Elementos de Matemática

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Roteiro no.4 - Atividades didáticas de 2007
Versão compilada no dia 27 de Abril de 2007.

Departamento de Matemática - UEL

Prof. Ulysses Sodré
E-mail: ulysses@matematica.uel.br
Matemática Essencial: http://www.mat.uel.br/matessencial/

Resumo: Notas de aulas construídas com materiais utilizados em nossas aulas na Universidade Estadual de Londrina. Desejo que elas sejam um roteiro para as aulas e não espero que estas notas venham a substituir qualquer livro sobre o assunto. Alguns conceitos foram obtidos em livros citados na Bibliografia, mas os assuntos foram bastante modificados. Em português, há pouco material de domínio público, mas em inglês existem diversos materiais que podem ser obtidos na Rede Internet. Sugerimos que o leitor faça pesquisas para obter materiais gratuitos para os seus estudos.

Mensagem: 'Melhor é serem dois do que um, porque têm melhor paga do seu trabalho. Pois se caírem, um levantará o seu companheiro; mas ai do que estiver só, pois, caindo, não haverá outro que o levante. Também, se dois dormirem juntos, eles se aquentarão; mas um só como se aquentará? E, se alguém quiser prevalecer contra um, os dois lhe resistirão; e o cordão de três dobras não se quebra tão depressa.'
A Bíblia Sagrada, Eclesiastes 4:9-12

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1

Potências de números reais

1.1 Potências reais

Definição 1. *Seja n um número natural. A potência x^n é um produto em que x é o único fator (base) que aparece n vezes (expoente). Assim:*

$$x^1 = x, \quad x^2 = x \cdot x, \quad x^3 = x \cdot x \cdot x, \quad x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x, \quad \ldots$$

Definição 2. *Para $x \neq 0$, definimos $x^0 = 1$.*

Reunindo as duas definições acima e usando as idéias de Indução Matemática, temos uma definição recursiva de potência. Esta é a forma mais rigorosa que serve para demonstrar muitas propriedades com números reais.

Definição 3 (Recursiva)**.** *Seja um número inteiro não negativo n. A potência x^n é definida por $x^0 = 1$ e para cada $n \in N$ por*

$$x^n = x \cdot x^{n-1}$$

Definição 4. *Para $m \in Z$ e $x \neq 0$, definimos $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$.*

Exemplo 1. *Algumas potências*

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}, \qquad x^{-0} = \frac{1}{x^0} = 1, \qquad x^{-1} = \frac{1}{x^1}, \qquad x^2 = \frac{1}{x^{-2}}$$

1.2 Regras básicas com expoentes

Se p e q são números inteiros, $x > 0$ e $y > 0$ são números reais, então:

1. $x^p\, x^q = x^{p+q}$
2. $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$
3. $(x^p)^y = x^{p \cdot q}$
4. $(xy)^p = x^p\, y^p$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^p = \dfrac{x^p}{y^p}$

Definição 5. *Se $x \geq 0$ e $n \in N$ então a raiz de ordem n do número x é obtida com*

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Observação 1. *Se $x \geq 0$ e $n = 2$, então escrevemos a raiz quadrada de x por $\sqrt[2]{x}$ ou simplesmente por $\sqrt{x}$.*

Observação 2. *Se n é par e $x < 0$, a expressão $\sqrt[n]{x}$ não está definida. Por exemplo, se $n = 2$ e $x = -1$, então $\sqrt[2]{-1} = \sqrt{-1}$ não tem sentido real.*

Observação 3. *Se n é ímpar e $x \in R$, temos que $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$. Realmente, se $x = 8$ e $n = 3$ então $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.*

Definição 6. *Se $x > 0$, $n \in N$ e $p \in Z$, então*

$$x^{p/n} = (x^{1/n})^p = (\sqrt[n]{x})^p$$

Observação 4. *Para $x \in R$, as potências naturais: x, x^2, x^3, x^4, ... são monômios usados com muita freqüência no âmbito do Ensino básico. Conhecer os gráficos das funções associados a eles é fundamental para todos os estudiosos das ciências.*

CAPÍTULO 2

Funções exponenciais

2.1 Algumas funções potenciais

As funções reais definida por $f(x) = x^1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, ... têm grande valor na Matemática. O que acontece quando trocamos as bases pelo expoentes? Neste caso, temos as funções das formas $E_1(x) = 1^x$, $E_2(x) = 2^x$, $E_3(x) = 3^x$, $E_4(x) = 4^x$, $E_5(x) = 5^x$, ... Os gráficos das funções E_2, E_3, E_4, ...possuem aspectos de curvas exponenciais, que são curvas sempre crescentes ou sempre decrescentes com a variável x.

Antes de examinar uma função exponencial $E(x) = a^x$, temos algumas perguntas importantes a fazer.

1. O número a (base da potência) pode ser qualquer número real ou existem algumas restrições a ele?

   Se $a = 0$ e $x > 0$, a função $E(x) = 0^x$ se comporta como a função $f(x) = 0$. Esta função não tem a forma *exponencial*, pois ela é constante.

