Elementos de Matemática

Roteiro no.2 para as atividades didáticas de 2007
Versão compilada no dia 27 de Abril de 2007.

Departamento de Matemática - UEL

Prof. Ulysses Sodré
E-mail: ulysses@matematica.uel.br
Matemática Essencial: http://www.mat.uel.br/matessencial/

Resumo: Notas de aulas construídas com materiais usados em nossas aulas na UEL. Elas devem ser usadas como roteiro para as aulas e não espero que elas venham a substituir qualquer livro sobre o assunto. Alguns conceitos foram obtidos em livros citados na Bibliografia, mas os assuntos foram bastante modificados. Em português, há pouco material de domínio público, mas em inglês existe muito material que pode ser obtido na Internet. Sugiro que o leitor pesquise para obter materiais gratuitos para os seus estudos.

Mensagem: ' No princípio era o Verbo, e o Verbo estava com Deus, e o Verbo era Deus. Ele estava no princípio com Deus. Todas as coisas foram feitas por intermédio dele, e sem ele nada do que foi feito se fez. Nele estava a vida, e a vida era a luz dos homens; a luz resplandece nas trevas, e as trevas não prevaleceram contra ela. (...) Estava ele no mundo, e o mundo foi feito por intermédio dele, e o mundo não o conheceu. Veio para o que era seu, e os seus não o receberam. Mas, a todos quantos o receberam, aos que crêem no seu nome, deu-lhes o poder de se tornarem filhos de Deus; os quais não nasceram do sangue, nem da vontade da carne, nem da vontade do varão, mas de Deus. E o Verbo se fez carne, e habitou entre nós (...)' A Bíblia Sagrada, João 1:1-15

Conteúdo

Capítulo 1

Relações e Funções

1.1 Relações e Funções

Definição 1 (Par ordenado)**.** *Um par ordenado* (a, b) *é o conjunto na forma*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Os elementos a *e* b *do par* (a, b) *são as coordenadas. A primeira coordenada recebe o nome de* **abscissa** *e a segunda coordenada recebe o nome de* **ordenada***.*

Exercício: Usando a definição acima, demonstrar que dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Definição 2 (Produto cartesiano)**.** *Se* A *e* B *são conjuntos não vazios, o produto cartesiano entre* A *e* B*, denotado por* $A \times B$*, é o conjunto de todos os pares ordenados de* $A \times B$*, isto é:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad e \quad b \in B\}$$

Quando $A = \emptyset$ *ou* $B = \emptyset$*, escrevemos* $A \times B = A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$*.*

Definição 3 (Produto de um número por um conjunto)**.** *O produto do número* r *pelo conjunto* X*, é definido por* $r.X = \{rx : x \in X\}$*.*

Exemplo 1 (Conjunto dos números pares)**.** *O produto do número* 2 *pelo conjunto* Z *dos números inteiros, é o conjunto dos números pares:*

$$2Z = \{2z : z \in Z\} = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$$

Definição 4 (Relação). *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma relação R no produto cartesiano $A \times B$, é qualquer subconjunto de $A \times B$, isto é, um conjunto R tal que $R \subset A \times B$.*

Definição 5 (Aplicação). *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma aplicação F no produto cartesiano $A \times B$, é uma relação em $A \times B$, que satisfaz às duas propriedades:*

1. *Para cada $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in F$.*
   Todo elemento de A deve estar associado a algum elemento de B.
2. *Se $(x, y_1) \in F$ e $(x, y_2) \in F$, então $y_1 = y_2$.*
   Cada elemento de A, só pode estar associado a UM elemento de B.

Na literatura em geral, uma aplicação f em $A \times B$ é denotada por $f : A \to B$.

Observação 1 (Relação que não é aplicação). *$R = \{(x, y) \in R^2 : x^2+y^2=1\}$ é uma relação em R^2 que não é uma aplicação, pois para um mesmo elemento $x = 0$, existem dois correspondentes $y = -1$ e $y = 1$ tal que $x^2 + y^2 = 1$.*

Observação 2 (Função). *Comumente, a palavra* aplicação *é substituída pela palavra* função *de modo livre, mas na literatura recente observamos que esta modificação deve ser usada se $B \subset R$.*

Observação 3. *O nome da função é tomado do contradomínio Y.*

1. *Se Y é um conjunto de números reais, temos uma função real.*
2. *Se Y é um conjunto de vetores, temos uma função vetorial.*
3. *Se Y é um conjunto de matrizes, temos uma função matricial.*
4. *Se Y é um conjunto de números complexos, a função é complexa.*

Definição 6 (Domínio, Contradomínio e Imagem de uma aplicação). *Seja f uma aplicação em $A \times B$. Em geral, a aplicação f é pensada em função do seu* gráfico, *que é o desenho da* curva *representativa de f, razão pela qual é conhecida como o gráfico de f, denotada por*

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B : x \in A, y \in B, y = f(x)\}$$

sendo que f associa a cada $x \in A$ um único $y \in B$ tal que $y = f(x)$. O domínio de f, denotado por $\mathtt{Dom}(f)$ é o conjunto A, o contradomínio de f, *denotado por* $\texttt{Codom}(f)$ *é o conjunto* B *e a imagem de* f*, denotada por* $\texttt{Im}(f)$ *é definida por*

$$f(A) = \{y \in B, \textit{existe } x \in A : y = f(x)\}$$

Exemplo 2. *A função quadrática* $f : R \to [0, \infty)$ *pode ser escrita como:*

$$G(f) = \{(x, y) \in R^2 : x \in R, y \in R, y = x^2\}$$

ou na forma $f : R \to R$ *definida por* $f(x) = x^2$ *sendo* $\texttt{Dom}(f) = R$*,* $\texttt{Codom}(f) = [0, \infty)$ *e* $\texttt{Im}(f) = [0, \infty)$*.*

Definição 7 (Restrição de uma aplicação). *Seja* $f : A \to B$ *uma aplicação e* S *é um subconjunto de* A*. A restrição de* f *ao conjunto* S*, denotado por* $f|_S : S \to B$*, é a função que coincide com a função* f *sobre o conjunto* S*, isto é:*

$$f|_S(x) = f(x), \quad x \in S$$

Exemplo 3. *A função* $f : R \to R$*, definida por* $f(x) = x^2$ *pode ter a sua definição restrita ao conjunto* $[0, \infty)$ *de modo que*

$$f|_{[0,\infty)} : [0, \infty) \to R, \quad f(x) = x^2$$

Definição 8 (Extensão de uma função). *Podemos estender uma aplicação* $f : A \to B$ *a um conjunto* $M \supset A$ *tal que a aplicação estendida* $\overline{f} : M \to B$ *coincida com a função original sobre o conjunto* A*, isto é:*

$$\overline{f}(x) = f(x), \quad x \in A$$

Exemplo 4. *A função* $f : R - \{0\} \to R$ *definida por* $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ *não tem sentido para* $x = 0$*, mas* f *pode ser estendida à função* **sinc** *sobre todo o conjunto* R *definindo* $f(0) = 1$*. Esta forma é muito usada em Análise.*

$$\texttt{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \textit{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \textit{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

A função **sinc** *é utilizada em transmissão digital de sinais.*

Definição 9 (Aplicação injetiva). *Uma aplicação* $f : A \to B$ *é injetiva, injetora, unívoca ou 1-1, se:*

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \textit{implica que} \quad x_1 = x_2$$

ou equivalentemente,

$$x_1 \neq x_2 \quad \textit{implica que} \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplo 5. *A função $f : R \to R$, definida por $f(x) = x^2$ não é injetiva, uma vez que $f(-2) = f(2)$, mas a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é injetiva.*

