# Provas de 2006 - Análise Real - Noturno - 3MAT003

Matemática - Prof. Ulysses Sodré - Londrina-PR - provas2006.tex

1. Definir a operação $\varphi$ entre os conjuntos $A$ e $B$ por $\varphi(A,B) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

   (a) Demonstrar que a operação $\varphi$ é comutativa, isto é, $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$.

   (b) Exibir um conjunto $E$ tal que $\varphi(E,X) = X$ para todo conjunto $X$.

   (c) Dado o conjunto $A$, exibir um conjunto $B$ tal que $\varphi(A,B) = E$.

   Dem.: (a) Como a reunião e a interseção de conjuntos é comutativa, segue que

   $$\varphi(A,B) = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) = \varphi(B,A)$$

   (b) Tomando $E = \emptyset$, temos que

   $$\varphi(E,X) = (\emptyset \cup X) - (\emptyset \cap X) = X - \emptyset = X$$

   (c) Tomando $B = A$, segue que

   $$\varphi(A,B) = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$$

   Observação: A operação $\varphi$ representa a diferença simétrica entre conjuntos e esta é a mesma questão já apresentada nas provas de 2001-2005.

2. Usando o PIM, mostre que se $S_{n+1} = S_n + (n+1)^4$ e $S_1 = 1$, então

   $$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

   Dem.: (Parte mais difícil) Substituindo $n$ por $n+1$, obtemos

   $$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)(3(n+1)^2+3(n+1)-1)}{30} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)[3(n^2+2n+1)+3n+3-1]}{30} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2+6n+3+3n+3-1)}{30} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5)}{30} \end{aligned}$$

   Se mostrarmos que para $n > 1$ vale a relação $S_{n+1} = S_n + (n+1)^4$ teremos demonstrado o resultado desejado.

Para facilitar as coisas, utilizaremos a diferença entre $S_{n+1}$ e $S_n$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= \frac{n+1}{30}[(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5) - n(2n+1)(3n^2+3n-1)] \\
&= \frac{n+1}{30}[(2n^2+7n+6)(3n^2+9n+5) - (2n^2+n)(3n^2+3n-1)] \\
&= \frac{n+1}{30}[(6n^4+39n^3+91n^2+89n+30) - (6n^4+9n^3+n^2-n)] \\
&= \frac{n+1}{30}(39n^3+91n^2+89n+30-9n^3-n^2+n) \\
&= \frac{n+1}{30}(30n^3+90n^2+90n+30) \\
&= (n+1)(n^3+3n^2+3n+1) \\
&= (n+1)(n+1)^3 \\
&= (n+1)^4
\end{aligned}$$

3. (a) Se $a > 1$, mostre que $1 < a < a^2 < ... < a^n < ....$
   (b) Usar o resultado (a) para mostrar que se $m < n$ então $a^m < a^n$, com $m, n \in N$.

   Demonstração: Consideremos a proposição $P(n)$ definida para todo $n \in N$ tal que se $1 < a$ então $a^{n-1} < a^n$.

   A proposição $P(1)$ é verdadeira pois

$$1 = a^0 = a^{1-1} < a^1 = a$$

   Suponhamos agora que a proposição $P(n)$ é verdadeira, isto é, se $n > 1$ então $a^{n-1} < a^n$.

   Multiplicando ambos os membros da desigualdade (hipótese de indução) pelo número positivo $a$, obtemos

$$a.a^{n-1} < a.a^n$$

   ou seja

$$a^n < a^{n+1}$$

   que corresponde à veracidade da proposição $P(n+1)$.

   Concluímos que quando os expoentes da potência $a > 1$ crescem, os valores de $a^n$ também crescem, para todo $n \in N$, isto é,

$$1 < a < a^2 < ... < a^n < ...$$

   Se $m < n$, existe um número $p > 0$ tal que $m+p = n$, garantindo pela demonstração acima que $a^p > 1$.

   Multiplicando esta última desigualdade por $a^m$, obtemos

$$a^m = 1.a^m < a^p.a^m = a^{m+p} = a^n$$

4. Seja $f : X \to Y$. Demonstrar que $f$ é injetiva, se e somente se, para quaisquer $A, B \subset X$ tem-se que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

   Dem.:($\Rightarrow$) Mostraremos que se $f$ é injetiva, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Como $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ vale em geral, utilizando a hipótese que $f$ é injetiva, provaremos que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

   Se $y \in f(A) \cap f(B)$, existe $a \in A$ com $y = f(a)$ e existe $b \in B$ com $y = f(b)$. Se $f$ é injetiva, então a afirmação $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$, assim $a \in A \cap B$ e desse modo $y = f(a) \in f(A \cap B)$.

   Dem.:($\Leftarrow$) Mostraremos agora que se $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ então $f$ é injetiva. Negaremos a tese e chegaremos à negação da hipótese.

   Se $f$ não é injetiva, existem pelos menos dois elementos diferentes $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ e podemos construir dois conjuntos unitários $A = \{x_1\}$ e $B = \{x_2\}$ de modo modo que $A \cap B = \emptyset$, garantindo que $f(A \cap B) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \emptyset$ mas $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} \neq \emptyset$, garantindo que

   $$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$$

   Concluímos que a afirmação é verdadeira.

