados nesses tempos.
- Pode ser criado como uma tabela ou planilha com estes dados.
- Calculamos o Montante de alguns depósitos por vários meses, usando o fluxo de caixa e alguns conceitos matemáticos.
- Se no sistema pessoal, entradas de capital têm setas indicando para baixo, no sistema financeiro tais setas indicam para cima.

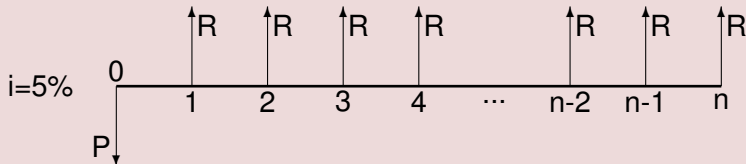
Matemática financeira

Fluxo de Caixa - II

Fluxo de Caixa: Ponto de vista da pessoa



Fluxo de Caixa: Ponto de vista da financeira



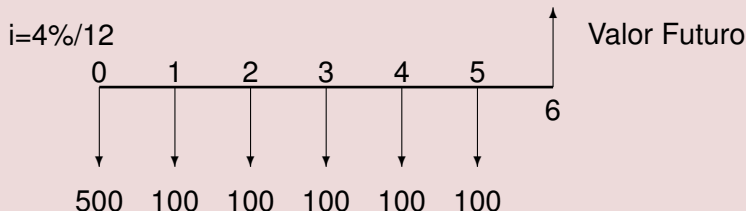
Matemática financeira

Fluxos de caixa - III

Problema relacionado com Fluxo de caixa

Num certo dia ($t=0$), deposite \$500 em uma conta que rende juros de 4% ao ano, compostos mensalmente e continue a depositar a cada mês um valor de \$100 nos 5 meses seguintes. Qual é o montante acumulado (Valor Futuro) deste fluxo de caixa no 60. mês?

Fluxo de caixa do problema



Matemática financeira

Juros compostos - I

Anatocismo

[grego: anatokismós, latim: anatocismu] Substantivo. Masculino.
Capitalização de juros de uma importância emprestada.
Juros sobre juros!

Juros compostos

- Em juros compostos, o problema consiste em calcular o montante S obtido pela aplicação de um único valor principal P no instante $t=0$, à taxa i de juros (por período) durante n períodos.
- Tanto a taxa como o número de períodos devem ser compatíveis ou homogêneos, com relação à unidade de tempo.

Matemática financeira

Juros compostos - II

Problema de juros compostos

Em 1994, uma aplicação rendia 50% em cada um dos 4 primeiros meses do ano. Se uma pessoa depositou \$100 em 01/01/94, podemos montar uma tabela para obter o montante acumulado em 01/05/94.

Fluxo de caixa do problema

Tempo	Data	Principal	Juros	Montante
0	01/01/94	100,00	0	100,00
1	01/02/94	100,00	50,00	150,00
2	01/03/94	150,00	75,00	225,00
3	01/04/94	225,00	112,50	337,50
4	01/05/94	337,50	168,75	506,20

Matemática financeira

Juros compostos: Matemática do problema

Discussão matemática do problema

- Os juros são calculados sobre os Principais nos finais dos meses.
- A situação apresentada acima, pode ser analisada do ponto de vista matemático, com $P = 100,00$ e $i = 50\% = 0,5$. Assim:

$$S_1 = 100(1 + 0,5)^1 = 100(1,5)^1 = 150,00$$

$$S_2 = 100(1 + 0,5)^2 = 100(1,5)^2 = 225,00$$

$$S_3 = 100(1 + 0,5)^3 = 100(1,5)^3 = 337,50$$

$$S_4 = 100(1 + 0,5)^4 = 100(1,5)^4 = 506,20$$

Fórmula do Montante composto

$$S = P(1 + i)^n$$

S =Montante, P =Valor Principal, i =Taxa unitária e n =No. de períodos.

Matemática financeira

Montante composto

Problema de montante composto

Se a taxa anual de uma aplicação é de 150%, qual o tempo necessário para dobrar o capital aplicado com capitalização composta?

Fluxo de caixa do problema

Dados: $S = 2P$, Taxa: $i = 150/100 = 1,5$. Fórmula: $S = P(1 + i)^n$.

Solução: Como $2P = P(1 + 1,5)^n$, então $(2,5)^n = 2$.

Aplicando a função logaritmo à equação acima, obtemos:

$$n = \frac{\log(2)}{\log(2,5)} = 0,7564708 \text{ de 1 ano}$$

Observação: Deve-se usar uma Tábua de logaritmos.

Matemática financeira

Calculando o logaritmo no navegador

Logaritmo no navegador da Internet

Para calcular o logaritmo do número $N = 123$ na base $b = 10$, basta digitar na caixa branca do seu navegador, que indica Endereço (Location), o código:

```
javascript:Math.log(123)/Math.log(10)
```

pressionando depois a tecla ENTER para obter: 2.0899051114394.

Obtido o resultado, use o botão voltar (back) para retornar ao estudo.

Forma alternativa: Copiar a linha de código acima para o Endereço, pressionando a seguir a tecla ENTER para obter o resultado.

Matemática financeira

Fator de Acumulação de Capital

Fator de Acumulação de Capital

- O Fator de Acumulação de Capital denotado por $FAC(i, n)$ ou Fator de P para S , denotado por $FPS(i, n)$, é definido por:

$$FAC(i, n) = FPS(i, n) = (1 + i)^n$$

- O Montante composto S é o produto do valor Principal P por $FAC(i, n)$:

$$S = P \times FAC(i, n) = P \times FPS(i, n)$$

Fator de Valor Atual em uma calculadora simples

Obtemos $FAC(i, n) = (1 + i)^n$ com uma calculadora simples, digitando o valor de i , pressionando $+1$, o sinal \times e o sinal $=$ de igualdade $n-1$ vezes.

Matemática financeira

Variantes da fórmula do montante composto

Variantes da fórmula do montante composto

$$S = P(1 + i)^n$$

$$n = \frac{\log(S) - \log(P)}{\log(1 + i)}$$

$$i = \sqrt[n]{S/P} - 1$$

$$P = \frac{S}{(1 + i)^n}$$

Esta última fórmula permite calcular o Valor Atual P de um capital futuro conhecido S .

Matemática financeira

Fator de Valor Atual

Fator de Valor Atual

O Fator de Valor Atual denotado por $FVA(i, n)$ ou Fator de S para P denotado por $FSP(i, n)$ ou Fator de Desconto, é o inverso de $FAC(i, n) = FPS(i, n)$ definido por:

$$FVA(i, n) = FSP(i, n) = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Fator de Valor Atual em uma calculadora simples

Para obter $FVA(i, n) = \frac{1}{(1+i)^n}$ com uma calculadora simples, digitamos o valor de i , pressionamos $+1$, o sinal \times e o sinal $=$ de igualdade $n-1$ vezes para obter $FAC(i, n)$. No final, pressionamos o sinal \div e o sinal $=$.

Matemática financeira

Cálculo de juros Compostos

Problema

Calcular os juros compostos pagos à taxa $i=123\%$ a.a. se o Principal é \$1.000 e a dívida contraída em 10/01/94 e será paga em 12/04/94?

Solução do problema

- 1 Fórmula para calcular juros compostos: $J = P[(1 + i)^n - 1]$.
- 2 O tempo é de $d = 92$ dias. Como a taxa é anual e o período é de 92 dias, devemos transformar 92 dias em unidades anuais:

$$n = 92/365 \text{ de 1 ano}$$

- 3 $P = 1000$, $i = 123/100 = 1,23$, Fórmula: $J = P[(1 + i)^n - 1]$.
- 4 Solução: $J = 1000[(1 + 1,23)^{92/365} - 1] = 224,03$.

Taxas e Descontos

Taxas de juros

Taxa de juros

Taxa é um índice numérico relativo cobrado sobre um capital para realizar alguma operação financeira.