Definição 10 (Aplicação sobrejetiva)**.** *Uma aplicação $f : A \to B$ é sobrejetiva, sobre ou sobrejetora, se $f(A) = B$.*

Exemplo 6. *A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva, pois não existe $x \in R$ tal que $f(x) = -2$, mas a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é sobrejetiva.*

Definição 11 (Aplicação bijetiva)**.** *Uma aplicação $f : A \to B$ é bijetiva, bijetora ou uma correspondência biunívoca, se f é injetiva e também sobrejetiva.*

Exemplo 7. *A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ não é bijetiva, mas a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva.*

Observação 4 (A palavra `sobre`)**.** *Afirmar que $f : A \to B$ é uma aplicação injetiva* SOBRE *o conjunto B, é equivalente a afirmar que f é bijetiva.*

Definição 12 (Aplicação identidade)**.** *A identidade $I : X \to X$ é uma das mais importantes aplicações da Matemática, definida por $I(x) = x$ para cada $x \in X$. Quando é importante indicar o conjunto X onde a identidade está atuando, a aplicação identidade $I : X \to X$ é denotada por I_X.*

Definição 13 (Aplicação composta)**.** *Sejam as aplicações $f : A \to B$ e $g : B \to C$. A aplicação composta $g \circ f : A \to C$ é definida, para todo $x \in A$, por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Exemplo 8. *Sejam $f : R \to R$ definida por $f(x) = 2x$ e $g : R \to R$ definida por $g(y) = y^2$. A composta $g \circ f : R \to R$ é definida por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

Tomando $h : R \to R$, por $h(x) = 4x^2$, poderemos escrever $h = g \circ f$.

Definição 14 (Aplicações inversas à esquerda e à direita)**.** *Sejam $f : A \to B$, $g : B \to A$ aplicações e $a \in A$ e $b \in B$ elementos arbitrários.*

1. *g é uma inversa à esquerda para f se $g \circ f = I_A$, isto é, $(g \circ f)(a) = a$.*
2. *g é uma inversa à direita para f se $f \circ g = I_B$, isto é, $(f \circ g)(b) = b$.*

3. *A aplicação f tem g como inversa se, g é uma inversa à esquerda e também à direita para f, isto é, $(f \circ g)(a) = I_A(a)$ e $(g \circ f)(b) = I_B(b)$.*

4. *Nem sempre existe a inversa de uma aplicação f, mas quando isto ocorre, ela é denotada por f^{-1}.*

5. *Se a inversa f^{-1} existe, ela é única e a inversa da inversa de f é a própria f, isto é, $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Teorema 1 (Propriedades das aplicações compostas)**.** *Sejam as aplicações $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$. Então, a composta dessas aplicações*

1. *é associativa, isto é $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;*

2. *possui elemento neutro, isto é, $f \circ I = I \circ f = f$.*

Exercício: Sejam as aplicações $f : A \to B$ e $g : B \to C$ e $g \circ f : A \to C$.

1. Mostrar que a composta de duas aplicações nem sempre é comutativa, isto é, em geral vale a relação $f \circ g \neq g \circ f$.

2. Mostrar que se f e g são injetivas, então a composta $g \circ f$ também é injetiva.

3. Mostrar que se f e g são sobrejetivas, então a composta $g \circ f$ também é sobrejetiva.

4. Mostrar que se f e g são bijetivas, então a composta $g \circ f$ também é bijetiva.

5. Mostrar que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

6. Mostrar que se $g \circ f$ é é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.

7. Mostrar que se $g \circ f$ é injetiva e f é injetiva, então g é injetiva.

8. É verdade que a afirmação abaixo é verdadeira?

   "Se $g \circ f$ é injetiva e g é sobrejetiva, então f é sobrejetiva."

   Em caso positivo, demonstre a afirmação. Em caso negativo, apresente um contra-exemplo.

1.2 Imagem direta e Imagem inversa

No que segue, usaremos uma aplicação $f : X \to Y$ para a qual X é o domínio de f e Y é o contradomínio de f.

Definição 15 (Imagem de um conjunto). *Sejam $A \subset X$ e $B \subset X$. Define-se a imagem (direta) do conjunto A pela aplicação f por*

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

Exemplo 9. *Seja $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ e $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. A imagem de A pela aplicação f é dada por $f(A) = \{0, 1, 4\}$.*

Teorema 2. *São válidas as seguintes afirmações:*

1. *Para todo $x \in X$, tem-se que $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.*
2. *Se $A \neq \emptyset$ então $f(A) \neq \emptyset$*
3. *Se $A \subset B$ então $f(A) \subset f(B)$*
4. *$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$*
5. *$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$*

Definição 16 (Imagem inversa de um conjunto). *Sejam $U \subset Y$ e $V \subset Y$. Definimos a imagem inversa do conjunto U pela aplicação f por*

$$f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$$

Exemplo 10. *Seja $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ e $B = \{0, 1, 9\}$. A imagem inversa de B pela aplicação f é dada por $f^{-1}(B) = \{0, -1, 1, -3, 3\}$.*

Teorema 3. *São válidas as seguintes afirmações:*

1. *$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$*
2. *Se $U \subset V$ então $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$*
3. *$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$*
4. *$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$*
5. *$f^{-1}(V^c) = [f^{-1}(V)]^c$*
6. *Se $U \subset V$ então $f^{-1}(V - U) = f^{-1}(V) - f^{-1}(U)$*

Teorema 4. *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação, então*

1. *se $A \subset X$, então $A \subset f^{-1}(f(A))$.*
2. *se $V \subset Y$, então $f(f^{-1}(V)) \subset V$.*

Exercício: Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Demonstrar que:

1. f é injetiva se, e somente se, quaisquer que sejam $A, B \subset X$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Demonstração: Se f é injetiva, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. De um modo geral, a inclusão $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ é válida mas a inclusão $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, necessita que f seja injetiva.

Se $y \in f(A) \cap f(B)$, então existe $a \in A$ com $y = f(a)$ e existe $b \in B$ tal que $y = f(b)$. Se f é injetiva, então a afirmação $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$, assim $a \in A \cap B$ e desse modo $y = f(a) \in f(A \cap B)$. □

Demonstração: Se $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ então f é injetiva. Vamos negar a tese, para chegar à negação da hipótese. Realmente, se f não é injetiva, existem $x_1, x_2 \in X$ sendo $x_1 \neq x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Assim, existem dois conjuntos unitários $A = \{x_1\}$ e $B = \{x_2\}$ tal que $A \cap B = \emptyset$, garantindo que $f(A \cap B) = \{f(x_1\} \cap \{f(x_2\} = \emptyset$ mas $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1\} \cap \{f(x_2\} \neq \emptyset$, contrário à hipótese. □

2. f é injetiva se, e somente se, para todo $Y \subset X$ tem-se

$$f(X - Y) = f(X) - f(Y)$$

Demonstração: Se f é injetiva, então $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$. A inclusão $f(X - Y) \subset f(X) - f(Y)$ é verdadeira para toda função e não precisamos da injetividade da função f. Para demonstrar a inclusão $f(X) - f(Y) \subset f(X - Y)$, existe a necessidade que f seja injetiva.