   Se $a = 1$, segue que $E(x) = 1$ que é uma função constante.

   Se $a < 0$, digamos $a = -2$, então $E(x) = (-2)^x$ que cria um problema no qual o gráfico possui uma quantidade infinita de *furos*. Se o domínio desta função fica restrito ao conjunto dos números racionais da forma p/r e r é um número PAR positivo, temos uma situação indefinida. Por exemplo, $E(1/2) = (-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ que não é um número real.

Resumindo, para definir funções exponenciais tomaremos $a > 0$ e $a \neq 1$.

2. Considerando as bases $a > 0$ e $a \neq 1$, qual é o maior domínio possível para a função exponencial $E(x) = a^x$?

   Esta questão é delicada quando tomamos expoentes x irracionais. Por exemplo, o que significa o valor de $E(x) = a^x$ se $a = 2$ e $x = \sqrt{2}$, isto é,

   $$E(\sqrt{2}) = 2^{\sqrt{2}}$$

   Para responder a esta pergunta, devemos considerar aproximações para o número irracional $\sqrt{2}$ por valores racionais, tanto maiores que $\sqrt{2}$ como por valores menores que $\sqrt{2}$.

   Observamos que

   $$1,4 < 1,41 < 1,414 < 1,4142 < 1,41421 < \sqrt{2}$$

   e

   $$\sqrt{2} < 1,41422 < 1,4143 < 1,415 < 1,42 < 1,5$$

   Reunindo estas desigualdades:

   $$\begin{array}{lcccl} 1,4 & < & \sqrt{2} & < & 1,5 \\ 1,41 & < & \sqrt{2} & < & 1,42 \\ 1,414 & < & \sqrt{2} & < & 1,415 \\ 1,4142 & < & \sqrt{2} & < & 1,4143 \\ 1,41421 & < & \sqrt{2} & < & 1,41422 \end{array}$$

   Os números racionais da coluna da esquerda se aproximam de $\sqrt{2}$ por valores menores que $\sqrt{2}$ e os números racionais da coluna da direita se aproximam de $\sqrt{2}$ por valores maiores que $\sqrt{2}$.

   Seguindo estas idéias, podemos escrever

   $$\begin{array}{lcccl} 2^{1,4} & < & 2^{\sqrt{2}} & < & 2^{1,5} \\ 2^{1,41} & < & 2^{\sqrt{2}} & < & 2^{1,42} \\ 2^{1,414} & < & 2^{\sqrt{2}} & < & 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} & < & 2^{\sqrt{2}} & < & 2^{1,4143} \\ 2^{1,41421} & < & 2^{\sqrt{2}} & < & 2^{1,41422} \\ ... & < & 2^{\sqrt{2}} & < & ... \end{array}$$

Os valores da esquerda crescem para $2^{\sqrt{2}}$ e os valores da direita decrescem para $2^{\sqrt{2}}$, assim temos uma forma de calcular o valor de $2^{\sqrt{2}}$ usando aproximações com potências de expoentes racionais.

É assim que construímos a funções exponenciais da forma $E(x) = a^x$ para todo $x \in R$, o que significa que o domínio da função $E = E(x)$ é o conjunto R dos números reais.

3. Qual é a imagem de uma função exponencial da forma $E(x) = a^x$?

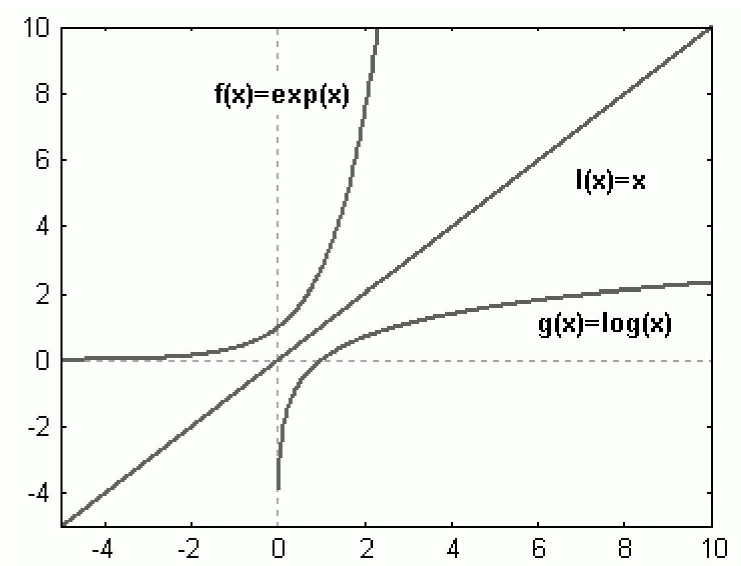
   A imagem desta função $E(x) = a^x$ é o conjunto $(0, \infty)$ dos números reais positivos.

2.2 A função exponencial natural

No âmbito dos nossos estudos, observamos que não é possível definir de forma adequada uma função exponencial, assim, aceitaremos teoricamente a função exponencial, denotada por $\exp : R \to R_+$, sendo definida como a inversa da função logarítmo natural, denotada por, $\log : R_+ \to R$, isto é:

$$\begin{aligned} \log \circ \exp &= I_R \\ \exp \circ \log &= I_{R_+} \end{aligned}$$

Para cada $x \in R$, tem-se que $\log(\exp(x)) = x$ e para cada $x \in R_+ = (0, \infty)$, tem-se que $\exp(\log(x)) = x$.