Introdução ao Capítulo 6 do Livro *Matemática Financeira* de José Dutra Vieira Sobrinho

No mercado financeiro brasileiro, mesmo entre os técnicos e executivos, reina muita confusão quanto aos conceitos de taxas de juros principalmente no que se refere às taxas nominal, efetiva e real. O desconhecimento generalizado desses conceitos tem dificultado o fechamento de negócios pela conseqüente falta de entendimento entre as partes. Dentro dos programas dos diversos cursos de Matemática Financeira existe uma verdadeira 'poluição' de taxas de juros.

Taxas e Descontos

Tipos de taxas de juros

Tipos de taxas de juros

- Se os juros são simples ou compostos, existem três tipos principais de taxas: Nominal, Efetiva e Real.
- Taxa Nominal: O período de tratamento dos juros ao Capital **não coincide** com aquele a que a taxa está referida.

1200%	ao	ano	com capitalização	mensal
450%	ao	semestre	com capitalização	mensal
300%	ao	ano	com capitalização	trimestral

- Taxa Efetiva: O período de tratamento dos juros ao Capital **coincide** com aquele a que a taxa está referida.

120%	ao	mês	com capitalização	mensal
450%	ao	semestre	com capitalização	semestral
1300%	ao	ano	com capitalização	anual

- Taxa Real: Taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária.

Taxas e Descontos

Conexão entre as taxas efetiva, real e inflacionária

Conexão entre as taxas efetiva, real e inflacionária

- Taxa Real **não é** taxa efetiva menos a taxa da inflação.
- Relação estes três tipos de taxas:

$$1 + i_{efet} = (1 + i_{real})(1 + i_{infl})$$

onde i_{real} =taxa real, i_{efet} =taxa efetiva e i_{infl} =taxa da inflação.

- Outra relação equivalente:

$$\Delta v_{efet} = \Delta v_{real} \times \Delta v_{infl}$$

onde

- 1 $\Delta v_{efet} = 1 + i_{efet}$ é a variação efetiva no período.
- 2 $\Delta v_{real} = 1 + i_{real}$ é a variação real no período.
- 3 $\Delta v_{infl} = 1 + i_{infl}$ é a variação inflacionária no período.

Taxas e Descontos

Problema com taxas efetiva, real e inflacionária

Problema com taxas

Se um valor é aplicado a uma taxa real de 2% ao mês e a taxa da inflação mensal no período foi de 3%, qual é a taxa efetiva no período?

Fluxo de caixa do problema

A taxa real é $i_{real} = 0,02$, a taxa da inflação é $i_{infl} = 0,03$ e com a relação

$$1 + i_{efet} = (1 + i_{real})(1 + i_{infl})$$

obtemos

$$1 + i_{efet} = (1 + 0,02)(1 + 0,03) = 1,0506 = 1 + 5,06\%$$

significando que a taxa efetiva no período, foi $i_{efet} = 5,06\%$

Taxas e Descontos

Problema com taxas efetiva, real e inflacionária

Problema com taxas

Se a taxa de inflação mensal foi de 30% e um valor aplicado no início do mês produziu (efetivamente) um rendimento de 32,6% sobre o valor aplicado, qual é a taxa real?

Fluxo de caixa do problema

A taxa efetiva é igual a $i_{efet} = 0,326$ e a taxa da inflação é $i_{infl} = 0,3$ e usando a relação:

$$1 + i_{real} = \frac{1 + i_{efet}}{1 + i_{infl}}$$

obtemos

$$1 + i_{real} = \frac{1,326}{1,3} = 1,02 = 1 + 2\%$$

significando que a taxa real no período, foi de $i_{real} = 2\%$

Taxas e Descontos

Problemas sobre caderneta de poupança

Informação oficial sobre caderneta de poupança

Se o governo anuncia que a Caderneta de Poupança *garante* um rendimento real de $0,5\%=0,005$ ao mês, significa que o seu dinheiro deve ser corrigido pela taxa da inflação, isto é, deve ser multiplicado por $1 + i_{infl}$ e depois multiplicado por $1+0,5\%=1,005$.

Aplicação em caderneta de poupança

Se alguém tinha uma poupança no valor de \$670.890,45 no dia 30/04/93 e a taxa da inflação desde esta data até 30/05/93 foi de 35,64%, quanto ele terá em sua conta no dia 30/05/93?

Solução

$$V = 670.890,45 \times 1,3564 \times 1,005 = 914.545,77$$

Taxas e Descontos

Taxas equivalentes - I

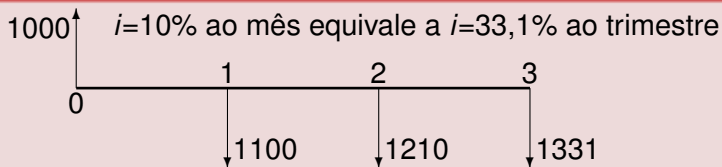
Taxas equivalentes (mesmos: capital, tempo e montante)

Duas taxas i_1 e i_2 são equivalentes, se aplicadas ao mesmo Capital P durante o mesmo tempo t , em sistemas diferentes de capitalização composta, geram o mesmo montante S .

Exemplo sobre taxas equivalentes

Aplicar \$1.000 à taxa de 10% ao mês durante 3 meses equivale a aplicar \$1.000 à taxa de 33,1% ao trimestre.

Fluxo de Caixa



Taxas e Descontos

Taxas equivalentes - II

Justificativa matemática

Se $P = 1.000$, $i_1 = 0,1$ ao mês e $n_1 = 3$ meses forem aplicados à fórmula $S = P(1 + i)^n$, obtemos

$$S_1 = P(1 + i_1)^3 = 1000(1 + 0,1)^3 = 1000.(1,1)^3 = 1331,00$$

Se $P = 1.000$, $i_2 = 33,1\%$ ao trimestre e $n_2 = 1$ trimestre forem aplicados à fórmula $S = P(1 + i)^n$, obtemos

$$S_2 = C(1 + i_2)^1 = 1000(1 + 0,331) = 1331,00$$

Conclusão:

A taxa de 33,1% ao trimestre equivale à taxa de 10% ao mês em cada trimestre.

Taxas e Descontos

Observações sobre Taxas equivalentes

Observações sobre Taxas equivalentes

- A taxa nominal de 300% ao ano capitalizada mensalmente equivale à taxa aplicada a cada mês de $i = \frac{300}{12} = 25\%$.
- A taxa nominal de 300% ao ano capitalizada trimestralmente equivale à taxa aplicada a cada trimestre de $i = \frac{300}{4} = 75\%$.
- Taxas indicadas em períodos diferentes **não são** taxas efetivas.
- Taxas equivalentes são calculadas por diferentes processos de capitalização de um mesmo Principal P para obter um mesmo montante S .
- Se $i_{infl} = 0$, então a taxa real equivale à taxa efetiva.

Taxas e Descontos

Cálculos de taxas equivalentes

Cálculos de taxas equivalentes

- Períodos parciais em 1 ano, são: semestres, quadrimestres, trimestres, meses, quinzenas, dias, horas, etc.

$$\begin{aligned}1 \text{ ano} &= 2 \text{ semestres} = 3 \text{ quadrimestres} = 4 \text{ trimestres} \\ &= 12 \text{ meses} = 24 \text{ quinzenas} = 360 \text{ dias}\end{aligned}$$

- Fórmula para a equivalência entre duas taxas:

$$1 + i_a = (1 + i_p)^{N_p}$$

onde i_a é a taxa ao ano, i_p é a taxa ao período p e N_p é o número de vezes que cada período parcial ocorre em 1 ano.

