Elementos de Matemática

Roteiro no.3 para as atividades didáticas de 2007
Versão compilada no dia 27 de Abril de 2007.

Departamento de Matemática - UEL

Prof. Ulysses Sodré
E-mail: ulysses@matematica.uel.br
Matemática Essencial: http://www.mat.uel.br/matessencial/

Resumo: Notas de aulas construídas com materiais usados em nossas aulas na UEL. Elas devem ser usadas como roteiro para as aulas e não espero que elas venham a substituir qualquer livro sobre o assunto. Alguns conceitos foram obtidos em livros citados na Bibliografia, mas os assuntos foram bastante modificados. Em português, há pouco material de domínio público, mas em inglês existe muito material que pode ser obtido na Internet. Sugiro que o leitor pesquise para obter materiais gratuitos para os seus estudos.

Mensagem: 'Quem deu crédito à nossa pregação? E a quem se manifestou o braço do Senhor? Pois foi crescendo como renovo perante ele, e como raiz que sai duma terra seca; não tinha formosura nem beleza; e quando olhávamos para ele, nenhuma beleza víamos, para que o desejássemos. Era desprezado, e rejeitado dos homens; homem de dores, e experimentado nos sofrimentos; e, como um de quem os homens escondiam o rosto, era desprezado, e não fizemos dele caso algum. Verdadeiramente ele tomou sobre si as nossas enfermidades, e carregou com as nossas dores; e nós o reputávamos por aflito, ferido de Deus, e oprimido. Mas ele foi ferido por causa das nossas transgressões, e esmagado por causa das nossas iniqüidades; o castigo que nos traz a paz estava sobre ele, e pelas suas pisaduras fomos sarados.' A Bíblia Sagrada, Isaías 53:1-5

Indução Matemática

Teorema 1 (Primeiro Princípio de Indução Matemática)**.** *Se para cada* $n \in N$ *podemos definir uma proposição* $P(n)$ *tal que valham as duas situações:*

1. $P(1)$ *é verdadeira;*
2. *Se* $P(k)$ *é verdadeira, então* $P(k+1)$ *é verdadeira, onde* $k \in N$*.*

então $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in N$*.*

Observação 1 (Importância do PIM)**.** *O princípio de Indução Matemática serve para demonstrar propriedades dos números naturais, bem como definir conceitos envolvendo os números naturais. Por exemplo, se* $m \in N$ *e* $n \in N$ *então* $m + n \in N$ *e* $m.n \in N$*. Na Matemática, o uso de recursividade faz intenso uso deste princípio.*

Exemplo 1. *A soma dos* n *primeiros números naturais pode ser definida, de um modo recursivo, por* $S_1 = 1$ *e* $S_{n+1} = S_n + n + 1$*, para cada* $n \in N$*. Logo:*

$S_1 = 1, \quad S_2 = 3, \quad S_3 = 6, \quad S_4 = 10, \quad S_5 = 15, \quad S_6 = 21, \quad S_7 = 28, ...$

Usando o PIM, é possível demonstrar que para todo $n \in N$*:*

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercícios usando o Princípio de Indução Matemática

1. Mostrar que o produto de dois números naturais consecutivos é par, isto é, se $n \in N$ então, o produto $f(n) = n(n+1)$ é divisível por 2.

   Demonstração. Tomaremos a proposição $P = P(n))$, definida por

   $$P(n) : \qquad f(n) = n(n+1) \text{ é divisível por } 2$$

O produto $f(1) = 1(1+1) = 2$ é divisível por 2, garantindo que $P(1)$ é verdadeira. Agora, vamos assumir que $P(n)$ é verdadeira, isto é, que $f(n) = n(n+1)$ é par, o que equivale a garantir que existe $k \in N$ tal que $f(n) = 2k$. Mostraremos que $P(n+1)$ é verdadeira, isto é, $f(n+1) = (n+1)(n+2)$ também é par. Realmente,

$$f(n+1) = (n+1)(n+2) = (n+1)n + 2(n+1) = 2k + 2(n+1)$$

Assim, $f(n+1) = 2(k+n+1)$ e segue o resultado desejado. $\square$

2. Mostrar que o $f(n) = n(n+1)(n+2)$, isto é, o produto de três números naturais consecutivos, é divisível por 3 e também por 6.

