Análise na Reta

Notas de aulas de Matemática - 2008

Departamento de Matemática - UEL

Licenciatura em Matemática

Prof. Ulysses Sodré

Ulysses Sodré 2008 ulysses@uel.br

Notas de aulas de Análise Real construídas a partir de diversos materiais utilizados em minhas aulas de Análise na Reta na Universidade Estadual de Londrina, no entanto eu desejo que elas sejam apenas um roteiro para as aulas e não espero que tais notas venham a substituir qualquer livro de Análise na reta. A ordem no material é a normalmente utilizada em livros de Análise. Alguns conceitos foram extraídos de alguns livros citados na Bibliografia, mas muitos deles foram fortemente modificados. Em língua portuguesa existem poucos materiais de domínio público, mas em língua inglesa há diversos materiais que estão disponíveis na Internet. Sugerimos que o leitor realize pesquisas para obter materiais gratuitos para os seus estudos.

Versão compilada no dia 25 de Fevereiro de 2008.

Página Matemática Essencial

"Porque Deus amou o mundo de tal maneira que deu o seu Filho unigênito, para que todo aquele que nele crê não pereça, mas tenha a vida eterna. Porque Deus enviou o seu Filho ao mundo, não para que julgasse o mundo, mas para que o mundo fosse salvo por ele. Quem crê nEle não é julgado; mas quem não crê, já está julgado; porquanto não crê no nome do unigênito Filho de Deus. E o julgamento é este: A luz veio ao mundo, e os homens amaram antes as trevas que a luz, porque as suas obras eram más. Porque todo aquele que faz o mal aborrece a luz, e não vem para a luz, para que as suas obras não sejam reprovadas. Mas quem pratica a verdade vem para a luz, a fim de que seja manifesto que as suas obras são feitas em Deus." A Bíblia Sagrada, João 3:16-21

Conteúdo

I. A importância da Análise Real 1

I.1 Uma visão geral sobre a Análise Real – 1 • I.2 Contagem e medidas: Os números racionais – 3 • I.3 Relações e Funções – 3 • I.4 Raiz quadrada de 2 – 4 • I.5 Números decimais – 4 • I.6 Áreas e volumes – 5 • I.7 O número Pi – 6 • I.8 Funções trigonométricas circulares – 7 • I.9 Soluções de equações e o papel da continuidade – 8 • I.10 Logaritmos – 8 • I.11 Taxa de variação – 8 • I.12 Crescimento de funções – 9 • I.13 Equações diferenciais – 9 • I.14 Conclusões sobre a Análise na Reta – 10 • I.15 Conversa com o aluno – 11

II. Elementos de Lógica e Conjuntos 12

II.1 Proposições – 12 • II.2 Tautologias e Equivalência Lógica – 16 • II.3 Conjuntos definidos por proposições lógicas – 19 • II.4 Operações com conjuntos através da Lógica – 20 • II.5 Quantificadores Lógicos – 22 • II.6 Negação de proposições com quantificadores – 23 • II.7 Proposições com valores lógicos numéricos – 26 • II.8 Conjuntos e suas principais propriedades – 28 • II.9 Propriedades para número maior de conjuntos – 30

III. Relações e Funções 31

III.1 Par ordenado – 31 • III.2 Produto cartesiano – 31 • III.3 Produto de número por conjunto – 32 • III.4 Relações – 32 • III.5 Aplicações – 32 • III.6 Domínio, contradomínio e imagem – 32 • III.7 Restrição de uma aplicação – 33 • III.8 Extensão de uma aplicação – 33 • III.9 Aplicação injetiva – 34 • III.10 Aplicação sobrejetiva – 34 • III.11 Aplicação bijetiva – 34 • III.12 Compostas de aplicações – 34 • III.13 Imagem direta e inversa de conjunto – 36

IV. Conjuntos enumeráveis 38

IV.1 Equivalência de conjuntos – 38 • IV.2 Relação de equivalência – 39 • IV.3 Relação de ordem – 40 • IV.4 Conjuntos finitos e infinitos – 40 • IV.5 Conjuntos enumeráveis – 40 • IV.6 Propriedades dos conjuntos enumeráveis – 41

V. O conjunto dos números reais 44

V.1 O papel dos números reais – 44 • V.2 Grupos – 44 • V.3 Corpos – 46 • V.4 Corpos ordenados – 48 • V.5 O conjunto N dos números naturais – 50 • V.6 Princípio de Indução Matemática – 51 • V.7 Mínimo e Máximo de um conjunto – 56 • V.8 O conjunto Z dos números inteiros – 59 • V.9 O conjunto Q dos números racionais – 65 • V.10 O conjunto R dos números reais – 68

VI. Seqüências de números reais 72

VI.1 Seqüências reais – 72 • VI.2 Convergência – 74 • VI.3 Monotonicidade – 78 • VI.4 Subseqüências – 79 • VI.5 Limitação – 80 • VI.6 Médias usuais – 82 • VI.7 Médias versus progressões – 83 • VI.8 Harmônico global – 83 • VI.9 Desigualdades com médias – 84 • VI.10 Aplicações geométricas – 85 • VI.11 A construção do número de Euler – 85 • VI.12 Seqüências aritméticas e PA – 88 • VI.13 Seqüências geométricas e PG – 92 • VI.14 Propriedades das seqüências – 99 • VI.15 Seqüências de Cauchy – 99

VII. Conceitos topológicos na reta real 101

VII.1 Intervalos reais – 101 • VII.2 Conceitos topológicos – 102 • VII.3 Conjuntos abertos – 104 • VII.4 Conjuntos fechados – 104 • VII.5 Conjuntos compactos – 110

VIII. Séries numéricas reais 113

VIII.1 Series reais – 113 • VIII.2 Séries convergentes – 114 • VIII.3 Critérios de convergência de séries – 116 • VIII.4 Operações com séries reais – 120

IX. Limites e continuidade de funções reais 121

IX.1 Limites de funções reais – 121 • IX.2 Limites laterais – 123 • IX.3 Limites infinitos – 124 • IX.4 Teoremas sobre limites de funções – 125 • IX.5 Funções contínuas – 126 • IX.6 Propriedades importantes das funções contínuas – 130 • IX.7 Continuidade uniforme – 133

X. Derivadas de funções reais 134

X.1 Derivadas e funções diferenciáveis – 134 • X.2 Aplicações das funções diferenciáveis – 137 • X.3 Derivadas sucessivas – 139

XI. Integral de Riemann 141

XI.1 Partições de intervalos – 141 • XI.2 Propriedades das funções integráveis – 147 • XI.3 O Teorema Fundamental do Cálculo – 147

XII. Seqüências e Séries de funções Reais 149

XII.1 Seqüências de funções – 149 • XII.2 Convergência uniforme e continuidade – 152 • XII.3 Séries de funções – 152 • XII.4 Convergência de séries de funções – 153 • XII.5 Critérios para convergência uniforme – 154 • XII.6 Séries de Potências – 156 • XII.7 Séries de Taylor e de MacLaurin – 159

XIII. Integrais impróprias 161

XIII.1 Integrais impróprias – 161 • XIII.2 Integrais impróprias e séries reais – 163 • XIII.3 Aplicações das integrais impróprias – 163

Capítulo I

A importância da análise real

> "Tu, porém, permanece naquilo que aprendeste, e de que foste inteirado, sabendo de quem o tens aprendido, e que desde a infância sabes as sagradas letras, que podem fazer-te sábio para a salvação, pela que há em Cristo Jesus. Toda Escritura é divinamente inspirada e proveitosa para ensinar, para repreender, para corrigir, para instruir em justiça; para que o homem de Deus seja perfeito, e perfeitamente preparado para toda boa obra." A Bíblia Sagrada, II Timóteo 3:14-17

I.1. Uma visão geral sobre a Análise Real

Apresentamos aqui, um simples resumo sobre a importância da Análise Real, que é a área da Matemática que trata sobre o formalismo e o rigor matemático para justificar os principais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Uma pequena parte deste material foi extraído de [28].

Quando tais conceitos se tornam muito difíceis, é necessário usar processos intuitivos que amenizam tais estudos e neste contexto são estudados com profundidade os conceitos de variável, limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de funções com o intenso uso de Lógica e Teoria dos Conjuntos.

A Matemática é decomposta tradicionalmente em três partes: Álgebra, Geometria e Análise, sendo que a Análise Real é a mais nova delas e consiste de ramificações do Cálculo, uma teoria criada no século XVII por Newton e Leibniz, sendo este fato um evento ímpar na história humana, que fez possível a existência da Física Moderna.

O interesse pelo Cálculo aparece no estudo de algum cálculo envolvido em um complicado processo ocorrido natural, em uma máquina, na sociedade ou em um mundo ideal. Começamos pela análise do que acontece localmente, sendo que a palavra *localmente* pode significar um intervalo de tempo muito curto, uma área pequena ou pequenas variações de qualquer outra quantidade.

Em muitos casos, é fácil obter a forma com várias quantidades dependentes localmente umas das outras. Uma área onde as fórmulas exprimem esta interdependência é a área de Equações diferenciais.

A segunda tarefa consiste em gerar, a partir de leis simples que regem o acontecimento local, leis muito mais complicadas, descrevendo o acontecimento global. Este passo usualmente envolve a resolução de equações diferenciais, tarefa puramente Matemática.

Resolver equações diferenciais pode significar coisas distintas que dependem das situações. Às vezes, é possível obter uma fórmula para a solução, mas o mais comum é garantir que existe uma solução satisfazendo as condições desejadas e indicar um método para o cálculo aproximado dessa solução.

Nenhum desses processos pode fornecer todas as respostas necessárias, pois com freqüência se deseja saber como a solução depende das várias quantidades que entram no problema e o que acontece quando estas sofrem pequenas oscilações ou se tornam muito grandes.

Um exemplo de Isaac Newton. O movimento de nosso sistema solar durante um curto período de tempo pode ser descrito da seguinte forma: Todo corpo celeste move-se em direção a cada um dos demais corpos celestes com uma aceleração diretamente proporcional à massa do outro corpo e inversamente proporcional ao quadrado da distância que o separa deste outro corpo.

Com base no comportamento instantâneo dos planetas e de seus satélites, podemos obter os seus movimentos verdadeiros, o que significa resolver as equações diferenciais da Mecânica celeste.

Várias gerações de matemáticos têm desenvolvido métodos eficientes para isto, mas hoje o trabalho pode ser feito com relativa facilidade com o uso de modernos computadores, mas os computadores não podem nos dizer se o sistema solar preservará a sua forma geral num futuro distante.

Para discutir este problema de estabilidade são necessárias novas investigações teóricas. Acrescentamos que tais questões de estabilidade são muito mais importantes do que pode parecer à primeira vista.

Desde a criação do Cálculo, a Análise penetrou praticamente em todas as áreas da Matemática, tanto por causa de sua intrínseca riqueza, quanto pelas suas múltiplas aplicações. Suas subdivisões adquiriram vida própria e com freqüência são estudadas com fins em si próprias.

A experiência mostra que a teoria de equações diferenciais quase sempre utiliza os métodos e idéias desenvolvidas nas partes mais remotas da Análise, bem como em outros ramos da Matemática.

Algumas disciplinas ativas em Análise, nas quais resultados importantes têm sido obtidos recentemente: Teoria da Medida, Funções de variáveis complexas, Análise harmônica, Análise funcional, Equações diferenciais, Teoria das probabilidades, etc.

Na seqüência, apresentaremos algumas situações que justificam a necessidade do estudo da Análise na reta. Tais motivos nem sempre ficam claros quando se estuda o Cálculo Diferencial e Integral.

I.2. Contagem e medidas: Os números racionais

Contar e medir são atividades fundamentais, associadas à Matemática e a Matemática espera que exista um sistema onde isto seja possível. Esta introdução pretende mostrar ao aluno, alguns problemas encontrados no uso de números na realização de uma medida, problemas esses que nos motivam ao estudo da análise real.

O conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ dos números naturais é usado em contagens. Alguns chegam a aceitar o *zero* como um número natural, o que não parece ser correto se estudarmos um pouco sobre a origem deste número em livros de História da Matemática. Os números naturais não são suficientes para realizar todas as medidas. Com freqüência, necessitamos subdividir nossa unidade básica.

Ao dividir a unidade 1 em q partes e tomar p dessas, nós escrevemos o resultado como p/q. Números deste tipo são denominados frações. Nas aplicações, é importante levar em conta a direção e a grandeza dos números, logo existe a necessidade de números negativos, inteiros e frações. Tais números negativos, juntos com o zero, os inteiros positivos e as frações proporcionam o conjunto dos números racionais.

Com números racionais, podemos dividir uma unidade em qualquer número de partes que desejarmos e os racionais são suficientes para expressar resultados práticos de medidas, mas a precisão da medida não pode ser melhorada. Também é útil combinar os números racionais com outros modos de apresentar medidas de quantidades relacionadas, assim, podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir racionais, mas não podemos dividir por zero. Tudo isto é familiar ao aluno comum.

I.3. Relações e Funções

Muitas vezes necessitamos relacionar uma das quantidades medidas com outras quantidades. Por exemplo, podemos relacionar a distância percorrida por uma pedra que cai em função do tempo gasto para a pedra cair.

Às vezes, ao relacionar duas variáveis medidas nós encontramos uma lei matemática simples ligando tais variáveis, mas a lei pode ser mais complexa ou a relação pode até mesmo não ter uma regra explícita.

Podemos descrever a relação entre variáveis medidas matematicamente com o uso de relações e funções. Pode-se desenvolver o conjunto dos racionais a partir do conjunto dos números naturais, as regras que governam suas combinações, as leis satisfeitas por tais combinações (associatividade, comutatividade, elemento neutro, elemento oposto, etc) e as definições e propriedades lógicas das relações e funções, todas pertencentes ao assunto hoje denominado Álgebra.

Acontece que dentro da Álgebra, tais definições e descrições são finitas. Nós usamos uma teoria de números que parece estar adequada a uma descrição de medidas em várias situações comuns, mas a Álgebra não é suficiente para isto e devemos usar processos infinitos, como mostraremos com o uso de seqüências.

I.4. Raiz quadrada de 2

Se o lado de um quadrado mede 1 cm, a sua diagonal pode ser vista como a hipotenusa de um triângulo retângulo, que mede um pouco mais que 1,4 cm. Podemos calcular a medida da hipotenusa. Ao realizar esta operação, obtemos $\sqrt{2}$ cm, onde $\sqrt{2}$ é um número positivo que multiplicado por ele mesmo fornece o número 2.

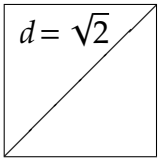


Figura I.1: Diagonal do quadrado

Pode-se demonstrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional mas cujo quadrado seja igual a 2 que é um número racional. Isto não é bom. Pode-se obter números que são iguais a $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ ou $\sqrt{49}$, mas também devemos saber calcular e explicar o que é $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{n}$, onde n é um número natural.

Isto não é possível no conjunto dos números racionais, pois existem números racionais cujos quadrados estão próximos de 2 e até mesmo outros racionais cujos quadrados estejam mais próximos ainda de 2, mas não é possível obter um número racional cujo quadrado seja *exatamente* igual a 2. Os números racionais são suficientes para alguns objetos práticos, mas isto faz com que as raízes quadradas sejam complicadas. O sistema de números racionais deve ser estendido a algo mais significativo.

I.5. Números decimais

Um modo de calcular $\sqrt{2}$ é pelo uso de números decimais. O que são números decimais? Pelo uso de nosso sistema de notação posicional e pela escrita de dígitos à direita de um dígito da unidade, nós podemos escrever alguns racionais.

Assim $\frac{1}{2}$ pode ser escrito como $0,5$ e $\frac{4}{25}$ pode ser escrito como $0,16$, etc. Mas ao tentar representar $\frac{1}{3}$ nesta notação, observamos que não é possível. O algoritmo usual da divisão fornece $0,333...$, mas o processo nunca termina. Nós podemos escrever $\frac{1}{3} = 0,333...$ e às vezes escrevemos $0,\overline{3}$, mas o que é isto? E se nós temos outra expressão, como $\frac{4}{11} = 0,3636...$, poderíamos esperar que $\frac{23}{33} = 0,6969.....$? Como multiplicar tais expressões? Agora, o que significa $\sqrt{2}$? Nós obtemos que

$$\begin{aligned} (1,4)^2 &< \sqrt{2} < (1,5)^2 \\ (1,41)^2 &< \sqrt{2} < (1,42)^2 \\ (1,414)^2 &< \sqrt{2} < (1,415)^2 \end{aligned}$$

e assim por diante, tal que em algum sentido $\sqrt{2} = 1,4142....$

Parece à primeira vista que não aconteceu a repetição no modelo dos dígitos. O significado de seqüência de pontos não está muito claro. Se usarmos números decimais para expressar racionais como $\frac{1}{3}$ e objetos como $\sqrt{2}$, estaremos à frente de um problema que precisa usar uma seqüência com infinitos dígitos e o que fazemos precisa ser explicado de forma adequada.

I.6. Áreas e volumes

Seqüências infinitas ocorrem em muitas situações completamente diferentes. Por exemplo, para medir a área de um conjunto plano, a primeira tarefa é escolher uma unidade apropriada para a área. Como a área é a medida da quantidade de superfície coberta, uma unidade adequada para medir a área será sempre a unidade de uma figura que quando for usada, cobrirá todo o plano sem deixar espaços vazios.

Este critério fornece várias unidades possíveis, como o uso de triângulos, quadriláteros, hexágonos regulares, mas a escolha clássica é o quadrado, pois a sua forma é muito conveniente. Ao tomar um particular quadrado como unidade, podemos obter, a medida da área de um retângulo, pela cobertura do retângulo com quadrados unitários de forma simples e então contar o número de quadrados e as partes dos quadrados que foram utilizadas.

Se um retângulo como o da figura abaixo possui comprimento medindo $3\frac{1}{2}$ unidades e largura medindo $2\frac{1}{3}$ unidades, a sua área é $8\frac{1}{6}$ unidades de área.

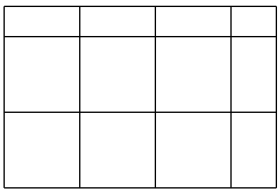


Figura I.2: Retângulo com dimensões racionais

Modificando um retângulo, podemos obter a área de um paralelogramo e obter a área de um triângulo e depois de um polígono.

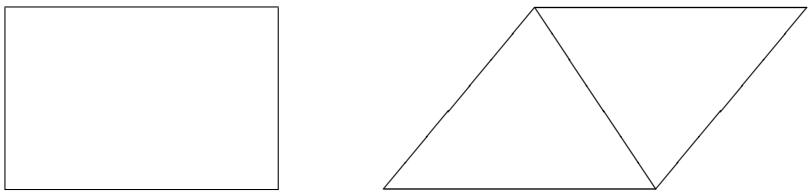


Figura I.3: Retângulo, paralelogramo e triângulo

Se a curva não é uma linha formada por segmentos de reta, o que acontece com

uma região cuja fronteira é uma curva suave? O que podemos fazer para obter uma medida da área da forma geométrica irregular mostrada na figura I.4?

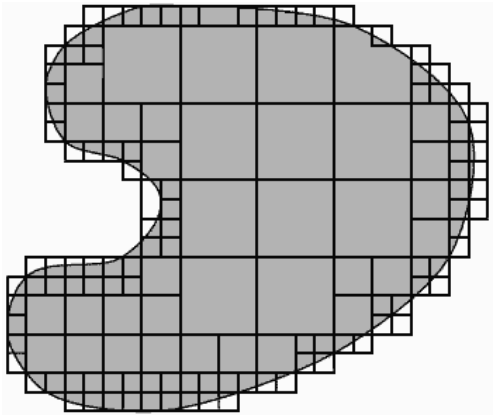


Figura I.4: Região (com fronteira suave) coberta por quadrados

Podemos cobrir esta forma irregular do melhor modo possível com quadrados unitários, mas o que acontece com as regiões dos cantos? As funções que representam as curvas dos cantos nem sempre podem ser reconhecidas como frações de quadrados. Assim, nós perguntamos: Será que existe um número para a medida da área da forma irregular dada? Em caso positivo, como podemos obter este número para uma dada forma?

Continuando a nossa subdivisão, obteremos um modo aproximado para medir a área. Por meio dessa repetida subdivisão, nós estamos realmente *inscrevendo* uma seqüência de polígonos regulares, cada um dos quais cobrindo a forma de modo mais completo que a subdivisão anterior.

Como o processo de aproximação nunca terminará, somos levados a uma seqüência infinita de áreas que nós esperamos que se aproxime cada vez mais de algum número que pode ser identificado com área da região.

I.7. O número Pi

Ao medir quantidades relacionadas com a circunferência, usamos a razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro, que é uma constante denominada Pi, uma vez que todos os círculos são semelhantes. O número Pi pode ser obtido aproximadamente pelo desenho de uma circunferência e pela medida de seu perímetro e do diâmetro.

É muito útil saber calcular o valor do número Pi. Podemos obter boas aproximações para Pi, inscrevendo polígonos regulares em um círculo de forma que os números de lados dos polígonos estejam aumentando e desta forma possamos determinar os perímetros dos referidos polígonos.

Por exemplo, ao inscrever um hexágono regular em um círculo com raio unitário

(raio=1), observamos que $\pi > 3$ raios. A palavra *raio* representa a medida do lado do hexágono que também é o raio do círculo. Este processo é trabalhoso, mas também

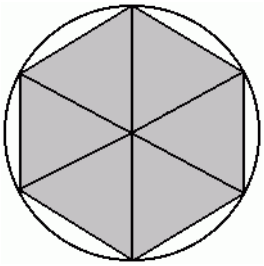


Figura I.5: Hexágono inscrito em um círculo

podemos calcular π pelo uso de algumas séries infinitas. Por exemplo, π pode ser obtido pela fórmula:

$$\pi = 4\,(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ...)$$

Aqui temos a soma de uma série infinita de números. Como podemos realizar esta soma? Por que π é igual a esta particular soma desta série de números reais?

A página **The Miraculous Bailey-Borwein-Plouffe Pi Algorithm** localizada em `http://www.mathsoft.com/asolve/plouffe/plouffe.html` contém detalhes sobre o número Pi, além da milagrosa fórmula:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6})(\frac{1}{16})^n$$

I.8. Funções trigonométricas circulares

Para obter comprimentos e ângulos, usamos as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, que podem ser definidas em função das razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Por exemplo, para obter o seno de 40 graus, desenhamos um triângulo retângulo com um ângulo de 40 graus, medimos dois de seus lados, mas a precisão neste processo não será grande e é preferível calcular.

Podemos usar séries infinitas para avaliar as funções trigonométricas, como:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ...$$

que fornece o seno de x, quando x é medido em radianos. Esta série é usada para cálculos com a precisão que desejarmos, mas de novo devemos entender o que significa a soma de uma série com *infinitos* termos na forma de potências de x.

I.9. Soluções de equações e o papel da continuidade

Para calcular o número de raízes ou o número de zeros reais x tal que $x^2 = \cos(x)$ e também a medida de tal cálculo aproximado, desenhamos os gráficos de $y = x^2$ e $y = \cos(x)$ e obtemos os pontos de interseção desses gráficos.

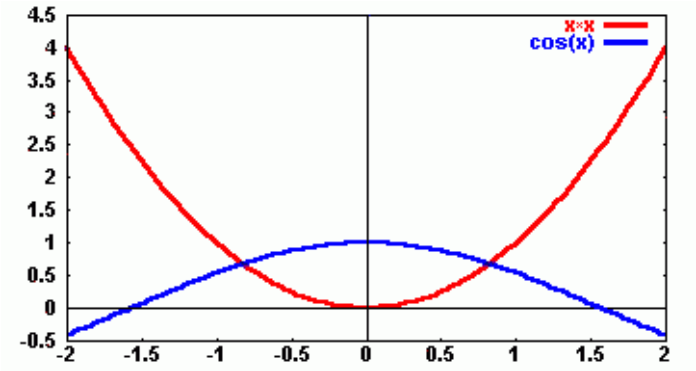


Figura I.6: As interseções de dois gráficos de funções

Como os gráficos destas funções são simétricos, existem dois zeros z e $-z$ tal que $z^2 = \cos(z)$. Chegamos a esta conclusão, aceitando que tais gráficos representam funções contínuas, isto é, *não sofrem interrupção*, de modo que deve existir um ponto z entre 0 e $\pi/2$ tal que a curva $y = \cos(x)$ deve cruzar sobre $y = x^2$ neste intervalo para que $z^2 = \cos(z)$. Este ponto z é um zero de $x^2 = \cos(x)$, mas a função $f(x) = x^2 - \cos(x)$ é par (simétrica em relação ao eixo $x = 0$), logo existe também $-z$ tal que $z^2 = \cos(z)$.

Precisamos *entender* o que é continuidade e verificar se uma certa função é contínua? Será que para todo ponto no eixo OX corresponde algum valor numérico x?

I.10. Logaritmos

O estudo de Logaritmos nos dá um método familiar para acelerar multiplicações aproximadas de números muito grandes. Podemos usar $\log_{10}(2) = 0,30103...$ e $\log_{10}(3) = 0,47712...$ para realizar alguns cálculos, mas, o que significa *logaritmo*? Demonstra-se que não existe um número racional x tal que $10^x = 2$, assim $\log_{10}(2)$ só tem significado em algum outro conjunto que seja mais amplo que o conjunto dos racionais. Para calcular valores de logaritmos, devemos fazer uso de séries infinitas.

I.11. Taxa de variação

Quando temos duas quantidades variáveis, às vezes, as suas medidas estão relacionadas com outras e o estudo de funções serve para descrever tal relacionamento. Quando temos uma situação como esta, às vezes é importante conhecer a taxa segundo a qual uma variável está mudando enquanto ocorre a variação na outra

variável. Relacionando a distância percorrida por um corpo em movimento em um intervalo de tempo, a taxa segundo a qual a distância muda em relação ao tempo é a medida da velocidade do corpo. Quando a taxa de variação é constante, ela pode ser facilmente medida pela razão:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{mudança na variável dependente}}{\text{mudança na variável independente}}$$

Se a taxa de variação não é constante, a razão somente fornece uma taxa *média* de variação. Obter a taxa real de variação em um certo instante, parece envolver mudanças infinitesimais nas variáveis. O Cálculo Diferencial proporciona um método para calcular a taxa instantânea de variação e novamente precisamos explicar o que significa a palavra *diferencial*.

I.12. Crescimento de funções

Quando temos uma população (de pessoas, insetos ou átomos de Urânio, etc) e desejamos analisar a situação futura desta população em um dado instante, é razoável supor que os fatores que causam crescimento ou decaimento afetam alguma parte da população. Um modelo matemático que parece servir é uma função do tempo cuja taxa de variação é proporcional ao seu tamanho em um instante qualquer. Para estudar este modelo necessitamos trabalhar com a função exponencial, que pode ser representada por

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

De novo, aparece uma outra série de potências com infinitos termos e se desenvolvermos as propriedades da função exponencial a partir desta definição, poderemos operar com grande segurança com séries infinitas.

I.13. Equações diferenciais

Um ponto que valoriza o estudo do Cálculo, pode ser descrito da seguinte forma: Ao usar o Cálculo em um processo complicado ocorrido na natureza, em uma máquina, na sociedade ou em um mundo ideal, começamos pela análise do que acontece *localmente*, palavra esta que pode significar um intervalo de tempo muito curto, uma área pequena ou pequenas variações de qualquer outra quantidade.

Muitas vezes, é fácil obter a forma como algumas quantidades dependem de outras localmente e a área que trata disto é denominada Equações Diferenciais. Outra tarefa consiste em usar leis simples que servem para descrever localmente o evento, para descrever o possível acontecimento global, a partir de leis complexas.

Em geral, este segundo passo envolve a resolução de equações diferenciais, que é uma tarefa Matemática.

A resolução de equações diferenciais pode ter vários motivos, dependendo da situação. Às vezes, é possível escrever uma fórmula para a solução da equação, mas o mais comum é garantir que existe uma solução satisfazendo às condições desejadas e indicar um método para o cálculo aproximado dessa solução.

Pode ser que nenhum dos dois processos forneça todas as respostas procuradas, pois com freqüência se deseja saber como a solução depende das várias quantidades envolvidas no problema e o que acontece quando estas se tornam muito grandes.

O estudo do movimento de nosso sistema solar devido a Isaac Newton, em um curto período de tempo, pode ser descrito do seguinte modo: Todo corpo celeste move-se em direção a cada um dos demais corpos celestes com uma aceleração diretamente proporcional à da massa do outro corpo e inversamente proporcional ao quadrado da distância que o separa deste outro corpo.

Com base no comportamento instantâneo dos planetas e de seus satélites, podemos determinar seus movimentos verdadeiros, o que significa resolver equações diferenciais da Mecânica celeste. Muitos matemáticos têm construído métodos eficientes para isto, mas hoje o trabalho pode ser feito com grande facilidade com o uso de computadores, mas tais computadores não podem garantir se o sistema solar manterá a sua forma geral num futuro distante.

Para discutir este problema de estabilidade são necessárias mais pesquisas teóricas e tais estudos são de grande importância para o entendimento do modelo que se usa.

I.14. Conclusões sobre a Análise na Reta

Os problemas apresentados, mostram a necessidade de introduzir processos *infinitos* em Matemática e devemos ter maior compreensão sobre: conjuntos de números, seqüências e séries infinitas, continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade e assim por diante. Não basta saber realizar cálculos de modo operacional, mas é essencial conhecer as características qualitativas desses resultados.

Quando os processos infinitos foram estudados no passado, muitas técnicas desenvolvidas serviram para dar respostas às questões citadas acima e muitas outras, mas nem todos os conceitos subjacentes às técnicas e a sua validade foram investigadas, sendo encontrados muitos erros nesses estudos.

Matemáticos que criam novos processos procuram encontrar soluções para as necessidades de nossa época, mas no último século, matemáticos começaram a *tomar muito mais cuidado* com os conceitos escondidos sob os processos infinitos e começaram a examinar a validade de algumas técnicas. Foram descartadas várias explicações estranhas de matemáticos (alguns famosos) que vieram antes deles e as mesmas foram substituídas por descrições precisas dos processos utilizados.

Examinar tais conceitos e pesquisas sobre a validade das técnicas de processos infinitos é estudar a Análise real, que é a área da Matemática que trata sobre o formalismo e o rigor matemático para justificar os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Se tais conceitos ficam muito difíceis, é necessário o uso de processos intuitivos que simplificam tais estudos e neste contexto são estudados com profundidade os conceitos de variável, limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de funções com o uso intenso de Lógica e Teoria dos Conjuntos.

A Análise Real é a mais nova das três partes em que se divide tradicionalmente a Matemática e consiste de ramificações do Cálculo, uma teoria criada no século XVII por Newton e Leibniz, sendo este fato um evento ímpar na história humana, que fez possível a existência da Física moderna.