Se $y \in f(X) - f(Y)$, então $y \in f(X)$ e $y \notin f(Y)$, assim existe $x \in X$ com $y = f(x)$ e existe $z \notin Y$ tal que $y = f(z)$. Se f é injetiva, então $f(x) = f(z)$ implica que $x = z$, assim $x = z \in X - Y$ e desse modo $y = f(x) \in f(X - Y)$. □

Demonstração: Se $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$ então f é injetiva. Vamos negar a tese para obter a negação da hipótese. Realmente, se f não é injetiva, existem $x_1, x_2 \in X$ sendo $x_1 \neq x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Assim, podemos construir dois conjuntos $X = \{x_1, x_2\}$ e $Y = \{x_2\}$

tal que $X - Y = \{x_1\}$, garantindo que $f(X - Y) = \{f(x_1\}$ mas $f(X) - f(Y) = \{y\} - \{y\} = \emptyset$, contrário à hipótese. Concluímos que a afirmação é verdadeira. □

3. f é injetiva se, e somente se, para quaisquer $A, B \subset X$ tem-se

$$f(A - B) = f(A) - f(B)$$

Demonstração. Caso particular do ítem anterior com $X = A$ e $Y = B$. □

4. f é injetiva se, e somente se, para todo $A \subset X$ tem-se $f^{-1}(f(A)) = A$.

Demonstração. Para qualquer função f, tem-se que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Basta demonstrar que se f é injetiva então $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Tomando $x \in f^{-1}(f(A))$, segue que $f(x) \in f(A)$. Como $f(x)$ está na imagem $f(A)$, existe $x_1 \in A$ tal que $f(x) = f(x_1)$. Como f é injetiva, segue que $x = x_1$, assim $x \in A$. Concluímos assim que, se f é injetiva, então $f^{-1}(f(A)) = A$. □

5. f é sobrejetiva se, e somente se, $V \subset Y$ tem-se $f(f^{-1}(V)) = V$.

6. f é bijetiva se, e somente se, para todo $A \subset X$ e para todo $V \subset Y$, tem-se que $f^{-1}(f(A)) = A$ e $f(f^{-1}(V)) = V$.

1.3 Trabalho sobre alguns tipos de funções reais

Identificar o domínio, contradomínio, imagem e gráfico para cada tipo de função: constantes, lineares, quadráticas, polinomiais e racionais.

1.4 Relação de equivalência: classe de equivalência e conjunto quociente

Observação 5 (Elementos relacionados). *Para indicar que dois elementos $x, y \in U$ estão relacionados por uma relação R, denotamos por: xRy ou $(x, y) \in R$ ou $x \equiv y$ $(mod\ R)$.*

Definição 17 (Relação de equivalência). *Uma relação R definida sobre um conjunto U é uma relação de equivalência se é:*

R Reflexiva: Qualquer que seja $x \in U$, tem-se que xRx.

S Simétrica: Se xRy então yRx.

T Transitiva: Se xRy e yRz, então xRz.

Exemplo 11. *(Relação de paridade). Seja o conjunto Z dos números inteiros e a relação sobre Z definida por, xRy se, e somente se, $x-y$ é um número par. Mostramos que esta é uma relação de equivalência, pois valem as propriedades:*

R Qualquer que seja $x \in Z$, tem-se que $x - x = 0$ é par, logo xRx.

S Se xRy então $x - y$ é par, logo $y - x$ também é par, assim yRx.

T Se xRy e yRz, então $x - y$ é par e $y - z$ é par. Dessa maneira, a soma $(x - y) + (y - z) = x - z$ é par, garantindo que xRz.

Exemplo 12. *(Congruência módulo p). Seja Z o conjunto dos números inteiros e a relação sobre Z definida por: $x \equiv y \mod (p)$ se, e somente se, $x-y$ é um múltiplo inteiro de p. É possível mostrar que valem as três propriedades:*

R Qualquer que seja $x \in Z$, tem-se que $x - x = 0$ é múltiplo de p, logo $x \equiv x \mod (p)$.

S Se $x \equiv y \mod (p)$ então $x - y$ é múltiplo de p, logo $y - x$ também é múltiplo de p, assim $y \equiv x \mod (p)$.

T Se $x \equiv y \mod (p)$ e $y \equiv z \mod (p)$, então $x - y$ é múltiplo de p e $y - z$ é múltiplo de p, assim, a soma desses números é um múltiplo de p, logo $(x - y) + (y - z) = x - z$ é múltiplo de p e temos então que $x \equiv z \mod (p)$.

Exemplo 13. *(Relação de equivalência com conjuntos). Seja a coleção de todos os conjuntos em um universo $\mathcal{U}$ e $A, B \in \mathcal{U}$. A relação R definida por, ARB se, e somente se, $A = B$, possui as propriedades: Reflexiva, Simétrica e Transitiva.*

Definição 18 (Classe de equivalência)**.** *Seja R uma relação equivalência definida sobre um conjunto U. A classe de equivalência do elemento $a \in U$ é o subconjunto de U, definido por*

$$\overline{a} = \{x \in U : x \equiv a \mod (R)\}$$

Exemplo 14. *(Classes de equivalência de paridade). Seja o conjunto Z dos números inteiros e a relação sobre Z definida por: xRy se, e somente se, $x - y$ é um número par. O conjunto Z pode ser decomposto em duas classes de equivalência disjuntas e não vazias, isto é, $Z = \overline{0} \cup \overline{1}$, onde*

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in Z : x \equiv 0 \mod (2)\} \quad \textit{Conjunto dos números pares} \\ \overline{1} &= \{x \in Z : x \equiv 1 \mod (2)\} \quad \textit{Conjunto dos números ímpares} \end{aligned}$$

Exemplo 15. *(Classes de congruência módulo 3). Seja o conjunto Z dos números inteiros e a relação sobre Z definida por: $x \equiv y \ (mod\ 3)$ se, e somente se, $x - y$ é divisível por 3. O conjunto Z pode ser decomposto em três classes de equivalência disjuntas e não vazias, isto é, $Z = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2}$, onde*

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in Z : x \equiv 0 \mod (3)\} \\ \overline{1} &= \{x \in Z : x \equiv 1 \mod (3)\} \\ \overline{2} &= \{x \in Z : x \equiv 2 \mod (3)\} \end{aligned}$$

1.5 Relação de ordem

Definição 19 (Relação de ordem)**.** *Uma relação R definida sobre um conjunto U é uma relação de ordem se é:*

R Reflexiva: Qualquer que seja $x \in U$, tem-se que xRx.

A Anti-Simétrica: Se xRy e yRx então $x = y$.

T Transitiva: Se xRy e yRz, então xRz.

Capítulo 2

Seqüências reais

2.1 Seqüências reais

Definição 20 (Seqüência real)**.** *Uma seqüência (ou sucessão) real é uma função* $f : N \to R$ *que associa a cada número natural* $n \in N$ *um número real* $f(n) \in R$*. O conjunto dos números naturais será indicado por:*

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Observação 6 (Seqüência real)**.** *O valor numérico* $f(n)$ *é o termo de ordem* n *da seqüência. Pela definição, o domínio de uma seqüência* f *é um conjunto infinito, mas o contradomínio poderá ser finito ou infinito. O domínio de uma seqüência* f *é indicado por* $\texttt{Dom}(f) = N$ *e a imagem de uma seqüência* f *por* $\texttt{Im}(f) = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$*. Como a imagem de* f*, dada por*

$$f(N) = \{f(n) : n \in N\}$$

está contida no conjunto dos números reais, esta seqüência é dita real.

Exemplo 16 (Seqüências reais)**.** $f(n) = 10$, $f(n) = n$, $f(n) = n^2$, $f(n) = 2^n$ e $f(n) = 1/n$.

Observação 7. *Embora não seja correto, é usual representar uma seqüência pelo seu conjunto imagem, pois facilita o entendimento desse conceito por parte dos novatos no assunto. Para a seqüência* $f : N \to R$ *definida por* $f(n) = 1/n$*, o conjunto imagem* $f(N)$ *desta seqüência é dado por*

$$f(N) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$$

Como é mais fácil trabalhar com conjuntos do que com funções, muitos utilizam o conjunto imagem como sendo a própria seqüência, mas não devemos confundir uma função com as suas propriedades.