5. Teorema: Se $A_1$ e $A_2$ são conjuntos enumeráveis, então $A_1 \cup A_2$ é enumerável. Usando este Teorema e o PIM, mostre que também é enumerável o conjunto

   $$U_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$$

   Demonstração: Consideremos a proposição $P(n)$ tal que se cada $A_k$ é um conjunto enumerável, então a reunião

   $$U_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$$

   também é um conjunto enumerável.

   Pelo Teorema, segue que a proposição $P(2)$ é verdadeira, pois, se $A_1$ e $A_2$ são enumeráveis então $A_1 \cup A_2$ é enumerável.

   Vamos assumir que $P(n)$ é verdadeira para $n > 2$, isto é que

   $$U_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$$

   seja um conjunto enumerável.

   Se os conjuntos $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ e $A_{n+1}$ são enumeráveis, usamos

   $$U_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) \cup A_{n+1}$$

   que pode ser escrito como

   $$U_{n+1} = U_n \cup A_{n+1}$$

   e como $U_n$ e $A_{n+1}$ são enumeráveis, segue pelo Teorema que $U_{n+1}$ é enumerável.

6. Definir módulo de um número real através do máximo, e com esta definição mostre que $|x-a|<\varepsilon$ se, e somente se $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.

   Dem.: Se $x\in R$, definimos o módulo de $x$, através do máximo, por

   $$|x|=\max\{x,-x\}$$

   Usando esta definição, segue que

   $$\begin{aligned}|x-a|<\varepsilon &\Leftrightarrow \max\{(x-a),-(x-a)\}<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow (x-a)<\varepsilon \quad \text{e} \quad -(x-a)<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow x-a<\varepsilon \quad \text{e} \quad x-a>-\varepsilon\\ &\Leftrightarrow x-a>-\varepsilon \quad \text{e} \quad x-a<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow -\varepsilon<x-a \quad \text{e} \quad x-a<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow -\varepsilon<x-a<\varepsilon\end{aligned}$$

7. Quais são as razões pelas quais se estuda Análise na reta no curso de Matemática?

   Motivo: A idéia básica de se lecionar Análise na Reta no curso de Matemática é tratar com rigor a maioria dos processos matemáticos que foram utilizados no Cálculo, na Álgebra Linear e em outras disciplinas de cunho operacional.

8. Demonstrar que o intervalo real $(a,b)$ é equivalente ao intervalo $(c,d)$, sendo $a,b,c,d\in R$, com $a<b$ e $c<d$.

   Demonstração: Podemos construir a equação da reta que passa pelos pontos $(a,c)$ e $(b,d)$ e gerar a função:

   $$f(x)=\left(\frac{d-c}{b-a}\right)(x-a)+c$$

   Basta mostrar que esta função é bijetora.

9. Usando o conceito de conjunto indutivo, mostre que se $m,n\in N$ então $m.n\in N$, sendo $N=\{1,2,3,...\}$ o conjunto dos números naturais.

   Demonstração: Para mostrar que, se $m,n\in N$ então $m.n\in N$, podemos definir $S=\{n\in N : m.n\in N\}$. Como $S\subset N$, basta mostrar que este conjunto $S$ é indutivo para garantir que a propriedade é verdadeira para todo $n\in N$.

   Como todo conjunto indutivo possui o elemento neutro $1$ do corpo, assim, se $m\in N$ então $m=m.1\in N$, logo $1\in S$.

   Se $n\in S$, então $m.n\in N$. Como $N$ também é um conjunto indutivo e $m\in N$, segue que a soma dos números naturais $m.n$ e $m$ também é um número natural, isto é $m.n+m\in N$. Pela propriedade distributiva, segue que

   $$m.n+m=m.n+m.1=m.(n+1)\in N$$

   e este fato garante que $n+1\in S$.

10. (a) Demonstrar que $1 + \sqrt{2}$ não é um número racional. (b) Se para $0 < a < b$, a média de harmônica é dada por $H(a, b) = \dfrac{2ab}{a + b}$, mostrar que $a < H(a, b) < b$.

11. (a) Exibir duas desigualdades de Bernoulli e (b) mostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

12. Demonstrar que, se $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$ e $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = B$, então $\lim\limits_{n\to\infty} (f.g)(n) = AB$.

13. (a) Definir sequência oscilante. (b) Exibir uma sequência oscilante. (c) Mostrar que a sequência apresentada é oscilante.

14. Apresentar os três passos (justificando cada passo) da demonstração do Teorema: **Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente**.

15. (a) Definir corpo arquimediano e apresentar um (b) exemplo deste tipo de corpo. (c) Qual é a conexão entre um corpo arquimediano e o corpo dos números reais?

16. Demonstrar que se uma sequência real $f$ é decrescente e limitada, então $f$ é convergente.

17. (a) Enunciar e (b) demonstrar o Teorema dos Intervalos Encaixantes.