Taxas e Descontos

Tabela relacionando taxas equivalentes

Tabela com algumas situações possíveis

Fórmula	Taxa	No. de períodos
$1 + i_a = (1 + i_{sem})^2$	i_{sem}	2 semestres em 1 ano
$1 + i_a = (1 + i_{qua})^3$	i_{qua}	3 quadrimestres em 1 ano
$1 + i_a = (1 + i_{tri})^4$	i_{tri}	4 trimestres em 1 ano
$1 + i_a = (1 + i_{mes})^{12}$	i_m	12 meses em 1 ano
$1 + i_a = (1 + i_{qui})^{24}$	i_{qui}	24 quinzenas em 1 ano
$1 + i_a = (1 + i_{semana})^{24}$	i_{semana}	52 semanas em 1 ano
$1 + i_a = (1 + i_{dia})^{365}$	i_d	365 dias em 1 ano

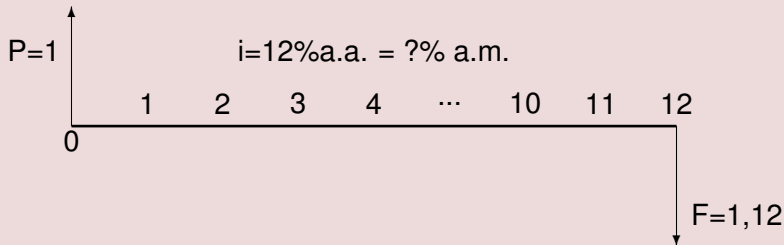
Taxas e Descontos

Problema sobre taxas equivalentes

Capitalização mensal com taxa anual

Qual é a taxa efetiva que equivale à taxa de 12% ao ano, capitalizada mensalmente?

Fluxo de Caixa



Taxas e Descontos

Problemas sobre taxas equivalentes

Traduzindo o economês!

- 12% ao ano capitalizada mensalmente, significa dividir 12% por 12 (1 ano=12 meses) para obter a taxa de 1% ao mês.
- 12% ao ano capitalizada trimestralmente, significa dividir 12% por 4 (1 ano = 4 trimestres) para obter a taxa 3% ao trimestre.

Solução do problema

A taxa mensal é $i_1 = 12\%/12 = 1\% = 0,01$, assim a taxa efetiva pode ser obtida por

$$1 + i_2 = (1,01)^{12} = 1,1268247 = 1 + 12,68247\%$$

logo $i_2 = 12,68247\%$.

Taxas e Descontos

Observação sobre Taxa equivalente efetiva de juros

Capitalização mensal com taxa anual

Qual é a taxa efetiva mensal que equivale à taxa de 12% ao ano?

Solução do problema

Substituindo $i_a = 12\% = 0,12$ na fórmula $1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$, obtemos:

$$1,12 = [1 + i_m]^{12}$$

Aplicando o logaritmo à equação, temos $\log(1,12) = 12 \cdot \log(1 + i_m)$, logo

$$\log(1 + i_m) = \frac{\log(1,12)}{12} = \frac{0,049218}{12} = 0,0041015$$

Assim, $1,009488793 = 1 + i_m$, ou seja, $i_m = 0,9488793\%$.

Taxas e Descontos

Descontos

Desconto

Desconto é a diferença entre o Valor Nominal N de um título (futuro) e o Valor Atual A deste mesmo título, isto é, $D = N - A$ onde

- D é o desconto sobre o título,
- A é o valor Atual do título,
- N é o valor Nominal do título,
- i é a taxa de desconto e
- n é o número de períodos do desconto.

Tipos de descontos

Tipos: Comercial (por fora) ou Racional (por dentro).

- 1 Descontos simples são obtidos com cálculos lineares.
- 2 Descontos compostos são obtidos com cálculos exponenciais.

Taxas e Descontos

Desconto comercial simples (por fora)

Cálculo do desconto comercial simples (por fora)

O desconto simples é obtido como juros simples, com a troca do Capital P na fórmula $j = P.i.n$ pelo Valor Nominal N do título. Calculamos o desconto por fora sobre o Valor Nominal do título. O valor atual A é dado por: $A = N - D = N(1 - i.n)$.

Desconto comercial simples versus Juros simples

Desconto comercial simples	Juros simples
$D = N.i.n$	$j = P.i.n$
$N =$ Valor Nominal	$P =$ Valor Principal
$A =$ Valor Atual	$A =$ Valor Atual
$i =$ taxa de desconto	$i =$ taxa de juros
$n =$ No. de períodos	$n =$ No. de períodos

Taxas e Descontos

Desconto racional simples (por dentro)

Cálculo do desconto racional simples (por dentro)

O desconto racional simples é obtido como juros simples, com a troca do Capital P na fórmula $j = P.i.n$ pelo Valor Atual A do título.

Calculamos o desconto racional sobre o Valor Atual do título.

No desconto racional, o valor atual é dado por: $A = \frac{N}{1 + in}$.

Desconto racional simples versus Juros simples

Desconto racional simples	Juros simples
$D = A.i.n$	$j = P.i.n$
$N =$ Valor Atual	$P =$ Valor Principal
$i =$ taxa de desconto	$i =$ taxa de juros
$n =$ no. de períodos	$n =$ no. de períodos

Taxas e Descontos

Desconto comercial composto (não usado no Brasil)

Cálculo do desconto comercial composto (por fora)

O cálculo similar ao de Juros compostos, trocando o Principal P na fórmula $S = P.(1 + i)^n$ pelo Valor Nominal N do título, mas com a troca da taxa i por $-i$.

Desconto comercial composto versus Montante composto

Desconto comercial composto	Montante composto
$A = N.(1 - i)^n$	$S = P.(1 + i)^n$
$A =$ Valor Atual	$P =$ Valor Principal
$i =$ taxa de desconto negativa	$i =$ taxa de juros
$n =$ número de períodos	$n =$ número de períodos

Taxas e Descontos

Obtenção da fórmula do desconto comercial composto (não usado no Brasil)

Para fins didáticos, obteremos uma fórmula similar à do cálculo do montante composto $S = P(1 + i)^n$, para o cálculo deste desconto com aplicações repetidas do desconto comercial simples para 1 período.

- Se $n=1$, o valor atual é A_1 e o valor nominal N , logo:

$$A_1 = N(1 - i)$$

- Se $n=2$, usamos N como A_1 na fórmula acima, para obter A_2 :

$$A_2 = A_1(1 - i) = N(1 - i)^2$$

- Repetindo o processo, temos para cada número natural n :

$$A_n = N(1 - i)^n$$

Taxas e Descontos

Desconto racional composto (por dentro)

Cálculo do desconto racional composto (usado no Brasil)

Realizado da mesma forma que o cálculo de Montante composto, com a troca do Valor Principal P pelo Valor Atual A do título.

Para calcular o desconto racional composto, toma-se o Valor Atual A como o capital inicial de uma aplicação e o Valor Nominal N como o montante desta aplicação, observando que as taxas e os tempos funcionam de forma similar nos dois casos.

Como $D = N - A$ e como $N = A(1 + i)^n$, então

$$D = N - N(1 + i)^{-n} = N \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}$$

Taxas e Descontos

Problema de Desconto racional composto

Problema

Qual é o desconto racional composto de um título cujo valor nominal é \$10.000, se o prazo de vencimento é de $n = 5$ meses e a taxa de desconto é de 3,5\$ ao mês?

Solução

$$D = 10.000 \frac{(1,035)^5 - 1}{1,035} = 1.580,30$$

Taxas e Descontos

Empréstimo com Desconto racional composto

Problema

X emprestou um valor para pagar 1 ano após em um pagamento de \$18.000 à taxa de 4,5% ao mês. 5 meses após realizar o empréstimo, X tem condições de resgatar o título. Se X obtiver um desconto racional composto a uma taxa equivalente à taxa de juros cobrada na operação do empréstimo, qual o valor líquido a ser pago por X?

Solução

Substituir o Valor Nominal: $N = 18.000$, a taxa $i = 4,5\% = 0,045$, o número de períodos para o desconto: $n = 12 - 5 = 7$, na fórmula:

$$D = N \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}$$

Sistema Price

Informações gerais - I

Informações sobre o Sistema Price

- No estudo de um financiamento, a Matemática Financeira é muito mais útil no cotidiano do que outras matemáticas.
- Aqui vemos a força do estudo de PG, que não é possível mostrar de modo fácil aos alunos dos níveis básicos.
- Todas as pessoas se envolvem com compras de objetos no seu dia-a-dia, transformando o estudo de PG em algo muito útil.
- O sistema Price (Richard Price) ou Sistema Francês (primeiro país a usar este sistema comercialmente), corresponde a um financiamento com todos os pagamentos iguais.
- É essencial construir um fluxo de caixa e obter o Valor Atual ou Valor Presente de uma série uniforme de pagamentos.