Exemplo 17. *(Exemplos importantes de seqüências reais).*

1. **Identidade** *Seja $f : N \to R$ definida por $f(n) = n$. Esta função pode ser representada graficamente de várias formas, sendo que uma delas é o diagrama de Venn-Euler e outra é o gráfico cartesiano*
2. **Números pares** *Seja $f : N \to R$ definida por $f(n) = 2n$. Neste caso, $\mathtt{Im}(f) = \{2, 4, 6, ...\}$.*
3. **Números ímpares** *A função $f : N \to R$ definida por $f(n) = 2n - 1$.*
4. **Recíprocos dos naturais** *A função $f : N \to R$ definida por $f(n) = 1/n$. Neste caso $\mathtt{Im}(f) = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/n, ...\}$.*
5. **Constante** *A função $f : N \to R$ definida, por exemplo, por $f(n) = 3$.*
6. **Nula** *A função $f : N \to R$ definida por $f(n) = 0$. A imagem é o conjunto $\mathtt{Im}(f) = \{0\}$.*
7. **Alternada** *$f : N \to R$ definida por $f(n) = (-1)^n a_n$. os valores desta seqüência ficam alternando o sinal, sendo um negativo e o seguinte positivo, etc. $\mathtt{Im}(f) = \{-a_1, +a_2, -a_3, +a_4, -a_5, +a_6, ...\}$.*
8. **Aritmética** *A função $f : N \to R$ definida por: $f(n) = a_1 + (n-1)r$. Neste caso: $\mathtt{Im}(f) = \{a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, ..., a_1 + (n-1)r, ...\}$.*
9. **Geométrica** *$f : N \to R$ definida por: $f(n) = a_1 q^{n-1}$.Neste caso, temos que $\mathtt{Im}(f) = \{a_1, a_1 q, a_1 q^2, ..., a_1 q^{n-1}, ...\}$.*
10. **Recursiva** *Uma seqüência é recursiva se, o termo de ordem n é obtido como em função dos termos das posições anteriores. As seqüências de Fibonacci aparecem de uma forma natural em estudos de Biologia, Arquitetura, Artes e Padrões de beleza. O livro "A divina proporção: Um ensaio sobre a Beleza na Matemática", H. E. Huntley, Editora Universidade de Brasília, 1985, trata do assunto.*

    A seqüência de Fibonacci é definida por $f : N \to R$ tal que $f(1) = 1$ e $f(2) = 1$ com $f(n+2) = f(n) + f(n+1)$ para $n \geq 1$. O conjunto imagem é $\mathtt{Im}(f) = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}$.

Para obter estes números, utilizamos a construção:

$$\begin{array}{rll} f(1) = & & 1 \\ f(2) = & & 1 \\ f(3) = & f(1)+f(2) = & 1+1=2 \\ f(4) = & f(2)+f(3) = & 1+2=3 \\ f(5) = & f(3)+f(4) = & 2+3=5 \\ f(6) = & f(4)+f(5) = & 3+5=8 \\ f(7) = & f(5)+f(6) = & 5+8=13 \\ f(8) = & f(6)+f(7) = & 8+13=21 \\ f(9) = & f(7)+f(8) = & 13+21=34 \\ ... = & ... = & ... \end{array}$$

Observação 8. *O gráfico de uma seqüência não é formado por uma coleção contínua de pontos mas por uma coleção discreta. Às vezes, usamos retas ou curvas entre dois pontos dados para melhor visualizar o gráfico, mas não podemos considerar tais linhas como representativas do gráfico da seqüência.*

Toda vez que nos referirmos a uma seqüência $f : N \to R$ tal que $f(n) = a_n$, simplesmente usaremos a imagem da seqüência f, através do conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...\}$$

Exemplo 18.
1. *As seqüências $f : N \to R$ definidas por $f(n) = 0$, $g(n) = (-1)^n$ e $h(n) = \cos(n\pi/3)$ são finitas e suas imagens são, respectivamente: $Im(f) = 0$, $Im(g) = -1, 1$ e $Im(h) = 1/2, -1/2, -1, 1$.*

2. *As seqüências $f : N \to R$ definidas por $f(n) = 2n$, $g(n) = (-1)^n n$, $h(n) = \sin(n)$ e $k(n) = \cos(3n)$ são infinitas, pois suas imagens possuem infinitos termos.*

3. *Seja a seqüência infinita $f : N \to R$, cujo conjunto imagem é dado por $\mathtt{Im}(f) = \{5, 10, 15, 20, ...\}$. Observamos que $f(1) = 5 = 5 \times 1$, $f(2) = 10 = 5 \times 2$, $f(3) = 15 = 5 \times 3$, ..., $f(n) = 5n$. Este é um exemplo de uma seqüência aritmética, o que garante que ela possui uma razão $r = 5$, o que permite escrever cada termo como*

$$f(n) = f(1) + (n-1)r$$

No âmbito do Ensino Médio, esta expressão é escrita como:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

2.2 Médias: aritmética, geométrica e harmônica

Definição 1 (Média aritmética). *Se $m > 0$ e $n > 0$ tal que $m \leq n$, definimos a média aritmética entre m e n por*

$$A(m,n) = \frac{m+n}{2}$$

Se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são n números reais positivos, definimos a média aritmética entre eles por

$$A(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Definição 2 (Média geométrica). *Se $m > 0$ e $n > 0$ tal que $m \leq n$, definimos a média aritmética entre m e n por*

$$G(m,n) = \sqrt{mn}$$

Se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são n números reais positivos, definimos a média geométrica entre eles por

$$G(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n}$$

Definição 3 (Média harmônica). *Se $m > 0$ e $n > 0$ tal que $m \leq n$, definimos a média aritmética entre m e n por*

$$\frac{2}{H(m,n)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

Se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são n números reais positivos, definimos a média harmônica entre eles por

$$\frac{1}{H(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}$$

2.3 Médias versus progressões

Definição 4 (PA,PG,PH). *Três números reais a, b e c, nesta ordem, formam uma progressão aritmética (respectivamente geométrica e harmônica), se b é a média aritmética (respectivamente geométrica e harmônica) entre os números a e c.*

Exercício: Pesquisar materiais de Geometria euclidiana para interpretar geometricamente as médias: aritmética, geométrica e harmônica.

Exercício: Mostrar que, se a, b e c são números reais positivos que estão em progressão harmônica, então também estão em progressão harmônica, os três números:

$$\frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{a+c} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a+b}$$

Dica: Mostrar que a média harmônica entre $\frac{a}{b+c}$ e $\frac{c}{a+b}$ é igual a $\frac{b}{a+c}$, usando como válida a relação $b = \frac{2a.c}{a+c}$ ou equivalentemente, $2a.c = a.b+b.c$.

$$\begin{aligned} H(\frac{a}{b+c}, \frac{c}{a+b}) &= \frac{2.\frac{a}{b+c}.\frac{c}{a+b}}{\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}} \\ &= \frac{2.a.c}{a.(a+b)+c.(b+c)} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

2.4 Harmônico global e suas aplicações

Definição 5. *Se m e n são números reais positivos, definimos o harmônico global entre m e n, denotado por $h = h(m,n)$ satisfazendo à relação harmônica:*

$$\frac{1}{h(m,n)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

Como neste caso temos dois números m e n, a média harmônica é o dobro do harmônico global entre estes números, isto é, $H(m,n) = 2h(m,n)$.