Desde a criação do Cálculo, a Análise Real penetrou praticamente em todas as áreas da Matemática, tanto por causa da sua forma rica, quanto pela enorme quantidade de aplicações. Suas subdivisões adquiriram vida própria e tais áreas são estudadas separadamente. A experiência mostra no entanto que a teoria de equações diferenciais quase sempre utiliza os métodos e idéias desenvolvidas nas partes mais estranhas e antigas da Análise, bem como em outros ramos da Matemática.

Assuntos ativos em Análise Real com importantes resultados, são: Teoria da Medida, Funções de variáveis complexas, Análise harmônica, Análise funcional, Equações diferenciais Ordinárias e Parciais, Teoria das probabilidades, etc.

I.15. Conversa com o aluno

No livro [3], o Prof. Geraldo Ávila apresenta a dica abaixo, que inseri sem a permissão do autor, mas com a esperança que o referido docente a autorizaria:

> Ninguém aprende Matemática ouvindo o professor em sala de aula, por mais organizadas e claras que sejam as suas preleções, por mais que se entenda tudo o que ele explica. Isso ajuda muito, mas é preciso estudar por conta própria logo após as aulas, antes que o benefício delas desapareça com o tempo. Portanto, você, leitor, não vai aprender Matemática porque assiste aulas, mas por que estuda. E esse estudo exige muita disciplina e concentração: estuda-se sentado à mesa, com lápis e papel à mão, prontos para serem usados a todo momento. Você tem de interromper a leitura com freqüência, para ensaiar a sua parte: fazer um gráfico ou diagrama, escrever alguma coisa ou simplesmente rabiscar uma figura que ajude a seguir o raciocínio do livro, sugerir ou testar uma idéia; escrever uma fórmula, resolver uma equação ou fazer um cálculo que verifique se alguma afirmação do livro está mesma correta. Por isso mesmo, não espere que o livro seja completo, sem lacunas a serem preenchidas pelo leitor; do contrário, esse leitor será induzido a uma situação passiva, quando o mais importante é desenvolver as habilidades para o trabalho independente, despertando a capacidade de iniciativa individual e a criatividade. Você estará fazendo progresso realmente significativo quando sentir que está conseguindo aprender sozinho, sem ajuda do professor; quando sentir que está realmente "aprendendo a aprender...".

Capítulo II

ELEMENTOS DE LÓGICA E CONJUNTOS

> "Tu, porém, permanece naquilo que aprendeste, e de que foste inteirado, sabendo de quem o tens aprendido, e que desde a infância sabes as sagradas letras, que podem fazer-te sábio para a salvação, pela que há em Cristo Jesus. Toda Escritura é divinamente inspirada e proveitosa para ensinar, para repreender, para corrigir, para instruir em justiça; para que o homem de Deus seja perfeito, e perfeitamente preparado para toda boa obra." A Bíblia Sagrada, II Timóteo 3:14-17

II.1. Proposições

Nesta seção, nós tratamos sobre proposições (ou sentenças) lógicas, suas validades e falsidades, além do modo de combinar ou ligar proposições para produzir novas proposições. Primeiro, vamos apresentar uma *definição* de proposição lógica.

1 Definição. *(Proposição) Uma proposição (ou sentença ou frase) é um conjunto de palavras ou símbolos que exprimem uma afirmação de modo completo.*

2 Definição. *(Proposição lógica) Uma proposição (ou sentença ou frase) lógica é uma expressão que é verdadeira ou falsa.*

A Lógica Matemática (bivalente) está apoiada em dois princípios:

1. Princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser ao mesmo tempo, verdadeira e falsa.
2. Princípio do terceiro excluído: Toda proposição, ou é verdadeira ou é falsa, mas não pode ser uma terceira situação.

1 Observação. *Jan Lukasiewicz (1920) estudou a Lógica trivalente, admitindo a existência de três situações:* $\boxed{\textit{Verdadeiro}}$, $\boxed{\textit{falso}}$ *ou* $\boxed{\textit{é possível}}$. *Detalhes sobre isto podem ser encontrados na página 92 do livro "Introdução à Lógica Matemática" de Benedito Castrucci, GEEM, São Paulo, 1973. O paranaense Newton C. A. Costa também estudou o assunto.*

1 Exemplo. *Proposições.*

1. *A proposição* $\boxed{2+2=4}$ *é verdadeira.*

2. *A proposição* $\boxed{\pi \text{ é um número racional}}$ *é falsa.*

Não é função da Lógica decidir se uma particular proposição é verdadeira ou falsa, pois existem proposições cuja validade ou falsidade ainda não tenha sido estabelecida até hoje, como:

1 Teorema. *(Conjectura de Goldbach) Todo número par maior do que 2 é a soma de dois números primos.*

Existe um defeito em nossa definição, pois nem sempre é fácil determinar se uma *sentença* é uma *sentença lógica* ou não.

Por exemplo, considere a sentença $\boxed{\text{Eu estou mentindo, não estou?}}$. O que você pensa desta sentença?

Existem sentenças que são proposições lógicas, do ponto de vista da nossa definição.

3 Definição. *(Conectivos) Conectivos são palavras ou grupos de palavras usadas para juntar duas sentenças.*

Conectivo	*Significado*
Conjunção	*e*
Disjunção	*ou*
Negação	*não*
Condicional	*se ... então*
Bicondicional	*se, e somente se,*

Na seqüência, iremos discutir modos de ligar proposições lógicas com conectivos para formar novas proposições lógicas.

4 Definição. *(Novas proposições lógicas) Se p e q são proposições lógicas, definiremos cinco novas proposições lógicas:*

Nome da nova proposição	*Notação em Lógica*	*Significado*
Conjunção de p e q	$p \wedge q$	*p e q*
Disjunção de p e q	$p \vee q$	*p ou q*
Negação de p	$\neg p$	*não p*
Condicional entre p e q	$p \rightarrow q$	*p implica q*
Bicondicional entre p e q	$p \longleftrightarrow q$	*p equivale a q*

5 Definição. *(Validade da Conjunção) A conjunção entre p e q, denotada por* $p \wedge q$ *(lê-se: p e q) é verdadeira se as duas proposições p e q são ambas verdadeiras e é falsa nas outras situações.*

2 Exemplo. *Conjunção.*

1. *A proposição* $\boxed{2+2=4 \text{ e } 2+3=5}$ *é verdadeira.*
2. *A proposição* $\boxed{2+2=4 \text{ e } \pi \text{ é um número racional}}$ *é falsa.*

2 Observação (Tabela-Verdade da Conjunção)**.** *Reunimos em uma tabela, todas as informações relacionando afirmações Verdadeiras e Falsas sobre a conjunção:*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

6 Definição. *(Validade da Disjunção) A disjunção entre p e q, denotada por $p \vee q$ (lê-se: p ou q) é verdadeira se pelo menos uma das proposições p ou q é verdadeira, e é falsa nos outros casos.*

3 Exemplo. *Disjunção.*

1. *A proposição* $\boxed{2+2=2 \text{ ou } 1+3=5}$ *é falsa.*
2. *A proposição* $\boxed{2+2=4 \text{ ou } \pi \text{ é um número racional}}$ *é verdadeira.*

3 Observação (Tabela-Verdade da Disjunção)**.** *Reunimos em uma tabela, todas as informações relacionando afirmações Verdadeiras e Falsas sobre a disjunção:*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4 Observação. *(Demonstrar uma disjunção) Para demonstrar que uma proposição $p \vee q$ é verdadeira, vamos assumir que a proposição p é falsa e usar este fato para deduzir que a proposição q é verdadeira. Se a proposição p é verdadeira, o nosso argumento já está correto, não importa se a proposição q é verdadeira ou falsa.*

7 Definição. *(Validade da Negação) A negação de p, denotada por $\neg p$ (lê-se: não p) é verdadeira se a proposição p é falsa, e é falsa se a proposição p é verdadeira.*

4 Exemplo. *Negação.*

1. *A negação da proposição* $\boxed{2+2=4}$ *é a proposição* $\boxed{2+2 \neq 4}$.
2. *A negação da proposição* $\boxed{\pi \text{ é um racional}}$ *é a proposição* $\boxed{\pi \text{ é um irracional}}$.

5 Observação. *(Tabela-Verdade da Negação) Reunimos em uma tabela, todas as informações relacionando afirmações Verdadeiras e Falsas sobre a negação:*

p	$\neg p$
V	F
F	V

8 Definição. *(Validade da Condicional) A condicional entre p e q, denotada por $p \rightarrow q$ (lê-se: se p, então q) é verdadeira se a proposição p é falsa ou se a proposição q é verdadeira ou ambas, e é falsa nas outras situações.*

6 Observação. *(Tabela-Verdade da Condicional] Reunimos em uma tabela, todas as informações relacionando afirmações Verdadeiras e Falsas sobre a condicional:*

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

7 Observação. *(Sentença falsa) Uma proposição $p \rightarrow q$ é falsa se a proposição p é verdadeira e a proposição q é falsa. Isto significa que construindo uma conclusão falsa de uma hipótese verdadeira, o nosso argumento será falso. Por outro lado, se a nossa hipótese é falsa ou se a nossa conclusão é verdadeira, então o nosso argumento ainda pode ser aceito.*

5 Exemplo. *Sentenças falsas.*

1. *A proposição* $\boxed{\text{Se 2+2=4, então } \pi \text{ é um número racional}}$ *é falsa.*
2. *A proposição* $\boxed{\text{Se 2+2=2, então 1+3=5}}$ *é verdadeira, pois a proposição* $\boxed{\text{2+2=2}}$ *é falsa.*
3. *A proposição* $\boxed{\text{Se } \pi \text{ é um número racional, então 2+2=4}}$ *é verdadeira.*

9 Definição. *(Validade da Bicondicional) A bicondicional entre p e q, denotada por $p \longleftrightarrow q$ (lê-se: p se e somente se q) é verdadeira se as proposições p e q são ambas verdadeiras ou ambas são falsas, e é falsa nos outros casos.*

6 Exemplo. *Bicondicionais.*

1. *A proposição* $\boxed{\text{2+2=4 se, e somente se, } \pi \text{ é um número irracional}}$ *é verdadeira.*
2. *A proposição* $\boxed{\text{2+2=4 se, e somente se, } \pi \text{ é um número racional}}$ *é falsa.*

8 Observação. *(Tabela-Verdade da Bicondicional] Reunimos na tabela seguinte, todas as informações relacionando afirmações Verdadeiras e Falsas sobre a bicondicional:*

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

9 Observação. *(Tabela-Verdade das cinco novas proposições] Reunimos em uma tabela, as afirmações Verdadeiras e Falsas sobre as cinco novas proposições lógicas, usando a letra* **V** *para a palavra* **Verdadeiro** *e a letra* **F** *para a palavra* **Falso**.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V

10 Observação. *(Sobre a palavra* ou*) Em Lógica, a palavra* $\boxed{ou}$ *pode ser entendida como uma coisa, ou outra coisa ou* **ambas** *as coisas. Se você perguntar a alguma pessoa se ela gosta de chocolate ou de café, não se surpreenda com a resposta pois ela pode gostar dos dois!*

II.2. Tautologias e Equivalência Lógica

10 Definição. *(Tautologia) Uma tautologia é uma proposição cujo valor lógico é sempre* VERDADEIRO.

11 Observação. *(Sobre tautologia] Com o conceito de tautologia, podemos generalizar as definições de conjunção ou disjunção para proposições com mais do que duas proposições, e assim podemos escrever, $p \wedge q \wedge r$ ou $p \vee q \vee r$ sem nos preocuparmos com os parênteses.*

12 Observação. *(Setas duplas] Usamos a seta dupla $u \Longleftrightarrow v$ para indicar que uma condicional da forma $u \longleftrightarrow v$ é uma Tautologia. Como exemplo:*

1. $(p \wedge q) \wedge r \Longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$.
2. $(p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$.
3. $(p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

11 Definição. *(Contradição) Uma contradição é uma proposição cujo valor lógico é sempre* FALSO.

7 Exemplo (Tabela-Verdade de uma proposição composta)**.** *Construiremos a Tabela-Verdade de uma proposição composta como $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$, utilizando novas variáveis u, v e w, para simplificar esta proposição à forma $u \wedge w$, onde $u : (p \vee q)$, $v : (p \wedge q)$ e $w : \neg v$.*

1. *Tabela-Verdade de u: $(p \vee q)$,*

p	q	$u : p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2. *Tabela-Verdade de v: $(p \wedge q)$,*

p	q	$v : p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3. *Tabela-Verdade de w: $\neg v$.*

v	$w : \neg v$
V	F
F	V
F	V
F	V

4. *Tabela-Verdade de $u \wedge w$:*

u	w	$u \wedge w$
V	F	F
V	V	V
V	V	V
F	V	F

Como temos uma grande quantidade de informações, é comum reunir a Tabela-Verdade final de $u \wedge w$ com todas as operações, tomando a forma:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

8 Exemplo (Algumas condicionais)**.** *Implicações.*

1. *Se p é verdadeira e q é verdadeira, então $p \wedge q$ é verdadeira.*
2. *Se p é verdadeira ou q é verdadeira, então $p \vee q$ é verdadeira.*
3. *Se p é verdadeira e $p \to q$ é verdadeira, então q é verdadeira.*
4. *Se $\neg p$ é verdadeira e $p \vee q$ é verdadeira, então q é verdadeira.*
5. *Se $\neg q$ é verdadeira e $p \to q$ é verdadeira, então $\neg p$ é verdadeira.*
6. *Se $p \vee q$ é verdadeira e $p \to r$ é verdadeira e $q \to r$ é verdadeira, então r é verdadeira.*
7. *Se $p \to q$ é verdadeira e $q \to r$ é verdadeira, então $p \to r$ é verdadeira.*
8. *Se p é verdadeira, $p \to q$ é verdadeira e $q \to r$ é verdadeira, então r é verdadeira.*

9 Exemplo (Algumas bicondicionais)**.** *Tautologias:*

1. $(p \wedge (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$.
2. $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$.
3. $(p \vee (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$.
4. $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$.
5. $p \vee \neg p$.
6. $(p \to q) \Longleftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.
7. $(p \to q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$.
8. $\neg(p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

2 Teorema. *(Leis distributivas) Se p, q e r são proposições lógicas, as seguintes proposições são tautologias muito usadas em Matemática.*

1. $(p \wedge (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
2. $(p \vee (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Demonstração. (Primeira Lei distributiva) Vamos supor que a proposição $(p \wedge (q \vee r))$ seja verdadeira. Então, as duas proposições p e $q \vee r$ são verdadeiras. Como $q \vee r$ é verdadeira, pelo menos uma das proposições, q ou r deve ser verdadeira. Se a verdadeira for q, então segue que p e q são verdadeiras e assim segue que $p \wedge q$ é verdadeira, logo $p \wedge q$ ou $p \wedge r$ é verdadeira, assim $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ é verdadeira.

Reciprocamente, vamos supor que $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ é uma proposição verdadeira. Assim, pelo menos uma das proposições $p \wedge q$ ou $p \wedge r$ é verdadeira. Se a verdadeira for $p \wedge q$, então as duas proposições p e q são verdadeiras, logo Q é verdadeira e segue que $q \vee r$ é verdadeira e temos que $p \wedge (q \vee r)$ é verdadeira.

Agora consideremos que as duas proposições $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ e $p \wedge (q \vee r)$ são ambas verdadeiras ou ambas falsas, pois a verdade de uma implica a verdade da outra. Segue que a bicondicional $(p \wedge (q \vee r)) \longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ é uma tautologia.
A Demonstração da Segunda Lei distributiva fica como exercício. □

Todas estas tautologias podem ser demonstradas através de suas Tabelas-Verdade. Sugiro que use esta metodologia para as próximas demonstrações.

3 Teorema. *(Leis de Augustus de Morgan) Se p e q são proposições lógicas, as seguintes proposições são tautologias:*

1. $\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.
2. $\neg(p \vee q) \longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

4 Teorema. *(Algumas leis de inferência) Se p, q e r são proposições lógicas, as seguintes proposições são tautologias:*

1. Modus Ponens*:* $(p \wedge (p \to q)) \to q$.
2. Modus Tollens*:* $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$.
3. Lei de silogismo*:* $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$.

12 Definição. *(Sentenças equivalentes) Diz-se que duas proposições p e q são logicamente equivalentes se a proposição $p \longleftrightarrow q$ é uma tautologia. Isto significa que as duas sentenças lógicas representam o mesmo objeto do ponto de vista da Lógica.*

10 Exemplo. *(Sentenças equivalentes)*

1. *As proposições $(p \to q)$ e $(\neg q \to \neg p)$ são logicamente equivalentes, sendo que a proposição $(\neg q \to \neg p)$ recebe o nome de* **contrapositiva** *da proposição $(p \to q)$.*
2. *As proposições $p \to q$ e $q \to p$ não são logicamente equivalentes, sendo que a proposição $(q \to p)$ é denominada a* **recíproca** *da proposição $(p \to q)$.*

11 Exemplo. *Quatro importantes equivalências lógicas. Usando as tabelas-verdade, mostrar que as quatro proposições lógicas abaixo são equivalentes:*

1. $p \to q$
2. $(\neg q) \to (\neg p)$
3. $(\neg q) \wedge p \Rightarrow F$(*Afirmação absurda*)
4. $(\neg p) \vee q \Rightarrow V$(*Afirmação verdadeira*)

Exercício: Demonstrar que

1. Idempotência da conjunção: $p \vee p \iff p$
2. Idempotência da disjunção: $p \wedge p \iff p$
3. Associatividade da conjunção: $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$
4. Associatividade da disjunção: $(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$
5. Identidade da conjunção com a verdade: $p \wedge V \iff p$
6. Identidade da conjunção com a falsidade: $p \wedge F \iff F$
7. Identidade da disjunção com a verdade: $p \vee V \iff V$
8. Identidade da disjunção com a falsidade: $p \vee F \iff p$
9. Complementar com a conjunção: $p \wedge \neg p \iff F$
10. Complementar com a disjunção: $p \vee \neg p \iff V$
11. Complementar da verdade: $\neg V \iff F$
12. Complementar da falsidade: $\neg F \iff V$
13. Negação da negação: $\neg(\neg p) \iff p$

13 Observação. *(Setas simples e duplas] Algumas vezes usamos setas simples como $\longleftrightarrow$ em bicondicionais, mas usamos setas duplas $\iff$ para mostrar que a proposição da esquerda é logicamente equivalente à proposição da direita.*

12 Exemplo. *Algumas equivalências lógicas.*

1. $p \vee [q \wedge (\neg q)] \Longleftrightarrow p$
   $(p \vee [q \wedge (\neg q)]$ equivale a $p)$
2. $p \wedge [q \vee (\neg q)] \Longleftrightarrow p$
3. $p \to q \Longleftrightarrow (\neg p) \vee q$
4. $\neg(p \to q) \Longleftrightarrow p \wedge (\neg q)$
5. $(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$
   $(p \leftrightarrow q$ equivale a $(p \to q) \wedge (q \to p))$
6. $(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)]$
7. $p \to (q \to r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \to r$
8. $p \to q \Longleftrightarrow (\neg q) \to (\neg p)$

II.3. Conjuntos definidos por proposições lógicas

De uma forma bastante comum, surgem proposições como $\boxed{\text{x é par}}$ com uma ou mais variáveis, que são denominadas funções sentenciais ou funções proposicionais ou simplesmente proposições lógicas.

Vamos nos fixar no exemplo: $\boxed{\text{x é par}}$. Esta proposição é verdadeira para alguns valores de x e falsa para outros. Várias perguntas aparecem:

1. Quais são os valores PERMITIDOS para x?
2. A proposição é verdadeira PARA TODOS estes valores de x citados?
3. A proposição é verdadeira PARA ALGUNS valores de x citados?

Para responder à primeira pergunta, nós necessitamos conhecer o universo $\mathcal{U}$ em que estamos trabalhando, mas para trabalhar com este conceito, necessitamos entender qual é o significado da palavra conjunto.

Entendemos a palavra **conjunto** como uma palavra cujo sentido é conhecido por todos. Algumas vezes, nós usamos a palavra sinônima **classe** ou **coleção**. No entanto, tais palavras aparecem nos livros, tendo significados diferentes.

Pelo que se vê, conjunto é um conceito abstrato que deve ser aceito por todos como algo comum do seu cotidiano. O importante sobre um conjunto não é o QUE É UM CONJUNTO mas é o QUE O CONJUNTO CONTÉM, ou seja, quais são os seus elementos? Será que existe algum elemento?

Se P é um conjunto e x é um elemento de P, nós escrevemos $x \in P$ para entender que x pertence ao conjunto P. O símbolo $\in$ é um símbolo de pertinência.

Um conjunto é usualmente descrito em uma das seguintes formas. Por:

1. enumeração: $\{1, 2, 3\}$ denota o conjunto com os números 1, 2 e 3 e nada mais.
2. descrição ou propriedade com uma proposição $p(x)$: Aqui usamos um conjunto universo U que contém todos os elementos x do conjunto. Assim, Nós escrevemos $P = \{x : x \in \mathcal{U} \text{ e } p(x) \text{ é verdadeira}\}$ ou simplesmente $P = \{x : p(x)\}$.

O conjunto que não tem elementos é o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$.

13 Exemplo. *Alguns conjuntos importantes.*

1. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., n, n+1, ...\}$ *é o conjunto dos números naturais.*
2. $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ *é o conjunto dos números inteiros.*
3. $\{x : x \in N \; e \; -2 < x < 2\} = \{1\}$.
4. $\{x : x \in Z \; e \; -2 < x < 2\} = \{-1, 0, 1\}$.
5. $\{x : x \in N \; e \; -1 < x < 1\} = \emptyset$.

II.4. Operações com conjuntos através da Lógica

Se P é um conjunto descrito pela proposição $p = p(x)$, isto é, $P = \{x : p(x)\}$ e Q é um conjunto descrito pela proposição $q = q(x)$, isto é $Q = \{x : q(x)\}$, sendo P e Q conjuntos relativos a um certo universo $\mathcal{U}$, definimos novos conjuntos:

Interseção dos conjuntos P e Q	$P \cap Q$	$= \{x : p(x) \wedge q(x)\}$
Reunião dos conjuntos P e Q	$P \cup Q$	$= \{x : p(x) \vee q(x)\}$
Complementar do conjunto P	P^c	$= \{x : \neg p(x)\}$
Diferença entre os conjuntos P e Q	$P - Q$	$= \{x : p(x) \wedge \neg q(x)\}$

Com as definições acima, não é difícil mostrar que

1. $P \cap Q = \{x : x \in P \text{ e } x \in Q\}$,
2. $P \cup Q = \{x : x \in P \text{ ou } x \in Q\}$,
3. $P^c = \{x : x \notin P\}$,
4. $P - Q = \{x : x \in P \text{ e } x \notin Q\}$.

13 Definição. *(Subconjunto) Um conjunto P é um subconjunto do conjunto Q, denotado por $P \subseteq Q$ ou por $Q \supseteq P$, se todo elemento de P também é um elemento de Q.*

14 Observação. *Se $P = \{x : p(x)\}$ e $Q = \{x : q(x)\}$ em um universo $\mathcal{U}$, então $P \subseteq Q$ se, e somente se, a proposição lógica $p(x) \to q(x)$ é verdadeira para todo $x \in \mathcal{U}$.*

14 Definição. *(Conjuntos iguais) Dois conjuntos P e Q são iguais, denotado por $P = Q$, se eles contêm os mesmos elementos, isto é, se cada conjunto é um subconjunto do outro conjunto, isto é, se $P \subseteq Q$ e $Q \subseteq P$.*

15 Definição. *(Conjuntos disjuntos) Dois conjuntos A e B são disjuntos se, $A \cap B = \emptyset$.*

16 Definição. *(Subconjunto próprio) Dizemos que P é um subconjunto próprio de Q, denotado por $P \subset Q$ ou por $Q \supset P$, se $P \subseteq Q$ mas $P \neq Q$.*

Os resultados sobre Conjuntos são demonstrados a partir de seus análogos em Lógica.

5 Teorema. *(Leis distributivas) Se P, Q e R são conjuntos, então*

1. $P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$,
2. $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$.

Demonstração. (Primeira lei distributiva para conjuntos) Faremos uso da Primeira lei Distributiva para proposições lógicas.

Se as proposições $p = p(x)$, $q = q(x)$ e $r = r(x)$ estão respectivamente relacionadas aos conjuntos P, Q e R com respeito a um dado universo $\mathcal{U}$, então $P = \{x : p(x)\}$, $Q = \{x : q(x)\}$ e $R = \{x : r(x)\}$. Assim, temos dois conjuntos

$$\begin{aligned} P \cap (Q \cup R) &= \{x : p(x) \wedge (q(x) \vee r(x))\} \\ (P \cap Q) \cup (P \cap R) &= \{x : (p(x) \wedge q(x)) \vee (p(x) \wedge r(x))\} \end{aligned}$$

Se $x \in P \cap (Q \cup R)$, então $p(x) \wedge (q(x) \vee r(x))$ é verdadeira. Pela primeira lei distributiva para funções sentenciais, a equivalência lógica

$$(p(x) \wedge (q(x) \vee r(x))) \longleftrightarrow ((p(x) \wedge q(x)) \vee (p(x) \wedge r(x)))$$

é uma tautologia.

Assim, $(p(x) \wedge q(x)) \vee (p(x) \wedge r(x))$ é verdadeira, tal que $x \in (P \cap Q) \cup (P \cap R)$. Isto dá

$$P \cap (Q \cup R) \subset (P \cap Q) \cup (P \cap R) \tag{II.1}$$

Se $x \in (P \cap Q) \cup (P \cap R)$. Então $(p(x) \wedge q(x)) \vee (p(x) \wedge r(x))$ é verdadeira. Segue da primeira lei distributiva para funções sentenciais que $p(x) \wedge (q(x) \vee r(x))$ é verdadeira, tal que $x \in P \cap (Q \cup R)$. E segue outro um resultado:

$$(P \cap Q) \cup (P \cap R) \subset P \cap (Q \cap R) \tag{II.2}$$

A demonstração segue das duas inclusões (II.1) e (II.2). □

6 Teorema. *(Leis de De Morgan) Se P e Q são conjuntos em um universo $\mathcal{U}$, então*

1. $(P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c$,
2. $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$.

7 Teorema. *Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, valem as seguintes propriedades*

1. $\emptyset \subset A$
2. $A \subset \mathcal{U}$
3. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
4. $A \cap B \subset B \subset A \cup B$

8 Teorema. *Se A e B são conjuntos, demonstre que são equivalentes as afirmações:*

1. $A \subset B$
2. $A = A \cap B$
3. $B = A \cup B$

9 Teorema. *(Propriedades da reunião e da interseção) Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, valem as seguintes propriedades:*

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $A \cap \emptyset = \emptyset$
7. $A \cap \mathcal{U} = A$
8. $A \cap A = A$
9. $A \cap B = B \cap A$
10. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

10 Teorema. *Se $S \subset \mathcal{U}$, então $\mathcal{U} - S = \mathcal{U} \cap S^c$.*

Exercício: Definir a reunião, a interseção e as leis de De Morgan para três conjuntos.

II.5. Quantificadores Lógicos

Vamos voltar ao exemplo $\boxed{\text{x é par}}$ tratado no início da Seção II.3, e restringir a nossa atenção aos valores de x pertencentes ao conjunto Z de todos os números inteiros. Assim:

1. A proposição $\boxed{\text{x é par}}$ é verdadeira apenas para alguns valores de $x \in Z$.
2. A proposição $\boxed{\text{Alguns elementos x em Z são pares}}$ é verdadeira.
3. A proposição $\boxed{\text{Todos os elementos x em Z são pares}}$ é falsa.

Em geral, usamos uma função proposicional da forma $p = p(x)$, em que a variável x está em algum conjunto X muito bem estabelecido.

17 Definição. *(Quantificadores) Os símbolos $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe um) são, respectivamente, denominados quantificadores universal e existencial.*

15 Observação. *(Sobre quantificadores) Os símbolos $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe um) devem ser usados sempre antes da afirmação lógica! Caso necessite usar após a afirmação, use palavras nos lugares dos símbolos.*

Assim, podemos considerar as duas proposições abaixo, escritas nas suas respectivas formas simplificadas:

1. Qualquer que seja $x \in X$, $p = p(x)$ é verdadeira, denotada em símbolos por:

$$\forall x \in X : p(x)$$

2. Existe um $x \in X$ tal que $p = p(x)$ é verdadeira, denotada em símbolos por:

$$\exists x \in X : p(x)$$

16 Observação. *(Variável muda) A variável x na proposição $\forall x : p(x)$ é uma* variável muda, *significando que a letra x pode ser trocada por qualquer outra letra. Assim, não há diferença lógica entre a proposição $\forall x : p(x)$ e a proposição $\forall y : p(y)$ ou a proposição $\forall z : p(z)$.*

14 Exemplo. *Algumas frases e as suas respectivas simplificações:*

1. *Para cada x real, x^2 é não negativo:*

$$\forall x \in R, x^2 \geq 0$$

2. *Existe um número real tal que $x^2 = 4$:*

$$\exists x \in R : x^2 = 4$$

3. *Para cada x real, existe y real tal que $x + y = 0$:*

$$\forall x \in R, \exists y \in R : x + y = 0$$

4. *Para quaisquer números reais x e a, vale a identidade $x^2 - a^2 \equiv (x - a)(x + a)$:*

$$\forall x, a \in R : x^2 - a^2 \equiv (x - a)(x + a)$$

5. *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

6. *(Lagrange): Todo número natural é a soma dos quadrados de quatro inteiros:*

$$\forall n \in N, \exists a, b, c, d \in Z : n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

7. *(Goldbach): Todo número par natural maior do que 2 é a soma de dois números primos:*

$$\forall n \in N - \{1\}, \exists p, q \text{ primos} : 2n = p + q$$

Não se sabe até o momento se a conjectura de Goldbach é verdadeira ou falsa. Este é um problema ainda sem solução na Matemática.

II.6. Negação de proposições com quantificadores

Desenvolveremos uma regra para negar proposições com quantificadores. Ao afirmarmos que: Todos os alunos são feios, talvez você não goste.

Temos a impressão que negar uma proposição $\forall x : p(x)$ é afirmar que $\exists x : \neg p(x)$, isto é, existe alguém que não é feio!

Existe um outro modo de entender isto. Seja U o universo e todos os valores de x para os quais vale a proposição lógica $p = p(x)$, assim definimos o conjunto $P = \{x : p(x)\}$.

Se a proposição $\forall x : p(x)$ é verdadeira, então $P = U$, assim $P^c = U^c = \emptyset$, mas como $P^c = \{x : \neg p(x)\}$, assim, se a proposição $\exists x : \neg p(x)$ fosse verdadeira seguiria que $P^c \neq \emptyset$, logo, $(P^c)^c \neq U^c = \emptyset$, garantindo que $P \neq \emptyset$, o que seria uma contradição.