   Demonstração. Tomaremos a proposição $P = P(n))$, definida por

   $$P(n): \qquad f(n) = n(n+1)(n+2) \text{ é divisível por } 6$$

   A expressão matemática $f(1) = 1(1+1)(1+2) = 6$ é divisível por 6, logo $P(1)$ é verdadeira. Vamos supor que $P(n)$ é verdadeira, isto é, que $f(n) = n(n+1)(n+2)$ é múltiplo de 6, isto é, existe $k \in N$ tal que $f(n) = 6k$. Mostraremos que $f(n+1) = (n+1)(n+2)(n+3)$ também é múltiplo de 6, garantindo assim que $P(n+1)$ é verdadeira. Como

   $$f(n+1) = (n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)$$

   segue pelo exercício anterior, que o último monômio da expressão anterior $(n+1)(n+2)$ é par pois é o produto de dois números naturais consecutivos e $f(n) = n(n+1)(n+2) = 6k$, assim

   $$f(n+1) = f(n) + 3.2p = 6k + 6p = 6(k+p)$$

   e segue o resultado desejado. $\square$

3. Mostrar que se $n \in N$, o produto $f(n) = (n-1)n(n+1)(3n+2)$ é divisível por 24.

   Demonstração pelo Princípio de Indução Matemática. . Seja a proposição

   $$P(n): \qquad f(n) = (n-1)n(n+1)(3n+2) \text{ é divisível por } 24$$

A proposição $P(1)$ é verdadeira, pois se $n = 1$, então $f(1) = 0$ que é divisível por 24.
Tomando como verdadeira a Hipótese de Indução $P(n)$, mostraremos que $P(n+1)$ também é verdadeira, ou seja, que $f(n+1)$ é divisível por 24.

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= n(n+1)(n+2)(3n+5) - (n-1)n(n+1)(3n+2) \\ &= n(n+1)[(n+2)(3n+5) - (n-1)(3n+2)] \\ &= n(n+1)[(3n^2+11n+10) - (3n^2-n-2)] \\ &= n(n+1)(12n+12) \\ &= 12n(n+1)(n+1) \\ &= 12.2k.(n+1) = 24k(n+1) \end{aligned}$$

A última passagem foi possível pois o produto $n(n+1)$ é par, isto é, $n(n+1) = 2k$ para algum k inteiro.
A Hipótese de Indução garante que existe $m \in N$ tal que $f(n) = 24m$, logo

$$f(n+1) = f(n) + 24k(n+1) = 24m + 24k(n+1) = 24[m + k(n+1)]$$

e garantimos que $P(n+1)$ é verdadeira. $\square$

Teorema 2 (Segundo Princípio de Indução Matemática)**.** *Se para cada $n \in N$ podemos definir uma proposição $P(n)$ tal que valham as duas situações:*

1. *$P(\mathbf{m})$ é verdadeira;*
2. *Se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira, onde $k \in N$ e $\mathbf{k} > \mathbf{m}$.*

então $P(n)$ é verdadeira para todo n natural tal que $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$.

Definição 1 (Somatórios ou Somas)**.** *Usamos a letra grega sigma maiúscula $\sum$ para somas. Em geral, a palavra somatório (masculino) é usada no lugar de soma (feminino).*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + ... + f(n)$$

No futuro usaremos muitas vezes a soma infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + f(2) + ... + f(n) + ...$$

Exercício especial: A seqüência de Fibonacci pode ser definida por $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ para $n \in N$. Obter uma regra geral para esta importante seqüência que aparece abaixo na forma de um conjunto:

$$F = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...\}$$

Dica:

1. Suponhamos que existem números reais $x \neq 0$ tal que $f_n = x^n$.
2. Substituamos esta expressão na equação recursiva $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.
3. Obteremos dois números reais r e s satisfazendo a equação do segundo grau que irá aparecer.
4. Escrevamos depois a combinação $f_n = Ar^n + Bs^n$ e obtenha as constantes A e B satisfazendo as condições $f_1 = 1$ e $f_2 = 1$.
5. Depois de algum trabalho, você obterá a fórmula de Binet.

Exercícios: Utilizando os Princípios de Indução Matemática e as propriedades básicas dos números reais, resolva cada exercício.