Na Página Matemática Essencial você encontrará muitos materiais didáticos contendo aplicações da Matemática. Na pasta *Alegria*, existem alguns passatempos matemáticos e um link sobre Harmonia e Matemática, onde tratamos sobre o uso do harmônico global em aplicações no cálculo de tempos, resistências, capacidades elétricas, capacidades motivas, lentes, geometria, etc.

2.5 Desigualdades envolvendo as médias

Definição 21 (Função crescente). *Uma função $f : X \to R$ é crescente, se $x < y$ implicar que $f(x) \leq f(y)$.*

Lema 1 (Função raiz quadrada). *A função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é bijetiva e crescente.*

Demonstração. Deixada para o aluno como exercício. □

Teorema 5. *Em geral, vale a desigualdade $H(m, n) \leq G(m, n)$ e a igualdade só ocorre quando $m = n$, isto é, $H(n, n) = G(n, n) = n$.*

Demonstração. Como $(n - m)^2 \geq 0$, então $m^2 + n^2 - 2mn \geq 0$. Somando $4mn$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos $m^2 + n^2 + 2mn \geq 4mn$ que também pode ser escrita como

$$(m + n)^2 \geq 4mn$$

Extraindo a raiz quadrada de cada lado da desigualdade:

$$m + n \geq 2\sqrt{mn}$$

de onde segue que

$$\frac{2}{m + n} \leq \frac{\sqrt{mn}}{mn}$$

significando que

$$H(m, n) \leq G(m, n)$$

□

Teorema 6. *Em geral, vale a desigualdade $G(m, n) \leq A(m, n)$ e a igualdade só ocorre quando $m = n$, isto é, $G(n, n) = A(n, n) = n$.*

Demonstração. Como $(n - m)^2 \geq 0$, então $m^2 + n^2 - 2mn \geq 0$. Somando $4mn$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos $m^2 + n^2 + 2mn \geq 4mn$ que pode ser escrita como

$$(m + n)^2 \geq 4mn$$

Extraindo a raiz quadrada de cada lado da desigualdade, obtemos $m + n \geq 2\sqrt{mn}$ e assim

$$\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn}$$

o que garante que $A(m, n) \leq G(m, n)$. $\square$

2.6 Aplicações geométricas das desigualdades

1. Dentre todos os retângulos cuja soma de duas arestas contíguas é igual a 16, determinar aquele que possui a maior área S.

   Dica: Se a e b são as medidas dos lados do retângulo, então $S(a, b) = ab$ indica a área do retângulo e $a + b = 16$. Em geral, $G(a, b) \leq A(a, b)$, mas o máximo da média geométrica $G = G(a, b)$ ocorre, quando $G = A$. Este fato garante que $a = b = 8$.

2. Dentre todos os retângulos com perímetro $2p$, obter aquele que tem área máxima.

   Dica: Sejam a e b as medidas de dois lados contíguos do retângulo, $S(a, b) = ab$ a área do retângulo e $a + b = p$. Temos que $G(a, b) \leq A(a, b)$, mas o máximo da média geométrica $G = G(a, b)$ ocorre, quando $G = A$, isto é, quando $a = b$, logo $a = b = p/2$.

3. Dentre todos os paralelepípedos cuja soma de três arestas que partem de um mesmo vértice é uma constante $3p$, determinar aquele que possui o maior volume.

   Dica: Se a, b e c são as três arestas que partem de um vértice do paralelepípedo, então $V(a, b, c) = abc$ é o volume do paralelepípedo e $a + b + c = 3p$. O máximo da média geométrica $G = G(a, b, c)$ ocorre quando $G = A$, onde A é a média aritmética e este fato, faz com que $a = b = c = p$.

Capítulo 3

Seqüências Aritméticas

3.1 Seqüências aritméticas e PA

Seqüências aritméticas são muito usadas em processos lineares em Matemática. Tais seqüências são conhecidas no âmbito do Ensino Médio, como Progressões Aritméticas infinitas, mas uma Progressão Aritmética finita não é uma seqüência, pois o domínio da função que define a progressão, é um conjunto finito $\{1, 2, 3, ..., m\}$ contido no conjunto N dos números naturais.

Definição 22 (Progressão Aritmética finita)**.** *É uma coleção finita de números reais, caracterizadas pelo fato que, cada termo a partir do segundo, é obtido pela soma do anterior com um número fixo r, denominado razão da PA.*

Na seqüência, apresentamos os elementos básicos de uma Progressão Aritmética da forma:

$$C = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., a_{m-1}, a_m\}$$

1. m é o número de termos da PA.
2. n indica uma posição na seqüência e o índice para a ordem do termo geral a_n no conjunto C.
3. a_n é o n-ésimo termo da PA, que se lê: *a índice n*.
4. a_1 é o primeiro termo da PA, que se lê: *a índice 1*.
5. a_2 é o segundo termo da PA, que se lê: *a índice 2*.

6. a_m é o último elemento da PA.

7. r é a razão da PA e é possível observar que

$$a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \quad ..., \quad a_n = a_{n-1} + r, \quad ..., \quad a_m = a_{m-1} + r$$

A razão de uma Progressão Aritmética, pode ser obtida, subtraindo o termo anterior (antecedente) do termo posterior (conseqüente), ou seja:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ...a_n - a_{n-1} = r$$

Exemplo 19. *(Progressões Aritméticas finitas).*

1. *A PA definida pelo conjunto* $C = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ *possui razão* $r = 3$, *pois* $2 + 3 = 5$, $5 + 3 = 8$, $8 + 3 = 11$ *e* $11 + 3 = 14$.

2. *A PA definida pelo conjunto* $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *possui razão* $r = 1$, *pois* $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$ *e* $4 + 1 = 5$.

3. *A PA definida por* $M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ *possui razão* $r = 3$, *pois* $6 - 3 = 9 - 6 = 12 - 9 = 15 - 12 = 3$.

4. *A PA definida por* $M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ *possui razão* $r = 4$, *pois* $4 - 0 = 8 - 4 = 12 - 8 = 16 - 12 = 4$.

Teorema 7 (Fórmula do termo geral da PA)**.** *Seja a PA com razão* r, *definida por* $P = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\}$. *A fórmula do termo geral desta seqüência é dada por*

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Demonstração. Observamos que:

$$\begin{array}{lll} a_1 & = a_1 & = a_1 + 0r \\ a_2 & = a_1 + r & = a_1 + 1r \\ a_3 & = a_2 + r & = a_1 + 2r \\ a_4 & = a_3 + r & = a_1 + 3r \\ ... & ... & ... \\ a_n & = a_{n-1} + r & = a_1 + (n-1)r \end{array}$$

e obtemos a fórmula do termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

□

Com o material apresentado, podemos obter qualquer termo de uma Progressão Aritmética (PA), sem precisar escrever a PA completamente.

Exemplo 20. *(Sobre termos de uma PA).*

1. *Seja a PA com razão r=5, dada pelo conjunto* $C = \{3, 8, ..., a_{30}, ..., a_{100}\}$. *O trigésimo e o centésimo termos desta PA podem ser obtidos, substituindo os dados da PA na fórmula do termo geral* $a_n = a_1 + (n-1)r$. *Assim:*

$$\begin{aligned} a_{30} &= 3 + (30-1)3 = 90 \\ a_{100} &= 3 + (100-1)3 = 300 \end{aligned}$$

Qual é o termo de ordem $n = 2^20$ *desta PA?*

2. *Para inserir todos os múltiplos de 5, que estão entre 21 e 623, montaremos uma tabela.*

21	25	30	...	615	620	623
a_1	a_2	a_3	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n

Aqui, o primeiro múltiplo de 5 é $a_1 = 25$, *o último múltiplo de 5 é* $a_n = 620$ *e a razão é* $r = 5$. *Substituindo os dados na fórmula do termo geral, obtemos*

$$620 = 25 + (n-1)5$$

de onde segue que $n = 120$, *assim o número de múltiplos de 5 entre 21 e 623, é igual a 120. O conjunto de tais números é dado por*

$$C_5 = \{25, 30, 35, ..., 615, 620\}$$

Definição 23 (Progressões Aritméticas monótonas)**.** *Quanto à monotonia, uma PA pode ser:*

1. *crescente se para todo* $n \geq 1$: $r > 0$ e $a_n < a_{n+1}$.
2. *constante se para todo* $n \geq 1$: $r = 0$ e $a_{n+1} = a_n$.
3. *decrescente se para todo* $n \geq 1$: $r < 0$ e $a_{n+1} < a_n$.