Os gráficos da função exponencial e da função Logaritmo natural, são, um a reflexão do outro com relação ao gráfico da função identidade.

Se o domínio da função Logaritmo natural é o conjunto R_+ dos números reais positivos, então a imagem da função $\exp()$ é o conjunto dos números reais positivos e como a imagem de $\log()$ é o conjunto R de todos os números reais, então o domínio de $\exp()$ também é o conjunto R de todos os números reais.

Observação 5. *Através do gráfico de $f(x) = \exp(x)$, observamos que:*

1. *Se $x \in R$ então $\exp(x) > 0$*
2. *Se $x < 0$ então $0 < \exp(x) < 1$*
3. *Se $x < 0$ então $\exp(x) = 1$*
4. *Se $x < 0$ então $\exp(x) > 1$*

No Ensino Médio, a função exponencial é definida a partir da função logarítmica, que é definida de forma cíclica em função da exponencial, como:

$$y = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \log(y)$$

Exemplos:

1. $\log[\exp(5)] = 5$
2. $\exp[\log(5)] = 5$
3. $\log[\exp(x+1)^{1/2}] = (x+1)^{1/2}$
4. $\exp[\log((x+1)^{1/2}] = (x+1)^{1/2}$
5. $\exp[3\log(x)] = \exp(\log(x^3)] = x^3$
6. $\exp[k\log(x)] = \exp[\log(x^k)] = x^k$
7. $\exp[(7(\log(3) - \log(4)] = \exp[7(\log(\frac{3}{4}))] = \exp[(\log(\frac{3}{4})^7] = (\frac{3}{4})^7$

2.3 A Constante e de Euler

Existe uma importantíssima constante matemática, denotada por e e definida através da função exponencial por $e = \exp(1)$. O número e é irracional e positivo, está relacionado à função logaritmo por $\log(e) = 1$. Em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), este número denotado por

e apareceu pela primeira vez no trabalho: "*Introductio in analysis infinitorum*" em 1748. O valor deste número com 40 dígitos decimais, é:

$$e = 2,7182818284590452353602874713526624977 57$$

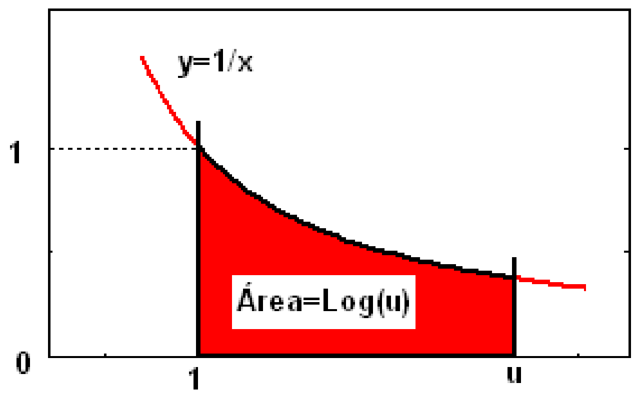
Este número pode ser calculado pela soma *infinita*:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + ...$$

A soma *infinita* acima somente terá significado preciso quando estudarmos limites de seqüências de números reais no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral.

2.4 Significado geométrico do número e

Se existe um número real $u > 1$ no eixo OX, tal que a região do primeiro quadrante localizada sob a curva $y = \frac{1}{x}$ e entre as retas $x = 1$ e $x = u$ tenha área igual a 1, então o valor de u deve ser igual a e.



2.5 O número de Euler versus a função exponencial

Se $x \in R$, a função exponencial $\exp$ pode ser escrita como a potência de base e com expoente x, isto é:

$$\exp(x) = e^x$$

Se $f(x) = e^x$ ou $f(x) = exp(x)$, então vale a relação funcional

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

o que significa que

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

2.6 Propriedades básicas da função exponencial

Sejam x e y são números reais e k é um número racional. Usaremos aqui $y = \exp(x)$ se, e somente se, $x = \log(y)$. Baseado neste fato, segue que:

1. $\exp(\log(y)) = y$ se $y > 0$
2. $\log(\exp(x)) = x$
3. $\exp(x-y) = \exp(x)/\exp(y)$
4. $\exp(kx) = [\exp(x)]^k$

2.7 Simplificações matemáticas

Podemos simplificar algumas expressões matemáticas com as propriedades das funções exponenciais e logaritmos:

1. $\exp(\log(3)) = 3$
2. $\log(\exp(20x)) = 20x$
3. $\exp(5.\log(2)) = \exp(\log(2^5)) = 2^5 = 32$
4. $\exp(2 + 5.\log(2)) = \exp(2)\exp(5.\log(2)) = 32e^2$