Por outro lado, se a proposição $\forall x : p(x)$ é falsa, então $P \neq U$, logo $P^c \neq \emptyset$ e segue que a proposição $\exists x : \neg p(x)$ é verdadeira.

Vamos acalmar o pessoal: Nem todos os alunos são feios. Você ainda reclamará, pois talvez nenhum de vocês seja feio.

É natural suspeitar que a negação de uma proposição $\exists x : p(x)$ seja a proposição $\forall x : p(x)$. Isto não é verdade!

Para resumir a forma de negar uma proposição, nós devemos utilizar uma forma sistemática mas bastante simples.

Mudamos o quantificador para o outro tipo e negamos a proposição $p = p(x)$.

Suponhamos que exista uma proposição bem complicada. Vamos aplicar ponto a ponto a nossa *simples* regra. Por exemplo:

$$\neg[\forall x, \exists y, \forall z, \forall w : \ p(x, y, z, w)]$$

é equivalente a

$$\exists x : \ \neg[\exists y, \forall z, \forall w : \ p(x, y, z, w)]$$

que é equivalente a

$$\exists x, \forall y : \ \neg[\forall z, \forall w : \ p(x, y, z, w)]$$

que equivale a

$$\exists x, \forall y, \exists z : \ \neg[\forall w : \ p(x, y, z, w)]$$

que também é equivalente a

$$\exists x, \forall y, \exists z, \exists w : \ \neg p(x, y, z, w)$$

A regra criada é a seguinte. Devemos:

1. Manter as variáveis em sua ordem original,
2. Trocar os quantificadores e
3. Negar a proposição.

Exemplo: A negação da conjectura de Goldbach pode ser escrita como

$$\exists n \in N - \{1\}, \forall p, q \text{ números primos} : 2n \neq p + q$$

significando que existe um número natural par maior do que 2 que não é a soma de dois números primos. Para mostrar que a conjectura de Goldbach não funciona, basta apresentar um contra-exemplo, isto é, os objetos satisfazendo aos conjuntos mas não atendendo a conclusão.

Exercícios:

1. Usando Tabelas-Verdade ou outro tipo de demonstração, verificar que cada uma das seguintes proposições é uma tautologia:

   (a) $p \to (p \vee q)$
   (b) $p \to (q \to p)$
   (c) $(p \to q) \longleftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
   (d) $((p \wedge \neg q) \to q) \to (p \to q)$
   (e) $(p \vee (p \wedge q)) \longleftrightarrow p$

2. Decidir (e justificar) se cada afirmação é uma tautologia:
   (a) $(p \vee q) \to (q \to (p \wedge q))$
   (b) $((p \vee q) \wedge r) \longleftrightarrow (p \vee (q \wedge r))$
   (c) $(p \wedge q) \to (p \to q)$
   (d) $(p \to \neg(q \to r)) \leftrightarrow (\neg(p \to q) \vee (p \to \neg r))$
   (e) $p \to (q \wedge (r \vee s))$
   (f) $\neg[(p \wedge q) \vee r] \longleftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$

(g) $(p \wedge (q \vee (r \wedge s))) \longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge s))$
(h) $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
(i) $(p \wedge q \wedge r) \longleftrightarrow (s \vee t)$
(j) $(\neg[p \rightarrow q]) \longleftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
(k) $((r \vee s) \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee s)))$
(l) $(\neg[p \rightarrow q] \wedge (r \longleftrightarrow s)) \rightarrow (t \rightarrow u)$
(m) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

3. Para cada afirmação, decidir se ela é verdadeira ou falsa, justificando a sua asserção:
   (a) Se p é verdadeira e q é falsa, então $p \wedge q$ é verdadeira.
   (b) Se p é verdadeira, q é falsa e r é falsa, então $p \vee (q \wedge r)$ é verdadeira.
   (c) A proposição $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow p)$ é uma tautologia.
   (d) As proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são logicamente equivalentes.
4. Listar os elementos de cada um dos conjuntos:

   (a) $\{x \in N : x < 45\}$
   (b) $\{x \in Z : x < 45\}$
   (c) $\{x \in R : x^2 + 2x = 0\}$
   (d) $\{x \in Q : x^2 + 4 = 6\}$
   (e) $\{x \in Z : x^4 = 1\}$
   (f) $\{x \in N : x^4 = 1\}$

5. Qual é o número de elementos de cada conjunto abaixo? Tais conjuntos são diferentes?

   (a) $\emptyset$ (b) $\{\emptyset\}$ (c) $\{\{\emptyset\}\}$ (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (e) $\{\emptyset, \emptyset\}$

6. Sejam $U = \{a, b, c, d\}$, $P = \{a, b\}$ e $Q = \{a, c, d\}$. Escrever os seguinte conjuntos:

   (a) $P \cup Q$ (b) $P \cap Q$ (c) P^c (d) Q^c

7. Sejam $U = R$, $A = \{x \in R : x > 0\}$, $B = \{x \in R : x > 1\}$ e $C = \{x \in R : x < 2\}$. Obter cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A \cup B$ (c) $B \cup C$ (e) $A \cap C$ (g) $A - B$ (i) $A - C$ (k) B^c
   (b) $A \cup C$ (d) $A \cap B$ (f) $B \cap C$ (h) $B - C$ (j) A^c (l) C^c

8. Listar todos os subconjuntos do conjunto $\{1, 2, 3\}$. Quantos subconjuntos existem?
9. Sejam A, B, C e D conjuntos tal que $A \cup B = C \cup D$ tal que $A \cap B = \emptyset = C \cap D$.
   (a) Usando exemplos, mostrar que $A \cap C$ e $B \cap D$ podem ser vazios.
   (b) Mostrar que se $C \subset A$, então $B \subset D$.
10. Suponha que P, Q e R são subconjuntos do conjunto N dos números naturais. Para cada ítem, analise se é verdadeira ou falsa a afirmação, justificando a sua asserção pelo estudo de proposições similares que existem em Lógica:
    (a) $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$.
    (b) $P \subset Q$ se, e somente se, $Q \subset P$.
    (c) Se $P \subset Q$ e $Q \subset R$, então $P \subset R$.
11. Para cada proposição, crie uma proposição com palavras, faça a negação da proposição criada e escreva se a proposição ou a negação da proposição é verdadeira:

(a) $\forall z \in N : z^2 \in N$.
(b) $\forall x \in Z, \forall y \in Z, \exists z \in z : z^2 = x^2 + y^2$.
(c) $\forall x \in Z : (x > y) \rightarrow (x \neq y)$.
(d) $\forall x, y, z \in R, \exists w \in R : x^2 + y^2 + z^2 = 8w$.

12. Para cada proposição abaixo, escrever uma proposição lógica correspondente e a negação desta proposição. Analisar se a proposição que você criou ou a negação desta proposição é verdadeira.
    (a) Dados quaisquer inteiros, existe uma maior inteiro.
    (b) Existe um inteiro maior do que todos os outros inteiros.
    (c) Todo número par é a soma de dois números ímpares.
    (d) Todo número ímpar é a soma de dois números pares.
    (e) A distância entre quaisquer dois números complexos é positiva.
    (f) Todo número natural que é divisível por 2 e também por 3 é divisível por 6. (Notação: Escrever $x|y$ se x divide y.)
    (g) Todo número inteiro é a soma dos quadrados e dois números inteiros.
    (h) Não existe um maior número natural.
13. Seja $p = p(x, y)$ uma função proposicional com as variáveis x e y. Discutir se cada afirmação é verdadeira do ponto de vista da Lógica.
    (a) $(\exists x, \forall y : p(x, y)) \rightarrow (\forall y, \exists x : p(x, y))$
    (b) $(\forall y, \exists x : p(x, y)) \rightarrow (\exists x, \forall y : p(x, y))$

17 Observação. *Boa parte deste material recebeu a inserção de módulos de nossas notas de aulas e foi adaptado de DISCRETE MATHEMATICS, WWL CHEN, 1982, 2003, onde se lê: This chapter originates from material used by the author at Imperial College, University of London, between 1981 and 1990. It is available free to all individuals, on the understanding that it is not to be used for financial gains, and may be downloaded and/or photocopied, with or without permission from the author. However, this document may not be kept on any information storage and retrieval system without permission from the author, unless such system is not accessible to any individuals other than its owners.*

II.7. Proposições com valores lógicos numéricos

Na seqüência, substituiremos os valores lógicos **F** e **V** das proposições p e q pelos valores numéricos 0 e 1, para gerar novas proposições com o uso de computadores.

18 Definição. *(Mínimo e Máximo entre números inteiros) Se p e q são números inteiros, definimos o mínimo (respectivamente, máximo) entre p e q, denotado por* $\min(p, q)$ *(respectivamente* $\max(p, q)$*), através de*

$$\min(p, q) = \begin{cases} p & se \quad p \leq q \\ q & se \quad q < p \end{cases} \qquad \max(p, q) = \begin{cases} q & se \quad p \leq q \\ p & se \quad q < p \end{cases}$$

19 Definição. *(Tabelas-verdade com valores numéricos) Sejam p e q duas proposições lógicas, que assumem o valor lógico* 0 *se a proposição é falsa e o valor lógico* 1 *se a proposição é verdadeira. A partir de tais valores lógicos numéricos de p e q, podemos definir as proposições:*

Nome da proposição	*Notação*	*Definição com valores numéricos*
Conjunção de p e q	$p \wedge q$	$\min(p, q)$
Disjunção de p e q	$p \vee q$	$\max(p, q)$
Negação de p	$\neg p$	$1 - p$
Condicional entre p e q	$p \rightarrow q$	$\max(1 - p, q)$
Bicondicional entre p e q	$p \longleftrightarrow q$	$\max(\min(p, q), \min(1 - p, 1 - q))$

15 Exemplo. *(Tabelas-verdade com valores numéricos) Sejam as proposições p e q, que assumem valores lógicos verdadeiros (1) ou falsos (0).*

P1	*P2*	*Conjunção*	*Disjunção*	*Negação*	*Implicação*	*Equivalência*
p	*q*	*min(p,q)*	*max(p,q)*	*1-p*	*max(1-p,q)*	*max(min(p,q),min(1-p,1-q))*
1	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*

Trabalhos que devem ser realizados pelos alunos

1. Exibir situações com frases da vida e de Matemática onde aparecem exemplos práticos de proposições compostas.
2. Usar a Lógica para desenvolver o raciocínio lógico, identificando situações como as dos livros: "Alice no País das Maravilhas (Lewis Carrol)" ou "A Dama ou o Tigre?", "Alice no País dos Enigmas", "O Enigma de Sherezade" de Raymond Smullyan, editados no Brasil por Jorge Zahar, para resolver problemas de raciocínio lógico-matemático.
3. Estudar e exibir situações em que são necessárias as técnicas dedutivas para demonstrar proposições lógicas. Exibir aplicações das técnicas dedutivas, em resultados simples da aritmética dos números inteiros, racionais e irracionais e também em conteúdos deste curso. Estudar a equivalência das técnicas de demonstrações (direta, contrapositiva e por absurdo) usando a tabela verdade
4. Dar exemplos de situações com demonstrações lógicas diretas.
5. Dar exemplos de situações que necessitam ser demonstradas pela contrapositiva.
6. Dar exemplos de situações que necessitam que as demonstrações sejam realizadas "por absurdo".
7. Apresentar situações em que a indução matemática não é válida. Apresentar situações onde a indução matemática é necessária.
8. Para entender como usamos a Lógica em jogos e quebra-cabeças como: quadrado mágico, Kakuro, jogos de tabuleiro de damas e Xadrez, além de jogos de computador como o Freecell. Vejamos um problema de um Sudoku simples:

		4	8	3			7	2
	1	2					8	
		5	2		1	3		
				6	2		9	1
7			5		9			3
9	4		7	8				
		3	9		7	4		
	5					6	1	
	8			4	6	9		

Figura II.1: Exemplo do problema Sudoku

II.8. Conjuntos e suas principais propriedades

Conjuntos são usados para descrever propriedades matemáticas. Para os nossos estudos, admitiremos que existe um conjunto universal com todos os elementos do ambiente matemático que estamos trabalhando, denotando-o por $\mathcal{U}$ e um conjunto vazio que não possui elementos, denotado por $\emptyset$.

18 Observação. *(Símbolos de pertinência e inclusão) Em geral, conjuntos são indicados por letras maiúsculas e os elementos dos conjuntos indicados por letras minúsculas. Se um elemento x pertence ao conjunto A, denotamos por $x \in A$. Se um elemento x não pertence ao conjunto A, denotamos por $x \notin A$. Se os elementos de um conjunto A possuem a* mesma *propriedade $P = P(x)$, escrevemos*

$$A = \{x : P(x) \text{ é verdadeira}\} \qquad ou \qquad A = \{x \mid P(x) \text{ é verdadeira}\}$$

20 Definição. *(Subconjunto) Um conjunto A é subconjunto de B se, para todo $x \in A$ tem-se que $x \in B$, denotando esta inclusão, por $A \subset B$ ou por $B \supset A$.*

21 Definição. *(Superconjunto) Um conjunto A é superconjunto de B se $B \subset A$.*

22 Definição. *(Conjuntos iguais) Dois conjuntos A e B são iguais, se e somente se, todo elemento de A é elemento de B e todo elemento de B é elemento de A. Os conjuntos A e B são iguais se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$. Quando A e B são iguais, usamos a notação $A = B$.*

23 Definição. *(Conjuntos diferentes) Se A e B não são iguais, diz-se que A e B são diferentes e usamos a notação $A \neq B$.*

24 Definição. *(Subconjunto próprio) Se $A \subset B$ e A é diferente de B, diz-se que A é um subconjunto próprio de B.*

25 Definição. *(Superconjunto próprio) Se $A \supset B$ e A é diferente de B, diz-se que A é um superconjunto próprio de B.*

26 Definição. *(Reunião de conjuntos) A reunião de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B:*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

27 Definição. *(Interseção de conjuntos) A interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B:*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exercício: Defina a reunião de três conjuntos e a interseção de três conjuntos.

11 Teorema. *Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, valem as propriedades*

1. $\emptyset \subset A \subset \mathcal{U}$
2. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
3. $A \cap B \subset B \subset A \cup B$

12 Teorema. *Se A e B são conjuntos, então são equivalentes as afirmações:*

1. $A \subset B$
2. $A = A \cap B$
3. $B = A \cup B$

28 Definição. *(Conjuntos disjuntos) Dois conjuntos A e B são disjuntos se,*

$$A \cap B = \emptyset$$

29 Definição. *(Conjunto complementar) Sejam S e U conjuntos tal que $S \subset U$. Define-se o complementar de S em U, denotado por $U - S$ ou por $U \setminus S$, como:*

$$U - S = \{x \in U : x \notin S\}$$

Se o conjunto U se refere ao universo $\mathcal{U}$ que se considera no contexto, é normal denotar o complementar de S, como:

$$S^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin S\}$$

13 Teorema. *Se $S \subset U$, então $U - S = U \cap S^c$.*

14 Teorema. *(Propriedades da reunião e da interseção) Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, valem:*

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $A \cap \emptyset = \emptyset$
7. $A \cap \mathcal{U} = A$
8. $A \cap A = A$
9. $A \cap B = B \cap A$
10. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

15 Teorema. *(Distributividade) Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, valem:*

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

16 Teorema. *(Leis de Augustus de Morgan] Quaisquer que sejam os conjuntos A e B:*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Exercício: Exibir as leis de De Morgan para três conjuntos.

II.9. Propriedades para número maior de conjuntos

19 Observação. *(Número finito ou infinito de conjuntos) As propriedades apresentadas para dois conjuntos também são válidas para um número finito de conjuntos, mas nem sempre são verdadeiras para um número infinito de conjuntos.*
Seja a coleção de conjuntos $\{A_i\}_{i\in M}$, *onde* $M = \{1, 2, 3, ..., m\}$. *A reunião dos conjuntos* A_i *é o conjunto de todos os elementos que pertencem a* **pelo menos** *um dos conjuntos* A_i*:*

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algum } i \in M\}$$

A interseção dos conjuntos A_i *é o conjunto de todos os elementos que pertencem a* **todos** *os conjuntos* A_i*:*

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para todo } i \in M\}$$

Nas definições acima, se o conjunto M for substituído pelo conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ *e a letra m for substituída pelo* símbolo ∞*, a reunião e a interseção serão indicadas por:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algum } i \in N\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para todo } i \in N\}$$

Capítulo III

RELAÇÕES E FUNÇÕES

"E apliquei o meu coração a inquirir e a investigar com sabedoria a respeito de tudo quanto se faz debaixo do céu; essa enfadonha ocupação deu Deus aos filhos dos homens para nela se exercitarem. Atentei para todas as obras que se fazem debaixo do sol; e eis que tudo era vaidade e desejo vão. Ao Senhor, nosso Deus, pertencem a misericórdia e o perdão; pois nos rebelamos contra ele, e não temos obedecido à voz do Senhor, nosso Deus, para andarmos nas suas leis, que nos deu por intermédio de seus servos, os profetas." A Bíblia Sagrada, Eclesiastes 1:13-14

III.1. Par ordenado

30 Definição. *(Par ordenado) Um par ordenado* (a, b) *é o conjunto na forma*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Os elementos a e b do par (a, b) *são as coordenadas. A primeira coordenada recebe o nome de* **abscissa** *e a segunda coordenada recebe o nome de* **ordenada**.

Exercício: Usando a definição acima, demonstrar que dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

III.2. Produto cartesiano

31 Definição. *(Produto cartesiano) Se A e B são conjuntos não vazios, o produto cartesiano entre A e B, denotado por* $A \times B$*, é o conjunto de todos os pares ordenados de* $A \times B$*, isto é:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad e \quad b \in B\}$$

Em situações em que $A = \emptyset$ *ou* $B = \emptyset$*, escrevemos* $A \times B = A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

III.3. Produto de número por conjunto

32 Definição. *(Produto de número por conjunto) O produto do número r pelo conjunto X, é definido por* $r.X = \{rx : x \in X\}$.

16 Exemplo. *(Conjunto dos números pares) O produto do número* 2 *pelo conjunto Z dos números inteiros, é o conjunto dos números pares:*

$$2Z = \{2z : z \in Z\} = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$$

III.4. Relações

33 Definição. *(Relação) Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma relação R no produto cartesiano* $A \times B$, *é qualquer subconjunto de* $A \times B$, *isto é, é um conjunto R tal que* $R \subset A \times B$.

III.5. Aplicações

34 Definição. *(Aplicação) Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma aplicação F no produto cartesiano* $A \times B$, *é uma relação em* $A \times B$, *que satisfaz às duas propriedades:*

1. *Para cada* $x \in A$, *existe* $y \in B$ *tal que* $(x, y) \in F$.
2. *Se* $(x, y_1) \in F$ *e* $(x, y_2) \in F$, *então* $y_1 = y_2$.

Na literatura em geral, uma aplicação f *em* $A \times B$ *é denotada por* $f : A \to B$.

20 Observação. *(Relação que não é aplicação)* $R = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *é uma relação em* R^2 *que não é uma aplicação, pois para um mesmo elemento* $x = 0$, *existem dois correspondentes* $y = -1$ *e* $y = 1$ *tal que* $x^2 + y^2 = 1$.

21 Observação. *(A palavra* função*] Em geral, a palavra* aplicação *é substituída pela palavra* função, *mas ressaltamos que, na literatura recente, esta modificação deve ser usada se B é um subconjunto do conjunto dos números reais.*

22 Observação. *O nome da função é tomado do contradomínio Y.*

1. *Se Y é um conjunto de números reais, temos uma função real.*
2. *Se Y é um conjunto de vetores, temos uma função vetorial.*
3. *Se Y é um conjunto de matrizes, temos uma função matricial.*
4. *Se Y é um conjunto de números complexos, a função é complexa.*

III.6. Domínio, contradomínio e imagem

35 Definição. *(Domínio, Contradomínio e Imagem de uma aplicação) Seja f uma aplicação em* $A \times B$. *Em geral, a aplicação f é pensada em função do seu* gráfico, *que é o desenho da* curva *representativa de f, razão pela qual é conhecida como o gráfico de f, denotada por*

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B : x \in A, y \in B, y = f(x)\}$$

sendo que f associa a cada $x \in A$ um único $y \in B$ tal que $y = f(x)$. O domínio de f, denotado por $\texttt{Dom}(f)$ é o conjunto A, o contradomínio de f, denotado por $\texttt{Codom}(f)$ é o conjunto B e a imagem de f, denotada por $\texttt{Im}(f)$ é definida por

$$f(A) = \{y \in B, existe\ x \in A : y = f(x)\}$$

17 Exemplo. *A função quadrática $f : R \to [0, \infty)$ pode ser escrita como:*

$$G(f) = \{(x, y) \in R^2 : x \in R, y \in R, y = x^2\}$$

ou na forma $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ sendo $\texttt{Dom}(f) = R$, $\texttt{Codom}(f) = [0, \infty)$ e $\texttt{Im}(f) = [0, \infty)$.

III.7. Restrição de uma aplicação

36 Definição. *(Restrição de uma aplicação) Se S é um subconjunto de A, podemo restringir o domínio de uma aplicação $f : A \to B$ de modo que a função restrição $f|_S : S \to B$ coincide com a função original sobre o conjunto S, isto é, se para todo $x \in S$, tem-se que*

$$f|_S(x) = f(x)$$

18 Exemplo. *A função $f : R \to R$, definida por $f(x) = x^2$ pode ter a sua definição restrita ao conjunto $[0, \infty)$ de modo que*

$$f|_{[0,\infty)} : [0, \infty) \to R, \quad f(x) = x^2$$

III.8. Extensão de uma aplicação

37 Definição. *(Extensão de uma aplicação) Podemos estender uma aplicação $f : A \to B$ a um conjunto $M \supset A$ de modo que a aplicação estendida $\overline{f} : M \to B$ coincida com a função original sobre o conjunto A, isto é, para todo , $\quad x \in A$ tem-se que*

$$\overline{f}(x) = f(x)$$

19 Exemplo. *A função $f : R - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ não tem sentido para $x = 0$, mas f pode ser estendida à função* **sinc** *sobre todo o conjunto R definindo $f(0) = 1$. Esta forma é muito usada em Análise.*

$$\texttt{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

A função **sinc** *é utilizada em transmissão digital de sinais.*

III.9. Aplicação injetiva

38 Definição. *(Aplicação injetiva) Uma aplicação $f : A \to B$ é injetiva, injetora, unívoca ou 1-1, se:*

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \textit{implica que} \quad x_1 = x_2$$

ou equivalentemente,

$$x_1 \neq x_2 \quad \textit{implica que} \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

20 Exemplo. *A função $f : R \to R$, definida por $f(x) = x^2$ não é injetiva, uma vez que $f(-2) = f(2)$, mas a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é injetiva.*

III.10. Aplicação sobrejetiva

39 Definição. *(Aplicação sobrejetiva) Uma aplicação $f : A \to B$ é sobrejetiva, sobre ou sobrejetora, se $f(A) = B$.*

21 Exemplo. *A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva, pois não existe $x \in R$ tal que $f(x) = -2$, mas a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é sobrejetiva.*

III.11. Aplicação bijetiva

40 Definição. *(Aplicação bijetiva) Uma aplicação $f : A \to B$ é bijetiva, bijetora ou uma correspondência biunívoca, se f é injetiva e também sobrejetiva.*

22 Exemplo. *A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ não é bijetiva, mas a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva.*

23 Observação. *(A palavra `sobre`) Afirmar que $f : A \to B$ é uma aplicação injetiva* sobre *o conjunto B, é equivalente a afirmar que f é bijetiva.*

41 Definição. *(Aplicação identidade) A identidade $I : X \to X$ é uma das mais importantes aplicações da Matemática, definida por $I(x) = x$ para cada $x \in X$. Quando é importante indicar o conjunto X onde a identidade está atuando, a aplicação identidade $I : X \to X$ é denotada por I_X.*

III.12. Compostas de aplicações

42 Definição. *(Aplicação composta) Sejam as aplicações $f : A \to B$ e $g : B \to C$. A aplicação composta $g \circ f : A \to C$ é definida, para todo $x \in A$, por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

23 Exemplo. *Sejam $f : R \to R$ definida por $f(x) = 2x$ e $g : R \to R$ definida por $g(y) = y^2$. A composta $g \circ f : R \to R$ é definida por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

Tomando $h : R \to R$, por $h(x) = 4x^2$, poderemos escrever $h = g \circ f$.

43 Definição. *(Aplicações inversas à esquerda e à direita) Sejam $f : A \to B$, $g : B \to A$ aplicações e $a \in A$ e $b \in B$ elementos arbitrários.*

1. *g é uma inversa à esquerda para f se $g \circ f = I_A$, isto é, $(g \circ f)(a) = a$.*
2. *g é uma inversa à direita para f se $f \circ g = I_B$, isto é, $(f \circ g)(b) = b$.*
3. *A aplicação f tem g como inversa se, g é uma inversa à esquerda e também à direita para f, isto é, $(f \circ g)(a) = I_A(a)$ e $(g \circ f)(b) = I_B(b)$.*
4. *Nem sempre existe a inversa de uma aplicação f, mas quando isto ocorre, ela é denotada por f^{-1}.*
5. *Se a inversa f^{-1} existe, ela é única e a inversa da inversa de f é a própria f, isto é, $(f^{-1})^{-1} = f$.*

17 Teorema. *(Propriedades das aplicações compostas) Sejam as aplicações $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$. Então, a composta dessas aplicações*

1. *é associativa, isto é $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;*
2. *possui elemento neutro, isto é, $f \circ I = I \circ f = f$.*

Exercício: Sejam as aplicações $f : A \to B$ e $g : B \to C$ e $g \circ f : A \to C$.

1. Exibir exemplos mostrando que a composta de duas aplicações não é comutativa, isto é, em geral vale a relação $f \circ g \neq g \circ f$.
2. Demonstrar que se f e g são injetivas, então a composta $g \circ f$ também é injetiva.
3. Demonstrar que se f e g são sobrejetivas, então a composta $g \circ f$ também é sobrejetiva.
4. Demonstrar que se f e g são bijetivas, então a composta $g \circ f$ também é bijetiva.
5. Demonstrar que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.
6. Demonstrar que se $g \circ f$ é é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.
7. Demonstrar que se $g \circ f$ é injetiva e f é injetiva, então g é injetiva.
8. Considere a seguinte afirmação:

   "Se $g \circ f$ é injetiva e g é sobrejetiva, então f é sobrejetiva."

   É verdadeira a afirmação acima? Se for falsa, apresente um contra-exemplo para esta afirmação, isto é, uma situação em que $g \circ f$ é injetiva e g é sobrejetiva, mas f NÃO é sobrejetiva.

III.13. Imagem direta e inversa de conjunto por aplicação

No que segue, usaremos uma aplicação $f : X \to Y$ para a qual X é o domínio de f e Y é o contradomínio de f.

44 Definição. *(Imagem direta de um conjunto) Sejam $A \subset X$ e $B \subset X$. Define-se a imagem direta do conjunto A pela aplicação f por*

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

18 Teorema. *São válidas as seguintes afirmações:*

1. *Para todo $x \in X$, tem-se que $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.*
2. *Se $A \neq \emptyset$ então $f(A) \neq \emptyset$*
3. *Se $A \subset B$ então $f(A) \subset f(B)$*
4. *$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$*
5. *$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$*

45 Definição. *(Imagem inversa de um conjunto) Sejam $U \subset Y$ e $V \subset Y$. Definimos a imagem inversa do conjunto U pela aplicação f por*

$$f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$$

19 Teorema. *São válidas as seguintes afirmações:*

1. *$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$*
2. *Se $U \subset V$ então $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$*
3. *$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$*
4. *$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$*
5. *$f^{-1}(V^c) = [f^{-1}(V)]^c$*
6. *Se $U \subset V$ então $f^{-1}(V - U) = f^{-1}(V) - f^{-1}(U)$*

20 Teorema. *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação, então*

1. *se $A \subset X$, então $A \subset f^{-1}(f(A))$.*
2. *se $V \subset Y$, então $f(f^{-1}(V)) \subset V$.*

Exercício: Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Demonstrar que:

1. f é injetiva se, e somente se, quaisquer que sejam $A, B \subset X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

   Demonstração. Mostraremos que se f é injetiva, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   A inclusão $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ vale em geral mas a inclusão $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, necessita que f seja injetiva.
   Se $y \in f(A) \cap f(B)$, então existe $a \in A$ com $y = f(a)$ e existe $b \in B$ tal que $y = f(b)$. Se f é injetiva, então a afirmação $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$, assim $a \in A \cap B$ e desse modo $y = f(a) \in f(A \cap B)$.
   Mostraremos agora que se $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ então f é injetiva.
   Negaremos a tese e chegaremos à negação da hipótese. Realmente, se f não é injetiva, existem $x_1, x_2 \in X$ sendo $x_1 \neq x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Assim, existem dois conjuntos unitários $A = \{x_1\}$ e $B = \{x_2\}$ tal que $A \cap B = \emptyset$, garantindo que $f(A \cap B) = \{f(x_1\} \cap \{f(x_2\} = \emptyset$ mas $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1\} \cap \{f(x_2\} \neq \emptyset$, contrário à hipótese, logo, a afirmação é verdadeira. □

2. f é injetiva se, e somente se, para todo $Y \subset X$ tem-se $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$.

   Demonstração. Mostraremos que se f é injetiva, então $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$.
   A inclusão $f(X - Y) \subset f(X) - f(Y)$ vale em geral e não necessita da injetividade da função f. Para demonstrar a inclusão $f(X) - f(Y) \subset f(X - Y)$, existe a necessidade que f seja injetiva.
   Se $y \in f(X) - f(Y)$, então $y \in f(X)$ e $y \notin f(Y)$, assim existe $x \in X$ com $y = f(x)$ e existe $z \notin Y$ tal que $y = f(z)$. Se f é injetiva, então $f(x) = f(z)$ implica que $x = z$, assim $x = z \in X - Y$ e desse modo $y = f(x) \in f(X - Y)$.
   Mostraremos agora que se $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$ então f é injetiva.
   Negaremos a tese e chegaremos à negação da hipótese. Realmente, se f não é injetiva, existem $x_1, x_2 \in X$ sendo $x_1 \neq x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Assim, podemos construir dois conjuntos $X = \{x_1, x_2\}$ e $Y = \{x_2\}$ tal que $X - Y = \{x_1\}$, garantindo que $f(X - Y) = \{f(x_1\}$ mas $f(X) - f(Y) = \{y\} - \{y\} = \emptyset$, contrário à hipótese. Concluímos que a afirmação é verdadeira. □

3. f é injetiva se, e somente se, para quaisquer $A, B \subset X$ tem-se $f(A - B) = f(A) - f(B)$.