18. Apresentar detalhes e exemplos mostrando a diferença entre o cálculo do limite de uma função em um ponto e a continuidade desta função no mesmo ponto.

19. Qual é a relação existente entre unicidade do limite e a descontinuidade de uma função em um ponto? Dê exemplos.

20. Aqui $f : R \to R$ é uma função contínua. Apresente exemplos ou contra-exemplos, para cada afirmação: (a) Se $C$ é conexo então $f(C)$ é intervalo real. (b) Se $I$ é um intervalo então $f(I)$ é um conexo. (c) Se $K$ é um compacto então $f(K)$ é um compacto. (d) Se $F$ é um fechado então $f(F)$ é um fechado. (e) Se $A$ é um aberto então $f(A)$ é um aberto.

21. Apresentar (sem demonstrar) o Teorema do Valor Intermediário, exibindo uma situação em Análise em que este teorema é usado em alguma demonstração.

22. (a) Qual é a principal diferença entre continuidade e continuidade uniforme. (b) Demonstrar como todo o cuidado que, a função $f : (-10, 5) \to R$, definida por $f(x) = x^3$ é uniformemente contínua.

23. (a) O que é uma série real? (b) Com o critério da razão mostre que a série $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ converge. (c) Obter a sequência $(S_n)$ das reduzidas da série $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$. (c) Calcular a soma $S = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$.

24. Demonstrar que a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\dfrac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 10$ mas não é contínua em $x = 0$.

25. Apresentar exemplos e descrever de forma sintética a relação existente entre ponto de acumulação, ponto de aderência, conjunto fechado, conjunto compacto e valores extremos de uma função?

26. Usando SEQÜÊNCIAS, pode-se definir a derivada de uma função em um ponto. Usando este fato, demonstrar que, se $f$ e $g$ possuem derivada em um ponto, então a função produto $f.g$ também possui derivada neste ponto.

27. (a) Explicar a afirmação: "$f \in C^2$ ". (b) Exibir DUAS funções tal que $f \in C^2$ mas que $f \notin C^3$. (c) Apresentar uma função de classe $C^\infty$? (d) Qual é a utilidade de uma função ser de classe $C^\infty$?

28. (a) Exibir e demonstrar o Teorema sobre a Regra de L´Hôpital (caso $0/0$). (b) Exibir um limite do tipo $\infty/\infty$ e calcular este limite usando a regra de L´Hôpital apresentada no ítem (a).

29. (a) Exibir o Teorema de Rolle. (b) Usando o Teorema de Rolle, demonstrar o Teorema do Valor Médio. (c) Por que o TVM é importante em Análise?

30. (a) Qual é a relação entre diferenciabilidade de uma função e ponto extremos dessa função? (b) Apresentar exemplos de tais situações, explicando o que está ocorrendo.

31. Calcular o desenvolvimento de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ em torno do ponto $x = 1$. Deixar bem claro qual é a regra de formação dos termos.

32. Demonstrar que a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x|x|\sin(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) é diferenciável em $x = a$ ($a \neq 0$) e (b) é diferenciável no ponto $x = 0$.

33. (a) Apresentar a série binomial com a regra de formação dos termos. (b) Escrever algo sobre os coeficientes que aparece nesta série. (c) Apresentar uma aplicação desta série.

34. Demonstrar que $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua.

35. Enunciar:

    (a) (a) Teorema de Rolle.
    (b) (b) Teorema do Valor Médio.
    (c) (c) Teorema de Bolzano-Weierstrass.

(d) (d) Teo. dos Intervalos Encaixantes.

36. Exibir:
    (a) (a) um teorema relacionando continuidade com seqüências reais.
    (b) (b) 2 tipos de conjuntos $X$ da reta cujas imagens $f(X)$ por uma função contínua $f$ são do mesmo tipo.
    (c) (c) uma aplicação do teorema do ítem (a).
    (d) (d) 2 tipos de conjuntos $X$ da reta cujas imagens $f(X)$ por uma função contínua $f$ NÃO são do mesmo tipo.
37. Considere o conjunto $C = \{1 + \frac{1}{n} : n \in N\}$.
    (a) (a) **2** é um ponto de acumulação de $C$?
    (b) (b) Exiba um ponto de aderência de $C$ que não seja um ponto isolado.
    (c) (c) Exiba o ínfimo de $C$.
    (d) (d) Demonstrar que o valor exibido no ítem (c) é de fato o ínfimo de $C$.
38. Demonstrar que: Se $f = f(n)$ é sequência crescente e limitada de números reais, então $f$ é convergente.
39. Provar que se $A$, $B$ e $C$ são conjuntos abertos em $R$, então $A \cap B \cap C$ é um conjunto aberto em $R$.
40. Usando sequências, demonstre que o quociente entre duas funções contínuas reais é uma função contínua.
41. Desenvolver a série de Taylor da função $f(x) = \sin(x)$ em torno de $a = \dfrac{\pi}{4}$ e calcular o intervalo e também o raio de convergência da série obtida.
42. Descrever uma aplicação do Teorema do Valor Médio.