2.8 Outras funções exponenciais

Podemos definir outras funções exponenciais da forma $g(x) = a^x$, onde $a > 0$ diferente de 1 e de x. Se o expoente r é um número racional, então usando $x = a^r$ na equação $x = \exp(\log(x))$, obtemos:

$$a^r = \exp(\log(a^r))$$

Como $\log(a^r) = r\log(a)$, a relação acima fica na forma:

$$a^r = \exp(r\log(a))$$

Esta última expressão, junto com a informação que todo número real pode ser escrito como limite de uma seqüência de números racionais, justifica a definição para $g(x) = a^x$, onde $x \in R$:

$$a^x = \exp(x\log(a))$$

2.9 Relação de Euler

Se i é a unidade imaginária e $x \in R$, então vale a relação:

$$e^{ix} = \exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

2.10 Exponencial no Cálculo

Uma das melhores maneiras de definir a função exponencial é através de uma série de potências de x. Observamos assim a importância do conceito de série real, que é tratado juntamente com o estudo de seqüências reais no Cálculo Diferencial e Integral. Esta função $f(x) = e^x$ é definida por

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + ...$$

A soma *infinita* acima somente terá significado preciso quando estudarmos limites de seqüências de funções reais no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral.

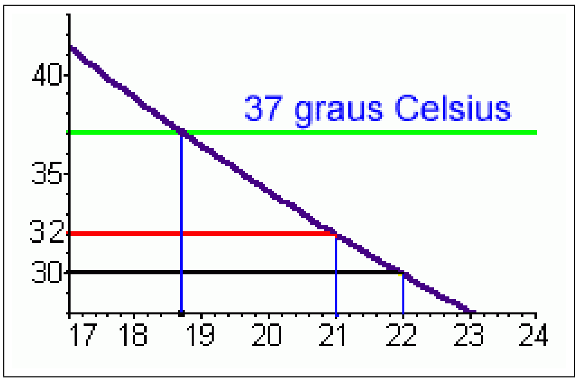
Com esta definição, podemos obter cálculos aproximados de: $e^{0,5}$ e $e^{-0,1}$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} e^{0,1} &= 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{6} + \frac{(0,1)^4}{24} + \frac{(0,1)^5}{120} + \frac{(0,1)^6}{720} + ... \\ &= 1,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6} + \frac{0,0001}{24} + \frac{0,00001}{120} + \frac{0,000001}{720} + ... \\ &\cong 1,105 + 0,00017 + 0,000004 + 0,00000008 + 0,000000002 + ... \\ &\cong 1,105174082 \end{aligned}$$

2.11 Algumas Aplicações

As funções exponenciais desempenham papel fundamental na Matemática e nas ciências como: Física, Química, Engenharia, Economia, Biologia, Astronomia, Psicologia e outras. Vamos apresentar alguns exemplos com aplicações destas funções.

1. Lei do resfriamento dos corpos: Um indivíduo foi encontrado morto em uma sala com temperatura ambiente constante. O legista tomou a temperatura do corpo às 21:00 h e constatou que a mesma era de 32 graus Celsius e uma hora depois voltou ao local observando que a temperatura tinha caído para 30 graus Celsius. A que horas aroximadamente morreu o indivíduo, sabendo-se que a temperatura média de um corpo humano normal é de 37 graus Celsius?



Partindo de estudos matemáticos pode-se construir uma função exponencial decrescente que passa pelos pontos (21,32) e (22,30) onde abscissas representam o tempo e as ordenadas a temperatura do corpo.

A curva que descreve este fenômeno é uma função exponencial da forma:

$$f(t) = ce^{at}$$

Obtemos $a = \log(30) - \log(32) = \log(\frac{30}{32})$ de onde segue que a constante $c = \frac{32}{(30/32)^{21}} = 0,0645385.$

A função exponencial que rege este fenômeno de resfriamento deste corpo é dada por:

$$f(t) = 124,09468e^{-0,0645385t}$$

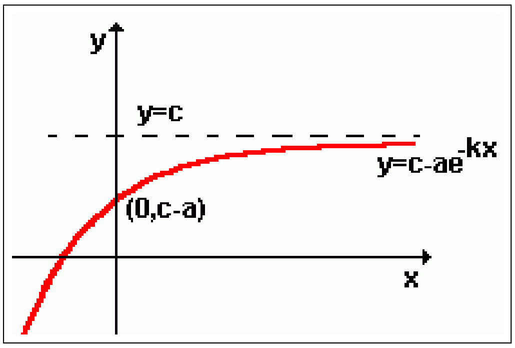
e quando $f(t) = 37$ segue que:

$$t = 18,7504... = 18:45h$$

que pode ser observado através do gráfico.

Neste exemplo, usamos a construção de um gráfico e as propriedades operatórias das funções exponenciais e logarítmicas.

2. Curvas de aprendizagem: Devido ao uso por psicólogos e educadores na descrição do processo de aprendizagem, as curvas exponenciais realizam um papel importante.



A curva básica para este tipo de estudo é da forma:

$$f(x) = c - ae^{-kx}$$

onde c, a e k são constantes positivas. Considerando o caso especial em que $c = a$ temos uma das equações básicas para descrever a relação entre a consolidação da aprendizagem $y = f(x)$ e o número de reforços x.