Exemplo 21.

1. *A PA definida pelo conjunto* $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *é crescente, pois* $r = 2$ e $a_1 < a_2 < ... < a_5 < a_6$.
2. *A PA finita* $G = \{2, 2, 2, 2, 2\}$ *é constante.*

3. *A PA definida pelo conjunto $Q = \{2, 0, -2, -4, -6\}$ é decrescente com razão $r = -2$ e $a_1 > a_2 > ... > a_4 > a_5$.*

Exercício: Em uma PA com m termos, mostrar que a razão r pode ser escrita na forma $r = \dfrac{a_m - a_1}{m - 1}$.

Definição 24 (Extremos e Meios em uma PA). *Em uma Progressão Aritmética (finita) dada pelo conjunto:*

$$C = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., a_{m-1}, a_m\}$$

os termos a_1 e a_m são os extremos e os demais: a_2, a_3, ..., a_{m-2}, a_{m-1} são os meios aritméticos.

Exemplo 22. *Na PA definida por $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, os números 1 e 11 são os extremos os números 3, 5, 7 e 9 são os meios aritméticos.*

Definição 25 (Termos eqüidistantes dos extremos). *Em uma PA com m termos, dois termos são eqüidistantes dos extremos se a soma de seus índices é igual a $m + 1$.*

Observação 9 (Termos eqüidistantes dos extremos). *Para a seqüência indicada acima, são eqüidistantes dos extremos os pares de termos*

$$\begin{array}{ccc} a_1 & e & a_m \\ a_2 & e & a_{m-1} \\ a_3 & e & a_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Se a PA possui um número m par de termos, temos $m/2$ pares de termos eqüidistantes dos extremos.

Exemplo 23. *A PA definida por $C = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$, possui um número par de termos e os extremos são $a_1 = 4$ e $a_6 = 24$, assim:*

$$\begin{aligned} a_2 + a_5 &= 8 + 20 && = 28 && = a_1 + a_6 \\ a_3 + a_4 &= 12 + 16 && = 28 && = a_1 + a_6 \\ a_4 + a_3 &= 16 + 12 && = 28 && = a_1 + a_6 \\ a_5 + a_2 &= 20 + 8 && = 28 && = a_1 + a_6 \end{aligned}$$

Se o número m de termos é ímpar, temos $(m-1)/2$ pares de termos eqüidistantes e ainda teremos um termo isolado, de ordem $(m+1)/2$, que é eqüidistante dos extremos.

Exemplo 24. *Na PA de* $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *os números 1 e 9 são os extremos da PA e os números 3, 5 e 7 são os meios da PA. O par de termos eqüidistante dos extremos é formado por 3 e 7, e além disso o número 5 que ficou isolado também é eqüidistante dos extremos.*

Exemplo 25. *A PA definida por* $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$*, possui um número ímpar de termos e os extremos são* $a_1 = 4$ *e* $a_5 = 20$*, logo*

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 &= 8 + 16 &= 24 &= a_1 + a_5 \\ a_3 + a_3 &= 12 + 12 &= 24 &= a_1 + a_5 \\ a_4 + a_2 &= 16 + 8 &= 24 &= a_1 + a_5 \end{aligned}$$

Definição 26 (Interpolação aritmética)**.** *Interpolar* k *meios aritméticos entre os números a e b, significa obter uma PA com* $k + 2$ *termos cujo primeiro termo é* a *e b é o último termo. Para realizar a interpolação, basta determinar a razão da PA.*

Exemplo 26. *Para interpolar 6 meios aritméticos entre* $a = -9$ *e* $b = 19$*, é o mesmo que obter uma PA tal que* $a_1 = -9$*,* $a_m = 19$ *e* $m = 8$*. Como* $r = \dfrac{a_m - a_1}{m - 1}$*, então* $r = \dfrac{19 - (-9)}{7} = 4$ *e assim a PA ficará na forma do conjunto:*

$$C = \{-9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19\}$$

Teorema 8 (Soma dos n primeiros termos de uma PA (finita))**.** *Em uma PA (finita), a soma dos* n *primeiros termos é dada pela fórmula:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Demonstração. Em uma PA (finita), a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos desta PA. Assim:

$$a_2 + a_{m-1} = a_3 + a_{m-2} = a_4 + a_{m-3} = ... = a_n + a_{m-n+1} = ... = a_1 + a_m$$

Seja a soma S_n dos n primeiros termos da PA, dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n - 2 + a_{n-1} + a_n$$

Como a soma de números reais é comutativa, escrevemos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_n - 2 + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando membro a membro as duas últimas expressões acima, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como todas as n expressões em parênteses são somas de pares de termos eqüidistantes dos extremos, segue que a soma de cada termo, sempre será igual a $a_1 + a_n$, então:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

Assim, temos a fórmula para o cálculo da soma dos n primeiros termos da PA.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$\square$

Exemplo 27. *Para obter a soma dos 30 primeiros termos da PA definida por* $C = \{2, 5, 8, ..., 89\}$. *Aqui* $a_1 = 2$, $r = 3$ *e* $n = 30$. *Aplicando a fórmula da soma, obtida acima, temos:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2 + 89) \times 30}{2} = \frac{91 \times 30}{2} = 1365$$

3.2 Aplicações à Matemática Financeira: juros simples

Construir um trabalho relacionando seqüências aritméticas com Matemática Comercial e Financeira.

Capítulo 4

Seqüências Geométricas

4.1 Seqüências geométricas e PG

Seqüências importantes são as geométricas, conhecidas no âmbito do Ensino Médio, como Progressões Geométricas (PG) infinitas, mas uma Progressão Geométrica finita não é uma seqüência, uma vez que o domínio da PG finita é um conjunto finito $\{1, 2, 3, ..., m\}$ que é um subconjunto próprio de N.

Seqüência geométricas são usadas em estudos de Matemática Financeira, para analisar o Montante de um valor capitalizado, estudar Taxas de juros, Financiamentos e Prestações. Seqüências geométricas também aparecem em estudos de decaimento radioativo (teste do Carbono 14 para a análise da idade de um fóssil ou objeto antigo).

No Ensino Superior tais seqüências aparecem em estudos de Seqüências e Séries de números e de funções, sendo que a série geométrica (um tipo de seqüência obtida pelas somas de termos de uma seqüência geométrica) é importante para obter outras séries numéricas e séries de funções.

Definição 27 (Progressão Geométrica finita)**.** *Uma Progressão Geométrica finita, é uma coleção finita de números reais com as mesmas características que uma seqüência geométrica, mas possui um número finito de elementos. As Progressões Geométricas (PG) são caracterizadas pelo fato que a divisão do termo seguinte pelo termo anterior é um quociente fixo. Se este conjunto possui m elementos, ele pode ser denotado por*

$$G = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., a_{m-1}, a_m\}$$

No caso de uma Progressão Geométrica finita, temos os seguintes termos técnicos.