Sistema Price

Informações gerais - II

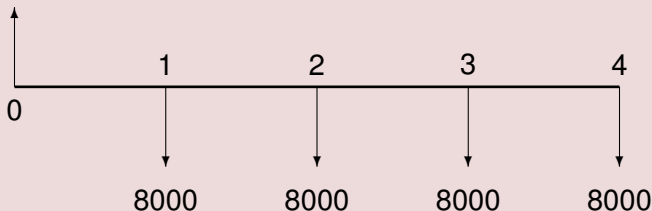
O que está escondido nos cálculos do Sistema Price?

Fulano compra um carro para pagar em 4 prestações mensais iguais e consecutivas de \$8.000, sem entrada e com taxa de 10% ao mês. Qual é o valor real deste carro?

Fluxo de caixa do problema

Valor Atual

$i=10\%$ ao mês



Sistema Price

Entendendo um problema matemático

Entendendo o problema matemático

Calculamos o valor atual de cada prestação e somamos esses valores para obter o Valor Atual do bem financiado.

$$A_1 = \frac{8000}{(1,1)^1}, \quad A_2 = \frac{8000}{(1,1)^2}, \quad A_3 = \frac{8000}{(1,1)^3}, \quad A_4 = \frac{8000}{(1,1)^4}$$

O Valor Atual será a soma dos valores atuais parciais

$$S = 8000 \left(\frac{1}{(1,1)^1} + \frac{1}{(1,1)^2} + \frac{1}{(1,1)^3} + \frac{1}{(1,1)^4} \right)$$

que é o valor à vista que custa o carro, isto é,

$$S = 8000 \times 3,169865435 = 25.358,92$$

Sistema Price

Estudar PA, PG e Logaritmo?

Curiosidade relacionada com o problema anterior

A expressão matemática

$$S = \frac{1}{(1,1)^1} + \frac{1}{(1,1)^2} + \frac{1}{(1,1)^3} + \frac{1}{(1,1)^4} = 3,169865435$$

é um caso particular da soma dos n primeiros termos de uma PG (seqüência geométrica):

$$S_n = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

onde n é o número de termos, a_1 é o primeiro termo e q é a razão.

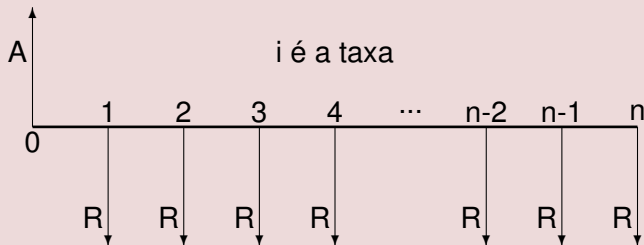
Sistema Price

Caso mais geral

Financiamento pelo Sistema Price

Analisamos agora a situação geral com n prestações, considerando um financiamento cujo Valor Atual A na data inicial ($t=0$) será pago em n prestações iguais a R ao final de cada um dos n meses seguidos, a taxas mensais iguais a i .

Fluxo de Caixa para o Sistema Price



Sistema Price

Análise matemática do problema - I

Análise matemática - I

O problema é similar ao anterior e pode ser resolvido do ponto de vista matemático, como :

$$A = R \times \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

O termo dentro dos colchetes é a soma dos n primeiros termos de uma PG cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e cuja razão é $q = 1 + i$.

Simplificando a relação, obtemos

$$A = R \times \frac{1 + (1+i)^1 + \dots + (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Sistema Price

Análise matemática do problema - II

Análise matemática - II

Esta fórmula é usada para calcular taxas de juros em financiamentos.

$$A = R \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i \cdot (1 + i)^n}$$

Esta expressão matemática não é simples. Quando conhecemos a taxa i , o número de períodos n e o valor R de cada prestação, é fácil obter o Valor Atual A .

Conhecidos, o valor atual A , a prestação R e o número n de períodos, não é fácil obter a taxa de juros, pois é difícil resolver a equação resultante, além do fato que o governo, as empresas e financeiras, embutem muitas taxas que mascaram o valor real da taxa!

Sistema Price

Análise matemática do problema - III

Análise matemática - III

Esta fórmula matemática pode ser escrita como:

$$A = R \times FVAs(i, n)$$

onde $FVAs$ é o Fator de Valor Atual para uma série uniforme, definido por:

$$FVA_s = \frac{(1 + i)^n - 1}{i \cdot (1 + i)^n}$$

Em geral, esta fórmula é usada nas tabelas de financiamento pelo Sistema Price. Com esta fórmula, podemos calcular a taxa i em um financiamento com n pagamentos iguais.

Sistema Price

Análise matemática do problema - IV

Você acredita no vendedor?

Para o próximo exemplo, vamos admitir que o dono de uma loja tenha garantido que ele financia um certo objeto com a taxa i ao período.

EU NÃO ACREDITO!

Para calcular o valor da prestação R de um objeto cujo preço à vista A será pago em n pagamentos iguais sem entrada, à taxa i ao período, sendo a primeira prestação paga no final do primeiro período, basta dividir o Valor Presente A do objeto pelo fator $FVAs(i, n)$, isto é:

$$R = \frac{A}{FVAs(i, n)}$$

Sistema Price

Problema usando o Sistema Price

Problema envolvendo o Sistema Price

Determinar a prestação R da compra de uma geladeira que custa à vista $A = 1.000,00$ e que será paga em 12 meses, sem entrada, com a loja cobrando a taxa de juros 5% ao mês.

Visite a nossa Página para resolver rápido o seu problema

Conhecido o Valor Presente A , a prestação R e o número de meses n , podemos obter a taxa i ao mês, se tivermos uma tabela financeira ou tivermos acesso ao link Taxa de juros em um financiamento em nossa Página Matemática Essencial.

Um método alternativo

Basta usar a calculadora HP-12C!

Calculadora HP-12C

Aparência frontal da calculadora



Calculadora HP-12C

Importância da calculadora

Importância da calculadora HP-12C

- Possui recursos matemáticos, financeiros e estatísticos.
- Manuseio muito simples.
- A digitação segue a mesma forma que a digitação manual.
- Mesmas prioridades que as operações matemáticas usuais.
- Utiliza a Notação Polonesa Reversa (RPN) criada pelo matemático Jan Lukasiewicz.
- Podemos ver as respostas intermediárias dos cálculos.
- Podemos acompanhar o progresso do cálculo enquanto o mesmo está sendo realizado.
- Revisão dos valores armazenados na *Pilha* a qualquer momento.

Calculadora HP-12C

Operações básicas da aritmética

Operações básicas da aritmética

Operação	Exemplo	Resultado
Soma	$4 + 5$	9
Subtração	$4 - 5$	-1
Multiplicação	4×5	20
Divisão	$4 \div 5$	0,8
Potenciação	$4 x^y 5$	625

Para realizar qualquer uma das operações acima, digite na HP-12C:

Passo	Procedimento	Visor
Passo 1	Digitar o número 4	4
Passo 2	Teclar ENTER	4
Passo 3	Digitar o número 5	5
Passo 4	Teclar o sinal \times (da operação)	20

Calculadora HP-12C

Pilha operacional - I

Pilha operacional e os seus registradores de memória

- Contém 4 registradores especiais: T, Z, Y e X, que são usados para armazenar os números durante os cálculos.
- Os 4 registradores podem ser *pensados* como uma pilha, um sobre o outro, razão pela qual recebem nomes de Registradores de pilha, ou Pilha Operacional.
- Se a calculadora não estiver no modo de programação, o número do visor será sempre o do registrador X.
- Cálculos com dois números envolverão os registradores X e Y.
- Registradores Z e T são usados para guardar automaticamente os resultados em cadeia como citamos antes.