A função:

$$f(x) = c - ae^{-kx}$$

cresce rapidamente no começo, nivela-se e então aproxima-se de sua assíntota $y = c$.

Estas curvas também são estudadas em Economia, na representação de várias funções de custo e produção.

3. Crescimento populacional: Em 1798, Thomas Malthus, no trabalho *"An Essay on the Principle of Population"* formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo. Tomou $N = N(t)$ o número de indivíduos em uma população

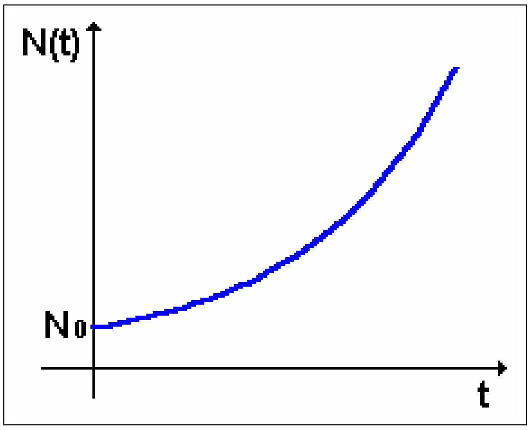
no instante t. Tomou as hipóteses que os nascimentos e mortes naquele ambiente eram proporcionais à população presente e a variação do tempo conhecida entre os dois períodos. Obteve a seguinte equação que descreve a população presente no instante t:

$$N(t) = N_o e^{rt}$$

onde N_o é a população presente no instante inicial $t = 0$ e r é uma constante que varia com a espécie de população.

O gráfico correto desta função depende dos valores de N_o e de r. Mas sendo uma função exponencial, a forma do gráfico será semelhante ao da função $y = Ke^x$.

Este modelo supõe que o meio ambiente tenha pouca ou nenhuma influência sobre a população.



Desse modo, ele funciona como um indicador do potencial de sobrevivência e de crescimento de cada espécie de população do que um modelo que mostre o que realmente ocorre.

Consideremos por exemplo uma população de bactérias em um certo ambiente. De acordo com esta equação se esta população duplicar a cada 20 minutos, dentro de dois dias, estaria formando uma camada em volta da terra de 30 cm de espessura. Assim, enquanto os efeitos do meio ambiente são nulos, a população obedece ao modelo $N = N_o e^{rt}$. Na realidade, se $N = N(t)$ aumenta, o meio ambiente oferece resistência ao seu crescimento e tende a mantê-lo sobre controle. Exemplos destes fatores são, a quantidade disponível de alimentos, acidentes, guerras, epidemias,...

Como aplicação numérica, consideremos uma colônia de bactérias se reproduzindo normalmente. Se num certo instante havia 200 bactérias na colônia, passadas 12 horas havia 600 bactérias. Quantas bactérias haverá na colônia após 36 horas da última contagem?

No instante inicial havia 200 bactérias, então $N_o = 200$, após 12 horas havia 600 bactérias, então

$$N(12) = 600 = 200e^{12r}$$

logo $e^{12r} = 600/200 = 3$ assim

$$\log(e^{12r}) = \log(3)$$

Como $\log$ e $\exp$ são funções inversas uma da outra, então $12r = \log(3)$, assim:

$$r = \frac{\log(3)}{12} = 0,0915510$$

Finalmente:

$$N(48) = 200e^{48.(0,0915510)} = 16200 \text{ bactérias}$$

Então, após 36 horas da última contagem ou seja, 48 horas do início da contagem, haverá 16200 bactérias.

4. Desintegração radioativa: Os fundamentos do estudo da radioatividade ocorreram no início do século por Rutherford e outros. Alguns átomos são naturalmente instáveis, de tal modo que após algum tempo, sem qualquer influência externa sofrem transições para um átomo de um novo elemento químico e durante esta transição eles emitem radiações. Rutherford formulou um modelo para descrever o modo no qual a radioatividade decai. Se $N = N(t)$ representa o número de átomos da substância radioativa no instante t, N_o o número de átomos no instante $t = 0$ e k é uma constante positiva chamada de constante de decaimento, então:

$$N(t) = N_o e^{-kt}$$

esta constante de decaimento k, tem valores diferentes para substâncias diferentes, constantes que são obtidas experimentalmente.

Na prática usamos uma outra constante T, denominada `meia-vida` do elemento químico, que é o tempo necessário para que a quantidade de átomos da substância decaia pela metade.