   Demonstração. Caso particular do ítem anterior com $X = A$ e $Y = B$. □

4. f é injetiva se, e somente se, para todo $A \subset X$ tem-se $f^{-1}(f(A)) = A$.

   Demonstração. Demonstração: Para qualquer função f, tem-se em geral que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Basta mostrar que se f é injetiva então $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Seja $x \in f^{-1}(f(A))$. Assim, $f(x) \in f(A)$. Como $f(x)$ está na imagem $f(A)$, existe $x_1 \in A$ tal que $f(x) = f(x_1)$. Como f é injetiva, segue que $x = x_1$, assim $x \in A$. Concluímos assim que, se f é injetiva, então $f^{-1}(f(A)) = A$.

   □

5. f é sobrejetiva se, e somente se, $V \subset Y$ tem-se $f(f^{-1}(V)) = V$.
6. f é bijetiva se, e somente se, para todo $A \subset X$ e para todo $V \subset Y$, tem-se que $f^{-1}(f(A)) = A$ e $f(f^{-1}(V)) = V$.

Capítulo IV

CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

> "E, como aos homens está ordenado morrerem uma só vez, vindo depois o juízo, assim também Cristo, oferecendo-se uma só vez para levar os pecados de muitos, aparecerá segunda vez, sem pecado, aos que o esperam para salvação." A Bíblia Sagrada, Hebreus 9:27-28

IV.1. Equivalência de conjuntos

46 Definição. *(Conjuntos equivalentes) Dois conjuntos A e B são equivalentes se, existe uma bijeção $f : A \to B$. Se A e B são conjuntos equivalentes, usamos a notação $A \sim B$.*

24 Observação. *De modo grosseiro, conjuntos equivalentes são aqueles que possuem o mesmo número de elementos, mas veremos que este conceito precisa ser melhorado!*

24 Exemplo. *Conjuntos equivalentes. Todas as funções apresentadas são bijetoras.*

① $V = \{a, e, i, o, u\} \sim I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *pois existe pelo menos uma bijeção entre V e I_5. Apresente pelo menos uma delas das 120 possíveis bijeções entre V e I_5?*

② $N = \{1, 2, 3, 4, ...\} \sim N_2 = \{2, 4, 6, 8, ...\}$, *pois existe $f : N \to N_2$ definida por $f(n) = 2n$.*

③ $N = \{1, 2, 3, 4, ...\} \sim P = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$, *pois existe $f : N \to P$ definida por $f(n) = 2(n-1)$.*

④ $N = \{1, 2, 3, 4, ...\} \sim I = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, *pois existe $f : N \to I$ definida por $f(n) = 2n - 1$.*

⑤ $I_1 = [0, 1] \sim I_a = [0, a]$ $(a > 0)$, *pois $f : I_1 \to I_a$ definida por $f(x) = ax$.*

⑥ $I = [a, b] \sim I_h = [a + h, b + h]$, *pois $f : I \to I_h$ definida por $f(x) = x + h$ é bijetora.*

⑦ $I = (0, 1) \sim J = (0, \infty)$, *pois $f : I \to J$ definida por $f(x) = 1/x$ é bijetora.*

⑧ $I = (-1, 1) \sim J = (-\infty, \infty)$, *pois $f : I \to J$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ é bijetora.*

25 Exemplo. *Uma relação interessante. A coleção de todos os conjuntos equivalentes A, B, C, ... caracterizados pela relação $A \sim B$ definida antes, possui as propriedades:*

1. *Reflexiva: $A \sim A$.*
   Justificativa: A aplicação identidade $I_A : A \to A$ é bijetora.

2. *Simétrica: Se $A \sim B$ então $B \sim A$.*
   Justificativa: Se $f : A \to B$ é bijetora, a sua inversa $f^{-1} : B \to A$ também é bijetora.
3. *Transitiva: Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.*
   Justificativa: Se $f : A \to B$ é bijetora e $g : B \to C$ é bijetora, a aplicação composta $h = g \circ f : A \to C$ também é bijetora.

IV.2. Relação de equivalência

25 Observação. *(Notação de elementos relacionados) Para indicar que dois elementos $x, y \in U$ estão relacionados por uma relação R, denotamos por: xRy ou $(x, y) \in R$ ou $x \equiv y \ (mod\ R)$.*

47 Definição. *(Relação de equivalência) Uma relação R definida sobre um conjunto U é uma relação de equivalência se é:*

- R *Reflexiva: Qualquer que seja $x \in U$, tem-se que xRx.*
- S *Simétrica: Se xRy então yRx.*
- T *Transitiva: Se xRy e yRz, então xRz.*

26 Exemplo. *(Relação de paridade). Seja o conjunto Z dos números inteiros e a relação sobre Z definida por, xRy se, e somente se, $x - y$ é um número par. Mostramos que esta é uma relação de equivalência, pois valem as propriedades:*

- R *Qualquer que seja $x \in Z$, tem-se que $x - x = 0$ é par, logo xRx.*
- S *Se xRy então $x - y$ é par, logo $y - x$ também é par, assim yRx.*
- T *Se xRy e yRz, então $x-y$ é par e $y-z$ é par. Dessa maneira, a soma $(x-y)+(y-z) = x-z$ é par, garantindo que xRz.*

27 Exemplo. *(Congruência módulo p) Seja Z o conjunto dos números inteiros e a relação sobre Z definida por: $x \equiv y \mod (p)$ se, e somente se, $x - y$ é um múltiplo inteiro de p. É possível mostrar que valem as três propriedades:*

- R *Qualquer que seja $x \in Z$, tem-se que $x - x = 0$ é múltiplo de p, logo $x \equiv x \mod (p)$.*
- S *Se $x \equiv y \mod (p)$ então $x - y$ é múltiplo de p, logo $y - x$ também é múltiplo de p, assim $y \equiv x \mod (p)$.*
- T *Se $x \equiv y \mod (p)$ e $y \equiv z \mod (p)$, então $x - y$ é múltiplo de p e $y - z$ é múltiplo de p, assim, a soma desses números é um múltiplo de p, logo $(x - y) + (y - z) = x - z$ é múltiplo de p e temos então que $x \equiv z \mod (p)$.*

28 Exemplo. *(Relação de equivalência com conjuntos) Seja a coleção de todos os conjuntos em um universo $\mathcal{U}$ e $A, B \in \mathcal{U}$. A relação R definida por, ARB se, e somente se, $A = B$, possui as propriedades: Reflexiva, Simétrica e Transitiva.*

48 Definição. *(Classe de equivalência) Seja R uma relação equivalência definida sobre um conjunto U. A classe de equivalência do elemento $a \in U$ é o subconjunto de U, definido por*

$$\overline{a} = \{x \in U : x \equiv a \mod (R)\}$$

29 Exemplo. *(Classes de equivalência de paridade) Seja o conjunto Z dos números inteiros e a relação sobre Z definida por: xRy se, e somente se, x − y é um número par. O conjunto Z pode ser decomposto em duas classes de equivalência disjuntas e não vazias, isto é, $Z = \overline{0} \cup \overline{1}$, onde*

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in Z : x \equiv 0 \mod (2)\} \quad \textit{Conjunto dos números pares} \\ \overline{1} &= \{x \in Z : x \equiv 1 \mod (2)\} \quad \textit{Conjunto dos números ímpares} \end{aligned}$$

30 Exemplo. *(Classes de congruência módulo 3) Seja o conjunto Z dos números inteiros e a relação sobre Z definida por: $x \equiv y \pmod 3$ se, e somente se, x − y é divisível por 3. O conjunto Z pode ser decomposto em três classes de equivalência disjuntas e não vazias, isto é, $Z = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2}$, onde $\overline{0} = \{x \in Z : x \equiv 0 \mod (3)$, $\overline{1} = \{x \in Z : x \equiv 1 \mod (3)\}$ e $\overline{2} = \{x \in Z : x \equiv 2 \mod (3)\}$.*

IV.3. Relação de ordem

49 Definição. *(Relação de ordem) Uma relação R definida sobre um conjunto U é uma relação de ordem se é:*

R Reflexiva: Qualquer que seja $x \in U$, tem-se que xRx.
A Anti-Simétrica: Se xRy e yRx então x = y.
T Transitiva: Se xRy e yRz, então xRz.

IV.4. Conjuntos finitos e infinitos

50 Definição. *(Conjunto finito) Um conjunto A é finito se, A é vazio ou A é equivalente a $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Um conjunto A é infinito se ele não é finito.*

21 Teorema. *(Subconjunto finito de um finito) Se B é um conjunto finito e $S \subset B$, então S também é um conjunto finito.*

IV.5. Conjuntos enumeráveis

51 Definição. *(Conjunto enumerável) Um conjunto A é enumerável se A é equivalente a $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Se A não é enumerável, diz-se que A é* não-enumerável.

52 Definição. *(Conjunto contável) Um conjunto A é contável se, A é enumerável ou A é finito.*

26 Observação. *Para as nossas demonstrações, um conjunto X enumerável tomará a forma ordenada como $X = \{x_k\}_{k \in N}$, escritos pela apresentação dos seus elementos na forma geral*

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$$

sendo os índices elementos do conjunto $N = \{1, 2, 3, ...\}$ dos números naturais.

IV.6. Propriedades dos conjuntos enumeráveis

22 Teorema. *(Conjuntos enumeráveis e contáveis) Se B é um conjunto enumerável e $S \subset B$, então S é um conjunto contável.*

Demonstração. Se $S \subset B$ e B é um conjunto enumerável, existe uma aplicação bijetora $f : B \to N$. Acontece que o subconjunto S pode ser finito ou infinito.

S **é finito**: A restrição f ao subconjunto S definida por $f|_S : S \to I_n$ para algum $n \in N$ também é bijetora e segue que $S \sim I_n$.

S **é infinito**: A restrição de f ao subconjunto S, definida por $f|_S : S \to N$ também é bijetora e segue que $S \sim N$.

Reunindo as duas informações, concluímos que S é contável. □

23 Teorema. *(Contável dentro de contável) Se B é um conjunto contável e $S \subset B$, então S é um conjunto contável.*

24 Teorema. *(Reunião de dois conjuntos enumeráveis) Se A e B são conjuntos enumeráveis, a reunião $A \cup B$ é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Se A e B são conjuntos enumeráveis, escrevemos $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...\}$ e tomamos a reunião na forma:

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ..., a_n, b_n, ...\}$$

Podemos definir a função $f : A \cup B \to N$ tal que

$$f(a_n) = 2n - 1 \qquad \text{e} \qquad f(b_n) = 2n$$

Esta aplicação é bijetora e garantimos que $A \cup B \sim N$. □

25 Teorema. *(Z é um conjunto enumerável) O conjunto Z de todos os números inteiros é enumerável.*
Dica para a demonstração: Decompor Z na forma $Z = A \cup B$ onde $A = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ e $B = \{-1, -2, -3, ..., -n, ...\}$.

26 Teorema. *(Reunião de três conjuntos enumeráveis) Se A, B e C são conjuntos enumeráveis, a reunião $A \cup B \cup C$ é um conjunto enumerável.*

Dica: Escreva $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...\}$ e $C = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ...\}$ e tome a reunião:

$$A \cup B \cup C = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, ..., a_n, b_n, c_n, ...\}$$

e defina a função bijetora $f : A \cup B \cup C \to N$ tal que

$$f(a_n) = 3n - 2, \qquad f(b_n) = 3n - 1 \qquad \text{e} \qquad f(c_n) = 3n$$

27 Teorema. *(Reunião de n conjuntos enumeráveis) Se $\mathcal{E} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ é uma coleção* **finita** *de conjuntos enumeráveis, então a reunião $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ também é um conjunto enumerável.*

Dica: Escreva

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, ..., a_{2n}\}, ... \\ A_k &= \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, ..., a_{kn}\}, ... \\ A_n &= \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ..., a_{nn}\}. \end{aligned}$$

Tome a reunião como:

$$\begin{aligned} A = A_1 \cup A_2 \cup ...A_n &= \{a_{11}, a_{21}, ..., a_{i1}, ..., a_{n1}, \\ &= a_{12}, a_{22}, ..., a_{i2}, ..., a_{n2}, \\ &= a_{13}, a_{23}, ..., a_{i3}, ..., a_{n3}, ..., \\ &\quad a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{ij}, ..., a_{nj}, ..., \\ &\quad a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{in}, ..., a_{nn}\} \end{aligned}$$

e defina a função bijetora $f : A \to N$ tal que

$$f(a_{ij}) = (i-1)n + j \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

28 Teorema. *(Reunião de infinitos conjuntos enumeráveis) Se $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n, ...\}$ é uma coleção* **infinita** *de conjuntos enumeráveis, então a reunião $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$.. também é um conjunto enumerável.*

29 Teorema. *(Produto cartesiano de conjuntos enumeráveis) Se A e B são conjuntos enumeráveis então $A \times B$ é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Se A e B são conjuntos enumeráveis, tomamos $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...\}$ para escrevermos o produto cartesiano como a reunião

$$A \times B = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_i \cup ...$$

onde os conjuntos C_i com $i = 1, 2, 3, ...$ são:

$$\begin{aligned} C_1 = \{a_1\} \times B &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), ..., (a_1, b_n), ...\} \\ C_2 = \{a_2\} \times B &= \{(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), ..., (a_2, b_n), ...\} \\ C_3 = \{a_3\} \times B &= \{(a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), ..., (a_3, b_n), ...\}, ... \\ C_i = \{a_i\} \times B &= \{(a_i, b_1), (a_i, b_2), (a_i, b_3), ..., (a_i, b_n), ...\} \\ ... &\quad ... \end{aligned}$$

Como cada conjunto C_i é equivalente ao conjunto B, temos que cada C_i é um conjunto enumerável e a reunião C de conjuntos enumeráveis, também é um conjunto enumerável, logo, $A \times B$ é um conjunto enumerável. □

30 Teorema. *(Produto cartesiano NxN) Se* $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ *é o conjunto dos números inteiros positivos então* $N \times N$ *também é um conjunto enumerável.*

31 Teorema. *(Q é um conjunto enumerável) O conjunto Q de todos os números racionais é enumerável.*

Demonstração. O conjunto Q dos números racionais pode ser escrito como

$$Q = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n \cup ...s = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

isto é, a reunião dos conjuntos C_n com $n = 1, 2, 3, ...$, sendo:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\frac{m}{1} : m \in Z\} = \frac{1}{1}Z \\ C_2 &= \{\frac{m}{2} : m \in Z\} = \frac{1}{2}Z \\ C_3 &= \{\frac{m}{3} : m \in Z\} = \frac{1}{3}Z \\ C_4 &= \{\frac{m}{4} : m \in Z\} = \frac{1}{4}Z \\ ... &\quad ... \\ C_n &= \{\frac{m}{n} : m \in Z\} = \frac{1}{n}Z \\ ... &\quad ... \end{aligned}$$

Cada conjunto C_n é equivalente ao conjunto Z, assim cada C_n é um conjunto enumerável e segue que Q é enumerável pois é a reunião de conjuntos enumeráveis. □

6	9	4	8	3	5	1	7	2
3	1	2	6	7	4	5	8	9
8	7	5	2	9	1	3	6	4
5	3	8	4	6	2	7	9	1
7	2	6	5	1	9	8	4	3
9	4	1	7	8	3	2	5	6
1	6	3	9	5	7	4	2	8
4	5	9	3	2	8	6	1	7
2	8	7	1	4	6	9	3	5

Figura IV.1: Solução do problema do Sudoku

Capítulo V

O conjunto dos números reais

> "Não julgueis, para que não sejais julgados. Porque com o juízo com que julgais, sereis julgados; e com a medida com que medis vos medirão a vós." A Bíblia Sagrada, Mateus 7:1-2

V.1. O papel dos números reais

O estudo da Análise Real inicia com um tratamento rigoroso dos números reais e algumas razões para isto são: Para entender a linguagem e as idéias da Análise, devemos manter uma forte conexão entre os números e os pontos da reta numerada; Para realizar cálculos, devemos conhecer as propriedades que podemos usar para realizar estimativas com desigualdades; e a demonstração analítica de muitos teoremas e resultados, só é possível com as propriedades dos números reais.

V.2. Grupos

53 Definição. *(Aplicação binária) Seja $S \neq \emptyset$. Uma aplicação binária em S é uma aplicação $f : S \times S \to S$, significando que a ação de f sobre dois elementos quaisquer S deve pertencer ao conjunto S.*

27 Observação. *A aplicação $f(m,n) = m + n$ pode ser escrita como $m + n$. Usando $m.n$, entendemos que existe uma operação de multiplicação $f(m,n) = m.n$. Se não ficar clara a operação, usaremos outros sinais como: $*$, $\circ$, $\oplus$ ou $\odot$ para substituir a referida operação.*

28 Observação. *Quando usarmos a notação $(S,*)$, estaremos entendendo que o conjunto S é não vazio e sobre este conjunto S está definida uma operação binária denotada por $*$.*

31 Exemplo. *Seja $N = \{1,2,3,...\}$ o conjunto dos números inteiros positivos. $f(m,n) = m+n$ é uma aplicação binária em N, mas $g(m,n) = m - n$ não é uma aplicação binária em N pois, em geral, $m - n \notin N$.*

54 Definição. *(Operações binárias) Seja $*$ uma operação binária sobre um conjunto S. Diz-se que*

1. *$*$ é comutativa em S se, para todo $m \in S$, $n \in S$, tem-se $m * n = n * m$.*
2. *$*$ é associativa em S se, $(m * n) * p = m * (n * p)$, para todo $m \in S$, $n \in S$ e $p \in S$.*
3. *um elemento $e \in S$ é elemento neutro S com relação a $*$ se para todo $n \in S$, tem-se $e * n = n * e = n$.*
4. *Se $e \in S$ é o elemento neutro e existe $n' \in S$ tal que $n * n' = n' * n = e$ então n' é o inverso de n em S para a operação $*$.*
5. *o inverso de $m \in S$ é denotado por m^{-1} quando a operação é multiplicativa.*

32 Teorema. *Seja $*$ uma operação binária sobre um conjunto S. Demonstrar que*

1. *se existe um elemento neutro em S, ele é único.*
2. *se $*$ é associativa em S, S possui elemento neutro e para cada $m \in S$ existe um elemento inverso em S, então cada inverso deve ser único.*
3. *O inverso multiplicativo de um elemento $m \in S$, denotado por m^{-1} satisfaz à relação $(m^{-1})^{-1} = m$.*

55 Definição. *(Grupo) Se $*$ é uma operação binária sobre S, a estrutura $(S, *)$ é um grupo, se:*

1. *$(S, *)$ é associativa;*
2. *$(S, *)$ possui um elemento neutro e*
3. *todo elemento $m \in S$ possui um inverso $m^{-1} \in S$ com relação à operação $*$.*

29 Observação. *Se $*$ é a multiplicação, o grupo é multiplicativo. Se $*$ é a adição, o grupo é aditivo. Se $(S, *)$ é comutativo o grupo recebe o nome de grupo abeliano.*

32 Exemplo. *(O Grupo Z dos números inteiros) O conjunto Z dos números inteiros munido com a operação usual de adição, tem uma estrutura $(Z, +)$ de grupo abeliano, pois:*

① *Quaisquer que sejam $m, n \in Z : m + n \in Z$.*

② *Quaisquer que sejam $m, n, p \in Z : (m + n) + p = m + (n + p)$.*

③ *Existe $0 \in Z$ tal que para todo $m \in Z$ vale: $0 + m = m + 0 = m$.*

④ *Para cada $m \in Z$ existe $-m \in Z$ tal que $m + (-m) = 0$.*

⑤ *Quaisquer que sejam $m, n \in Z : m + n = n + m$.*

33 Exemplo. *(Um grupo com dois elementos) Se sobre o conjunto $S = \{1, -1\}$ utilizamos a operação $*$ de multiplicação de números inteiros, a estrutura $(S, *)$ é um grupo abeliano.*

34 Exemplo. *(Tabelas e grupos) É bastante comum estudar conjuntos S munidos com operações definidas por tabelas de dupla entrada com o resultado das operações dos elementos da primeira coluna pelos elementos da primeira linha aparecendo no cruzamento de cada linha com a coluna.*

Seja o conjunto $S = \{0, 1, 2, 3\}$ *com a* estranha *operação de adição definida pela tabela da esquerda, logo abaixo.*

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$*$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Seja $T = \{1, i, -1, -i\}$ *com a operação de multiplicação de números complexos definida pela tabela da direita que está acima.* $(S, +)$ *e* $(T, *)$ *são grupos abelianos.*

35 Exemplo. *(Interpretação das tabelas)*

1. *A simetria em relação à diagonal principal não é um objeto lúdico mas a propriedade comutativa.*
2. *A linha do* 0 *se repete em relação à linha do sinal* $+$ *significando que* 0 *é o elemento neutro.*
3. *Quando aparece* 0 *no cruzamento de uma linha com uma coluna, significa que o primeiro elemento da linha e o primeiro elemento da coluna são inversos um do outro, como é o caso de* 3 *e* 2, *pois* $3 + 2 = 0$.
4. *A associatividade deve ser verificada para todos os elementos.*

56 Definição. *(Isomorfismo de grupos) Uma aplicação* $f : S \to T$ *é um isomorfismo entre os grupos* $(S, \cdot)$ *e* $(T, \odot)$, *se:*

1. $f : S \to T$ *é bijetora e*
2. *para quaisquer* $x, y \in S$, *tem-se que* $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$.

Se existe um isomorfismo entre os grupos $(S, .)$ *e* $(T, \odot)$, *diz-se que os grupos* $(S, .)$ *e* $(T, \odot)$ *são isomorfos.*

36 Exemplo. *(Isomorfismo) Sejam* $S = \{0, 1, 2, 3\}$ *e* $T = \{1, i, -1, -i\}$ *os conjuntos cujas operações binárias foram apresentados nas duas tabelas. Os grupos* $(S, +)$ *e* $(T, *)$ *são isomorfos, pois existe uma aplicação* $f : S \to T$ *definida por* $f(0) = 1$, $f(1) = i$, $f(2) = -1$ *e* $f(3) = -1$ *ou de uma forma simplificada*

$$f(m) = i^m = i * i * i ... * i \quad (m \text{ vezes})$$

que é um isomorfismo entre $(S, +)$ *e* $(T, *)$. *O elemento neutro* $0 \in S$ *é levado pela aplicação* f *no elemento neutro* $1 \in T$.

V.3. Corpos

57 Definição. *(Distributividade) Seja* S *um conjunto onde podem ser definidas duas operações binárias* $+$ *e* $*$. *A operação* $*$ *é distributiva em relação à operação* $+$, *se para todo* $x, y, z \in S$, *valem*

$$x * (y + z) = x * y + x * z$$

e

$$(x + y) * z = x * z + y * z$$

37 Exemplo. *Seja o conjunto* $S = \{0, 1, 2, 3\}$ *com as operações de* **adição** *e* **multiplicação** *definidas pelas tabelas:*

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

A multiplicação $*$ *é distributiva em relação à adição* $+$*. Nem sempre as palavras* **adição** *e* **multiplicação** *têm os mesmos significados do Ensino básico.*

58 Definição. *(Corpo) Seja S um conjunto onde podem ser definidas duas operações binárias* $+$ *e* $*$*. A estrutura* $(S, +, *)$ *recebe o nome de corpo se:*

1. $(S, +)$ *é um grupo abeliano;*
2. $(S - \{0\}, *)$ *é um grupo abeliano;*
3. *a operação* $*$ *é distributiva em relação à operação* $+$*.*

38 Exemplo. *A estrutura* $(Z, +, *)$*, em que* Z *é o conjunto dos números inteiros com as operações usuais de adição e multiplicação, não é um corpo, pois nem todo número inteiro possui inverso em* Z*.*

33 Teorema. *Seja* $(S, +, *)$ *um corpo.*

1. *Se existe* $0 \in S$*, então para todo* $x \in S$*:* $x * 0 = 0 * x = 0$*.*
2. *Para cada* $x \in S$*, tem-se que* $-(-x) = x$*.*
3. *Para quaisquer* $x \in S$ *e* $y \in S$*:* $(-x) * y = x * (-y) = -(x * y)$*.*
4. *Para quaisquer* $x \in S$ *e* $y \in S$*:* $x * y = (-x) * (-y)$*.*
5. *Se* $x * y = 0$ *para* $x \in S$ *e* $y \in S$*, então* $x = 0$ *ou* $y = 0$*.*
6. *Se* $x * y \neq 0$ *para* $x \in S$ *e* $y \in S$*, então* $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$*.*

59 Definição. *(Isomorfismo de corpos) Sejam os corpos* $(S, +, \times)$ *e* $(T, \oplus, \otimes)$*. A aplicação* $f : S \to T$ *é um isomorfismo entre estes corpos, se:*

1. $f : S \to T$ *é uma bijeção;*
2. $f : (S, +) \to (T, \oplus)$ *é um isomorfismo de grupos;*
3. $f : (S - \{0\}, \times) \to (T - \{0\}, \otimes)$ *é um isomorfismo de grupos.*

Para esta aplicação $f : S \to T$ *temos que, para quaisquer* $x \in S$ *e* $y \in S$*, valem as duas propriedades:*

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

e

$$f(x \times y) = f(x) \otimes f(y)$$

Se existe tal isomorfismo, os corpos $(S, +, *)$ *e* $(T, \oplus, \otimes)$ *são isomorfos.*

34 Teorema. *Em um corpo $(S,+,.)$ valem as propriedades:*

1. $-0=0$
2. *Se* $x\neq 0$ *então* $x^{-1}\neq 0$.
3. $-(x+y)=(-x)+(-y)=-x-y$
4. $-(x-y)=y-x$
5. *Se* e *é o elemento neutro, então* $e^{-1}=e$.
6. $x/y=0$ *se, e somente se,* $x=0$
7. *Se* $x\neq 0$, *então* $(x\cdot y=x\cdot z)\Rightarrow y=z$.
8. *Se* $x\neq 0$ *e* $y=z$ *então* $x.y=x.z$
9. *Se* $b\neq 0$ *e* $d\neq 0$ *então*
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$
10. *Se* $b\neq 0$ *e* $d\neq 0$ *então*
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$
11. $x\cdot(y-z)=x\cdot y-x\cdot z$
12. $(x-y)+(y-z)=x-z$
13. $(x-y)-(z-y)=x-z$
14. $(x-y)\cdot(z-w)=(x\cdot z+y\cdot w)-(x\cdot w+y\cdot z)$
15. $x-y=z-w$, *sse,* $x+w=y+z$
16. *A equação* $a\cdot x+b=0$ *possui uma única solução se* $a\neq 0$.
17. *A equação* $a\cdot x+b=0$ *não possui solução se* $a=0$ *e* $b\neq 0$.
18. *A equação* $a\cdot x+b=0$ *possui infinitas soluções se* $a=0$ *e* $b=0$.

V.4. Corpos ordenados

60 Definição. *(Conjunto de números positivos) Seja* $(K,+,*)$ *um corpo e* $P\subset K$. *P é um conjunto dos números positivos, se valem as três propriedades:*

1. *se* $x\in P$ *e* $y\in P$ *então* $x+y\in P$;
2. *se* $x\in P$ *e* $y\in P$ *então* $x*y\in P$;
3. *se* $x\in K$ *então* $x\in P$ *ou* $-x\in P$ *ou* $x=0$.

30 Observação. *Em geral, denotamos* $-P=\{-x : x\in P\}$ *e escrevemos* $K=P\cup\{0\}\cup -P$. *Se* $x\in P$, *diz-se que x é positivo. Se* $x\in -P$, *diz-se que x é negativo.*

61 Definição. *(Relação de ordem em um corpo) Seja um corpo* $(K,+,*)$ *e P um subconjunto de todos os números positivos em K. Para* $x,y\in K$, *definimos a relação de ordem x* **é menor do que** *y, denotado por* $x<y$, *se* $y-x\in P$ *e definimos a relação y é maior do que x, denotado por* $x<y$, *se* $y-x\in P$.

31 Observação. *Do ponto de vista geométrico, afirmar que* $x<y$, *significa indicarmos que o número x está a esquerda de y em uma reta orientada da esquerda para a direita.*

32 Observação. *(Detalhes sobre a ordem) Da definição de relação de ordem, segue que:*

1. $0<x$ *é equivalente a* $x-0=x\in P$.
2. $x>0$ *é equivalente a* $x-0=x\in P$.
3. $x<0$ *é equivalente a* $0-x=-x\in P$ *que é equivalente a* $x\in -P$.
4. $x>0$ *é equivalente a* $0-x=-x\in P$ *que é equivalente a* $x\in -P$.

33 Observação. *Usamos a notação* $x\leq y$ *para entender que* $x<y$ *ou* $x=y$ *e a notação* $x\geq y$ *para entender que* $x>y$ *ou* $x=y$.

62 Definição. *(Corpo ordenado] Seja* $(K, +, *)$ *um corpo e P o conjunto de todos os números positivos em K. K é um corpo ordenado se é possível definir a ordem* $x < y$*, para todos* $x, y \in K$*.*

39 Exemplo. *(Alguns corpos ordenados)*

① *É um corpo ordenado o conjunto dos números racionais:*

$$Q = \{\frac{p}{q} : p \in Z, q \in Z, q \neq 0\}$$

② *É um corpo ordenado o conjunto:*

$$Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a \in Q, b \in Q\}$$

③ *O conjunto R de todos os números reais é um corpo ordenado.*

④ **Não** *é um corpo ordenado o conjunto dos números complexos:*

$$C = \{a + bi : a \in R, b \in R, i^2 = -1\}$$

63 Definição. *(Tricotomia) Seja K um corpo ordenado e* $x, y \in K$*. Então, vale* **somente uma** *das três possibilidades:* $x < y$ *ou* $x > y$ *ou* $x = y$*.*

35 Teorema. *Seja K um corpo ordenado e* $x, y, z \in K$*.*

1. *Se* $x < y$ *e* $y < z$ *então* $x < z$*.*
2. *Se* $x < y$ *então* $x + z < y + z$*.*
3. *Se* $x < y$ *então* $x - z < y - z$*.*
4. *Se* $x < y$ *e* $z < w$ *então* $x + z < y + z$*.*
5. *Se* $x > 0$ *então* $x^{-1} > 0$*.*
6. *Se* $x < 0$ *então* $x^{-1} < 0$*.*
7. *Se* $x < y$ *e* $z > 0$ *então* $x \cdot z < y \cdot z$*.*
8. *Se* $x < y$ *e* $z > 0$ *então* $x/z < y/z$*.*
9. *Se* $x < y$ *e* $z < 0$ *então* $x \cdot z > y \cdot z$*.*
10. *Se* $x < y$ *e* $z < 0$ *então* $x/z > y/z$*.*
11. *Se* $0 < x < y$ *e* $0 < z < w$ *então* $0 < x.z < y.w$*.*
12. *Se* $x > 0$ *e* $y > 0$ *então* $0 < x + y$*.*
13. *Se* $x > 0$ *e* $y > 0$ *então* $0 < x \cdot y$*.*
14. *Se* $x > 0$ *e* $y < 0$ *então* $x \cdot y < 0$*.*
15. *Para todo* $x \in K$ *segue que* $x^2 \geq 0$*.*
16. *Para todo* $x \in K - \{0\}$ *segue que* $x^2 > 0$*.*
17. *Se* $0 < x < y$ *então* $0 < 1/y < 1/x$*.*
18. $0 < 1$*.*
19. *Se* $x \leq y$ *e* $y \leq x$ *então* $x = y$*.*

64 Definição. *(Módulo) Seja K um corpo ordenado. Define-se o valor absoluto (ou módulo) de x, denotado por* $|x|$*, através de*

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

34 Observação. *Geometricamente,* $|x|$ *representa a distância entre os números* x *e* 0*, o elemento neutro da adição.*

65 Definição. *(Distância entre pontos na reta) Definimos a distância entre x e y, por*

$$|x - y| = d(x, y)$$

36 Teorema. *(Propriedades do módulo) Seja K um corpo ordenado e $x, y \in K$. Então:*

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$, *sse*, $x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $x \cdot y \leq |x.y|$
6. $|x^2| = |x|^2$
7. $|x| \leq y$, *sse*, $-y \leq x \leq y$
8. $|x| < y$, *sse*, $-y < x < y$
9. $-|x| \leq x \leq |x|$
10. $|x + y| \leq |x| + |y|$
11. $|x - y| \leq |x| + |y|$
12. $| \, |x| - |y| \, | \leq |x + y|$
13. $| \, |x| - |y| \, | \leq |x - y|$
14. *Para todo* $\varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon$, *sse*, $x = 0$.