Calculadora HP-12C

Pilha operacional - II

Uso da Pilha operacional com 2 registradores

Ordem	Procedimento	Display
Passo 1	Digitar o número 4	4
Passo 2	Teclar ENTER	4
Passo 3	Digitar o número 5	5
Passo 4	Teclar o sinal \times	20

Mudanças ocorridas na Pilha Operacional

RegT	0	0	0	0
RegZ	0	0	0	0
RegY	0	4	4	0
RegX	4	4	5	20
Teclas	4	<i>ENTER</i>	5	\times

Calculadora HP-12C

Pilha operacional - III

Usando a calculadora para cálculos complexos

Obter o valor de $N1 = \frac{(3 \times 4) + (5 \times 6)}{7}$.

Digitação na calculadora

Passo No	Procedimento	Display
Passo 01	Teclar 3 (ENTER)	3
Passo 02	Teclar 4 e o sinal \times	12
Passo 03	Teclar 5 (ENTER)	5
Passo 04	Teclar 6 e o sinal \times	30
Passo 05	Teclar o sinal $+$	42
Passo 06	Teclar 7 e o sinal \div	6

Calculadora HP-12C

Pilha operacional - IV

Usando a calculadora para cálculos complexos

Obter o valor de $N1 = \frac{(3 \times 4) + (5 \times 6)}{7}$.

Exemplo com três registradores

Reg T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Reg Z	0	0	0	0	0	12	12	0	0	0	0
Reg Y	0	3	3	0	12	5	5	12	0	42	0
Reg X	3	3	4	12	5	5	6	30	42	7	6
Teclas	3	<i>ENTER</i>	4	\times	5	<i>ENTER</i>	6	\times	+	7	\div

Calculadora HP-12C

Pilha operacional - V

Usando todos os registradores em cálculos complexos

Obter o valor de $N2 = \frac{(5 + 4)^2 - (2 + 5 \times 6)}{9 - 2}$.

Exemplo com os quatro registradores

Passo	Digitação	Visor	Passo	Digitação	Visor
Passo 01	5 ENTER	5	Passo 09		
Passo 02	4 +	9	Passo 10		
Passo 03	2 y^x	81	Passo 11		
Passo 04			Passo 12		
Passo 05			Passo 13		
Passo 06			Passo 14		
Passo 07			Passo 15		
Passo 08			Passo 16		

Calculadora HP-12C

Pilha operacional - VI

Exemplo com quatro registradores

T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	81	81	81	0	0	0	49	49	0	0
Z	0	0	0	0	0	0	0	81	81	2	2	81	0	0	0	49	49	0	0
Y	0	5	5	0	9	0	81	2	2	5	5	2	81	0	49	9	9	49	0
X	5	5	4	9	2	81	2	2	5	5	6	30	32	49	9	9	2	7	7
?	5	E	4	+	2	y ^x	2	E	5	E	6	×	+	-	9	E	2	-	÷

Usando a HP-12C, verificar os seguintes cálculos:

$$\left(\frac{5+13}{8-2}\right)^2 = 9, \quad \left(\frac{8+5+3}{10-8}\right) \times \left(\frac{10 \times 15}{9+6}\right) = 80$$

Cuidado: Em cada exercício, construa as etapas da Pilha Operacional para ver que são necessários os 4 registradores de memória.

Calculadora HP-12C

Vírgulas e pontos decimais no Brasil

Vírgulas e pontos decimais no Brasil

Em geral, o visor da calculadora mostra números na forma

1,234,567.89

mas no Brasil este número deve (ou pode) ser escrito como:

1.234.567,89

Resolvendo o problema de vírgulas e pontos decimais

- 1 Desligar a calculadora.
- 2 Pressionar a tecla $\left(\begin{smallmatrix} \circ \\ s \end{smallmatrix}\right)$ na última linha no canto inferior direito e ao mesmo tempo ligar de novo a calculadora.
- 3 Agora os números ficam na forma 1.234.567,89.

Calculadora HP-12C

Corrigindo erros com (g)LSTx

Correção com a inversa de uma operação

Ao dividir 21 por 3, inseri o divisor **4** no lugar do 3. Para corrigir a situação usamos as teclas (g)LSTx.

Correção de erro com as teclas (g)LSTx e a inversa da operação

Teclas	Visor	Comentário
(f) CLx	0.00	Zera registros
(f) 2	0.00	Usar 2 dígitos
21 (ENTER)	21.00	Dividendo
4 (÷)	5.25	Operação de Divisão
(g) LSTx	5.25	Último valor no visor
(×)	21.00	Operação inversa da Divisão
3 (÷)	7.00	Resultado correto

Calculadora HP-12C

Funções de porcentagem

Funções de porcentagem da calculadora HP-12C

Para calcular porcentagem, usamos as teclas:

- (%T) para o valor principal.
- ($\Delta\%$) para indicar a diferença percentual.
- (%) para a porcentagem.
- (f) tecla amarela alternativa para funções.
- (f)N permite gerar números com N dígitos após a vírgula.
- (f)CLx limpa os registros da calculadora.

Calculadora HP-12C

Cálculos de porcentagem - I

Porcentagem de um valor

Calculamos 8% de \$12.500,00, com o procedimento da tabela

Duas formas alternativas

Teclas	Visor	Comentário
(f)(CLX)	0	Zera os registros da HP-12C
8 (ENTER)	8	Guarda o número 8 na memória
12500 (%)	1000	Calcula a porcentagem

Teclas	Visor	Comentário
(f)(CLX)	0	Zera os registros da Calculadora
12500 (ENTER)	12500	Guarda o número 12500 na memória
8 (%)	1000	Calcula 8% do valor na memória

Calculadora HP-12C

Cálculos de porcentagem - II

Diferença percentual

Se o valor do dolar em um dia era \$2,123 e no dia seguinte passou a valer \$2,247, qual foi a diferença percentual no período?

Solução

Teclas	Visor	Comentário
(f)(CLX)	0	Zera registros da Calculadora
2.123 (ENTER)	2.123	Primeiro valor
2.247 ($\Delta\%$)	5.840791	Segundo valor e operador
(f)(2)	5.84	Precisão com 2 dígitos

Calculadora HP-12C

Cálculos de porcentagem - III

Porcentagem do total

A, B e C compram algo, sendo que A pagou \$2000, B pagou \$3000 e C pagou \$4000. Qual foi a participação percentual de cada um?

Tabela com o procedimento a ser usado

D	(f)(CLX)	0	Zera registros
I	2000 (ENTER)	2.000	Parte de A
G	3000 (+)	5.000	Memória + Parte de B
I	4000 (+)	9.000	Memória + Parte de C
T	2000 (%T)	22,22	Percentual de A no Total
A	(CLX)	0	Limpa o visor
R	3000 (%T)	33,33	Percentual de B no Total
	(CLX)	0	Limpa o visor
	4000 (%T)	44,44	Percentual de C no Total

Calculadora HP-12C

Cálculos de porcentagem - IV

Exercícios sobre porcentagem

- 1 Calcular: 12,5% de 5800,00, 106% de 956000,00, 15% de 120000,00 e 75,25% de 1234567,89.
- 2 Qual foi o aumento percentual do salário de um fulano que recebia \$5600,00 e passou a receber \$6500,00?
- 3 Na loja XYZ, um objeto custa \$900,00, mas Joca realizou a compra com um desconto de 15%. Quanto ele pagou pelo objeto?
- 4 Alfa, Beta e Gama são caixas de uma agência bancária e juntos autenticaram 13500 documentos, da seguinte forma: Alfa autenticou 4400, Beta 5300 e Gama 3800. Qual foi a participação percentual de cada um?

Calculadora HP-12C

Funções de calendário

Funções de calendário da calculadora HP-12C

Indicadas em azul e acessadas com a tecla inicial (g) e a função.

- $(\overset{EEX}{\Delta}YS)$ indica o número de dias entre duas datas.
- $(\overset{4}{D}.MY)$ indica o formato DIA.MÊSANO.
- $(\overset{5}{M}.DY)$ indica o formato MÊS.DIAANO.
- $(\overset{CHS}{DATE})$ muda o sinal ou soma/subtrai No. de dias a uma data.

Dias úteis e Formatos de datas

1=Segunda, 2=Ter, 3=Qua, 4=Qui, 5=Sex, 6=Sab e 7=Domingo.