Se $N = \frac{N_o}{2}$ para $t = T$, temos

$$\frac{N_o}{2} = N_o e^{-k.T}$$

assim

$$T = \frac{\log(2)}{k}$$

Indicadores de `meia-vida` de alguns elementos químicos:

Substância	Meia-vida T
Xenônio 133	5 dias
Bário 140	13 dias
Chumbo 210	22 anos
Estrôncio 90	25 anos
Carbono 14	5.568 anos
Plutônio	23.103 anos
Urânio 238	4.500.000.000 anos

Para o Carbono-14, a constante de decaimento é:

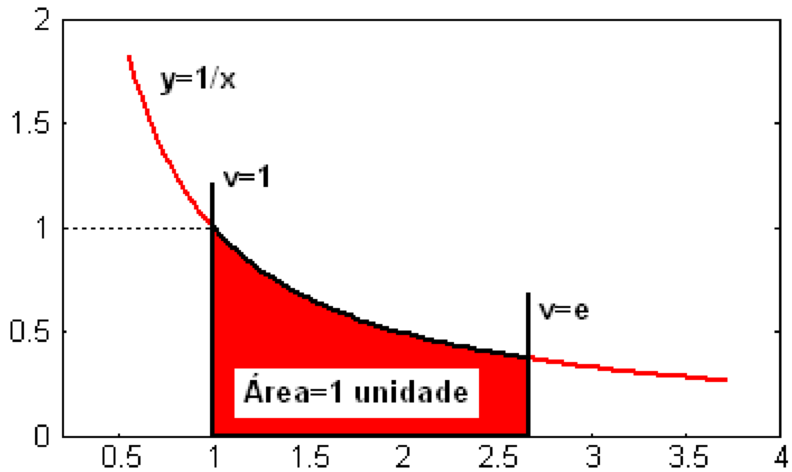
$$k = \frac{\log(2)}{T} = \frac{\log(2)}{5568} = 12,3386 \text{ por ano}$$

CAPÍTULO 3

Logaritmos

3.1 A hipérbole equilátera

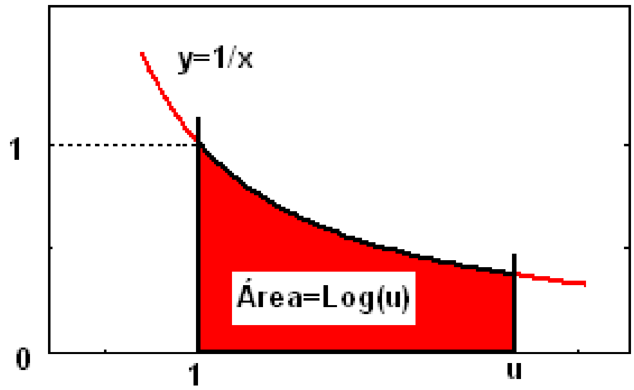
Seja a função real $f(x) = \frac{1}{x}$ definida para todo $x \neq 0$. O gráfico desta função é a curva plana denominada hipérbole equilátera, que possui dois ramos, um ramo no primeiro quadrante e outro ramo no terceiro quadrante.



Esta curva tem importantes aplicações em Ótica e construções de óculos, lentes, telescópios, estudos de química, estudos em economia, etc.

3.2 Definição de Logaritmo

O logaritmo natural (ou neperiano) de u, muitas vezes, denotado por $\log(u)$, pode ser definido do ponto de vista geométrico, como a área da região plana localizada sob o gráfico da curva $y = \dfrac{1}{x}$, acima do eixo $y = 0$, entre as retas $x = 1$ e $x = u$, que está no desenho colorido.



A área marcada representa o logaritmo natural de u, denotado por $\log(u)$. Em função do gráfico, em anexo, usaremos a definição baseada no aspecto gráfico:

$$\log(u) = \text{área}(1, u)$$

Se $u > 1$, a região possuirá uma área bem definida, mas tomando $u = 1$, a região se reduzirá a uma linha vertical (que não posssui área ou seja, possui área nula) e neste caso tomaremos

$$\log(1) = \text{área}(1, 1) = 0$$

Se aumentamos os valores de u, esta função também aumenta os seus valores, significando que esta função é crescente para valores de $u > 0$.

O conceito de Integral de uma função real, normalmente estudado na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, justifica a forma como apresentamos o Logaritmo natural de um número real.

3.3 Propriedades gerais dos logaritmos

Com o uso deste conceito fundamental da Matemática, é possível demonstrar (o que não será feito aqui) várias propriedades dos Logaritmos naturais, para $x > 0$, $y > 0$ e $k \in R$, desde que tenham sentido as expressões matemáticas:

Propriedades básicas dos logaritmos naturais:

1. $\log(1) = 0$
2. $\log(e) = 1$
3. $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$
4. $\log(x^k) = k \cdot \log(x)$
5. $\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$

3.4 Algumas simplificações matemáticas

As propriedades dos Logaritmos podem ser usadas para simplificar expressões matemáticas, abaixo, tomando $t > 0$.

1. $\log(t) + 4.\log(3) = \log(t) + \log(3^4) = \log(t.3^4) = \log(81t)$
2. $\frac{1}{2}\log(4t^2) - \log(t) = \log[(4t^2)^{1/2}] - \log(t) = \log(2t) - \log(t) = \log(2)$
3. $\log(a) + \log(b) - \log(t) + \log(10) = \log(\frac{10ab}{t})$

Exercício: É verdade que $2\log(3) < 3\log(2)$? Observe que:

$$\begin{aligned} 2\log(3) &= \log(3^2) = \log(9) \\ 3\log(2) &= \log(2^3) = \log(8) \end{aligned}$$

e como a função $\log$ é crescente, segue que $\log(8) < \log(9)$, assim:

$$3\log(2) = \log(2^3) = \log(8) < \log(9) = \log(3^2) = 2\log(3)$$

3.5 Base para um logaritmo natural

Consideremos o número de Euler $e = 2,71828...$ tal que $\log(e) = 1$. O número e representa a base para os logaritmos naturais e podemos escrever:

$$\log(u) = Log_e(u)$$

que é lido como: "*logaritmo do número real u na base e*".