1. m *é o número de termos da PG.*
2. n *indica uma posição na seqüência e também o índice para a ordem do termo geral* a_n *no conjunto* G.
3. a_n *é o n-ésimo termo da PG, que se lê* a índice n.
4. a_1 *é o primeiro termo da PG, que se lê* a índice 1.
5. a_2 *é o segundo termo da PG, que se lê* a índice 2.
6. a_m *é o último elemento da PG.*
7. q *é a razão da PG, que pode ser obtida pela divisão do termo posterior pelo termo anterior, ou seja na PG definida por*

$$G = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\}$$

temos que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Observação 10. *Na Progressão Geométrica (PG), cada termo é a média geométrica entre o antecedente (anterior) e o conseqüente (seguinte) do termo tomado, daí a razão de tal denominação para este tipo de seqüência.*

Teorema 9 (Fórmula do termo geral da PG)**.** *A fórmula do termo geral de uma PG de razão* q*, cujo primeiro termo é* a_1*, o número de termos é* n *e* a_n *é o n-ésimo termo, é*

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Demonstração. Observamos que:

$$\begin{array}{rclcl}
a_1 & = & a_1 & = & a_1 q^0 \\
a_2 & = & a_1 q & = & a_1 q^1 \\
a_3 & = & a_2 q & = & a_1 q^2 \\
a_4 & = & a_3 q & = & a_1 q^3 \\
... & = & ... & = & ... \\
a_n & = & a_{n-1} q & = & a_1 q^{n-1}
\end{array}$$

Assim temos a fórmula do termo geral da PG, dada pela forma indutiva:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

□

Exemplo 28. *(Progressões geométricas finitas).*

1. *Seja a PG finita, definida por $G = \{2, 4, 8, 16, 32\}$. A razão $q = 2$ desta PG é obtida pela divisão do conseqüente pelo antecedente, isto é,*

$$\frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

2. *Para a PG definida por $G = \{8, 2, 1/2, 1/8, 1/32\}$, a divisão de cada termo seguinte pelo anterior é $q = 1/4$, pois:*

$$\frac{1/32}{1/8} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1/2}{2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

3. *Para a PG definida por $T = \{3, 9, 27, 81\}$, temos:*

$$q = \frac{9}{3} = \frac{27}{3} = \frac{81}{3} = 3$$

4. *Para a PG $A = \{10, 100, 1000, 10000\}$, temos:*

$$q = \frac{100}{10} = \frac{1000}{100} = \frac{10000}{1000} = 10$$

5. *Para obter o termo geral da seqüências geométrica $E = \{4, 16, 64, ...\}$, tomamos $a_1 = 4$ e $a_2 = 16$. Assim $q = 16/4 = 4$. Substituindo estes dados na fórmula do termo geral da seqüência geométrica, obtemos:*

$$f(n) = a_1.q^{n-1} = 4^1.4^{n-1} = 4^{(n-1)+1} = 4^n$$

6. *Para obter o termo geral da PG tal que $a_1 = 5$ e $q = 5$, usamos a fórmula do termo geral da PG, para escrever:*

$$a_n = a_1.q^{n-1} = 5.5^{n-1} = 5^1.5^{n-1} = 5^{1+(n-1)} = 5^n$$

Definição 28 (Progressões Geométricas monótonas)**.** *Quanto ao aspecto de monotonia, uma PG pode ser:*

1. *Crescente, se para todo* $n \geq 1$: $q > 1$ e $a_n < a_{n+1}$.
2. *Constante, se para todo* $n \geq 1$: $q = 1$ e $a_n = a_{n+1}$.
3. *Decrescente, se para todo* $n \geq 1$: $0 < q < 1$ e $a_n > a_{n+1}$.
4. *Alternada, se para todo* $n \geq 1$: $q < 0$.

Exemplo 29. 1. *A PG definida por* $U = \{5, 25, 125, 625\}$ *é crescente, pois* $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

2. *A PG definida por* $O = \{3, 3, 3\}$ *é constante, pois* $a_1 = a_2 = a_3 = 3$.
3. *A Progressão Geométrica definida por* $N = \{-2, -4, -8, -16\}$ *é decrescente, pois* $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.
4. *A Progressão Geométrica definida por* $N = \{-2, 4, -8, 16\}$ *é alternada, pois* $q = -2 < 0$.

Definição 29 (Interpolação Geométrica)**.** *Interpolar* k *meios geométricos entre dois números dados* a *e* b*, equivale a obter uma PG com* $k+2$ *termos, em que* a *é o primeiro termo da PG,* b *é o último termo da PG. Para realizar a interpolação geométrica, basta obter a razão da PG.*

Exemplo 30. *Para interpolar três meios geométricos entre 3 e 48, basta tomar* $a_1 = 3$, $a_n = 48$, $k = 3$ *e* $n = 5$ *para obter a razão da PG. Como* $a_n = a_1 q^{n-1}$*, então* $48 = 3q^4$ *e segue que* $q^4 = 16$*, garantindo que a razão é* $q = 2$*. Temos então a PG:* $R = \{3, 6, 12, 24, 48\}$.

Teorema 10 (Fórmula da soma dos termos de uma PG finita)**.** *Seja a PG finita,* $Y = \{a_1, a_1 q, a_1 q^2, ..., a_1 q^{n-1}\}$*. A soma dos* n *primeiros termos desta PG é dada por*

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Demonstração. Seja a soma dos n termos dessa PG, indicada por:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1}$$

Se $q = 1$, temos:

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1 = n a_1$$

Se q é diferente de 1, temos

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima pela razão q, obtemos

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Dispondo estas expressões de uma forma alinhada, obtemos:

$$\begin{array}{llllll} S_n & = a_1+ & a_1q+ & ... & +a_1q^{n-1} & \\ qS_n & = & a_1q+ & ... & +a_1q^{n-1} & +a_1q^n \end{array}$$

Subtraindo membro a membro, a expressão de baixo da expressão de cima, obtemos

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$

que pode ser simplificada em

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

ou seja

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

que é a fórmula para a soma dos n termos de uma PG finita de razão $q \neq 0$. $\square$

Exemplo 31. *(Somas de termos em uma PG).*

1. *Para obter a razão da PG definida por $W = \{3, 9, 27, 81\}$, devemos dividir o termo posterior pelo termo anterior, para obter $q = 9/3 = 3$. Como $a_1 = 3$ e $n = 4$, substituímos os dados na fórmula da soma dos termos de uma PG finita, para obter:*

$$S_4 = 3\frac{3^4-1}{3-1} = 3\frac{81-1}{2} = 3\frac{80}{2} = 120$$

   Confirmação: $S_4 = 3 + 9 + 27 + 81 = 120$.

2. *Para obter a soma dos 5 primeiros termos de uma PG cuja razão é $q = 1$ e $a_1 = 2$, podemos identificar a PG com o conjunto $X = \{2, 2, 2, 2, 2\}$. Como a razão da PG é $q = 1$, temos que a soma dos seus termos é obtida por $S_5 = 2 \times 5 = 10$.*

Observação 11. *Uma seqüência geométrica (infinita) é semelhante a uma PG, mas nesse caso ela possui infinitos elementos, pois o domínio desta função é o conjunto N.*

Teorema 11 (Soma de uma série geométrica)**.** *Seja uma seqüência geométrica $f : N \to R$ definida por $f(n) = a_1q^{n-1}$, cujos termos estão no conjunto infinito:*

$$F = \{a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, ..., a_1q^{n-1}, ...\}$$

Se $-1 < q < 1$, a soma dos termos desta seqüência geométrica, é dada por

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Demonstração. A soma dos termos desta seqüência geométrica, é a série geométrica de razão q e não é obtida da mesma forma que no caso das PGs (finitas), mas o processo finito é usado no presente cálculo.