Formato	Exemplo	Visor	Formato	Exemplo	Visor
(D.MY)	29.091984	DMY	(M.DY)	09.291984	

Calculadora HP-12C

Data no futuro

Data no futuro

Para uma data já inserida na HP-12C, podemos obter uma outra data X dias no futuro (+). O formato D.MY é padrão no Brasil.

Problema: Calcular a data na qual você estará 300 dias mais velho.

Procedimento

Digitação	Visor	Comentário
(f)(CLX)	0	Limpar os registros
(f)(6)	0,000000	6 dígitos após a vírgula
(g)(D.MY)	0,000000 D.MY	Formato da data
dd.mmaaaa (ENTER)	dd.mmaaaa	data do nascimento
300 (g)(DATE)	DD.MMAAAA N	N = N-ésimo dia útil

Calculadora HP-12C

Data no passado

Data no passado

Para uma data inserida na HP-12C, podemos obter uma outra data no X dias no passado (-). O formato D.MY é padrão no Brasil.

Problema: Calcular a data na qual você estava 300 dias mais novo.

Procedimento

Digitação	Visor	Comentário
(f)(CLX)	0	Limpar os registros
(f)(6)	0,000000	6 dígitos após a vírgula
(g)(D.MY)	0,000000 D.MY	Formato da data
dd.mmaaaa (ENTER)	dd.mmaaaa	data do nascimento
300 (CHS)(g)(DATE)	DD.MMAAAA N	N = N-ésimo dia útil

Calculadora HP-12C

Número de dias entre duas datas - I

Número exato de dias entre duas datas

O número exato de dias entre duas datas é obtido com a tecla ΔDYS .
Obter o número exato de dias entre dd.mmaaaa e DD.MMAAAA.

Procedimento

Digitação	Visor	Comentário
(f)(CLX)	0	Limpar os registros
(f)(6)		6 dígitos após a vírgula
dd.mmaaaa (ENTER)	dd.mmaaaa	Primeira data
DD.MMAAAA	DD.MMAAAA	Segunda data
(g)(ΔDYS)		No. exato de dias
($x \geq y$)		No. de dias (ano=360d)

Calculadora HP-12C

Número de dias entre duas datas - II

Exercícios

- 1 Qual é a data e qual é o dia da semana do resgate de uma aplicação emitida em 12/11/2005 com 120 dias de prazo?
- 2 Uma aplicação foi realizada no dia 19/03/2005 para 90 dias. Calcular o dia da semana e a data de resgate da operação.
- 3 Uma aplicação foi realizada por 90 dias e o resgate ocorreu no dia 11/06/2004. Obter a data da emissão do documento.
- 4 Uma aplicação emitida no dia 15/08/2005 foi resgatada no dia 25/11/2005. Calcular o prazo da aplicação, o dia da semana da aplicação e o dia da semana do resgate.
- 5 X nasceu em 12/04/1980 e faleceu em 25/09/2006. Quantos dias X viveu, tanto no ano civil como no ano comercial?

Calculadora HP-12C

Juros simples - I

Juros simples

Para obter cálculos de juros simples, usamos as teclas:

Tecla	Função para o cálculo de juros simples
(f)(i)=INT	Calcular juros simples
(n)	Número de dias
(i)	Taxa percentual anual
(CHS)	Mudança de sinal
(PV)	Valor Presente

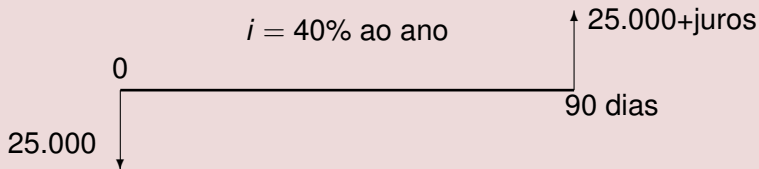
Cálculo de juros simples

X aplica \$25.000 com juros simples, por 90 dias, com a taxa de 40% ao ano. Quanto receberá de juros? Qual será o montante?

Calculadora HP-12C

Juros simples - II

Fluxo de Caixa



Procedimento

Digitação	Visor	Comentário
25000 (CHS)(PV)	-25.000,00	PV=-25.000,00
40 (i)	40,00	$i=40\%$
90 (n)	90,00	$n=90$
(f)(i) = INT	2.500,00	juros
+	27.500,00	Montante

Calculadora HP-12C

Juros Compostos - I

Juros compostos

Para obter cálculos de juros compostos, usamos outras teclas como:

Tecla	Função para o cálculo de juros compostos
(PV)	Valor Presente
(PMT)	Pagamento ou Prestação
(FV)	Valor Futuro
(g)(END)	Primeiro pagamento vence no final (end)
(g)(BEGIN)	Primeiro pagamento vence no início (begin)

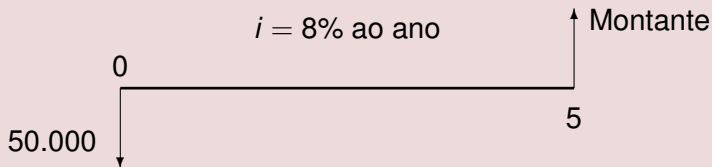
Cálculo de juros compostos

Y aplicou \$50.000 para resgatar no prazo de 5 meses a 8% ao mês, no regime de capitalização composta. Qual será o valor do resgate?

Calculadora HP-12C

Juros compostos - II

Fluxo de Caixa



Procedimento

Digitação	Visor	Comentário
(f)(CLX) (f)(2)	0,00	Zera registros. 2 dígitos.
50000 (CHS)(PV)	-50000,00	PV=-50.000,00
8 (i)	8,00	$i=8\%$
5 (n)	5,00	$n=5$
(FV)	73.466,40	Montante

Calculadora HP-12C

Exercícios sobre Juros simples e compostos

Exercícios

- 1 Qual é o valor do resgate de uma aplicação de \$3500 aplicada por 5 meses à taxa de 5% ao mês, no regime de juros simples?
- 2 Qual é o valor do resgate de uma aplicação de \$3500 aplicada por 5 meses à taxa de 5% ao mês, no regime de juros compostos?
- 3 Calcular o valor necessário para resgatar um título de \$1200, aplicado por 3 meses com uma taxa de 4% ao mês, no regime de juros simples.
- 4 Calcular o valor necessário para resgatar um título de \$1200, aplicado por 3 meses com uma taxa de 4% ao mês, no regime de juros compostos.

Calculadora HP-12C

Sistema Price - I

Sistema Price

Para obter cálculos no sistema Price, usamos outras teclas como:

Tecla	Função
(g)(END)	1o. pagamento vence no final do 1o. período (normal)
(g)(BEGIN)	1o. pagamento vence no início do 1o. período

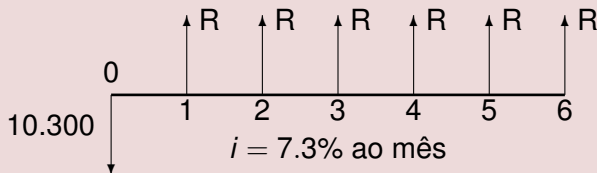
Cálculo da prestação no Sistema Price - Status=END

Fulano comprou algo por \$10.300 em 6 prestações mensais e iguais, a uma taxa de 7,3% ao mês. Qual é o valor de cada prestação?

Calculadora HP-12C

Sistema Price - II

Fluxo de Caixa



Procedimento na HP-12C

Digitação	Visor	Comentário
(f)(CLX) (f)(2) (g)(END)		
10300 (CHS)(PV)		
7.3 (i)		
6 (n)		
(PMT)		

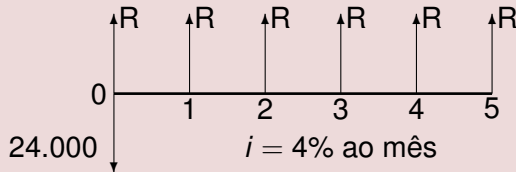
Calculadora HP-12C

Sistema Price - III

Cálculo da prestação no Sistema Price - Status=BEGIN

Gastei \$24.000 e pagarei com uma entrada mais 5 pagamentos iguais à taxa de 4% ao mês. Qual é o valor de cada pagamento?