A partir do exposto acima, temos uma propriedade que possibilita a mudança logarítmica de uma base positiva para outra base positiva, sendo que ambas devem ser diferentes de 1.

$$Log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

Exercício: Será que é possível definir o logaritmo de um número na base 1?

3.6 Logaritmo decimal

No Ensino Médio, usa-se a base 10, uma vez que neste ambiente a base decimal recebe as preferências para o trabalho com o nosso sistema de numeração, mas devemos observar que em contextos mais avançados, a base decimal tem pouca utilidade. Usando Log (com a letra L em maiúscula) neste trabalho, entenderemos o Logaritmo na base 10 para escrever:

$$y = Log_{10}(x) = Log(x)$$

significando que y é o Logaritmo de x na base 10 e nesta base 10, temos algumas características interessantes com os logaritmos das potências de 10

1. $Log(1) = 0$
2. $\log(e) = 1$
3. $Log(0)$ não tem sentido
4. $Log(10) = Log(10^1) = 1$
5. $Log(10^{-1}) = -1$
6. $Log(100) = Log(10^2) = 2$
7. $Log(10^{-2}) = -2$
8. $Log(10^3) = 3$
9. $Log(10^{-3}) = -3$
10. $Log(10^n) = n$
11. $Log(10^{-n}) = -n$

Como $Log(10^n) = n$, temos que o Logaritmo de 10^n na base 10 é o expoente n, o que nos faz pensar que para todo x real positivo vale a relação:

$$Log(10^x) = x$$

3.7 Definição estranha de logaritmo

Existe uma relação muito mais geral do que $Log(10^x) = x$, pois o Logaritmo de um número real positivo x na base b é igual ao número e se, e somente se, x pode ser escrito como a potência b elevada ao expoente e, isto é:

$$Log_b(x) = e \quad \text{se, e somente se,} \quad x = b^e$$

Em livros de Matemática elementar, a equivalência acima é tomada como a definição de Logaritmo de um número em uma certa base, o que é estranho pois tal definição é cíclica:

1. Define-se o logarítmo em função da exponencial;
2. Define-se a exponencial em função do logaritmo.

3.8 Cálculos de logaritmos de alguns números

Com a definição *estranha* é possível obter um valor aproximado para $Log(2)$. Tomaremos $y = Log(2)$ se, e somente se, $10^y = 2$. Sabemos que $Log(2)$ é positivo e menor do que 1, pois $1 < 2 < 10$ assim

$$0 < Log(2) < 1$$

Podemos obter duas potências de 2 que estejam muito próximos de potências de 10.

Como $1000 < 1024$ e como $8192 < 10000$, segue que

$$10^3 < 2^{10} \qquad \text{e} \qquad 2^{13} < 10^4$$

Aplicando o logaritmo de base 10 a estas duas desiguladades, obtemos:

$$3 < 10Log(2) \qquad \text{e} \qquad 13Log(2) < 4$$

Dividindo a primeira desigualdade por 10 e a última desigualdade por 13, obtemos

$$0,300 = \frac{3}{10} < Log(2) < \frac{4}{13} = 0,308$$

A média aritmética entre 0,300 e 0,308 é 0,304, que é uma boa estimativa para $Log(2)$, isto é:

$$Log(2) = 0,304$$

Podemos tomar outras potências de 10 que estejam próximas de potências de 2, o que não é fácil para alguém que não tenha uma calculadora que opere com muitos decimais, o que pode ser visualizado através da tabela mostrando algumas de tais potências:

10^a	$<$	2^x	$<$	10^b	c	$<$	$Log(2)$	$<$	d	$\mu = \frac{c+d}{2}$
10^0	$<$	2^2	$<$	10^1	0	$<$	$Log(2)$	$<$	$1/2$	$0,250$
10^1	$<$	2^5	$<$	10^2	$1/5$	$<$	$Log(2)$	$<$	$2/5$	$0,300$
10^2	$<$	2^8	$<$	10^3	$2/8$	$<$	$Log(2)$	$<$	$3/8$	$0,313$
10^3	$<$	2^{11}	$<$	10^4	$3/11$	$<$	$Log(2)$	$<$	$4/11$	$0,318$
10^3	$<$	2^{12}	$<$	10^4	$3/12$	$<$	$Log(2)$	$<$	$4/12$	$0,292$
10^4	$<$	2^{15}	$<$	10^5	$4/15$	$<$	$Log(2)$	$<$	$5/15$	$0,300$
10^4	$<$	2^{16}	$<$	10^5	$4/16$	$<$	$Log(2)$	$<$	$5/16$	$0,282$
10^5	$<$	2^{18}	$<$	10^6	$5/18$	$<$	$Log(2)$	$<$	$6/18$	$0,306$
10^5	$<$	2^{19}	$<$	10^6	$5/19$	$<$	$Log(2)$	$<$	$6/19$	$0,289$
10^6	$<$	2^{20}	$<$	10^7	$6/20$	$<$	$Log(2)$	$<$	$7/20$	$0,325$