66 Definição. *(Máximo e Mínimo) Seja K um corpo ordenado. Define-se o máximo e o mínimo entre os números x e y, por:*

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & se \quad y \leq x \\ y & se \quad x < y \end{cases} \qquad \min(x, y) = \begin{cases} y & se \quad y \leq x \\ x & se \quad x < y \end{cases}$$

37 Teorema. *Se K é um corpo ordenado então, para quaisquer $x, y \in K$ valem:*

1. $\max(x, -x) = |x|$
2. $\min(x, -x) = -|x|$
3. $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$
4. $\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$
5. $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$
6. $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$
7. $\min(-x, -y) = -\max(x, y)$

Exercício: Construir as expressões matemáticas para $\max(x, y, z)$ e para $\min(x, y, z)$.

V.5. O conjunto N dos números naturais

Aqui, estudaremos com um pouco mais de cuidado o conjunto dos números naturais, que já foi usado antes sem uma devida discussão axiomática. A partir daqui, os elementos de um corpo ordenado K serão denominados *números*.

67 Definição. *(Conjunto indutivo) Um conjunto S em um corpo ordenado K recebe o nome de conjunto indutivo, se possui as duas propriedades:*

1. *O elemento neutro* 1 *do corpo K pertence ao conjunto S, isto é,* $1 \in S$;
2. *Se $x \in S$ então $x + 1 \in S$.*

40 Exemplo. *(Conjuntos indutivos)*

① *Todo corpo ordenado K é um conjunto indutivo.*

② *Se o elemento neutro* 1 *de um corpo K está no conjunto P dos números positivos desse corpo K, então o conjunto P é um conjunto indutivo.*

③ *Se K é um corpo, o conjunto $C = \{x : x \geq 1\} \subset K$ é indutivo.*

68 Definição. *(Número natural) Um número n do corpo ordenado K é um número natural se n pertence a todos os conjuntos indutivos de K. O conjunto de todos os números naturais em K é denotado por N.*

35 Observação. *Com a definição, observamos que o conjunto N está contido em todos os conjuntos indutivos do corpo ordenado K.*

38 Teorema. *O conjunto N de todos os números naturais é um conjunto indutivo.*

Demonstração. Para mostrar que N é indutivo, devemos mostrar que $1 \in N$ e que se $n \in N$ então $n + 1 \in N$. A própria definição de conjunto indutivo garante que $1 \in N$. Se $n \in N$, então $n \in S$, para todo subconjunto S indutivo do corpo ordenado K. Pela definição de conjunto indutivo, se $n \in S$, então $n + 1 \in S$. Assim $n + 1$ pertence a todos os conjuntos indutivos de K, o que garante que $n + 1$ é um número natural, logo $n + 1 \in N$. Concluímos que N é um conjunto indutivo. □

V.6. Princípio de Indução Matemática

39 Teorema. *(Princípio fraco de indução) Se S é um conjunto indutivo contido no conjunto N dos números naturais, então $S = N$.*

Demonstração. Pela definição de número natural, segue que $N \subset S$ para todo conjunto indutivo e como por hipótese $S \subset N$, então $S = N$. □

40 Teorema. *(PIM: Princípio de Indução Matemática) Se para cada número natural n podemos definir uma proposição $P(n)$ que satisfaz às duas situações:*

1. *$P(1)$ é verdadeira;*
2. *Para todo número natural $k > 1$, a proposição $P(k)$ implica que $P(k + 1)$ é verdadeira,*

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in N$.

Demonstração. Tomemos $S = \{n \in N : P(n) \text{ é verdadeira}\}$. Como S foi construído, segue que $S \subset N$ e S é um conjunto indutivo pois $1 \in S$ e se $k \in S$ então $k + 1 \in S$, o que garante pelo Princípio fraco de indução que $S = N$. Assim, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in N$. □

41 Teorema. *(Segundo Princípio de Indução Matemática) Seja $S \subset N$ e para cada $n \in N$ definimos a coleção $S_n = \{m \in N : m < n\}$ sendo $S_1 = \emptyset$. Se para cada $n \in N$, $S_n \subset S$ implicar que $n \in S$, então $S = N$.*

36 Observação. *(Importância do PIM) O princípio de Indução Matemática serve para demonstrar propriedades dos números naturais, bem como definir conceitos envolvendo os números naturais. Na Matemática, o uso de recursividade faz intenso uso deste princípio.*

41 Exemplo. *A soma dos n primeiros números naturais pode ser definida, de um modo recursivo, por* $S_1 = 1$ *e* $S_{n+1} = S_n + n + 1$*, para cada* $n \in N$*. Pode-se observar que:*

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 3, \quad S_3 = 6, \quad S_4 = 10, \quad S_5 = 15, \quad S_6 = 21, \quad S_7 = 28, \quad S_8 = 36, \quad ...$$

Usando o PIM, é possível demonstrar que para todo $n \in N$*:*

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Exercícios usando o Princípio de Indução Matemática

1. Demonstrar que se $m \in N$ e $n \in N$ então $m + n \in N$.
   Dica: Definir $S_m = \{k \in N : m + k \in N\}$ e mostrar que S_m é indutivo.
2. Demonstrar que se $m \in N$ e $n \in N$ tal que $m < n$ então $n - m \in N$.
3. Demonstrar que se $m \in N$ e $n \in N$ então $m.n \in N$.
   Dica: Definir $P_m = \{k \in N : m.k \in N\}$ e mostre que P_m é indutivo.
4. Mostrar que se $m \in N$, então **não existe** $n \in N$ tal que $m < n < m + 1$.
5. Mostrar que se $m \in N$ e $n \in N$ são tais que $m \leq n \leq m+1$, então $m = n$ ou $n = m+1$.
6. Mostrar que se $m \in N$ e $n \in N$ são tais que $m \leq n < m + 1$, então $m = n$.
7. Mostrar que se $m \in N$ e $n \in N$ são tais que $m < n \leq m + 1$, então $n = m + 1$.
8. Mostrar que o produto de dois números naturais consecutivos é par, isto é, se $n \in N$ então, todo número da forma $f(n) = n(n + 1)$ é divisível por 2.

   Demonstração. A expressão matemática $f(1) = 1 \times 2 = 2$ é divisível por 2. Vamos assumir que $f(n) = n(n + 1)$ é par, isto é, existe $k \in N$ tal que $f(n) = 2k$. Demonstraremos que $f(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$ também é par. Realmente,

   $$f(n + 1) = (n + 1)(n + 2) = (n + 1)n + 2(n + 1) = 2k + 2(n + 1)$$

   Assim, $f(n + 1) = 2(k + n + 1)$ e segue o resultado desejado. □

9. Mostrar que o $f(n) = n(n + 1)(n + 2)$, isto é, o produto de três números naturais consecutivos, é divisível por 3 e por 6.

   Demonstração. A expressão matemática $f(1) = 1 \times 2 \times 3 = 6$ é divisível por 6. Assumiremos que $f(n) = n(n+1)(n+2)$ é múltiplo de 6, isto é, existe $k \in N$ tal que $f(n) = 6k$. Demonstraremos que $f(n+1) = (n+1)(n+2)(n+3)$ também é múltiplo de 6. Assim

   $$f(n + 1) = (n + 1)(n + 2)(n + 3) = n(n + 1)(n + 2) + 3(n + 1)(n + 2)$$

   Pelo exercício anterior, o último termo da expressão acima $(n + 1)(n + 2)$ é par e o outro é $f(n) = n(n + 1)(n + 2) = 6k$, assim

   $$f(n + 1) = f(n) + 3.2p = 6k + 6p = 6(k + p)$$

   e segue o resultado desejado. □

10. Mostrar que se $n \in N$, o número $f(n) = (n - 1)n(n + 1)(3n + 2)$ é divisível por 24.

Demonstração. Pelo Princípio de Indução Finita. Consideremos a proposição $P(n)$ tal que

$$f(n) = (n-1)n(n+1)(3n+2) \text{ é divisível por } 24$$

A proposição $P(1)$ é verdadeira, pois $f(1) = 0$ é divisível por 24.
Considerando válida a Hipótese de Indução $P(n)$, mostraremos que $P(n+1)$ é verdadeira, o que significa mostrar que $P(n+1)$ é válida, ou seja, que $f(n+1)$ é divisível por 24.

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= n(n+1)(n+2)(3n+5) - (n-1)n(n+1)(3n+2) \\ &= n(n+1)[(n+2)(3n+5) - (n-1)(3n+2)] \\ &= n(n+1)[(3n^2+11n+10) - (3n^2-n-2)] \\ &= n(n+1)(12n+12) \\ &= 12n(n+1)(n+1) \\ &= 12 \cdot 2k \cdot (n+1) = 24k(n+1) \end{aligned}$$

A última passagem foi possível pois o produto dois dois números naturais consecutivos $n(n+1)$ é par, isto é, $n(n+1) = 2k$ para algum k inteiro.
Como a Hipótese de Indução garante que existe $m \in N$ tal que $f(n) = 24m$, então

$$f(n+1) = f(n) + 24k(n+1) = 24m + 24k(n+1) = 24[m + k(n+1)]$$

e garantimos que $P(n+1)$ é verdadeira. □

69 Definição. *(Somatórios ou Somas finitas) Usamos a letra grega sigma maiúscula $\sum$ para somas finitas ou infinitas. Em geral, usamos a palavra somatório no lugar de soma.*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(k) &= f(1) + f(2) + ... + f(n) \\ \sum_{k=1}^{\infty} f(k) &= f(1) + f(2) + ... + f(n) + ... \end{aligned}$$

42 Exemplo. *(Somas finitas e infinitas)*

1. $\sum_{k=1}^{n} 5 = 5 + 5 + ... + 5$
2. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$
3. $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + ... + 2^n$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$

Exercício especial: A seqüência de Fibonacci pode ser definida por

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad (n \in N)$$

Obter a regra geral para o termo geral desta seqüência que está na forma de um conjunto:

$$F = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...\}$$

Dica:

1. Suponha que existem números reais $r \neq 0$ tal que $f_n = r^n$;
2. Substitua a expressão obtida na equação recursiva $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$;
3. Resolva a equação do segundo grau que aparece para obter as duas raízes reais r_1 e r_2;
4. Escreva a combinação $f_n = Ar_1^n + Br_2^n$;
5. Tente obter os valores das constantes A e B que satisfazem às condições $f_1 = 1$ e $f_2 = 1$;
6. Após algum trabalho, você obterá a fórmula de Binet, que gera o termo geral da sequência de Fibonacci para n natural.

Exercícios: Utilizar nas demonstrações os Princípios de Indução Matemática.

1. Mostrar que para todo $n \in N$ vale a desigualdade: $n < 2^n$.
2. Defina $n! = 1.2.3...n$ e mostre que, se $n \in N$ com $n \geq 4$, então $2^n < n!$.
3. Mostrar que para todo $n \in N$ com $n > 9$, vale: $n^3 < 2^n$.
4. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n + 1)$ para $n \in N$, fornece as somas dos n primeiros números naturais de modo recursivo. Mostrar que $s_n = n(n + 1)/2$.
5. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n + 1)^2$ para $n \in N$, fornece as somas dos quadrados dos n primeiros números naturais de modo recursivo. Mostrar que vale a forma geral: $s_n = n(n + 1)(2n + 1)/6$.
6. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n + 1)^3$ para $n \in N$, fornece as somas dos cubos dos n primeiros números naturais de uma forma recursiva. Demonstrar que para todo $n \in N$, vale a forma geral: $s_n = n^2(n + 1)^2/4$.
7. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n+1)^4$ para $n \in N$, fornece as somas dos quárticos dos n primeiros números naturais de uma forma recursiva. Mostrar que para todo $n \in N$, vale a forma geral: $s_n = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30$.
8. A seqüência: $s_1 = 1/2$ e $s_{n+1} = s_n + \dfrac{1}{(n + 1)(n + 2)}$ tem a forma geral: $s_n = n/(n+1)$ e será usada em capítulos posteriores para mostrar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)}$ converge.
9. Mostrar que a seqüência: $s_1 = 1$ e $s_2 = 3$ e $s_{n+2} = 3s_{n+1} - 2s_n$ possui a forma geral $s_n = 2^n - 1$.
   Dica: Tome $s(n) = r^n$, substitua na equação recursiva dada, resolva a equação para obter as raízes $r = 1$ ou $r = 2$ e concluir que $s(n) = A \cdot 1^n + B2^n$, ...
10. Seja K um corpo ordenado, $a, r \in K$, $r \neq 1$ e $n \in N$. A seqüência definida por: $s_1 = a$ e $s_{n+1} = s_n + ar^n$, determina a fórmula geral para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica e pode ser escrita como:

$$s_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

e será usada em capítulos posteriores para mostrar que a importante série geométrica

$$S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} ar^n$$

é convergente, quando $|r| < 1$.

11. Mostre que se $m_1, m_2, ..., m_n \in N$, então $m_1 + m_2 + ... + m_n \in N$.
12. Mostre que se $m_1, m_2, ..., m_n \in N$, então $m_1.m_2...m_{n-1}.m_n \in N$.
13. Mostre que se $p_1, p_2, ..., p_n \in P$, então $p_1 + p_2 + ... + p_n \in P$.
14. Mostre que se $p_1, p_2, ..., p_n \in P$, então $p_1.p_2.p_{n-1}.p_n \in P$.
15. Mostre que se $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, ..., x_n \neq 0$, então $x_1.x_2...x_n \neq 0$ e além disso

$$(x_1.x_2...x_n)^{-1} = {x_1}^{-1}.{x_2}^{-1}.{x_n}^{-1}$$

16. Seja K um corpo ordenado e $\{m_n\} \subset K$ para cada $n \in N$. Mostre que se $m_1 > 1, m_2 > 1, ..., m_n > 1$, então

$$m_1.m_2...m_n > n$$

Exercício: Usando o PIM, demonstrar as propriedades das somas finitas:

1. Se C é uma constante, então $\sum_{k=1}^{n} C = nC$.
2. Propriedade da soma: $\sum_{k=1}^{n} \{f(k) + g(k)\} = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$.
3. Propriedade da homogeneidade: $\sum_{k=1}^{n} cf(k) = c \sum_{k=1}^{n} f(k)$.
4. Propriedade telescópica: $\sum_{k=1}^{n} \{f(k+1) - f(k)\} = f(n+1) - f(1)$.

Exercício: Usando propriedades telescópicas e a função indicada, demonstre que:

1. se $f(n) = n^2$, então a soma dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

2. se $f(n) = n^3$, então a soma dos n primeiros números ímpares é:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

3. se $f(n) = n^3$, a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

4. se $f(n) = n^4$, então a soma dos cubos dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

5. se $f(n) = n^5$, então a soma dos quárticos dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

6. se $f(n) = n^6$, então a soma dos quínticos dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = ???$$

V.7. Mínimo e Máximo de um conjunto

70 Definição. *(Mínimo de um conjunto) Seja S um conjunto em um corpo ordenado K. Diz-se que S possui um mínimo (menor elemento), denotado por $s_0 = \min(S)$, se:*

1. $s_o \in S$
2. *para cada $s \in S$ tem-se que $s_o \leq s$*

71 Definição. *(Máximo de um conjunto) Seja S um conjunto em um corpo ordenado K. Diz-se que S possui um máximo (maior elemento), denotado por $t_0 = \max(S)$, se:*

1. $t_o \in S$
2. *para cada $s \in S$ tem-se que $s \leq t_o$.*

42 Teorema. *(Unicidade do mínimo de um conjunto) Se S é um subconjunto do conjunto N dos números naturais em um corpo ordenado K contendo um mínimo s_o, então s_o é único.*

Demonstração. Vamos supor que existam números naturais $n_0 \in S$ e $n_1 \in S$, distintos tal que $n_0 = \min(S)$ e $n_1 = \min(S)$. Como n_0 é mínimo, então n_0 é menor ou igual que todos os elementos de S e em particular, $n_0 \leq n_1$. Da mesma forma, n_1 é mínimo de S, então n_1 é menor ou igual que todos os elementos de S e em particular, $n_1 \leq n_0$. Como $n_0 \leq n_1$ e $n_1 \leq n_0$, então $n_0 = n_1$, o que contradiz a hipótese assumida que tais elementos são distintos. □

43 Teorema. *(Unicidade do máximo de um conjunto) Se S é um conjunto em um corpo ordenado K contendo um maior elemento t_o, então t_o é único.*

72 Definição. *(Conjunto bem ordenado] Um conjunto S em um corpo ordenado K é* bem ordenado *se, todo subconjunto do conjunto S possui um menor elemento.*

43 Exemplo. *(Exemplos de conjuntos bem ordenados)*

① *Todo subconjunto finito de um corpo ordenado K é bem ordenado.*

② *O conjunto $N = \{1, 2, 3, ...\}$ é bem ordenado.*

③ *Todo subconjunto do conjunto $N = \{1, 2, 3, ...\}$ dos números naturais é bem ordenado.*

44 Teorema. *(Segundo Princípio de Indução Matemática) Seja $S \subset N$ e para cada $n \in N$ definimos a coleção $S_n = \{m \in N : m < n\}$ sendo $S_1 = \emptyset$. Se para cada $n \in N$, $S_n \subset S$ implicar que $n \in S$, então $S = N$.*

73 Definição. *(Potências com expoentes naturais) Seja x em um corpo ordenado K. Definimos $x^1 = x$ e para cada $n \in N$ definimos $x^{n+1} = x^n \cdot x$.*

Exercício: Se $a > 1$, mostre que $1 < a < a^2 < ... < a^n < ...$ e usar este resultado para demonstrar que se $m < n$ então $a^m < a^n$, com $m, n \in N$.

Demonstração. Consideremos a proposição $P(n)$ definida para todo $n \in N$ tal que se $1 < a$ então $a^n < a^{n+1}$.

A proposição $P(1)$ é verdadeira pois multiplicando a desigualdade $1 < a$ por a (que é positivo), obtemos $1 \cdot a < a \cdot a$, assim temos que $a^1 < a^2$. Também valem as duas desigualdades $1 < a < a^2$.

Consideremos verdadeira a proposição $P(n)$, isto é, se $n > 1$ então $a^n < a^{n+1}$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade $a^n < a^{n+1}$ (hipótese de indução) pelo número positivo a, obtemos

$$a \cdot a^n < a \cdot a^{n+1}$$

ou seja

$$a^{n+1} < a^{n+2}$$

que corresponde à veracidade da proposição $P(n+1)$.

Concluímos que quando os expoentes da potência $a > 1$ crescem, os valores de a^n também crescem, para todo $n \in N$, isto é,

$$1 < a < a^2 < ... < a^n < ...$$

Se $m < n$, existe um número $p > 0$ tal que $m + p = n$, garantindo pela demonstração acima que $a^p > 1$.

Multiplicando esta última desigualdade por a^m, obtemos

$$a^m = 1 \cdot a^m < a^p \cdot a^m = a^{m+p} = a^n$$

□

Exercício: Mostrar que se $k \in K$ tal que $0 < k < 1$, então para todo $n \in N$ tem-se que $0 < k^n < 1$.

45 Teorema. *(Propriedades das potências com expoentes naturais) Seja K um corpo ordenado, $x, y \in K$ e $m, n \in N$. Então:*

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
   Dica: *Defina $S = \{n \in N : x^m \cdot x^n = x^{m+n}\}$ e mostre que S é indutivo.*
2. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
   Dica: *Defina $S = \{n \in N : (x^m)^n = x^{m.n}\}$ e mostre que S é indutivo.*
3. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
4. $(x/y)^n = x^n/y^n$

Exercícios: Utilizar os Princípios de Indução Matemática em cada exercício.

1. Mostrar que para todo $n \in N$ vale a desigualdade: $n < 2^n$.
2. Defina $n! = 1.2.3...n$ e mostre que, se $n \in N$ com $n \geq 4$, então $2^n < n!$.
3. Mostrar que para todo $n \in N$ com $n > 9$, vale: $n^3 < 2^n$.
4. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n + 1)$ para $n \in N$, fornece as somas dos n primeiros números naturais de modo recursivo. Mostrar que $s_n = n(n + 1)/2$.
5. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n + 1)^2$ para $n \in N$, fornece as somas dos quadrados dos n primeiros números naturais de modo recursivo. Mostrar que vale a forma geral: $s_n = n(n + 1)(2n + 1)/6$.
6. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n + 1)^3$ para $n \in N$, fornece as somas dos cubos dos n primeiros números naturais de uma forma recursiva. Demonstrar que para todo $n \in N$, vale a forma geral: $s_n = n^2(n + 1)^2/4$.
7. A seqüência: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = s_n + (n+1)^4$ para $n \in N$, fornece as somas dos quárticos dos n primeiros números naturais de uma forma recursiva. Mostrar que para todo $n \in N$, vale a forma geral: $s_n = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30$.
8. A seqüência: $s_1 = 1/2$ e $s_{n+1} = s_n + \dfrac{1}{(n + 1)(n + 2)}$ tem a forma geral: $s_n = n/(n+1)$ e será usada em capítulos posteriores para mostrar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)}$ converge.
9. Mostrar que a seqüência: $s_1 = 1$ e $s_2 = 3$ e $s_{n+2} = 3s_{n+1} - 2s_n$ possui a forma geral $s_n = 2^n - 1$.
   Dica: Tome $s(n) = r^n$, resolva a equação que aparece para obter as raízes $r = 1$ ou $r = 2$ e concluir que $s(n) = A \cdot 1^n + B2^n$, ...
10. Seja K um corpo ordenado, $a, r \in K$, $r \neq 1$ e $n \in N$. A seqüência definida por: $s_1 = a$ e $s_{n+1} = s_n + ar^n$, determina a fórmula geral para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica e pode ser escrita como:

    $$s_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

    e será usada em capítulos posteriores para mostrar que a importante série geométrica

    $$S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} ar^n$$

    é convergente, quando $|r| < 1$.

11. Mostre que se $m_1, m_2, ..., m_n \in N$, então $m_1 + m_2 + ... + m_n \in N$.
12. Mostre que se $m_1, m_2, ..., m_n \in N$, então $m_1 \cdot m_2 ... m_{n-1} \cdot m_n \in N$.
13. Mostre que se $p_1, p_2, ..., p_n \in P$, então $p_1 + p_2 + ... + p_n \in P$.
14. Mostre que se $p_1, p_2, ..., p_n \in P$, então $p_1 \cdot p_2 \cdot p_{n-1} \cdot p_n \in P$.
15. Mostre que se $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, ..., x_n \neq 0$, então $x_1 \cdot x_2 ... x_n \neq 0$ e além disso

$$(x_1 \cdot x_2 ... x_n)^{-1} = {x_1}^{-1} \cdot {x_2}^{-1} \cdot {x_n}^{-1}$$

16. Considere que K é um corpo ordenado e para cada $m \in N$ se tem que $\{m_n\} \subset K$. Demonstrar que se $m_1 > 1, m_2 > 1, ..., m_n > 1$, então

$$m_1 \cdot m_2 ... m_n > n$$

V.8. O conjunto Z dos números inteiros

A soma de dois números naturais m e n não é nula. Se $m+n = 0$, devemos dar sentido ao elemento oposto aditivo, o que não é possível no conjunto N dos números naturais mas que tem sentido no conjunto dos inteiros, que será estudado na seqüência. O conjunto dos opostos dos elementos de N, será denotado por

$$-N = \{x \in K : -x \in N\}$$

74 Definição. *(Número inteiro) Seja $z \in K$. Diz-se que z é um número inteiro se, $z \in N$ ou $z = 0$ ou $-z \in N$. O conjunto de todos os números inteiros será denotado pela letra Z (do alemão: zahlen) e pode ser escrito como:*

$$Z = N \cup \{0\} \cup (-N)$$

37 Observação. *Cada número inteiro pode ser construído como a diferença de dois números naturais, isto é, cada inteiro z pode ser posto na forma $z = m - n$ onde $m, n \in N$.*

46 Teorema. *O conjunto dos números inteiros, munido da operação binária de adição, denotado por $(Z, +)$ é um grupo comutativo.*
Dica: Mostrar que se $m, n \in Z$ então $m + n \in Z$, $m.n \in Z$ e cada $m \in Z$ possui oposto.

75 Definição. *(Limitante inferior em Z) Seja $S \subset Z$ em um corpo ordenado K. Diz-se que $z_0 \in K$ é um limitante (ou cota) inferior para o conjunto S se $z_0 \leq s$ para todo $s \in S$. Diz-se também que o conjunto S é limitado inferiormente por z_0.*

76 Definição. *(Limitante superior em Z) Seja S in$Z$ em um corpo ordenado K. Diz-se que $w_0 \in K$ é um limitante (ou cota) superior para o conjunto S se $s \leq w_0$ para todo $s \in S$. Diz-se também que o conjunto S é limitado superiormente por w_0.*

77 Definição. *(Conjunto limitado) Diz-se que um subconjunto S de números inteiros em um corpo ordenado K é limitado, se possui um limitante superior e também um limitante inferior. Diz-se que o conjunto S é limitado inferiormente e superiormente.*

78 Definição. *(Mínimo de um conjunto de inteiros) Seja S um subconjunto de números inteiros em um corpo ordenado K. S possui um mínimo (menor elemento)* $s_o = \min(S)$ *se:*

1. $s_o \in S$
2. *para cada* $s \in S$ *tem-se que* $s_o \leq s$.

Exercício: Demonstrar que, se existe o mínimo de um conjunto S de números inteiros, este mínimo é único.

79 Definição. *(Máximo de um conjunto de inteiros) Seja S um subconjunto de números inteiros em um corpo ordenado K. S possui um máximo (maior elemento)* $t_o = \max(S)$ *se:*

1. $t_o \in S$
2. *para cada* $s \in S$ *tem-se que* $s \leq t_o$.

Exercício: Demonstrar que, se existe o máximo de um conjunto S de números inteiros, este máximo é único.

38 Observação. *Todo conjunto de números inteiros da forma* $S = \{z \in Z : z \geq 0\}$ *possui um conjunto simétrico com relação ao elemento* 0 *(zero), que é dado por:*

$$-S = \{-z \in Z : z \geq 0\}$$

Desse modo, obter propriedades de um conjunto S de números inteiros não negativos equivale a obter propriedades semelhantes para o conjunto $-S$ *de números inteiros não positivos, motivo pelo qual tem sentido definir o conceito de máximo de um conjunto.*

44 Exemplo. *(Conexão entre mínimo e máximo)*

① *O conjunto* $N = \{1, 2, 3, ...\}$ *possui mínimo mas não possui máximo.*

② *Para o conjunto* $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, *tem-se que* $\min(C) = -2$ *e* $\max(C) = 3$.