1. Mostrar que para todo $n \in N$ vale a desigualdade: $n < 2^n$.
2. Defina $n! = 1.2.3...n$ e mostre que, se $n \in N$ com $n \geq 4$, então $2^n < n!$.
3. Mostrar que para todo $n \in N$ com $n > 9$, vale: $n^3 < 2^n$.
4. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n+1)$ para $n \in N$, fornece as somas dos n primeiros números naturais de modo recursivo. Mostrar que $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
5. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$ para $n \in N$, fornece as somas dos quadrados dos n primeiros números naturais de modo recursivo. Mostrar que vale a forma geral: $s_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
6. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n+1)^3$ para $n \in N$, fornece as somas dos cubos dos n primeiros números naturais de uma forma recursiva. Demonstrar que para todo $n \in N$, vale a forma geral: $s_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

7. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n+1)^4$ para $n \in N$, fornece as somas dos quárticos dos n primeiros números naturais de uma forma recursiva. Mostrar que para todo $n \in N$, vale a forma geral:
$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$
8. A seqüência: $s_1 = 1/2$ e $s_{n+1} = s_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ tem a forma geral: $s_n = \dfrac{n}{n+1}$.
9. Mostrar que a seqüência: $s_1 = 1$ e $s_2 = 3$ e $s_{n+2} = 3s_{n+1} - 2s_n$ possui a forma geral $s_n = 2^n - 1$.

   Dica. Tome $s(n) = r^n$ para garantir que $r = 1$ ou $r = 2$ e concluir que $s(n) = A.1^n + B2^n$, ... $\square$

10. Sejam $a, r \in R$, $r \neq 1$ e $n \in N$. A seqüência definida por: $s_1 = a$ e $s_{n+1} = s_n + ar^n$, determina a fórmula geral para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica e pode ser escrita como:
$$s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$$
e será usada em capítulos posteriores para mostrar que a importante série geométrica
$$S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} ar^n$$
é convergente, quando $|r| < 1$.

Exercício: Usando os Princípios de Indução Matemática, demonstrar as propriedades das somas finitas:

1. Se C é uma constante, então
$$\sum_{k=1}^{n} C = nC$$

2. Propriedade da soma

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k)+g(k)] = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$$

3. Propriedade da homogeneidade

$$\sum_{k=1}^{n} cf(k) = c\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

4. Propriedade telescópica

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)] = f(n+1)-f(1)$$

Exercício: Usando propriedades telescópicas e a função dada, mostre que:

1. se $f(n) = n^2$, então a soma dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. se $f(n) = n^3$, então a soma dos n primeiros números ímpares é:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

3. se $f(n) = n^3$, a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. se $f(n) = n^4$, então a soma dos cubos dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

5. se $f(n) = n^5$, então a soma dos quárticos dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

6. se $f(n) = n^6$, então a soma dos quínticos dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \text{Exiba a expressão da soma e demonstre}$$

Bibliografia

[1] Alencar Filho, E. *Aritmética dos inteiros*. Nobel. S.Paulo. 1987.

[2] Amoroso Costa, M. *As idéias Fundamentais da Matemática e outros ensaios*, Convívio e EDUSP, S.Paulo. 1981.

[3] Ayres Jr, F. *Álgebra Moderna*. McGraw-Hill do Brasil. S. Paulo. 1971.

[4] Barbosa, R.M. *Elementos de Lógica aplicada ao ensino secundário*, Nobel. S.Paulo. 1970.

[5] Boyer, Carl. B. *História da Matemática*, Edgard Blücher, S.Paulo. 1974.

[6] Eves, Howard *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp. Campinas-SP. 2002.

[7] Figueiredo, D.G. *Análise I*, Edit. UnB e LTC Editora, Rio, 1975.

[8] Kaplan, W. *Cálculo Avançado, vols. 1 e 2*. Edgard Blücher e EDUSP. S.Paulo. 1972.

[9] Kurosh, A.G. *Curso de Álgebra Superior*. Editorial Mir. Moscu. 1968.

[10] Lang,S. *Analysis I*. Addison-Wesley. Reading, Massachusets. 3rd. printing. New York. 1973.

[11] Lipschutz, S. *Teoria dos Conjuntos*. Ao Livro Técnico. Rio. 1967.

[12] Sodré, U. *Análise na reta* (Notas de aulas), Dep. de Matemática, Univ. Estadual de Londrina, 1982, 1999, 2001, 2005, 2006.

[13] Sodré, U. *LaTeX Básico com o TeXnicCenter*. Tutorial para a editoração de trabalhos de Matemática. Matemática-UEL. Londrina. 2005.

[14] White, A.J. *Análise Real: Uma introdução*, Edgard Blücher, S.Paulo. 1973.