Na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, podemos desenvolver a função $\log$ através de uma série de potências de x para calcular logaritmos de números reais positivos com $-1 < x < 1$.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ...$$

Uma outra série muito mais eficiente, permite obter o valor de $\log(y)$ para qualquer $y \in R$ desde que se saiba o valor de x para o qual $y = \frac{1+x}{1-x}$.

$$\log(y) = 2(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + ...)$$

Por exemplo, para obter $\log(3)$, tomamos $y = 3$ e deveremos ter $x = 1/2$ para satisfazer à relação $y = \frac{1+x}{1-x}$.

Voltando ao estudo básico, $Log(2) = 0,3010299956639812...$ e com este valor, podemos obter os logaritmos das potências de 2.

Exemplo:

1. $Log(4) = Log(2^2) = 2Log(2) = 0,60206$
2. $Log(8) = Log(2^3) = 3Log(2) = 0,90309$
3. $Log(16) = Log(2^4) = 4Log(2) = 1,20412$
4. $Log(32) = Log(2^5) = 5Log(2) = 1,50515$
5. $Log(2^n) = nLog(2)$
6. $Log(1/2) = Log(2^-1) = (-1)Log(2) = -0,30103$
7. $Log(1/4) = Log(2^-2) = (-2)Log(2) = -0,60206$
8. $Log(1/8) = Log(2^-3) = (-3)Log(2) = -0,90309$
9. $Log(1/16) = Log(2^-4) = (-4)Log(2) = -1,20412$
10. $Log(1/32) = Log(2^-5) = (-5)Log(2) = -1,50515$
11. $Log(2^-n) = (-n)Log(2)$

Temos também que $Log(3) = 0,47712$, o que nos permite realizar uma grande quantidade de cálculos com logaritmos.

Com $Log(2)$ e $Log(3)$, não é possível calcular os logaritmos dos números primos maiores do que 5, mas é possível obter uma grande quantidade de logaritmos de números naturais.

Exemplo: Usaremos $Log(2) = 0,301$ e $Log(3) = 0,477$, para calcular alguns logaritmos.

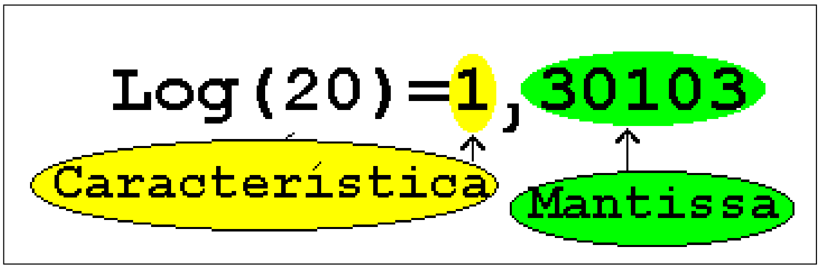
1. $Log(5) = Log(10/2) = Log(10) - Log(2) = 1 - 0,301 = 0,699$
2. $Log(6) = Log(2.3) = Log(2) + Log(3) = 0,301 + 0,477 = 0,778$
3. $Log(8) = Log(2^3) = 3Log(2) = 0,903$
4. $Log(9) = Log(3^2) = 2Log(3) = 0,954$

Uma estimativa razoável para $Log(7) = 0,8451$ pode ser obtida com a média aritmética entre $Log(6)$ e $Log(8)$, isto é:

$$Log(7) = 0,840$$

3.9 Característica e mantissa de logaritmo na base 10

Se um número está entre duas potências consecutivas de 10, o expoente da menor delas é a `característica` do logaritmo deste número e a diferença entre o logaritmo do número e a característica é a `mantissa` que é a parte decimal do logaritmo.



Na tabela abaixo aparece o sinal negativo para o logaritmo apenas para o número que está antes da vírgula.

Número	Logaritmo	Característica	Mantissa
0,002	$\overline{3}$,30103	-3	0,30103
0,02	$\overline{2}$,30103	-2	0,30103
0,2	$\overline{1}$,30103	-1	0,30103
2	0,30103	0	0,30103
20	1,30103	1	0,30103
200	2,30103	2	0,30103
2000	3,30103	3	0,30103

Observação 6. *Se c é um número inteiro e $1 \leq x < 10$ então*

$$\log(x \times 10^c) = c + \log(x)$$

Esta notação simplifica operações com logaritmos, visando mostrar que, se a divisão de dois números é um múltiplo de 10, basta mudar a característica e preservar a mantissa do logaritmo.

$\overline{3}, 30103$ significa que apenas a característica é negativa, valendo -3 e ela deve ser somada à mantissa que é um número positivo $0, 30103$ e isto significa que o resultado deve ser um número com um sinal negativo, isto é, $-2, 69897$.