③ *O conjunto P de todos os números positivos de um corpo ordenado K não possui mínimo.*

80 Definição. *(Princípio da Boa Ordem) (aceito sem demonstração) Todo conjunto S não vazio de números inteiros* **não negativos** *possui mínimo.*

81 Definição. *(Princípio da Boa Ordem) (forma alternativa) Todo conjunto S não vazio de números inteiros* **não positivos** *possui máximo.*

47 Teorema. *Não existe um número inteiro k tal que* $0 < k < 1$.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Vamos supor que existe pelo menos um $k \in Z$ tal que $0 < k < 1$ e então construímos o conjunto

$$S = \{k \in Z : 0 < k < 1\}$$

Se existe $k \in Z$ tal que $0 < k < 1$, então S não é vazio e é formado por números inteiros não negativos. Pelo Princípio da Boa Ordem, S possui mínimo. Se $m = \min(S)$, então $m \in S$ e $0 < m < 1$. Multiplicando estas desigualdades por m, obtemos

$$0 < m^2 < m < 1$$

e segue que existe $m^2 \in S$ que é um outro número de S que é menor que $m = \min(S)$, o que é falso, pois o mínimo, quando existe, deve ser único. □

1 Corolário. *O menor número $k \in Z$ positivo é $k = 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior, não existe $k \in Z$ tal que $0 < k < 1$, logo $k = 1$ deve ser o menor número inteiro positivo. □

2 Corolário. *Se $a, b \in Z$ tal que $a > 0$ e $b > 0$ e $a.b = 1$, então $a = 1$ ou $b = 1$.*

Demonstração. Pelo Corolário anterior, segue que $1 \leq a$ e $1 \leq b$. Multiplicando a desigualdade $1 \leq a$ por b, obtemos $b \leq a.b$ e como $a.b = 1$, então $b \leq 1$. Assim $b = 1$ e substituindo este valor na relação $a.b = 1$, obtemos $a = 1$. □

48 Teorema. *(Arquimedes) Se $a, b \in Z$ tal que $a > 0$ e $b > 0$, então existe $n \in N$ tal que $b < a.n$.*

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Negar a tese é afirmar que, para todo $n \in N$ existem $a, b \in N$ tal que $a.n \leq b$. Assim, para todo $n \in N$ existem números inteiros da forma $b - a.n$ tal que $b - a.n \geq 0$ e podemos definir o conjunto S de todos os números da forma $b - a.n$ onde $n \in N$, isto é,

$$S = \{b - a.n : n \in N\}$$

S é não vazio pois a negação da tese, afirma que existem $a, binN$ tal que para qualquer para todo $n \in N$, os números inteiros $b - a.n \geq 0$. Como o conjunto S é limitado inferiormente por 0, segue pelo Princípio da Boa Ordem, que S possui mínimo, aqui denotado por $m = \min(S)$. Como m é um elemento de S, ele pode ser escrito como $m = b - a.k$ para algum $k \in N$.
Como o conjunto S é formado por todos os números inteiros da forma $b - a \cdot n$ sendo $n \in N$, então se $n = k$, o número $b - a.k \in S$ e se $n = k + 1$, o número $b - a \cdot (k + 1) \in S$. Como $a > 0$, segue que

$$b - a \cdot (k + 1) = b - a \cdot k - a = m - a < m$$

assim $b - a \cdot (k+1) \in S$ e é menor que $m = \min(S)$, o que é uma contradição. Concluímos que a afirmação do teorema (Arquimedes) é verdadeira. □

49 Teorema. *Se $x \in R$, então existem números inteiros m e n tal que $m < x < n$.*

50 Teorema. *Se $x \in R$, então existe um único número inteiro m tal que $m \leq x < m$.*

Demonstração. (Existência) Pelo Teorema anterior, existem números inteiros m e n tal que $m < x < n$. Vamos construir o conjunto S de todos os números naturais que somados com o número menor m ultrapassam o valor de x, isto é:

$$S = \{p \in N : m + p > x\}$$

O número $p_0 = n - m$ pertence ao conjunto S pois

$$m < x < n = (n - m) + m = p_0 + m$$

Isto garante que existe um inteiro não negativo $p_0 \in S$ e o Princípio da Boa Ordem, garante que este conjunto S possui mínimo, denotado por $\alpha = \min(S)$.
Tomando $\alpha = p_0 + m - 1$, segue que

$$\alpha = p_0 + m - 1 \leq x < p_0 + m = \alpha + 1$$

Assim, apresentamos um número inteiro α tal que $\alpha \leq x < \alpha + 1$. □

Demonstração. (Unicidade) Suponhamos que existam dois números inteiros distintos p e q satisfazendo às desigualdades

$$p \leq x < p + 1 \tag{V.1}$$
$$q \leq x < q + 1 \tag{V.2}$$

Como p e q são distintos, podemos assumir que

$$p < q \tag{V.3}$$

pois se $p > q$ então todas as operações feitas com p, seriam substituídas pelas operações com q e teríamos o mesmo resultado.
Usando as desigualdades acima, podemos escrever

$$\begin{array}{ccccccc} p & < & q & \leq & x & < & p+1 \\ & (3) & & (2) & & (1) & \end{array}$$

Cada número em parênteses na equação acima, indica a desigualdade utilizada para justificar a respectiva passagem. Temos então que

$$p < q \leq x < p + 1$$

Subtraindo p de todos os termos das desigualdades indicadas, obtemos

$$p - p < q - p \leq x - p < (p + 1) - p$$

Assim, o número inteiro $q - p$ satisfaz às desigualdades

$$0 < q - p < 1$$

o que é um absurdo. Concluímos que, para cada $x \in R$, existe um único número inteiro m tal que $m \leq x < m + 1$. □

82 Definição. *(Maior inteiro menor ou igual a x) O número m tal que $m \leq x < m$ obtido antes, usualmente denotado por $[x]$, é o maior número inteiro que é menor ou igual a x. A função $f(x) = [x]$ é conhecida como a função que toma a parte inteira de x, para cada $x \in K$.*

51 Teorema. *Se S é um subconjunto do conjunto dos números inteiros é limitado inferiormente, então S possui mínimo.*

Demonstração. Se S é limitado inferiormente, então existe um número inteiro $\alpha \in Z$ tal que $\alpha \leq s$ para todo $s \in S$. O conjunto S pode ser escrito na forma

$$S = \{w \in Z : \alpha \leq w\} = \{w \in Z : w - \alpha \geq 0\} = \{z \in Z : z = w - \alpha \geq 0\} = T$$

Como T é formado por números inteiros não negativos, o Princípio da Boa Ordem, garante que este conjunto S possui mínimo. Tomando $z_0 = \min(T)$ segue que $\alpha + z_0 = \min(S)$ é o mínimo para o conjunto S. □

52 Teorema. *Se S um subconjunto do conjunto dos números inteiros é limitado superiormente, então S possui máximo.*

Demonstração. Se S é limitado superiormente, então existe um número inteiro $\beta \in Z$ tal que $s \leq \beta$ para todo $s \in S$. O conjunto S pode ser escrito na forma

$$S = \{w \in Z : w \leq \beta\} = \{w = z + \beta : z \leq 0\} = \beta + U$$

onde $U = \{z : z \leq 0\}$. Como U é formado por números inteiros não positivos, o Princípio da Boa Ordem, garante que o conjunto U possui máximo. Tomando $u_0 = \max(T)$ segue que $\beta + u_0 = \max(S)$ é o máximo de S. □

53 Teorema. *Se S é um subconjunto limitado do conjunto Z dos números inteiros então S é um conjunto finito.*

Demonstração. Vamos reunir os resultados dos teoremas anteriores. Se S é limitado, então S possui mínimo e possui máximo. Sejam $s_0 = \min(S)$ e $t_0 = \max(S)$ dois números inteiros tal que para todo $s \in S$, se tem

$$s_0 \leq s \leq t_0$$

Assim, como $t_0 - s_0$ é um número finito, o conjunto S é um conjunto finito:

$$S = \{s_0, s_0 + 1, s_0 + 2, ..., s, ..., t_0 - 2, t_0 - 1, t_0\}$$

□

83 Definição. *(Potências com expoentes negativos) Se $x \in K$, $x \neq 0$, então, definimos: $x^0 = 1$ e para $n \in -N$:*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

54 Teorema. *(Propriedades das potências inteiras) Sejam x e y elementos de um corpo ordenado K, e, m e n números inteiros. Então:*

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $x^m \div x^n = x^{m-n}$
3. $(x^m)^n = x^{m.n}$
4. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
5. $(x \div y)^n = x^n \div y^n$

Realizaremos a demonstração de $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$. Tomaremos $m \in N$ e analisaremos as seguinte quatro variantes possíveis para $n \in Z$: $n = 0$, $n > 0$, $n < 0$ com $-n < m$ e $n < 0$ com $m < -n$. Trocando m por n, obteremos os mesmos resultados.

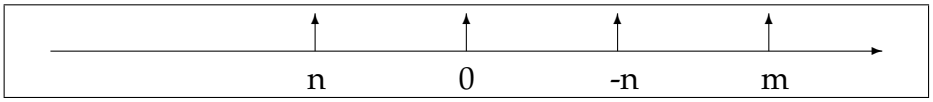
Demonstração. ($m \in N$ e $n = 0$) Se $m \in N$ e $n = 0$, então

$$\begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^m \cdot x^0 && Justificativa: _____ \\ &= x^m \cdot 1 && Justificativa: _____ \\ &= x^m && Justificativa: _____ \\ &= x^{m+0} && Justificativa: _____ \\ &= x^{m+n} && Justificativa: _____ \end{aligned}$$

□

Demonstração. ($m \in N$ e $n \in N$) Se $m, n \in N$, o item 1 do Teorema 45, assegura a veracidade da afirmação. □

Demonstração. ($m \in N$ e $n \in -N$, com $-n < m$) Se $n < 0$ então $-n > 0$. Como estamos tomando $-n < m$, a situação gráfica seguinte auxiliará a demonstração.

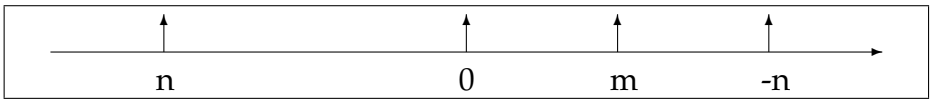


Se $-n < m$, existe um número $p \in N$ tal $-n + p = m$. Assim

$$\begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^{(-n+p)} \cdot x^n && Justificativa: _____ \\ &= x^{-n} \cdot x^p \cdot x^n && Justificativa: _____ \\ &= x^{-n} \cdot x^n \cdot x^p && Justificativa: _____ \\ &= x^{-n} \cdot \frac{1}{x^{-n}} \cdot x^p && Justificativa: _____ \\ &= x^{-n-(-n)} \cdot x^p && Justificativa: _____ \\ &= x^0 \cdot x^p && Justificativa: _____ \\ &= 1 \cdot x^{m+n} && Justificativa: _____ \end{aligned}$$

□

Demonstração. ($m \in N$ e $n \in -N$, com $m < -n$) Se $n < 0$ então $-n > 0$. Como tomamos $m < -n$, a situação gráfica abaixo auxiliará a demonstração.



Se $m < -n$, existe um número $q \in N$ tal $m + q = -n$. Assim:

$$\begin{aligned}
x^m.x^n &= x^m \cdot \frac{1}{x^{-n}} && Justificativa: _____\\
&= x^m \cdot \frac{1}{x^{m+q}} && Justificativa: _____\\
&= x^m \cdot \frac{1}{x^m \cdot x^q} && Justificativa: _____\\
&= x^m \cdot \frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x^q} && Justificativa: _____\\
&= x^{m-m} \cdot \frac{1}{x^q} && Justificativa: _____\\
&= x^0 \cdot x^{-q} && Justificativa: _____\\
&= 1 \cdot x^{m+n} && Justificativa: _____
\end{aligned}$$

□

Demonstração. $(m, n \in -N)$ Se $m, n \in -N$, então $-m \in N$ e $-n \in N$. Assim:

$$\begin{aligned}
x^m.x^n &= \frac{1}{x^{-m}} \cdot \frac{1}{x^{-n}} && Justificativa: _____\\
&= \frac{1}{x^{(-m)+(-n)}} && Justificativa: _____\\
&= \frac{1}{x^{-(m+n)}} && Justificativa: _____\\
&= x^{m+n} && Justificativa: _____
\end{aligned}$$

□

Exercício com potências: Demonstrar que

1. Se $a > 1$ então, para todo $p \in N$ vale a desigualdade $a^p > 1$.
2. Sejam $a > 1$ e $m, n \in N$. Assim, $m < n$, se e somente se, $a^m < a^n$.
3. Se $o < a < 1$ então, para todo $p \in N$ valem as desigualdades $0 < a^p < 1$.
4. Sejam $0 < a < 1$ e $m, n \in N$. Assim, $m < n$, se e somente se, $a^n < a^m$.
5. Sejam $0 < a \neq 1$ e $m, n \in Z$. Assim, $m = n$, se e somente se, $a^m = a^n$.
6. Sejam $a > 0$, $b > 0$ e $n \in Z - \{0\}$. $a = b$, se e somente se, $a^n = b^n$.
7. Se $n \in Z$, então $1^n = 1$.
8. Se $n \in Z$, então $(-1)^{2n} = 1$.
9. Se $n \in Z$, então $(-1)^{2n+1} = -1$.

V.9. O conjunto Q dos números racionais

Quando $m \cdot n = 1$ com $m \in Z$ sendo $m \neq 1$, o número n não pode ser um número inteiro. Neste caso, devemos dar sentido ao elemento inverso multiplicativo, o que não é possível no conjunto Z dos números inteiros, e assim, foi criado um conjunto

de números racionais, que permite tal operação. O conjunto dos números racionais, além de ser um corpo ordenado, possui propriedades muito importantes dentro do conjunto dos números reais. Muitas propriedades do conjunto dos números racionais serão estudadas neste curso de Análise Real.

84 Definição. *(Número racional) Seja $x \in K$. x é um número racional se existem $m \in Z$ e $n \in Z$, $n \neq 0$ tal que $x.n = m$. Quando tais números existem, denotamos o número racional por $q = m/n = m.n^{-1}$. O conjunto de todos os números racionais é denotado por:*

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

A letra Q provém de quociente ou razão (em Latim: ratio), pois todo número racional é a razão (divisão) entre dois números inteiros.

85 Definição. *(Número irracional) Se $x \in K$ mas $x \notin Q$ este número recebe o nome de* número irracional *e o conjunto de todos os números irracionais é denotado por $Irr = K - Q$.*

Exercício: Seja Q o conjunto dos números racionais em um corpo K. Mostrar que:

1. Se $q_1, q_2 \in Q$ então $q_1 + q_2 \in Q$.
   Dica: Ver o Teorema 24, ítem 9.
2. Se $q_1, q_2 \in Q$ então $q_1 \cdot q_2 \in Q$.
   Dica: Ver o Teorema 24, ítem 10.
3. Se $q \in Q - \{0\}$, então q possui inverso multiplicativo.
   Dica: Ver o Teorema 24, ítem 10, exigiendo que o produto seja igual a 1.
4. O conjunto $Q \subset K$ é um corpo.
5. Se $\eta \in Irr$, então $r \cdot \eta \in Irr$ para todo número racional $r \neq 0$.
   Dica: Suponha que $r \cdot \eta \in Q$ e assuma que $r \in Q$, para obter um absurdo.
6. Se $\eta \in Irr$, então $r + \eta \in Irr$ para todo número racional $r \in Q$.
   Dica: Suponha que $r + \eta \in Q$ e assuma que $r \in Q$, para obter um absurdo.

86 Definição. *(Raiz quadrada) Sejam $x, y \in K$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Diz-se que x é a raiz quadrada de y se $x^2 = y$. A raiz quadrada de y é denotada por $\sqrt{y}$.*

Exercícios

1. Um número $m \in Z$ é par se, e somente se, $m^2 \in Z$ é par.
2. Um número $n \in Z$ é ímpar se, e somente se, $m^2 \in Z$ é ímpar.
3. Mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional.
4. Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ não é um número racional.

55 Teorema. *O conjunto $(Q, +, *)$ dos números racionais, munido com as operações binárias de adição e multiplicação, é um corpo ordenado com as mesmas operações de $(K, +, *)$.*

87 Definição. *(Corpo arquimediano) Um corpo ordenado K é arquimediano se, para cada $x > 0$, existe um número natural n tal que $x < n$.*

56 Teorema. *(Corpo arquimediano) Um corpo ordenado K é arquimediano se, e somente se, para quaisquer números positivos $x, y \in K$ existe um número natural n tal que $x < n.y$.*

Demonstração. Assumindo que K seja um corpo arquimediano, demonstraremos que se $x, y \in K$ são números positivos, existe um número natural n tal que $x < n.y$.
Realmente, se $x > 0$ e $y > 0$, então $\frac{x}{y} > 0$ e como K é arquimediano, então existe $n \in N$ tal que $\frac{x}{y} < n$, garantindo que $x < n.y$.
Reciprocamente, vamos assumir que para quaisquer $x > 0$ e $y > 0$, existe $n \in N$ tal que $x < n.y$. Tomando em particular $y = 1$, segue que $x < n$. □

57 Teorema. *Se K é um corpo arquimediano, valem as seguintes propriedades:*

1. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in N$ tal que $0 < 1/n < \varepsilon$.*

   Demonstração. Se $\varepsilon > 0$, então $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ e como K é um corpo arquimediano, segue que existe $n \in N$ tal que $0 < \frac{1}{\varepsilon} < n$, o que é equivalente a

   $$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

   □

2. *Se $x \in K$, então existem $m, n \in Z$ tal que $m < x < n$.*
   Dica: Teorema 40.
3. *Se $x > 0$, então existe $n \in N$ tal que $0 < 1/2^n < x$.*

   Demonstração. Se $x > 0$ e K é um corpo arquimediano, existe $n \in N$ tal que $0 < x < n$. Como para todo $n \in N$: $n < 2^n$, então $0 < x < n < 2^n$, que equivale a

   $$0 < \frac{1}{2^n} < x$$

   □

4. *Se $x \in K$, então existe um único número inteiro $n \in Z$ tal que $n \leq x < n + 1$. O número inteiro que satisfaz a esta propriedade é denotado por $n = [x]$.*
   Dica: Teorema 41.
5. *Se Q é o corpo ordenado de números racionais em K, então Q é também um corpo arquimediano.*

   Demonstração. Se $q_1 > 0$ e $q_2 > 0$ números racionais no corpo arquimediano K, podemos escrever

   $$q_1 = \frac{m_1}{n_1} \qquad\qquad q_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

   onde $m_1, m_2, n_1, n_2 \in N$. Estes mesmos números racionais podem ser escritos com um mesmo denominador, na forma:

   $$q_1 = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2} \qquad\qquad q_2 = \frac{m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}$$

o que garante que $q_1 \cdot n_1 \cdot n_2 = m_1 \cdot n_2$ e $q_2 \cdot n_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$.
Assim, $m_1 \cdot n_2$ e $m_2 \cdot n_1$ são dois números naturais positivos. Como o corpo K é arquimediano, existe um número natural p tal que $m_1 \cdot n_2 < p \cdot m_2 \cdot n_1$ ou seja

$$q_1 \cdot n_1 \cdot n_2 < p \cdot q_2 \cdot n_1.n_2$$

assim, existe $p \in N$ tal que

$$q_1 < p \cdot q_2$$

garantindo que o corpo Q é arquimediano. □

6. *Se $z \in Irr$ positivo e $x > 0$ com $x \in K$, mostre que existe $m \in N$ tal que $0 < \frac{z}{m} < x$.*

   Demonstração. Pelo Teorema 45, se $x > 0$ e $z > 0$ em um corpo arquimediano K, independentemente de z ser racional ou irracional, então existe $m \in N$ tal que

   $$0 < z < m \cdot x$$

   assim

   $$0 < \frac{z}{m} < x$$

   □

88 Definição. *(Conjunto denso) Seja K um corpo ordenado. Um subconjunto $S \subset K$ é denso em K se, entre quaisquer dois elementos de K, é possível inserir um elemento de S.*

58 Teorema. *Seja K um corpo arquimediano e Q o seu conjunto de números racionais. Então:*

1. *Q é denso em K.*
2. *O conjunto $Irr = K - Q$ dos números irracionais é denso em K.*

V.10. O conjunto R dos números reais

89 Definição. *(Limitante inferior em R) Um número real a é um limitante inferior para $S \subset R$ se para todo $s \in S$ tem-se que $a \leq s$. Se um conjunto $S \subset R$ possui um limitante inferior, S é limitado inferiormente.*

90 Definição. *(Limitante superior em R) Um número real b é um limitante superior para $S \subset R$ se para todo $s \in S$ tem-se que $s \leq b$. Se um conjunto $S \subset R$ possui um limitante superior, S é limitado superiormente.*

Exercício: Mostrar que se X é um subconjunto de R limitado superiormente, então $-X$ é limitado inferiormente.
Dica: Construir um esboço gráfico da situação.

59 Teorema. *(Conjunto limitado) Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto $X \subset R$ seja limitado é que exista um número $b \in R$ tal que $|x| \leq b$ para todo $x \in X$.*

91 Definição. *(Supremo de um conjunto) Seja K um corpo ordenado e S um subconjunto não vazio em K. O supremo do conjunto S, denotado por* $\beta = \sup(S)$*, é definido como o número* $\beta \in K$ *satisfazendo às duas propriedades:*

1. β *é limitante superior para S;*
2. *se existir* $y \in K$ *que é limitante superior para S, então* $\beta \leq y$.

O supremo de S é o menor dos limitantes superiores de S. Esta definição pode ser escrita na forma simbólica como: $\beta = sup(S)$ *se, dado* $\varepsilon > 0$*, existe pelo menos um* $s_0 \in S$ *tal que*

$$\beta - \varepsilon < s_0 \leq \beta$$

92 Definição. *(Ínfimo de um conjunto) Seja K um corpo ordenado e S um subconjunto não vazio em K. O ínfimo do conjunto S, denotado por* $\alpha = \inf(S)$*, é definido como o número* $\alpha \in K$*, satisfazendo às duas propriedades:*

1. α *é limitante inferior para S;*
2. *se existir* $x \in K$ *que é limitante inferior para S, então* $x \leq \alpha$.

O ínfimo de S é o maior dos limitantes inferiores de S. Esta definição pode ser escrita simbolicamente como: $\alpha = inf(S)$ *se, dado* $\varepsilon > 0$*, existe pelo menos um* $t_0 \in S$ *tal que*

$$\alpha < t_0 \leq \alpha + \varepsilon$$

60 Teorema. *(Unicidade do supremo) Um conjunto S não vazio em um corpo ordenado K possui um único supremo.*

61 Teorema. *(Unicidade do ínfimo) Um conjunto S não vazio em um corpo ordenado K possui um único ínfimo.*

62 Teorema. *(Desigualdade entre o* $\inf(S)$ *e* $\sup(S)$*) Se S é um conjunto S não vazio e limitado em um corpo ordenado K então, para todo* $s \in S$*, vale a desigualdade*

$$\inf(S) \leq s \leq \sup(S)$$

39 Observação. *Quando* $\sup(X) \in X$*, então* $\sup(X)$ *coincide com* $\max(X)$ *e quando* $\inf(X) \in X$*, segue que* $\inf(X)$ *coincide com* $\min(X)$.

Exercício: Mostrar que a média aritmética m entre dois números positivos a e b em um corpo ordenado K satisfaz às desigualdades $a < m < b$.
Dica: Construir um esboço gráfico desta situação.

45 Exemplo. *(Conjunto sem máximo e sem mínimo) O conjunto* $C = \{x \in R : 0 < x < 1\}$ *não possui máximo, pois se C possuísse máximo, denotado por* $n = \max(C)$*, então* $n \in C$ *e além disso* $0 < n < 1$*. Como a média aritmética m entre n e* 1 *satisfaz à desigualdade* $n < m < 1$*, segue que* $0 < m < 1$ *e além disso m é maior do que* $\max(C)$*, o que é um absurdo, pois C não pode possuir dois máximos. Da mesma forma o intervalo real* $I = (a, b)$ *não possui máximo e nem mínimo.*

Exercício: Se X é um subconjunto não vazio, que possui supremo em um corpo ordenado K e $-X = \{-x : x \in X\}$, então

$$\sup(X) = -\inf(-X)$$

1. Como o conjunto X é não vazio, então $-X$ também é não vazio.
2. Como X possui supremo, denotaremos este supremo por $\alpha = \sup(X)$.
3. Como α é um limitante superior para X, segue que $x \leq \alpha$ para todo $x \in X$. Multiplicando esta desigualdade por -1, segue que $-\alpha \leq -x$ para todo $x \in X$, garantindo que o conjunto $-X$ possui um limitante inferior que é $-\alpha$.
4. Como $-X$ é não vazio e limitado inferiormente no corpo ordenado K, segue que o conjunto $-X$ possui ínfimo, denotado aqui por $\beta = \inf(-X)$.
5. Pela definição de $\sup(X)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $w \in X$ tal que $\alpha - \varepsilon < w \leq \alpha$. Multiplicando estas desigualdades por -1, segue que $-\alpha \leq -w < -\alpha + \varepsilon$, assim, $-\alpha = \inf(-X)$.
6. Desse modo $\sup(X) = \alpha = -(-\alpha) = -\inf(-X)$.

Exercício: Sejam $X, Y \subset R$ tal que $X \neq \emptyset$ e $X \subset Y$.

1. Se Y é limitado superiormente, então $\sup(X) \leq \sup(Y)$.

   Demonstração. (a) (a) Existe $\sup(Y)$: Se $X \neq \emptyset$ e $X \subset Y$, então $Y \neq \emptyset$. Como Y é limitado superiormente, Y possui supremo.

   (b) (b) Existe $\sup(X)$: Se $X \neq \emptyset$ e $X \subset Y$, então $Y \neq \emptyset$. Se Y é limitado superiormente, existe $\alpha \in K$ tal que $y \leq \alpha$ para todo $y \in Y$. Como $X \subset Y$, então para todo $x \in X$ segue que $x \in Y$ e como Y é limitado superiormente, segue que X é limitado superiormente, garantindo que X possui supremo.

   (c) (c) Desigualdade $\sup(X) \leq \sup(Y)$: Seja $\alpha = \sup(X)$ e $\beta = \sup(Y)$. Desejamos mostrar que $\alpha \leq \beta$. Negueemos a tese, supondo que $\beta < \alpha$. Pela definição de supremo de X, temos que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um elemento $x \in X$ tal que

   $$\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$$

   Mas, se tomarmos em particular $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$, seguirá que

   $$\beta < x \leq \alpha$$

   Como $x \in X$ então $x \in Y$ e x é maior que $\sup(Y)$, o que é um absurdo, assim

   $$\alpha = \sup(X) \leq \sup(Y) = \beta$$

   □

2. Se Y é limitado inferiormente, então $\inf(Y) \leq \inf(X)$.
3. Se Y é limitado, então $\inf(Y) \leq \inf(X) \leq \sup(X) \leq \sup(Y)$.

93 Definição. *(Corpo ordenado completo via supremo) Um corpo ordenado K é completo, se todo subconjunto S de K que é não vazio e limitado superiormente possui supremo em K.*

94 Definição. *(Corpo ordenado completo via ínfimo) Um corpo ordenado K é completo, se todo subconjunto S de K que é não vazio e limitado inferiormente possui ínfimo em K.*

46 Exemplo. *(Corpo ordenado que não é completo) Seja Q o corpo ordenado dos números racionais e o subconjunto* $S = \{q \in Q : q^2 < 2\}$ *do conjunto Q. Assim:*

① $S \neq \emptyset$;
② *S é limitado superiormente por* 2;
③ *S possui supremo;*
④ $\sup(S) = \sqrt{2} \notin Q$;
⑤ $\sup(S) = \sqrt{2} \notin S$;
⑥ *Q não é um corpo ordenado completo.*

40 Observação. *(Existência de corpo ordenado completo) Assumiremos que existe um corpo ordenado completo, denominado o* **sistema dos números reais** *ou simplesmente o conjunto dos números reais, denotado daqui em diante por R. No ambiente algébrico, diz-se que existe* **um único** *corpo ordenado completo, a menos de isomorfismo, pois se existir um outro corpo ordenado completo, este deve ser isomorfo a R.*

63 Teorema. *O sistema* $R = (R, +, \cdot)$ *dos números reais é um corpo arquimediano.*

64 Teorema. *(Existência da raiz quadrada) Existe um número* $x \in R$ *tal que* $x^2 = 2$*, isto é,* $\sqrt{2} \in R$.

Demonstração. Se $C = \{x \in R : x^2 < 2\}$, então $C \subset R$, $C \neq \emptyset$, C é limitado superiormente por 2. Como R é um corpo ordenado completo, segue que C possui supremo, que será denotado por $z = \sup(C)$. Demonstraremos que $z^2 = 2$.

Negando a tese (que $z^2 = 2$), teremos dois casos: (a) $z^2 < 2$ ou (b) $z^2 > 2$.

Caso a: Se $z^2 < 2$, mostraremos que existe um número $z+1/n \in R$ tal que $(z+1/n)^2 < 2$.

Para cada $n \in N$, segue que

$$(z + 1/n)^2 = z^2 + 2z/n + 1/n^2 < z^2 + 2z/n + 1/n$$

assim, tomaremos $z \in R$ tal que $z^2 + (2z + 1)/n < 2$. Este número está bem definido, pois dado o número real positivo $\dfrac{2 - z^2}{2z + 1}$ existe um $n \in N$ tal que

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2 - z^2}{2z + 1}$$

Assim

$$(z + 1/n)^2 = z^2 + 2z/n + 1/n^2 < z^2 + 2z/n + 1/n = z^2 + (2z + 1)/n < 2$$

Caso b: Se $z^2 > 2$, exibiremos um $n \in N$ tal que $z - 1/n < z$ tal que $(z - 1/n)^2 > 2$.

Tomando $(z - 1/n)^2 = z^2 - 2z/n + 1/n^2 > z^2 - 2z/n$ segue que

$$\frac{z^2 - 2}{2z} > 2$$

Concluímos que se $z = \sup(C)$, z^2 não poderá ser menor que e nem maior que 2, logo, existe $z \in R$ tal que $z^2 = 2$. □

Capítulo VI

seqüências de números reais

"Não se turbe o vosso coração; credes em Deus, crede também em mim. Na casa de meu Pai há muitas moradas; se não fosse assim, eu vo-lo teria dito; vou preparar-vos lugar. E, se eu for e vos preparar lugar, virei outra vez, e vos tomarei para mim mesmo, para que onde eu estiver estejais vós também. E para onde eu vou vós conheceis o caminho. Disse-lhe Tomé: Senhor, não sabemos para onde vais; e como podemos saber o caminho? Respondeu-lhe Jesus: Eu sou o caminho, e a verdade, e a vida; ninguém vem ao Pai, senão por mim." A Bíblia Sagrada, João 14:1-6

VI.1. Seqüências reais

95 Definição. *(Seqüência real) Uma seqüência (ou sucessão) real é uma função $f : N \to R$ que associa a cada número natural $n \in N$ um número real $f(n) \in R$. O conjunto dos números naturais será indicado por:*

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

47 Exemplo. *Seqüências reais: $f(n) = n$, $f(n) = n^2$, $f(n) = 2^n$, $f(n) = 1/n$ e $f(n) = 10$.*

41 Observação. *(Seqüência real) O valor numérico $f(n)$ é o termo de ordem n da seqüência. Pela definição, o domínio de uma seqüência f é um conjunto infinito, mas o contradomínio poderá ser finito ou infinito. O domínio de uma seqüência f é indicado por $\mathtt{Dom}(f) = N$ e a imagem de uma seqüência f por $\mathtt{Im}(f) = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Como a imagem de f, dada por*

$$f(N) = \{f(n) : n \in N\}$$

está contida no conjunto dos números reais, esta seqüência é dita real.

42 Observação. *(Problemas com notações) Embora não seja correto, é usual representar uma seqüência pelo seu conjunto imagem, pois facilita o entendimento do conceito de seqüência. Para a seqüência $f : N \to R$ definida por $f(n) = 1/n$, o conjunto imagem $f(N)$ desta seqüência é dado por*

$$f(N) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$$

Como é mais fácil trabalhar com conjuntos do que com funções, muitos utilizam o conjunto imagem como sendo a própria seqüência, mas não devemos confundir uma função com as suas propriedades.

48 Exemplo. *(Seqüências reais muito importantes).*

1. **Identidade** $f : N \to R$ *definida por* $f(n) = n$*, pode ser representada graficamente de várias formas, sendo que uma delas é o diagrama de Venn-Euler e outra é o gráfico cartesiano*
2. **Números pares** $f : N \to R$ *definida por* $f(n) = 2n$*. Aqui* $\mathtt{Im}(f) = \{2, 4, 6, ...\}$.
3. **Números ímpares** $f : N \to R$ *definida por* $f(n) = 2n - 1$.
4. **Recíprocos dos naturais** $f : N \to R$ *definida por* $f(n) = 1/n$*. Neste caso* $\mathtt{Im}(f) = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/n, ...\}$.
5. **Constante** $f : N \to R$ *definida, por exemplo, por* $f(n) = 3$.
6. **Nula** $f : N \to R$ *definida por* $f(n) = 0$*. A imagem é o conjunto* $\mathtt{Im}(f) = \{0\}$.
7. **Alternada** $f : N \to R$ *definida por* $f(n) = (-1)^n a_n$*. Os valores desta seqüência ficam alternando o sinal, sendo um negativo e o seguinte positivo, etc.* $\mathtt{Im}(f) = \{-a_1, +a_2, -a_3, +a_4, -a_5, +a_6, ...\}$.
8. **Aritmética** $f : N \to R$ *definida por:* $f(n) = a_1 + (n-1)r$*. Neste caso:* $\mathtt{Im}(f) = \{a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, ..., a_1 + (n-1)r, ...\}$.
9. **Geométrica** $f : N \to R$ *definida por:* $f(n) = a_1 q^{n-1}$*.Neste caso, temos que* $\mathtt{Im}(f) = \{a_1, a_1 q, a_1 q^2, ..., a_1 q^{n-1}, ...\}$.