Consideremos a soma dos termos desta seqüência geométrica, como:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

que também pode ser escrita da forma

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + ...$$

ou na forma simplificada

$$S = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ...)$$

A expressão matemática dentro dos parênteses

$$Soma = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ...$$

é carente de significado, pois temos uma quantidade infinita de termos e dependendo do valor de q, esta expressão, perderá o sentido real.

Analisaremos alguns casos possíveis, sendo que o último é o mais importante nas aplicações.

1. Se $q > 1$, digamos $q = 2$, temos que

   $$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1} + ... = \text{infinito} = \infty$$

   e o resultado não é um número real.

2. Se $q = 1$, temos que

$$S = 1 + 1 + 1 + ... + 1 + ... = \infty$$

e o resultado não é um número real.

3. Se $q = -1$, temos que

$$S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 ... - 1 + 1 + ...$$

e dependendo do modo como reunirmos os pares de números consecutivos desta PG infinita, obtemos:

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + ... + (-1 + 1) + ... = 1$$

mas se tomarmos:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... + (1 - 1) + ... = 0$$

ficará claro que $q = -1$, a soma dos termos desta série se tornará complicada.

4. Se $q < -1$, digamos $q = -2$, temos que

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 - 64 + ... + 2^{n-1} - 2^n + ...$$

que também é uma expressão carente de justificativa.

5. Se $-1 < q < 1$, temos o caso mais importante para as aplicações. Neste caso as séries geométricas são conhecidas como séries convergentes. Quando uma série não é convergente, dizemos que ela é divergente. Consideremos

$$Soma = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ...$$

A soma dos n primeiros termos desta série geométrica, será indicada por:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}$$

e já mostramos antes que

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

mas se tomamos $-1 < q < 1$, a potência q^n se aproxima do valor zero, à medida que o expoente n se torna muito grande e sem controle (os matemáticos dão o nome infinito ao pseudo-número com esta propriedade).

Para obter o valor de $Soma$, devemos tomar o *limite* de S_n quando n tende a infinito. Assim, concluímos que para $-1 < q < 1$, vale a igualdade:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \frac{1}{1-q}$$

De uma forma geral, se $-1 < q < 1$, a soma

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + ...$$

pode ser obtida por:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$\square$

Exemplo 32. *(Somas de séries geométricas).*

1. *Para obter a soma dos termos da seqüência geométrica $S = \{2, 4, 8, 16, ...\}$, devemos obter a razão, que neste caso é $q = 2$. Assim, a soma dos termos desta PG infinita é dada por:*

$$S = 2 + 4 + 8 + 16 + ...$$

e esta série é divergente.

2. *Para obter a soma dos termos da seqüência geométrica definida pelo conjunto $Y = \{5, 5/2, 5/4, 5/8, 5/16, ...\}$, temos que a razão é $q = 1/2$ e $a_1 = 5$, recaindo no caso (e), assim, basta tomar*

$$S = \frac{5}{1-2} = 10$$

Exercícios:

1. Seja a seqüência f tal que $f(N) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$. Determinar os elementos indicados:

(a) $f(1)$ (b) $f(3)$ (c) $f(4) - f(1)$ (d) $f(4) + f(2)$

2. Para a seqüência $f : N \rightarrow R$ dos números ímpares positivos, definida por $f(n) = 2n - 1$, determinar:
   (a) Os 4 primeiros termos da seqüência.
   (b) A imagem de f.
   (c) O n-ésimo termo da seqüência.
   (d) A soma dos n primeiros números ímpares positivos.
3. Seja a seqüência $f : N \rightarrow R$ dada por $f(n) = \dfrac{1 + 3n}{2n}$.
   (a) Calcular a soma dos 4 primeiros termos de f.
   (b) Verificar se os números 30/19 e 31/20 são termos da seqüência e se forem, indique as suas ordens.
   (c) Analisar se esta é uma seqüência geométrica.
4. Uma família marcou um churrasco, com amigos e parentes no dia 13 de fevereiro de um certo ano. A dona da casa está preocupada, pois o açougueiro entrega carne de três em três dias. Sabendo-se que ele entregou carne no dia 13 de janeiro, será que ele entregará carne no dia 13 de fevereiro?
5. Apresente o conjunto imagem da seqüência f que indica a altura de um avião que levanta vôo do solo numa proporção de 3 metros por minuto.
6. Qual é a seqüência (função) real f tal que $f(N) = \{2, 7, 12, ...\}$?
7. Determinar o quinto termo da seqüência aritmética definida pelo conjunto $C = \{a + b, 3a - 2b, ...\}$.
8. Calcular o número de termos da PA definida por $W = \{5, 10, ..., 785\}$.
9. Um garoto dentro de um carro em movimento, observa a numeração das casas do outro lado da rua, começando por $2, 4, 6, 8$. De repente passa um ônibus em sentido contrário, obstruindo a visão do garoto de forma que quando ele voltou a ver a numeração, já estava em 22.
   (a) Pode-se afirmar que esta é uma seqüência aritmética? Por que?
   (b) Quantos números o garoto deixou de ver?

10. Um operador de máquina chegou 30 minutos atrasado no seu posto de trabalho, mas como a máquina que ele monitora é automática, ela começou a trabalhar na hora programada.

    (a) Se a máquina produz 10^n peças por minuto em n minutos, quantas peças a máquina produziu até a chegada do operador?

    (b) Se depois de 1 hora, a máquina produz a mesma quantidade de peças, quantas peças terá feito a máquina ao final do expediente de 4 horas?

11. Exiba uma seqüência numérica em que cada termo é a média harmônica do antecedente e do conseqüente?

4.2 Aplicações à Matemática Financeira: juros compostos

Trabalho para os alunos.

Bibliografia

[1] Alencar Filho, E. *Aritmética dos inteiros*. Nobel. S.Paulo. 1987.

[2] Amoroso Costa, M. *As idéias Fundamentais da Matemática e outros ensaios*, Convívio e EDUSP, S.Paulo. 1981.

[3] Ayres Jr, F. *Álgebra Moderna*. McGraw-Hill do Brasil. S. Paulo. 1971.

[4] Barbosa, R.M. *Elementos de Lógica aplicada ao ensino secundário*, Nobel. S.Paulo. 1970.

[5] Boyer, Carl. B. *História da Matemática*, Edgard Blücher, S.Paulo. 1974.

[6] Eves, Howard *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp. Campinas-SP. 2002.

[7] Figueiredo, D.G. *Análise I*, Edit. UnB e LTC Editora, Rio, 1975.

[8] Kaplan, W. *Cálculo Avançado, vols. 1 e 2*. Edgard Blücher e EDUSP. S.Paulo. 1972.

[9] Kurosh, A.G. *Curso de Álgebra Superior*. Editorial Mir. Moscu. 1968.

[10] Lang,S. *Analysis I*. Addison-Wesley. Reading, Massachusets. 3rd. printing. New York. 1973.

[11] Lipschutz, S. *Teoria dos Conjuntos*. Ao Livro Técnico. Rio. 1967.

[12] Sodré, U. *Análise na reta* (Notas de aulas), Dep. de Matemática, Univ. Estadual de Londrina, 1982, 1999, 2001, 2005, 2006.

[13] Sodré, U. *LaTeX para Matemática*. Tutorial para a editoração de trabalhos de Matemática. Matemática-UEL. Londrina. 2006.

[14] White, A.J. *Análise Real: Uma introdução*, Edgard Blücher, S.Paulo. 1973.