Fluxo de Caixa



Calculadora HP-12C

Sistema Price - IV

Procedimento com a calculadora

Digitação	Visor	Comentário
(f)(CLX) (f)(2)		
(g)(BEG)		
24000 (CHS)(PV)		
6 (n)		
4 (i)		
(PMT)		

Calculadora HP-12C

Amortização no Sistema Price - I

Amortização no Sistema Price

Na amortização de financiamentos pelo Sistema Price, usamos as teclas comuns da capitalização composta, além de outras três:

Tecla	Função
(f)(AMORT)	Juros do pagamento
($x \geq y$)	Amortização do pagamento
(RCL)(PV)	Saldo devedor após as operações anteriores

A realidade

$$\text{PAGAMENTO} = \text{JUROS} + \text{AMORTIZAÇÃO}$$

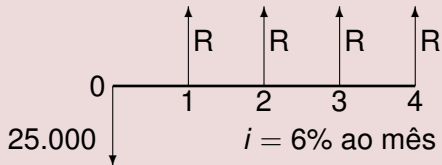
Calculadora HP-12C

Amortização no Sistema Price - II

Amortização pelo Sistema Price

Algo que custa \$25.000 será financiado à taxa de 6% ao mês em 4 pagamentos mensais e iguais. Obter o valor de cada pagamento e de cada amortização, os juros de cada pagamento e o saldo devedor após cada pagamento.

Fluxo de Caixa



Calculadora HP-12C

Amortização no Sistema Price - III

Procedimento com a calculadora

D	(f)(CLX)	0	Zera registros
I	(f)(2)	0	Usar 2 dígitos
G	(g)(END)	0	Status=END
I	25000 (CHS)(PV)	-25.000,00	PV=-25.000,00
T	4 (n)	4,00	n = 4 meses
A	6 (i)	6,00	i = 6% ao mês
R	(PMT)	7.214,79	Valor de cada PMT
	(1)(f)(AMORT)	1.500,00	PMT 1: Juros
	(x ≥ y)	5.714,79	PMT 1: Amortização
	(RCL)(PV)	-19.285,21	Saldo devedor após PMT 1
	(1)(f)(AMORT)	1.157,11	PMT 2: Juros
	(x ≥ y)	6.057,67	PMT 2: Amortização
	(RCL)(PV)	-13.227,54	Saldo devedor após PMT 2
	Repetir	os códigos	em vermelho

Calculadora HP-12C

Amortização no Sistema Price - IV

Planilha da amortização com o Sistema Price

Um objeto que custa \$25.000 será financiado à taxa de 6% ao mês em 4 pagamentos mensais e iguais. Obter o valor de cada pagamento e de cada amortização, os juros de cada pagamento e o saldo devedor após cada pagamento.

Verificar a planilha com os dados obtidos na calculadora

n	Saldo devedor	Pagamento	Juros	Amortização
0	25.000,00	0,00	0,00	0,00
1	19.285,21	7.214,79	1.500,00	5.714,79
2	13.227,54	7.214,79	1.157,12	6.057,67
3	6.806,40	7.214,79	793,65	6.421,14
4	0,00	7.214,79	408,39	6.806,40

Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - I

Taxa Interna de Retorno

A Taxa Interna de Retorno (IRR) é a taxa que torna equivalentes os lançamentos futuros de um fluxo de caixa com o capital inicial. IRR é a taxa que dá o custo efetivo de um empréstimo ou fluxo de caixa.

A Taxa Interna de Retorno (IRR) de um Fluxo de Caixa pode ser obtida com a calculadora com as teclas:

Teclas	Função no Fluxo de Caixa
(g) (CF0)	Capital Inicial
(g) (CFj)	Pagamento de ordem j
(g) (Nj)	Número de pagamentos
(f) (IRR)	Taxa Interna de Retorno

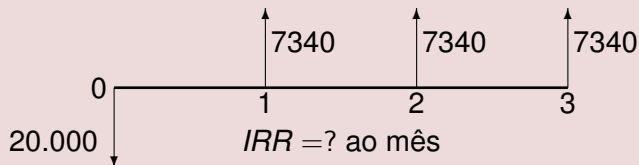
Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - II

IRR - Exercício com pagamentos iguais

Se algo custa à vista é \$20.000 e foi comprado em 3 pagamentos mensais e iguais de \$7.340, que serão pagos ao final de cada período, qual é a Taxa Interna de Retorno (IRR) para esta compra?

IRR - Fluxo de Caixa do problema



Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - III

IRR - Problema Matemático com a obtenção da taxa

Se a soma dos valores atuais dos pagamentos é igual ao valor à vista:

$$\frac{7340}{1+i} + \frac{7340}{(1+i)^2} + \frac{7340}{(1+i)^3} = 20000$$

Com $x = \frac{1}{1+i}$, obtemos $7340x + 7340x^2 + 7340x^3 = 20000$, isto é,

$$x^3 + x^2 + x - 2,72479564032698 = 0$$

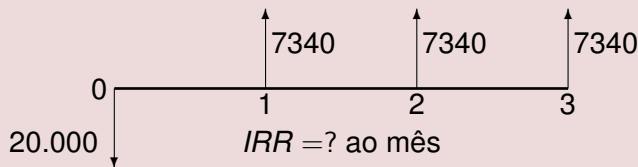
Há pelo menos três modos de resolver esta equação $f(x) = 0$:

- Usar a fórmula de Tartaglia para equações cúbicas.
- Usar o Método de Newton-Raphson sobre $f(x) = 0$.
- Usar a calculadora HP-12C.

Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - IV

IRR - Fluxo de Caixa do problema



IRR - Resolução com a calculadora

Digitação	Visor	Comentário
20000 (CHS)(g)(CF0)	20.000,00	PV=20.000,00
7340 (g)(CFj)	7.340,00	Cada pagamento
3 (g)(Nj)	3,00	Número de pagamentos
(f)(IRR)		Taxa Interna de Retorno

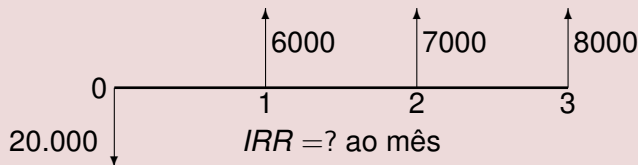
Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - V

IRR - Exercício com pagamentos diferentes

Algo custa à vista \$20.000 e foi adquirido em 3 prestações mensais seguidas de \$6.000, \$7.000 e \$8.000 pagas ao final de cada período. Qual é a Taxa Interna de Retorno (IRR) da compra deste objeto?

IRR - Fluxo de Caixa do problema



Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - VI

IRR - Problema Matemático com a obtenção da taxa

Se a soma dos valores atuais dos pagamentos é igual ao valor à vista:

$$\frac{6000}{1+i} + \frac{7000}{(1+i)^2} + \frac{8000}{(1+i)^3} = 20000$$

Com $x = \frac{1}{1+i}$, obtemos $6000x + 7000x^2 + 8000x^3 = 20000$, isto é,

$$8x^3 + 7x^2 + 6x - 20 = 0$$

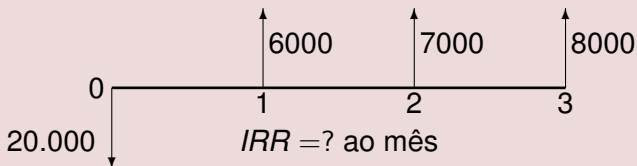
Há pelo menos três modos de resolver esta equação:

- Usar a fórmula de Tartaglia para equações cúbicas.
- Usar o Método de Newton-Raphson sobre $f(x) = 0$.
- Usar a calculadora HP-12C.

Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - VII

IRR - Fluxo de Caixa do problema



Procedimento com a calculadora

Digitação	Visor	Comentário
20000 (CHS)(g)(CF0)	20000	PV=20.000,00
6000 (g)(CFj)	6000	Pagamento 1
7000 (g)(CFj)	7000	Pagamento 2
8000 (g)(CFj)	8000	Pagamento 3
(f)(IRR)		Taxa Interna de Retorno (IRR)

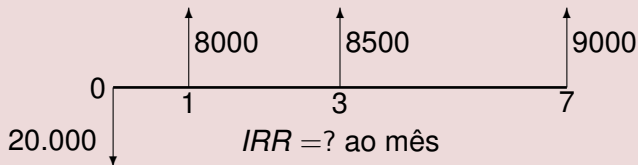
Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - VIII

IRR - Exercício com ausência de alguns pagamentos

Um carro custa à vista \$20.000 e foi comprado em 3 pagamentos sendo a primeira de \$8.000 paga no instante $t=1$ mês, a segunda de \$8.500 paga no instante $t=3$ e a terceira de \$9.000 paga no instante $t=7$. Qual é a Taxa Interna de Retorno (IRR) da compra do carro?

IRR - Fluxo de Caixa do problema



Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - IX

IRR - Problema Matemático com a obtenção da taxa

Se a soma dos valores atuais dos pagamentos é igual ao valor à vista:

$$\frac{8000}{1+i} + \frac{8500}{(1+i)^2} + \frac{9000}{(1+i)^3} = 20000$$

Com $x = \frac{1}{1+i}$, obtemos $8000x + 8500x^2 + 9000x^3 = 20000$, isto é,

$$18x^3 + 17x^2 + 16x - 40 = 0$$

Há pelo menos três formas para resolver esta equação $f(x) = 0$:

- Usar a fórmula de Tartaglia para equações cúbicas.
- Usar o Método de Newton-Raphson sobre $f(x) = 0$.
- Usar a calculadora HP-12C.

Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - X

Procedimento com a calculadora

Digitação	Visor	Comentário
20000 (CHS)(g)(CF0)	20.000,00	PV=20.000,00
8000 (g)(CFj)	8.000,00	Pagamento 1
0 (g)(CFj)	0,00	Pagamento 2
8500 (g)(CFj)	8.500,00	Pagamento 3
0 (g)(CFj)	0,00	Pagamento 4
0 (g)(CFj)	0,00	Pagamento 5
0 (g)(CFj)	0,00	Pagamento 6
9000 (g)(CFj)	9.000,00	Pagamento 7
(f)(IRR)		Taxa Interna de Retorno

Calculadora HP-12C

Taxa Interna de Retorno - XI

Procedimento alternativo com a calculadora

Digitação	Visor	Comentário
20000 (CHS) (g)(CF0)	-20.000,00	PV=20.000,00
8000 (g)(CFj)	8.000,00	Pagamento No. 1
0 (g)(CFj)	0,00	Pagamento No. 2
8500 (g)(CFj)	8.500,00	Pagamento No. 3
0 (g)(CFj)	0,00	Pagamento No. 4
3 (g)(Nj)	3	Número de vezes de PMT4
9000 (g)(CFj)	9.000,00	Pagamento No. 7
(f)(IRR)	7,03	Taxa Interna de Retorno

Calculadora HP-12C

Valor Presente Líquido - I

Valor Presente Líquido

O Valor Presente Líquido (NPV = Net Present Value) é uma medida de equilíbrio de um Fluxo de caixa inicial em relação a uma certa taxa de retorno do investimento.

Quanto **maior** for o valor de NPV, **maior** será a taxa de retorno real do investimento.

Condição importante para o NPV

Condição	Resultado sobre a Taxa Interna de Retorno
$NPV > 0$	Taxa de Retorno é maior do que a taxa esperada
$NPV < 0$	Taxa de Retorno é menor do que a taxa esperada

Calculadora HP-12C

Valor Presente Líquido - II

Valor Presente Líquido na calculadora

Introduzimos o fluxo de caixa na calculadora da mesma forma que para obter a taxa IRR, mas para obter o valor de NPV, devemos apresentar a taxa i esperada para o investimento.

O NPV de um fluxo de caixa é obtido com as seguintes teclas:

Teclas	Função no Fluxo de Caixa
(CF0)	Capital Inicial
(CFj)	Pagamento de ordem j
(Nj)	Número de pagamentos
(i)	Taxa esperada para o investimento
(NPV)	Valor Presente Líquido
(RCL) n	Verifica o número de lançamentos

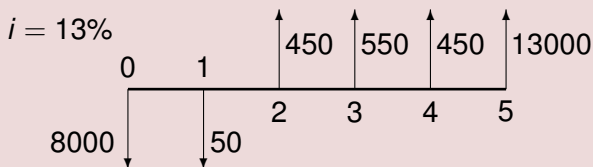
Calculadora HP-12C

Valor Presente Líquido - III

NPV - Exercício

X13 comprou um lote por \$8.000 e espera um retorno mínimo de 13%. X13 deseja manter o lote por 5 anos e vender o mesmo por \$13.000. X13 prevê gastos e resultados de acordo com o fluxo abaixo. Calcular o NPV para saber se a taxa esperada será obtida.

NPV - Fluxo de Caixa do problema



Calculadora HP-12C

Valor Presente Líquido - IV

NPV - Procedimento com a calculadora

Digitação	Visor
(f)(CLX)	0
8000 (CHS)(g)(CF0)	-8000,00
50 (CHS)(g)(CFj)	-50,00
450 (g)(CFj)	450,00
550 (g)(CFj)	550,00
450 (g)(CFj)	450,00
13000 (g)(CFj)	13.000,00
(RCL)(n)	5
13 (i)	13
(f)(NPV)	21,22

Como $NPV = 21,22 > 0$, o investimento ultrapassou as expectativas.

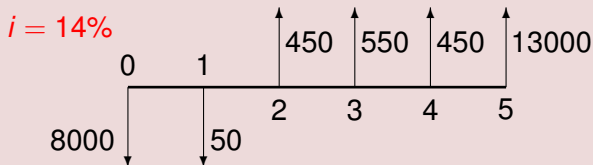
Calculadora HP-12C

Valor Presente Líquido - V

NPV - Outro exercício

X14 comprou um lote por \$8.000 e espera um retorno mínimo de 14%. X14 deseja manter o lote por 5 anos e vender o mesmo por \$13.000. X14 prevê gastos e resultados de acordo com o fluxo abaixo. Calcular o NPV para saber se a taxa esperada será obtida.

NPV - Fluxo de Caixa do problema



Calculadora HP-12C

Valor Presente Líquido - VI







NPV - Exercício para casa

Algo custa à vista \$22.000 ou 3 pagamentos mensais sem entrada, de: \$7.000+\$7.000+\$7.500 pagos nos finais dos meses. Qual a melhor alternativa, se podemos investir o dinheiro à taxa de 8% ao mês?

NPV - Procedimento com a calculadora

D	(f)(CLX)	0
I	22000 (CHS)(g)(CF0)	-22.000,00
G	7000 (g)(CFj)	7.000,00
I	7000 (g)(CFj)	7.000,00
T	7500 (g)(CFj)	7.500,00
Ç	(RCL)(n)	3
Ã	13 (i)	13
O	(f)(NPV)	$NPV > 0$ ou $NPV < 0$

Bibliografia

-  Faro, C. *Matemática Financeira*. APEC Editora. Rio. 1969.
-  Kurosh, A. G. *Curso de Álgebra Superior*. Edit.Mir. Moscu. 1968.
-  Sodré, U. *L^AT_EX para Matemáticos e Cientistas*, Apostila para a construção de trabalhos de Matemática através do LaTeX. Dep. Matemática. UEL. Londrina-PR. 2008.
-  Sodré, U. *Matemática Comercial e Financeira*, Dep. Matemática. UEL. Londrina-PR. 2008.
-  Vieira Sobrinho, J. D. *Manual de Aplicações Financeiras*. Editora Atlas. S.Paulo. 1993.
-  Zentgraf, W. *Calculadora Financeira HP-12C*. Editora Atlas. S.Paulo. 1994.

Matemática Financeira com a HP-12C

Sobre este trabalho

- Trabalho construído com a linguagem \LaTeX .
- Estilos utilizados nesta apresentação: *Beamer* e *pgf*.
- Versão compilada em 10 de Abril de 2008.
- Visite a página [Matemática Essencial](#) que possui mais de 250 links interessantes sobre Matemática.
- Autor: [Ulysses Sodré](#)