96 Definição. *(Seqüência recursiva) Uma seqüência é recursiva se, o termo de ordem n é obtido como combinação linear dos termos das posições anteriores.*

49 Exemplo. *(Seqüência de Fibonacci) Seqüências de Fibonacci aparecem de forma natural em estudos de Biologia, Arquitetura, Artes e Padrões de beleza. O livro "A divina proporção: Um ensaio sobre a Beleza na Matemática", H. E. Huntley, Editora Universidade de Brasília, 1985, trata do assunto.*

Uma seqüência de Fibonacci pode ser definida pela função $f : N \to R$ *tal que* $f(1) = 1$ *e* $f(2) = 1$ *com* $f(n+2) = f(n) + f(n+1)$ *para* $n \geq 1$*. O conjunto imagem é* $\mathtt{Im}(f) = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}$*. Tais números são obtidos por:*

$$\begin{array}{lll}
f(1) = & & 1 \\
f(2) = & & 1 \\
f(3) = & f(1) + f(2) = & 1 + 1 = 2 \\
f(4) = & f(2) + f(3) = & 1 + 2 = 3 \\
f(5) = & f(3) + f(4) = & 2 + 3 = 5 \\
f(6) = & f(4) + f(5) = & 3 + 5 = 8 \\
f(7) = & f(5) + f(6) = & 5 + 8 = 13 \\
f(8) = & f(6) + f(7) = & 8 + 13 = 21 \\
f(9) = & f(7) + f(8) = & 13 + 21 = 34 \\
... = & ... = & ...
\end{array}$$

43 Observação. *(Gráfico de uma seqüência) O gráfico de uma seqüência não é formado por uma coleção contínua de pontos mas por uma coleção discreta. Às vezes, usamos retas ou curvas entre dois pontos dados para melhor visualizar o gráfico, mas não podemos considerar tais linhas como representativas do gráfico da seqüência.*

44 Observação. *(O Conjunto imagem de uma seqüência) Toda vez que nos referirmos a uma seqüência $f : N \to R$ tal que $f(n) = a_n$, simplesmente usaremos a imagem da seqüência f, através do conjunto*

$$Im(f) = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...\}$$

50 Exemplo. *(Conjunto imagem de uma seqüência)*

1. *As seqüências $f : N \to R$ definidas por $f(n) = 0$, $g(n) = (-1)^n$ e $h(n) = \cos(n\pi/3)$ são finitas e suas imagens são, respectivamente dadas por: $Im(f) = 0$, $Im(g) = \{-1, 1\}$ e $Im(h) = \{1/2, -1/2, -1, 1\}$.*
2. *As seqüências $f : N \to R$ definidas por $f(n) = 2n$, $g(n) = (-1)^n n$, $h(n) = \sin(n)$ e $k(n) = \cos(3n)$ são infinitas, pois suas imagens possuem infinitos termos.*
3. *A seqüência infinita $f : N \to R$, cujo conjunto imagem é $\mathtt{Im}(f) = \{5, 10, 15, 20, ...\}$. Temos que $f(1) = 5 = 5 \times 1$, $f(2) = 10 = 5 \times 2$, $f(3) = 15 = 5 \times 3$, ..., $f(n) = 5n$. Este é um exemplo de uma seqüência aritmética, o que garante que ela possui uma razão $r = 5$, o que permite escrever cada termo como*

$$f(n) = f(1) + (n-1)r$$

No âmbito do Ensino Médio, esta expressão é escrita como:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

VI.2. Convergência

97 Definição. *(Seqüência limitada) Uma seqüência real f é limitada se o conjunto $f(N)$ é limitado em R.*

51 Exemplo. *As seqüências $f(n) = n$, $f(n) = n^2$ e $f(n) = 2^n$ não são limitadas, mas $f(n) = 1/n$ mas $f(n) = 10$ é limitada.*

98 Definição. *(Seqüência convergente) Uma seqüência $f : N \to R$ converge para um número real L (limite da seqüência) se, para cada $\varepsilon > 0$ e arbitrário, existe um índice $n_o \in N$ tal que para todo $n > n_o$ tem-se que:*

$$|f(n) - L| < \varepsilon$$

Neste caso, indicamos que

$$L = \lim f(n) = \lim_{n \to \infty} f(n)$$

45 Observação. *(Sobre o limite de uma seqüência)*

1. *Se uma seqüência não é convergente, ela é dita divergente.*
2. *Pela definição acima, existe no máximo um número finito de elementos do conjunto $f(N)$ que está fora do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$;*
3. *A convergência de uma seqüência, depende dos últimos termos da mesma.*

52 Exemplo. *Seja a seqüência $f(n) = 1/n$. Para um número natural n grande o valor de $1/n$ é pequeno. Construiremos uma tabela contendo apenas as potências de 10.*

n	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	$\rightarrow$	∞
$f(n)$	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	$\rightarrow$	0
decimais	1	0,1	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	$\rightarrow$	0

Neste caso, escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Como R é um corpo arquimediano, dado $\varepsilon > 0$, segue que $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ e existe $n_0 \in N$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} > n_0$. Tomando os inversos nesta desigualdade, obtemos a existência de $n_0 \in N$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, assim, para todo $n > n_0$ vale

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

65 Teorema. *(Unicidade do limite) Se uma seqüência $f = f(n)$ converge para um limite L, este limite é único.*

66 Teorema. *(Confronto) Se $f = f(n)$, $g = g(n)$ e $h = h(n)$ são seqüências reais tal que $f(n) \leq g(n) \leq h(n)$ e além disso $\lim f(n) = L = \lim h(n)$, então $\lim g(n) = L$.*

46 Observação. *O teorema do confronto é conhecido como a regra do sanduíche.*

47 Observação. *(Relação de Stifel) A relação de Stifel, apresentada na seqüência, é muito conhecida pelo alunos do segundo grau e pode ser interpretada no conhecido Triângulo Chinês (de Pascal?), quando somamos dois números binomiais seguidos na mesma linha para obter o número binomial que fica na linha seguinte em baixo do último número binomial somado.*

67 Teorema. *(Relação de Stifel) Se $n, k \in N$ com $n > k$, então*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Demonstração. Desenvolvendo o membro da esquerda, obtemos:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)k!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)![(n+1)-(k-1)]!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k-1)]!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

□

68 Teorema. *(Binomial para n finito) Sejam $h > 0$ e $n \in N$. Assim:*

$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3 + ... + h^n$$

69 Teorema. *(Desigualdade de Bernoulli com 2 termos) Se $h \in R$ com $1 + h > 0$ e $n \in N$, então:*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

Demonstração. Para $n = 1$, segue que $(1+h)^1 =\geq 1 + 1h$. Se $(1+h)^n \geq 1 + nh$ é verdadeiro, mostraremos que $(1+h)^{n+1} \geq 1 + (n+1)h$. Realmente,

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} &= (1+h)\cdot(1+h)^n \\ &\geq (1+h)\cdot(1+nh) \\ &= 1 + h + nh + nh^2 \\ &\geq 1 + (n+1)h \end{aligned}$$

□

70 Teorema. *(Desigualdade de Bernoulli com 3 termos) Se $h > 0$ e $n \in N$, então*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2$$

Demonstração. Se $n = 1$ então $(1+h)^1 \geq 1 + 1h + 0.h^2$. Se $(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2$ é verdadeiro, mostraremos que

$$(1+h)^{n+1} \geq 1 + (n+1)h + \frac{(n+1)n}{2}h^2$$

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} &= (1+h)\cdot(1+h)^n \\ &\geq (1+h)\cdot(1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2) \\ &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + h + nh^2 + \frac{n(n-1)}{2}h^3 \\ &= 1 + (n+1)h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{2n}{2}h^2 + \frac{n(n-1)}{2!}h^3 \\ &\geq 1 + (n+1)h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{2n}{2}h^2 \\ &= 1 + (n+1)h + \frac{(n+1)n}{2}h^2 \end{aligned}$$

□

53 Exemplo. *(Limite da potência n-ésima de um número real) Seja a seqüência* $f(n) = a^n$ *definida para* $a \in R$ *e* $n \in N$.

1. **Caso** $a > 1$. *Escrevendo* $a = 1 + h$, *onde* $h > 0$, *teremos:*

$$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \to \infty$$

2. **Caso** $a < -1$ **e** n **par**. *Aqui temos:*

$$a^n = [-(-a)]^n = (-1)^n \cdot (-a)^n = (-a)^n \to \infty$$

3. **Caso** $a < -1$ **e** n **ímpar**. *Temos:*

$$a^n = [-(-a)]^n = (-1)^n \cdot (-a)^n = -(-a)^n \to -\infty$$

4. **Caso** $a = -1$. *A seqüência não converge, pois:*

$$a^n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

5. **Caso** $a = 1$. *Neste caso,* $a^n = 1 \to 1$.
6. **Caso** $a = 0$. *Neste caso,* $a^n = 0 \to 0$.
7. **Caso** $0 < a < 1$. *Como* $1/a > 1$, *então* $1/a = 1 + h$ *onde* $h > 0$, *logo*

$$0 \leq a^n = (1+h)^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \to 0$$

8. **Caso** $-1 < a < 0$. *Basta tomar* $0 < -a < 1$ *e escrever*

$$a^n = [-(-a)]^n = (-1)^n \cdot (-a)^n \to 0$$

54 Exemplo. *(Limite da raiz n-ésima de um número real não negativo) Seja a seqüência* $f(n) = \sqrt[n]{a}$ *definida para* $a > 0$ *e* $n \in N$.

1. **Caso** $a > 1$. *Aqui,* $\sqrt[n]{a} > 1$, *assim para cada* $n \in N$, *escrevemos* $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ *onde* $h_n > 0$, *e isto significa que*

$$a = (1+h_n)^n \geq 1 + n.h_n$$

logo

$$0 < h_n \leq \frac{a-1}{n} \to 0$$

assim $h_n \to 0$ *e mostramos que*

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n \to 1$$

2. **Caso** $0 < a < 1$. *Aqui, temos que* $0 < \sqrt[n]{a} < 1$, *logo*

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} > 1$$

para cada $n \in N$, existe $h_n > 0$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 + h_n$$

logo

$$a = \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+n.h_n}$$

Temos então que

$$1 + n.h_n \leq \frac{1}{a}$$

ou seja

$$0 < h_n \leq \frac{\frac{1}{a} - 1}{n} \to 0$$

que garante que $h_n \to 0$, assim

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 + h_n \to 1$$

Então

$$\sqrt[n]{a} \to 1$$

55 Exemplo. *(Limite da raiz n-ésima de n) Usando a desigualdade de Bernoulli com 3 termos, mostrar que $\sqrt[n]{n} \to 1$.*

VI.3. Monotonicidade

99 Definição. *(Seqüências monótonas) Uma seqüência real $f = f(n)$ é monótona*

1. *Crescente (ou não decrescente) se $m < n$ implica que $f(m) \leq f(n)$.*
2. *Decrescente (ou não crescente) se $m < n$ implica que $f(m) \geq f(n)$.*
3. *Estritamente crescente se $m < n$ implica que $f(m) < f(n)$.*
4. *Estritamente decrescente se $m < n$ implica que $f(m) > f(n)$.*

100 Definição. *(Seqüência monótona, forma alternativa) Uma seqüência real $f = f(n)$ é*

1. *Crescente (ou não decrescente) se para todo $n \in N$ tem-se que $f(n) \leq f(n+1)$.*
2. *Decrescente (ou não crescente) se para todo $n \in N$ tem-se que $f(n) \geq f(n+1)$.*
3. *Estritamente crescente se para todo $n \in N$ tem-se que $f(n) < f(n+1)$.*
4. *Estritamente decrescente se para todo $n \in N$ tem-se que $f(n) > f(n+1)$.*

VI.4. Subseqüências

101 Definição. *(Subseqüência) Seja $f : N \to R$ uma seqüência de números reais. Se existe uma seqüência estritamente crescente de números naturais $i : N \to N$ cujo conjunto imagem $i(N)$ é infinito, a seqüência $f_i : N \to R$, definida como a composta $f_i = f \circ i$ é uma subseqüência de f é uma seqüência cujo conjunto imagem é:*

$$f_i(N) = f(i(N)) = \{f(i(n)) : n \in N\}$$

O novo conjunto imagem $f_i(N)$ é um **subconjunto** *de $f(N)$, razão pela qual a composta $f_i = f \circ i$ recebe o nome de* **subseqüência** *de f.*

48 Observação. *(Importantes sobre subseqüências)*

1. *A partir de uma dada seqüência $f = f(n)$, podemos construir muitas subseqüências, sendo que algumas delas poderão ser convergentes.*
2. *A subseqüência mais simples de uma dada seqüência $f = f(n)$, ocorre quando tomamos $i(n) = n$, pois $(f_i)(n) = f(i(n)) = f(n)$.*
3. *Como a seqüência de números naturais $i : N \to N$ é estritamente crescente, segue que para cada $n \in N$, vale a desigualdade $i(n) \geq n$.*
4. *O tratamento da convergência de uma subseqüência é realizado do mesmo modo que o de uma seqüência, até mesmo porque uma subseqüência também é uma seqüência..*

56 Exemplo. *Sejam as seqüências $f(n) = 1/n$ e $i(n) = n^2$. A composta das seqüências f e i gera uma subseqüência $f_i = f \circ i$ de f dada por:*

$$f_i(n) = f(i(n)) = \frac{1}{n^2}$$

sendo que o índice natural n foi substituído por n^2 na seqüência original f.

Trabalhando com as imagens dos conjuntos, temos que:

$$f_i(N) = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, ..., \frac{1}{n^2}, ...\}$$

é um subconjunto de

$$f(N) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$$

71 Teorema. *Se uma seqüência $f = f(n)$ é convergente para um limite L, então todas as suas subseqüências são convergentes para o mesmo limite L.*

72 Teorema. *Se uma seqüência $f = f(n)$ tem duas subseqüências, sendo que cada uma converge para um limite diferente, então a seqüência $f = f(n)$ não é convergente.*

73 Teorema. *Se uma seqüência $f = f(n)$ possui uma subseqüência que não é convergente, então a seqüência $f = f(n)$ não é convergente.*

102 Definição. *(Divergência para $+\infty$) Uma seqüência $f = f(n)$ diverge para $+\infty$ se para cada $M > 0$, existe um índice $n_0 = n_0(M)$ tal que para todo $n > n_0$, temos que $f(n) > M$.*

103 Definição. *(Divergência para $-\infty$) Uma seqüência $f = f(n)$ diverge para $-\infty$ se para cada $M < 0$, existe um índice $n_0 = n_0(M)$ tal que para todo $n > n_0$, temos que $f(n) < M$.*

57 Exemplo. *$f(n) = n$ diverge para $+\infty$ e $g(n) = -n^2$ diverge para $-\infty$.*

104 Definição. *(Seqüência oscilante) Diz-se que que uma seqüência $f = f(n)$ é oscilante, se ela é divergente, mas não diverge nem para $+\infty$, nem para $-\infty$.*

58 Exemplo. *$f(n) = (-1)^n$ e $g(n) = \cos(n\pi)$ são seqüências oscilantes, mas $h(n) = \sin(n\pi)$ não é uma seqüência oscilante.*

74 Teorema. *(Troca de termos em seqüência) Se um número finito de termos é trocado em uma seqüência $f = f(n)$ para formar uma outra seqüência $g = g(n)$, então $f = f(n)$ converge se, e somente se, $g = g(n)$ converge, e os limites destas seqüências são iguais.*

59 Exemplo. *(A seqüência mais importante) A seqüência $f(n) = 1/n$ converge para 0. Substituindo os cinco primeiros termos desta seqüência pelos números 10, 20, 30, 40, 50, obteremos uma outra seqüência $g = g(n)$ com conjunto imagem:*

$$g(N) = \{10, 20, 30, 40, 50, 1/6, 1/7, 1/8, ..., 1/n, ...\}$$

mas ainda assim, a seqüência $g = g(n)$ terá limite 0 pois a alteração de um número finito ou dos primeiros termos da seqüência, não altera o valor limite da mesma, uma vez que este limite depende apenas dos termos finais *da seqüência.*

Exercício: Se $f(n) = C$ (constante), mostre que $\lim f(n) = C$.

49 Observação. *(Sobre o cálculo do limite) Como nem sempre é fácil obter o limite de uma seqüência como por exemplo*

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$$

através da definição apresentada, em geral, devemos utilizar as propriedades geométricas das seqüências relacionadas com a sua limitação, para facilitar o trabalho.

VI.5. Limitação

105 Definição. *(Seqüência limitada) Uma seqüência $f = f(n)$ é limitada:*

1. *superiormente se existe $M > 0$ tal que para todo $n \in N$: $f(n) < M$.*
2. *inferiormente se existe $N < 0$ tal que para todo $n \in N$: $N < f(n)$.*
3. *se é limitada superiormente e limitada inferiormente, isto é, existem $M, N \in R$ tal que $N \leq f(n) \leq M$, para todo $n \in N$.*
4. *se existe $M > 0$ tal que para todo $n \in N$: $|f(n)| < M$.*

75 Teorema. *(Convergência implica limitação) Se $f = f(n)$ é uma seqüência convergente em R, então $f(n)$ é limitada.*

Demonstração. Se $f = f(n)$ é convergente para um número real L, então, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ tal que se $n > n_0$, então $|f(n) - L| < \varepsilon$. Se tomarmos em particular $\varepsilon = 1$, segue a existência de um número $n_0 \in N$ tal que $|f(n) - L| < 1$.

Pela desigualdade triangular, temos que $|f(n)| - |L| \leq |f(n) - L|$ garantindo que para $n > n_0$, vale a desigualdade

$$|f(n)| \leq 1 + |L|$$

Tomando $M = \max(|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|, ..., |f(n_0)|, 1 + |L|)$, segue que

$$\begin{gathered}
-M \leq -|f(1)| \leq f(1) \leq |f(1)| \leq M \\
-M \leq -|f(2)| \leq f(2) \leq |f(2)| \leq M \\
-M \leq -|f(3)| \leq f(3) \leq |f(3)| \leq M \\
-M \leq -|f(4)| \leq f(4) \leq |f(4)| \leq M \\
... \\
-M \leq -|f(n_0)| \leq f(n_0) \leq |f(n_0)| \leq M \\
-M \leq -|f(n)| \leq f(n) \leq |f(n)| \leq M
\end{gathered}$$

Desse modo $-M \leq f(n) \leq M$ para todo $n \in N$e segue que $f = f(n)$ é limitada. □

76 Teorema. *(Monotonia limitada implica convergência) Se $f = f(n)$ é uma seqüência monótona e limitada, então $f(n)$ é convergente.*

Demonstração. Se $f = f(n)$ é uma seqüência limitada, o conjunto imagem $C = f(N) = \{f(n) : n \in N\}$ também é limitado, logo, o conjunto C é limitado superiormente em R, e segue que o conjunto C possui supremo em R, que denotaremos por $\alpha = \sup(C)$. Pela definição de supremo, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que

$$\alpha - \varepsilon < f(n_0) \leq \alpha$$

Se a seqüência $f = f(n)$ é monótona crescente, então, para todo $n > n_0$, segue que $f(n) \geq f(n_0)$, assim

$$\alpha - \varepsilon < f(n_0) \leq f(n) \leq \alpha$$

e é claro que para todo $n > n_0$, temos que

$$\alpha - \varepsilon < f(n) \leq \alpha + \varepsilon$$

assim

$$|f(n) - \alpha| < \varepsilon$$

garantindo que $\lim f(n) = \alpha$, ou seja, $f = f(n)$ converge para $\sup(f(N))$. □

77 Teorema. *Se $f = f(n)$ é uma seqüência limitada em R, ela possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração. Se $f = f(n)$ é uma seqüência limitada, segue que o conjunto imagem $f(N) = \{f(n) : n \in N\}$ também é limitado, logo $f(N)$ é limitado superiormente em R e $f(N))$ possui supremo em R, que denotaremos por $\alpha = \sup(f(N))$.

Para $\varepsilon = 1$, existe um número natural n_1 tal que $\alpha - 1 < f(n_1) < \alpha + 1$.

Para $\varepsilon = 1/2$, existe um número natural n_2 tal que $\alpha - \frac{1}{2} < f(n_2) < \alpha + \frac{1}{2}$.

Para $\varepsilon = 1/3$, existe um número natural n_3 tal que $\alpha - \frac{1}{3} < f(n_3) < \alpha + \frac{1}{3}$.

Em geral, para $\varepsilon = 1/m$, existe um número natural n_m tal que $\alpha - \frac{1}{m} < f(n_m) < \alpha + \frac{1}{m}$.

Tomando a função $i : N \to N$ definida por $i(1) = n_1$, $i(2) = n_2$, $i(3) = n_3$, ..., $i(m) = n_m$, ..., segue que $f_i(m) = f(n_m)$ é uma subseqüência de $f = f(n)$, além disso

$$\alpha - \frac{1}{m} < f_i(m) < \alpha + \frac{1}{m}$$

ou seja, para cada $m \in N$:

$$|f_i(n) - \alpha| < \frac{1}{m}$$

e quando m tende a ∞, segue que $\lim_{m\to\infty} f_i(n) = \alpha$. □

VI.6. Médias usuais

106 Definição. *(Média aritmética) Se $m > 0$ e $n > 0$ tal que $m \leq n$, definimos a média aritmética entre m e n por*

$$A(m, n) = \frac{m + n}{2}$$

Se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são números reais positivos, definimos a média aritmética entre eles por

$$A(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

107 Definição. *(Média geométrica) Se $m > 0$ e $n > 0$ tal que $m \leq n$, definimos a média aritmética entre m e n por*

$$G(m, n) = \sqrt{mn}$$

Se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são números reais positivos, definimos a média geométrica entre eles por

$$G(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n}$$

108 Definição. *(Média harmônica) Se $m > 0$ e $n > 0$ tal que $m \leq n$, definimos a média aritmética entre m e n por*

$$\frac{2}{H(m, n)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

Se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são números reais positivos, definimos a média harmônica entre eles por

$$\frac{1}{H(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}$$

VI.7. Médias versus progressões

109 Definição. *(PA) Três números positivos a, b e c, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, se o termo b é a média aritmética entre os termos a e c.*

110 Definição. *(PG) Três números positivos a, b e c, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, se o termo b é a média geométrica entre os termos a e c.*

111 Definição. *(PH) Três números positivos a, b e c, nesta ordem, formam uma progressão harmônica, se o termo b é a média harmônica entre os termos a e c.*

Exercício: Pesquisar materiais de Geometria euclidiana para interpretar geometricamente as médias: aritmética, geométrica e harmônica.

Exercício: Mostrar que se a, b e c são números positivos que estão em progressão harmônica, então, também estão em progressão harmônica, os três números:

$$\frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{a+c} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a+b}$$

Dica: Mostrar que a média harmônica entre $\frac{a}{b+c}$ e $\frac{c}{a+b}$ é igual a $\frac{b}{a+c}$, usando como válida a relação $b = \frac{2a.c}{a+c}$ ou equivalentemente, $2a.c = a.b + b.c$.

$$\begin{aligned} H(\frac{a}{b+c}, \frac{c}{a+b}) &= \frac{2.\frac{a}{b+c}.\frac{c}{a+b}}{\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b}} \\ &= \frac{2.a.c}{a \cdot (a+b) + c \cdot (b+c)} \\ &= ... \end{aligned}$$

VI.8. Harmônico global

112 Definição. *(Harmônico global) Se m e n são números reais positivos, definimos o harmônico global entre m e n, denotado por $h = h(m, n)$ satisfazendo à relação harmônica:*

$$\frac{1}{h(m,n)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

Neste caso, a média harmônica é o dobro do harmônico global, isto é, $H(m, n) = 2h(m, n)$.

Na Página Matemática Essencial você encontra muitos materiais didáticos contendo aplicações da Matemática. Na pasta *Alegria*, existem alguns passatempos matemáticos e um link sobre Harmonia e Matemática, onde tratamos sobre o uso do harmônico global em aplicações no cálculo de tempos, resistências, capacidades elétricas, capacidades motivas, lentes, geometria, etc.

VI.9. Desigualdades com médias

113 Definição. *(Função crescente) Uma função $f : X \to R$ é crescente, se $x < y$ implicar que $f(x) \leq f(y)$.*

1 Lema. *(Função raiz quadrada) A função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é bijetiva, e além disso, f é crescente, isto é, se $x \leq y$ então $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.*

78 Teorema. *Em geral $H(m,n) \leq G(m,n)$ e a igualdade ocorre se $m = n$, isto é, $H(n,n) = G(n,n) = n$.*

Demonstração. Como $(n-m)^2 \geq 0$, então $m^2 + n^2 - 2mn \geq 0$. Somando $4mn$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos $m^2 + n^2 + 2mn \geq 4mn$ que também pode ser escrita como

$$(m+n)^2 \geq 4mn$$

Extraindo a raiz quadrada de cada lado da desigualdade:

$$m + n \geq 2\sqrt{mn}$$

de onde segue que

$$\frac{2}{m+n} \leq \frac{\sqrt{mn}}{mn}$$

significando que

$$H(m,n) \leq G(m,n)$$

□

79 Teorema. *Em geral, vale a desigualdade $G(m,n) \leq A(m,n)$ e a igualdade ocorre quando $m = n$, isto é, $G(n,n) = A(n,n) = n$.*

Demonstração. Como $(n-m)^2 \geq 0$, então $m^2 + n^2 - 2mn \geq 0$. Somando $4mn$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos $m^2 + n^2 + 2mn \geq 4mn$ que pode ser escrita como

$$(m+n)^2 \geq 4mn$$

Extraindo a raiz quadrada de cada lado da desigualdade, obtemos $m + n \geq 2\sqrt{mn}$ e assim

$$\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn}$$

o que garante que $A(m,n) \leq G(m,n)$. □

80 Teorema. *Em geral, vale a desigualdade* $G(m,n) \leq A(m,n)$ *e a igualdade só ocorre quando* $m = n$*, isto é,* $G(n,n) = A(n,n) = n$*.*

Demonstração. Como $(n-m)^2 \geq 0$, então $m^2 + n^2 - 2mn \geq 0$. Somando $4mn$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos $m^2 + n^2 + 2mn \geq 4mn$ que pode ser escrita como

$$(m+n)^2 \geq 4mn$$

Extraindo a raiz quadrada de cada lado da desigualdade, obtemos $m + n \geq 2\sqrt{mn}$ e assim

$$\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn}$$

o que garante que $A(m,n) \leq G(m,n)$. □

VI.10. Aplicações geométricas

1. Dentre todos os retângulos cuja soma de duas arestas contíguas é igual a 16, determinar aquele que possui a maior área S.
   Dica: Se a e b são as medidas dos lados do retângulo, então $S(a,b) = ab$ indica a área do retângulo e $a+b = 16$. Em geral, $G(a,b) \leq A(a,b)$, mas o máximo da média geométrica $G = G(a,b)$ ocorre, quando $G = A$. Este fato garante que $a = b = 8$.
2. Dentre todos os retângulos com perímetro $2p$, obter aquele que tem área máxima.
   Dica: Sejam a e b as medidas de dois lados contíguos do retângulo, $S(a,b) = ab$ a área do retângulo e $a + b = p$. Assim, $G(a,b) \leq A(a,b)$ e o máximo da média geométrica $G = G(a,b)$ ocorre, se $G = A$, isto é, quando $a = b$, logo $a = b = p/2$.
3. Dentre todos os paralelepípedos cuja soma de três arestas que partem de um mesmo vértice é uma constante $3p$, determinar aquele que possui o maior volume.
   Dica: Se a, b e c são as três arestas que partem de um vértice do paralelepípedo, então $V(a,b,c) = abc$ é o volume do paralelepípedo e $a + b + c = 3p$. O máximo da média geométrica $G = G(a,b,c)$ ocorre quando $G = A$, onde A é a média aritmética e este fato, faz com que $a = b = c = p$.

VI.11. A construção do número de Euler

O número e, cujo valor aproximado é $2,7182818285490$, aparece com freqüência em Matemática e este número é usado para definir o logaritmo natural. Este número e pode ser definido através de limites de duas seqüências, uma crescente e outra decrescente, mas será introduzida uma terceira seqüência para facilitar os trabalhos. Nesta seção, as três seqüências serão denotadas por x_n, y_n e z_n.

81 Teorema. *A seqüência real definida por* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *é crescente.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{x_n} &= \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{1.\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= G(1,1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},...,1+\frac{1}{n}) \leq A(1,1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},...,1+\frac{1}{n}) \\
&= \frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Elevando à potência $n+1$ o primeiro e o último termos da desigualdade, obtemos

$$x_n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}$$

garantindo que (x_n) é crescente. □

82 Teorema. *A seqüência real definida por* $y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ *é crescente.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{y_n} &= \sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= G(1,1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},...,1-\frac{1}{n}) \leq A(1,1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},...,1-\frac{1}{n}) \\
&= \frac{1+n(1-\frac{1}{n})}{n+1} = \frac{n}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Elevando à potência $n+1$ o primeiro e o último termos da desigualdade acima, temos

$$y_n \leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = y_{n+1}$$

garantindo que (y_n) é crescente. □

83 Teorema. *A seqüência real definida por* $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *é decrescente.*

Demonstração. Usaremos o fato que (y_n) é crescente.

$$z_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}} = \frac{1}{y_{n+2}}$$

Como $y_{n+1} \leq y_{n+2}$, garantimos que z_n é decrescente, pois

$$z_{n+1} = \frac{1}{y_{n+2}} \leq \frac{1}{y_{n+1}} = z_n$$

□

84 Teorema. *Para as seqüências reais definidas por* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *e para todo* $n > 1$, *valem as desigualdades*

$$2 = x_1 < x_n < z_n < z_1 = 4$$

50 Observação. *Pelo Teorema 81, a seqüência* (x_n) *é crescente, pelo Teorema 83 a seqüência* (z_n) *é decrescente, pelo Teorema 84 ambas são limitadas em R e pelo Teorema 76 da seção VI.5, ambas as seqüências convergem em R.*

114 Definição. *(Número e de Euler) Definimos o número* e *através do limite*

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

85 Teorema. *Para todo* $n \in N$, *vale a desigualdade:* $x_n < e$.

86 Teorema. *O número e também pode ser definido por*

$$e = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

87 Teorema. *Para todo* $n \in N$, *vale a desigualdade:* $e < z_n$.

88 Teorema. *Mostrar que para todo* $n \in N$, *vale a desigualdade*

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$$

Demonstração. Usaremos o Princípio de Indução Matemática (PIM) e a desigualdade $x_n < e$. Para $n = 1$, a desigualdade é verdadeira. Consideremos verdadeira a desigualdade para $n = m$, isto é,

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m < m!$$

Assim

$$\begin{aligned}
(m+1)! &= (m+1).m! > (m+1)\left(\frac{m}{e}\right)^m = (m+1)\cdot\frac{m^m}{e^m} \\
&= \frac{(m+1)(m+1)^m}{e^{m+1}}\cdot\frac{e\cdot m^m}{(m+1)^m} \\
&= \frac{(m+1)^{m+1}}{e^{m+1}}\cdot\frac{e\cdot m^m}{(m+1)^m} \\
&= \frac{(m+1)^{m+1}}{e^{m+1}}\cdot e\cdot(\frac{m}{m+1})^m \\
&= \frac{(m+1)^{m+1}}{e^{m+1}}\cdot\frac{e}{(\frac{m+1}{m})^m} = \frac{(m+1)^{m+1}}{e^{m+1}}\cdot\frac{e}{x_m} \\
&> \frac{(m+1)^{m+1}}{e^{m+1}}\cdot 1 > \frac{(m+1)^{m+1}}{e^{m+1}}
\end{aligned}$$

□

89 Teorema. *Mostrar que para todo* $n \in N$, *vale a desigualdade*

$$n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

VI.12. Seqüências aritméticas e PA

Seqüências aritméticas são muito usadas em processos lineares em Matemática. Tais seqüências são conhecidas no âmbito do Ensino Médio, como Progressões Aritméticas infinitas, mas uma Progressão Aritmética finita não é uma seqüência, pois o domínio da função que define a progressão, é um conjunto finito $\{1, 2, 3, ..., m\}$ contido no conjunto N dos números naturais.

115 Definição. *(Progressão Aritmética finita) Uma coleção finita de números reais, construída de modo que, cada termo a partir do segundo, é obtido pela soma do anterior com um número fixo r, denominada razão da PA.*

Na seqüência, apresentamos os elementos básicos de uma Progressão Aritmética da forma:

$$C = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., a_{m-1}, a_m\}$$

1. m é o número de termos da PA.
2. n indica uma posição na seqüência e o índice para a ordem do termo geral a_n no conjunto C.
3. a_n é o n-ésimo termo da PA, que se lê: *a índice n*.
4. a_1 é o primeiro termo da PA, que se lê: *a índice 1*.
5. a_2 é o segundo termo da PA, que se lê: *a índice 2*.
6. a_m é o último elemento da PA.
7. r é a razão da PA e é possível observar que

$$a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_2 + r, \quad ..., \quad a_n = a_{n-1} + r, \quad ..., \quad a_m = a_{m-1} + r$$

A razão de uma Progressão Aritmética, pode ser obtida, subtraindo o termo anterior (antecedente) do termo posterior (conseqüente), ou seja:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ...a_n - a_{n-1} = r$$

60 Exemplo. *(Progressões Aritméticas finitas)*

1. *A PA definida pelo conjunto* $C = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ *possui razão* $r = 3$, *pois* $2 + 3 = 5$, $5 + 3 = 8$, $8 + 3 = 11$ *e* $11 + 3 = 14$.
2. *A PA definida pelo conjunto* $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *possui razão* $r = 1$, *pois* $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$ *e* $4 + 1 = 5$.
3. *A PA definida por* $M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ *possui razão* $r = 3$, *pois* $6 - 3 = 9 - 6 = 12 - 9 = 15 - 12 = 3$.
4. *A PA definida por* $M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ *possui razão* $r = 4$, *pois* $4 - 0 = 8 - 4 = 12 - 8 = 16 - 12 = 4$.

90 Teorema. *(Fórmula do Termo geral da PA) Seja a PA com razão r, definida por* $P = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\}$. *A fórmula do termo geral desta seqüência é dada por*

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Demonstração. Observamos que:

$$\begin{array}{lll} a_1 & = a_1 & = a_1 + 0r \\ a_2 & = a_1 + r & = a_1 + 1r \\ a_3 & = a_2 + r & = a_1 + 2r \\ a_4 & = a_3 + r & = a_1 + 3r \\ ... & ... & ... \\ a_n & = a_{n-1} + r & = a_1 + (n-1)r \end{array}$$

e obtemos a fórmula do termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

□

Com o material apresentado, podemos obter qualquer termo de uma Progressão Aritmética (PA), sem precisar escrever a PA completamente.

61 Exemplo. *(Sobre termos de uma PA)*

1. *Seja a PA com razão r=5, dada pelo conjunto* $C = \{3, 8, ..., a_{30}, ..., a_{100}\}$. *O trigésimo e o centésimo termos desta PA podem ser obtidos, substituindo os dados da PA na fórmula do termo geral* $a_n = a_1 + (n-1)r$. *Assim:*

$$\begin{array}{rcl} a_{30} & = & 3 + (30-1)3 = 90 \\ a_{100} & = & 3 + (100-1)3 = 300 \end{array}$$

   Qual é o termo de ordem $n = 2^20$ *desta PA?*
2. *Para inserir todos os múltiplos de 5, que estão entre 21 e 623, montaremos uma tabela.*

21	25	30	...	615	620	623
a_1	a_2	a_3	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n

   Aqui, o primeiro múltiplo de 5 é $a_1 = 25$, *o último múltiplo de 5 é* $a_n = 620$ *e a razão é* $r = 5$. *Substituindo os dados na fórmula do termo geral, obtemos*

$$620 = 25 + (n-1)5$$

   de onde segue que $n = 120$, *assim o número de múltiplos de 5 entre 21 e 623, é igual a 120. O conjunto de tais números é dado por*

$$C_5 = \{25, 30, 35, ..., 615, 620\}$$

116 Definição. *(Progressões Aritméticas monótonas) Quanto à monotonia, uma PA pode ser:*

1. *crescente se para todo* $n \geq 1$*:* $r > 0$ *e* $a_n < a_{n+1}$.
2. *constante se para todo* $n \geq 1$*:* $r = 0$ *e* $a_{n+1} = a_n$.
3. *decrescente se para todo* $n \geq 1$*:* $r < 0$ *e* $a_{n+1} < a_n$.

62 Exemplo. 1. *A PA definida pelo conjunto* $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *é crescente, pois* $r = 2$ *e* $a_1 < a_2 < ... < a_5 < a_6$.
2. *A PA finita* $G = \{2, 2, 2, 2, 2\}$ *é constante.*
3. *A PA definida pelo conjunto* $Q = \{2, 0, -2, -4, -6\}$ *é decrescente com razão* $r = -2$ *e* $a_1 > a_2 > ... > a_4 > a_5$.

Exercício: Em uma PA com m termos, mostrar que a razão r pode ser escrita na forma $r = \dfrac{a_m - a_1}{m - 1}$.

117 Definição. *(Extremos e Meios em uma PA) Em uma Progressão Aritmética (finita) dada pelo conjunto:*

$$C = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., a_{m-1}, a_m\}$$

os termos a_1 *e* a_m *são os extremos e os demais:* a_2, a_3, ..., a_{m-2}, a_{m-1} *são os meios aritméticos.*

63 Exemplo. *Na PA definida por* $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, *os números 1 e 11 são os extremos os números 3, 5, 7 e 9 são os meios aritméticos.*

118 Definição. *(Termos eqüidistantes dos extremos) Em uma PA com m termos, dois termos são eqüidistantes dos extremos se a soma de seus índices é igual a* $m + 1$.

51 Observação. *(Termos eqüidistantes dos extremos) Para a seqüência indicada acima, são eqüidistantes dos extremos os pares de termos*

$$\begin{array}{ccc} a_1 & e & a_m \\ a_2 & e & a_{m-1} \\ a_3 & e & a_{m-2} \\ ... & ... & ... \end{array}$$

Se a PA possui um número m par de termos, temos $m/2$ *pares de termos eqüidistantes dos extremos.*

64 Exemplo. *A PA definida por* $C = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$, *possui um número par de termos e os extremos são* $a_1 = 4$ *e* $a_6 = 24$, *assim:*

$$\begin{array}{llll} a_2 + a_5 & = 8 + 20 & = 28 & = a_1 + a_6 \\ a_3 + a_4 & = 12 + 16 & = 28 & = a_1 + a_6 \\ a_4 + a_3 & = 16 + 12 & = 28 & = a_1 + a_6 \\ a_5 + a_2 & = 20 + 8 & = 28 & = a_1 + a_6 \end{array}$$

Se o número m de termos é ímpar, temos $(m - 1)/2$ *pares de termos eqüidistantes e ainda teremos um termo isolado, de ordem* $(m + 1)/2$, *que é eqüidistante dos extremos.*

65 Exemplo. *Na PA de* $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *os números 1 e 9 são os extremos da PA e os números 3, 5 e 7 são os meios da PA. O par de termos eqüidistante dos extremos é formado por 3 e 7, e além disso o número 5 que ficou isolado também é eqüidistante dos extremos.*

66 Exemplo. *A PA definida por* $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, *possui um número ímpar de termos e os extremos são* $a_1 = 4$ *e* $a_5 = 20$, *logo*

$$\begin{array}{llll} a_2 + a_4 & = 8 + 16 & = 24 & = a_1 + a_5 \\ a_3 + a_3 & = 12 + 12 & = 24 & = a_1 + a_5 \\ a_4 + a_2 & = 16 + 8 & = 24 & = a_1 + a_5 \end{array}$$

119 Definição. *(Interpolação aritmética) Interpolar k meios aritméticos entre os números a e b, significa obter uma PA com* $k + 2$ *termos cujo primeiro termo é a e b é o último termo. Para realizar a interpolação, basta determinar a razão da PA.*

67 Exemplo. *Para interpolar 6 meios aritméticos entre* $a = -9$ *e* $b = 19$, *é o mesmo que obter uma PA tal que* $a_1 = -9$, $a_m = 19$ *e* $m = 8$. *Como* $r = \dfrac{a_m - a_1}{m - 1}$, *então* $r = \dfrac{19 - (-9)}{7} = 4$ *e assim a PA ficará na forma do conjunto:*

$$C = \{-9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19\}$$

91 Teorema. *(Soma dos n primeiros termos de uma PA finita) Em uma PA (finita), a soma dos n primeiros termos é dada pela fórmula:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Demonstração. Em uma PA finita, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos desta PA. Assim:

$$a_2 + a_{m-1} = a_3 + a_{m-2} = a_4 + a_{m-3} = ... = a_n + a_{m-n+1} = ... = a_1 + a_m$$

Seja a soma S_n dos n primeiros termos da PA, dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n - 2 + a_{n-1} + a_n$$

Como a soma de números reais é comutativa, escrevemos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_n - 2 + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando membro a membro as duas últimas expressões acima, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como todas as n expressões em parênteses são somas de pares de termos eqüidistantes dos extremos, segue que a soma de cada termo, sempre será igual a $a_1 + a_n$, então:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

Assim, temos a fórmula para o cálculo da soma dos n primeiros termos da PA.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

□

68 Exemplo. *Para obter a soma dos 30 primeiros termos da PA definida por* $C = \{2, 5, 8, ..., 89\}$. *Aqui* $a_1 = 2$, $r = 3$ *e* $n = 30$. *Aplicando a fórmula da soma, obtida acima, temos:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2 + 89) \times 30}{2} = \frac{91 \times 30}{2} = 1365$$

Exercício: Construir um trabalho relacionando seqüências aritméticas com Matemática Comercial e Financeira.

VI.13. Seqüências geométricas e PG

Seqüências importantes são as geométricas, conhecidas no âmbito do Ensino Médio, como Progressões Geométricas (PG) infinitas, mas uma Progressão Geométrica finita não é uma seqüência, uma vez que o domínio da PG finita é um conjunto finito $\{1, 2, 3, ..., m\}$ que é um subconjunto próprio de N.

Seqüência geométricas são usadas em estudos de Matemática Financeira, para analisar o Montante de um valor capitalizado, estudar Taxas de juros, Financiamentos e Prestações. Seqüências geométricas também aparecem em estudos de decaimento radioativo (teste do Carbono 14 para a análise da idade de um fóssil ou objeto antigo).

No Ensino Superior tais seqüências aparecem em estudos de Seqüências e Séries de números e de funções, sendo que a série geométrica (um tipo de seqüência obtida pelas somas de termos de uma seqüência geométrica) é importante para obter outras séries numéricas e séries de funções.

120 Definição. *(Progressão Geométrica finita) Uma Progressão Geométrica finita, é uma coleção finita de números reais com as mesmas características que uma seqüência geométrica, mas com um número finito de elementos. As Progressões Geométricas (PG) são caracterizadas pelo fato que a divisão do termo seguinte pelo termo anterior é um quociente fixo. Se este conjunto possui m elementos, ele pode ser denotado por*

$$G = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., a_{m-1}, a_m\}$$

No caso de uma Progressão Geométrica finita, temos os seguintes termos técnicos.

1. *m é o número de termos da PG.*
2. *n indica uma posição na seqüência e também o índice para a ordem do termo geral* a_n *no conjunto G.*
3. a_n *é o n-ésimo termo da PG, que se lê* a índice n.
4. a_1 *é o primeiro termo da PG, que se lê* a índice 1.
5. a_2 *é o segundo termo da PG, que se lê* a índice 2.
6. a_m *é o último elemento da PG.*
7. *q é a razão da PG, que pode ser obtida pela divisão do termo posterior pelo termo anterior, ou seja na PG definida por*

$$G = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\}$$

temos que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

52 Observação. *Na Progressão Geométrica (PG), cada termo é a média geométrica entre o antecedente (anterior) e o conseqüente (seguinte) do termo tomado, daí a razão de tal denominação para este tipo de seqüência.*

92 Teorema. *(Fórmula do termo geral da PG) A fórmula do termo geral de uma PG de razão q, cujo primeiro termo é a_1, o número de termos é n e a_n é o n-ésimo termo, é*

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Demonstração. Observamos que:

$$\begin{array}{lllll} a_1 & = & a_1 & = & a_1 q^0 \\ a_2 & = & a_1 q & = & a_1 q^1 \\ a_3 & = & a_2 q & = & a_1 q^2 \\ a_4 & = & a_3 q & = & a_1 q^3 \\ ... & = & ... & = & ... \\ a_n & = & a_{n-1} q & = & a_1 q^{n-1} \end{array}$$

Assim temos a fórmula do termo geral da PG, dada pela forma indutiva:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

□

69 Exemplo. *(Progressões geométricas finitas)*

1. *Seja a PG finita, definida por $G = \{2, 4, 8, 16, 32\}$. A razão $q = 2$ desta PG é obtida pela divisão do conseqüente pelo antecedente, isto é,*

$$\frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

2. *Para a PG definida por $G = \{8, 2, 1/2, 1/8, 1/32\}$, a divisão de cada termo seguinte pelo anterior é $q = 1/4$, pois:*

$$\frac{1/32}{1/8} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1/2}{2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

3. *Para a PG definida por $T = \{3, 9, 27, 81\}$, temos:*

$$q = \frac{9}{3} = \frac{27}{3} = \frac{81}{3} = 3$$

4. *Para a PG $A = \{10, 100, 1000, 10000\}$, temos:*

$$q = \frac{100}{10} = \frac{1000}{100} = \frac{10000}{1000} = 10$$

5. *Para obter o termo geral da seqüência geométrica* $E = \{4, 16, 64, ...\}$, *tomamos* $a_1 = 4$ *e* $a_2 = 16$. *Assim* $q = 16/4 = 4$. *Substituindo estes dados na fórmula do termo geral da seqüência geométrica, obtemos:*

$$f(n) = a_1 \cdot q^{n-1} = 4^1 \cdot 4^{n-1} = 4^{(n-1)+1} = 4^n$$

6. *Para obter o termo geral da PG tal que* $a_1 = 5$ *e* $q = 5$, *usamos a fórmula do termo geral da PG, para escrever:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1} = 5^1 \cdot 5^{n-1} = 5^{1+(n-1)} = 5^n$$

121 Definição. *(Progressões Geométricas monótonas) Quanto ao aspecto de monotonia, uma PG pode ser:*

1. *Crescente, se para todo* $n \geq 1$*:* $q > 1$ *e* $a_n < a_{n+1}$.
2. *Constante, se para todo* $n \geq 1$*:* $q = 1$ *e* $a_n = a_{n+1}$.
3. *Decrescente, se para todo* $n \geq 1$*:* $0 < q < 1$ *e* $a_n > a_{n+1}$.
4. *Alternada, se para todo* $n \geq 1$*:* $q < 0$.

70 Exemplo. 1. *A PG definida por* $U = \{5, 25, 125, 625\}$ *é crescente, pois* $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.
2. *A PG definida por* $O = \{3, 3, 3\}$ *é constante, pois* $a_1 = a_2 = a_3 = 3$.
3. *A Progressão Geométrica definida por* $N = \{-2, -4, -8, -16\}$ *é decrescente, pois* $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.
4. *A Progressão Geométrica definida por* $N = \{-2, 4, -8, 16\}$ *é alternada, pois* $q = -2 < 0$.

122 Definição. *(Interpolação geométrica) Interpolar k meios geométricos entre dois números dados a e b, equivale a obter uma PG com* $k + 2$ *termos, em que a é o primeiro termo da PG, b é o último termo da PG. Para realizar a interpolação geométrica, basta obter a razão da PG.*

71 Exemplo. *Para interpolar três meios geométricos entre 3 e 48, basta tomar* $a_1 = 3$, $a_n = 48$, $k = 3$ *e* $n = 5$ *para obter a razão da PG. Como* $a_n = a_1 q^{n-1}$, *então* $48 = 3q^4$ *e segue que* $q^4 = 16$, *garantindo que a razão é* $q = 2$. *Temos então a PG:* $R = \{3, 6, 12, 24, 48\}$.

93 Teorema. *(Fórmula da soma dos termos de uma PG finita) Seja a PG finita,* $Y = \{a_1, a_1 q, a_1 q^2, ..., a_1 q^{n-1}\}$. *A soma dos n primeiros termos desta PG é dada por*

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Demonstração. Seja a soma dos n termos dessa PG, indicada por:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1}$$

Se $q = 1$, temos:

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1 = n a_1$$

Se q é diferente de 1, temos

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^{n-1}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima pela razão q, obtemos

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Dispondo estas expressões de uma forma alinhada, obtemos:

$$\begin{array}{lllll} S_n & = a_1+ & a_1q+ & ... & +a_1q^{n-1} \\ qS_n & = & a_1q+ & ... & +a_1q^{n-1} \quad +a_1q^n \end{array}$$

Subtraindo membro a membro, a expressão de baixo da expressão de cima, obtemos

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$

que pode ser simplificada em

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

ou seja

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

que é a fórmula para a soma dos n termos de uma PG finita de razão $q \neq 0$. □

72 Exemplo. *(Somas dos termos em uma PG)*

1. *Para obter a razão da PG definida por* $W = \{3, 9, 27, 81\}$, *devemos dividir o termo posterior pelo termo anterior, para obter* $q = 9/3 = 3$. *Como* $a_1 = 3$ *e* $n = 4$, *substituímos os dados na fórmula da soma dos termos de uma PG finita, para obter:*

$$S_4 = 3\frac{3^4-1}{3-1} = 3\frac{81-1}{2} = 3\frac{80}{2} = 120$$

   Confirmação: $S_4 = 3 + 9 + 27 + 81 = 120$.
2. *Para obter a soma dos 5 primeiros termos de uma PG cuja razão é* $q = 1$ *e* $a_1 = 2$, *podemos identificar a PG com o conjunto* $X = \{2, 2, 2, 2, 2\}$. *Como a razão da PG é* $q = 1$, *temos que a soma dos seus termos é obtida por* $S_5 = 2 \times 5 = 10$.

53 Observação. *Uma seqüência geométrica (infinita) é semelhante a uma PG, mas nesse caso ela possui infinitos elementos, pois o domínio desta função é o conjunto N.*

94 Teorema. *(Soma de uma série geométrica) Seja uma seqüência geométrica* $f : N \to R$ *definida por* $f(n) = a_1q^{n-1}$, *cujos termos estão no conjunto infinito:*

$$F = \{a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, ..., a_1q^{n-1}, ...\}$$

Se $-1 < q < 1$, *a soma dos termos desta seqüência geométrica, é dada por*

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Demonstração. A soma dos termos desta seqüência geométrica, é a série geométrica de razão q e não é obtida da mesma forma que no caso das PGs (finitas), mas o processo finito é usado no presente cálculo.

Consideremos a soma dos termos desta seqüência geométrica, como:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

que também pode ser escrita da forma

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + ...$$

ou na forma simplificada

$$S = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ...)$$

A expressão matemática dentro dos parênteses

$$Soma = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ...$$

é carente de significado, pois temos uma quantidade infinita de termos e dependendo do valor de q, esta expressão, perderá o sentido real.

Analisaremos alguns casos possíveis, sendo que o último é o mais importante nas aplicações.

1. Se $q > 1$, digamos $q = 2$, temos que

   $$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1} + ... = \text{infinito} = \infty$$

   e o resultado não é um número real.
2. Se $q = 1$, temos que

   $$S = 1 + 1 + 1 + ... + 1 + ... = \infty$$

   e o resultado não é um número real.
3. Se $q = -1$, temos que

   $$S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1... - 1 + 1 + ...$$

   e dependendo do modo como reunirmos os pares de números consecutivos desta PG infinita, obtemos:

   $$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + ... + (-1 + 1) + ... = 1$$

   mas se tomarmos:

   $$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... + (1 - 1) + ... = 0$$

   ficará claro que $q = -1$, a soma dos termos desta série se tornará complicada.
4. Se $q < -1$, digamos $q = -2$, temos que

   $$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 - 64 + ... + 2^{n-1} - 2^n + ...$$

   que também é uma expressão carente de justificativa.

5. Se $-1 < q < 1$, temos o caso mais importante para as aplicações. Neste caso as séries geométricas são conhecidas como séries convergentes. Quando uma série não é convergente, dizemos que ela é divergente. Consideremos

$$Soma = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ...$$

A soma dos n primeiros termos desta série geométrica, será indicada por:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}$$

e já mostramos antes que

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

mas se tomamos $-1 < q < 1$, a potência q^n se aproxima do valor zero, à medida que o expoente n se torna muito grande e sem controle (os matemáticos dão o nome infinito ao pseudo-número com esta propriedade).
Para obter o valor de *Soma*, devemos tomar o *limite* de S_n quando n tende a infinito. Assim, concluímos que para $-1 < q < 1$, vale a igualdade:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \frac{1}{1 - q}$$

De uma forma geral, se $-1 < q < 1$, a soma

$$S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^{n-1} + ...$$

pode ser obtida por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

□

73 Exemplo. *(Somas de séries geométricas)*

1. *Para obter a soma dos termos da seqüência geométrica* $S = \{2, 4, 8, 16, ...\}$, *devemos obter a razão, que neste caso é* $q = 2$. *Assim, a soma dos termos desta PG infinita é dada por:*

$$S = 2 + 4 + 8 + 16 + ...$$

e esta série é divergente.

2. *Para obter a soma dos termos da seqüência geométrica definida pelo conjunto* $Y = \{5, 5/2, 5/4, 5/8, 5/16, ...\}$, *temos que a razão é* $q = 1/2$ *e* $a_1 = 5$, *recaindo no caso (e), assim, basta tomar*

$$S = \frac{5}{1 - 2} = 10$$

Exercícios:

1. Seja a seqüência f tal que $f(N) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$. Determinar os elementos indicados:

   (a) $f(1)$ (b) $f(3)$ (c) $f(4) - f(1)$ (d) $f(4) + f(2)$

2. Consideremos a seqüência $f : N \to R$ dos números ímpares positivos, definida por $f(n) = 2n - 1$, determinar:
   (a) Os 4 primeiros termos da seqüência.
   (b) A imagem de f.
   (c) O n-ésimo termo da seqüência.
   (d) A soma dos n primeiros números ímpares positivos.
3. Seja a seqüência $f : N \to R$ dada por $f(n) = \dfrac{1 + 3n}{2n}$.
   (a) Calcular a soma dos 4 primeiros termos de f.
   (b) Verificar se os números 30/19 e 31/20 são termos da seqüência e se forem, indique as suas ordens.
   (c) Analisar se esta é uma seqüência geométrica.
4. Uma família marcou um churrasco, com amigos e parentes no dia 13 de fevereiro de um certo ano. A dona da casa está preocupada, pois o açougueiro entrega carne de três em três dias. Sabendo-se que ele entregou carne no dia 13 de janeiro, será que ele entregará carne no dia 13 de fevereiro?
5. Apresente o conjunto imagem da seqüência f que indica a altura de um avião que levanta vôo do solo numa proporção de 3 metros por minuto.
6. Qual é a seqüência (função) real f tal que $f(N) = \{2, 7, 12, ...\}$?
7. Obter o quinto termo da seqüência aritmética definida por $C = \{a + b, 3a - 2b, ...\}$.
8. Calcular o número de termos da PA definida por $W = \{5, 10, ..., 785\}$.
9. Um garoto dentro de um carro em movimento, observa a numeração das casas do outro lado da rua, começando por $2, 4, 6, 8$. De repente passa um ônibus em sentido contrário, obstruindo a visão do garoto de forma que quando ele voltou a ver a numeração, já estava em 22.
   (a) Pode-se afirmar que esta é uma seqüência aritmética? Por que?
   (b) Quantos números o garoto deixou de ver?
10. Um operador de máquina chegou 30 minutos atrasado no seu posto de trabalho, mas como a máquina que ele monitora é automática, ela começou a trabalhar na hora programada.
    (a) Se a máquina produz 10^n peças por minuto em n minutos, quantas peças a máquina produziu até a chegada do operador?
    (b) Se depois de 1 hora, a máquina produz a mesma quantidade de peças, quantas peças terá feito a máquina ao final do expediente de 4 horas?
11. Exiba uma seqüência numérica em que cada termo é a média harmônica do antecedente e do conseqüente?
12. Construir um trabalho sobre aplicações da Matemática Financeira envolvendo juros compostos.

VI.14. Propriedades das seqüências

95 Teorema. *Se* $\lim f(n) = A$, $\lim g(n) = B$ *e* $c =$ *é uma constante, então*

1. $\lim\{f(n) + g(n)\} = \lim f(n) + \lim g(n) = A + B$
2. $\lim\{f(n) - g(n)\} = \lim f(n) - \lim g(n) = A - B$
3. *(Para o produto) Existe* $n_0 \in N$ *tal que* $|f(n)| \leq 1 + |A|$ *para todo* $n > n_0$.
4. $\lim\{f(n).g(n)\} = \lim f(n).\lim g(n) = A.B$
5. $\lim\{c.f(n)\} = c.\lim f(n) = c.A$
6. *(Para a divisão) Se* $B \neq 0$, *existe* $n_1 \in N$ *tal que* $|g(n)| > \frac{1}{2}|B|$ *para todo* $n > n_1$.
7. *Se* $B \neq 0$*:*

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\lim f(n)}{\lim g(n)} = \frac{A}{B}$$

VI.15. Seqüências de Cauchy

123 Definição. *(Seqüência de Cauchy) Uma seqüência real* $f = f(n)$ *é de Cauchy (ou fundamental) se, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in N$, *tal que se* $m > n_0$ *e* $n > n_0$, *então* $|f(m) - f(n)| < \varepsilon$.

Esta definição garante que dois termos genéricos da seqüência $f(m)$ e $f(n)$ ficam muitos próximos um do outro à medida que os índices m e n se tornam arbitrariamente grandes.

74 Exemplo. *(A seqüência mais importante) Para a seqüência* $f(n) = 1/n$, *tome a tabela com valores de* $f = f(n)$ *para* $n = 10^p$ *e os valores absolutos das diferenças entre dois valores da seqüência com índices grandes. Observe a evolução dos valores absolutos das diferenças entre dois termos quando os índices ficam muito grandes. Pela tabela, parece claro que esta seqüência é de Cauchy.*

n	$f(n)$	$D = \lvert f(m) - f(n)\rvert$
10^0	10^0	
10^1	10^{-1}	$\lvert f(10^1) - f(10^0)\rvert = 0,9$
10^2	10^{-2}	$\lvert f(10^2) - f(10^1)\rvert = 0,09$
10^3	10^{-3}	$\lvert f(10^3) - f(10^2)\rvert = 0,009$
10^4	10^{-4}	$\lvert f(10^4) - f(10^3)\rvert = 0,0009$
10^5	10^{-5}	$\lvert f(10^5) - f(10^4)\rvert = 0,00009$

54 Observação. *(Convergência sem conhecer o limite) Se uma seqüência é de Cauchy, podemos estudar a convergência desta seqüência mesmo sem conhecer o limite da mesma, pois nem sempre se pode calcular facilmente este valor.*

96 Teorema. *Uma seqüência* $f = f(n)$ *é de Cauchy se, e somente se, para cada* $\varepsilon > 0$, *existe um intervalo fechado* I *tal que* $m(I) < \varepsilon$ *e um número* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *tal que* $f(n) \in I$ *para todo* $n > n_0$.

97 Teorema. *Seja $f = f(n)$ uma seqüência real. Se $f = f(n)$ é de Cauchy, então $f = f(n)$ é limitada.*

Demonstração. Se $f = f(n)$ é de Cauchy, então, para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in N$ tal que se $m, n > n_0$ então $|f(m) - f(n)| < \varepsilon$. Em particular, se $m = n_0$, segue que para todo $n \geq n_0$ vale a desigualdade

$$|f(n_0) - f(n)| < 1$$

e como $|p| - |q| \leq |p - q|$, segue que $|f(n)| - |f(n_0)| < 1$, ou seja

$$|f(n)| \leq 1 + |f(n_0)|$$

Tomando $M = \max(|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|, ..., |f(n_0 - 1)|, 1 + |f(n_0)|)$, segue que

$$\begin{gathered}
-M \leq -|f(1)| \leq f(1) \leq |f(1)| \leq M \\
-M \leq -|f(2)| \leq f(2) \leq |f(2)| \leq M \\
-M \leq -|f(3)| \leq f(3) \leq |f(3)| \leq M \\
... \\
-M \leq -|f(n_0 - 1)| \leq f(n_0 - 1) \leq |f(n_0 - 1)| \leq M \\
-M \leq -1 - |f(n_0)| \leq f(n) \leq 1 + |f(n_0)| \leq M
\end{gathered}$$

Desse modo $-M \leq f(n) \leq M$ para todo $n \in N$ e segue que $f = f(n)$ é limitada. □

98 Teorema. *Uma seqüência real $f = f(n)$ é convergente se, e somente se, $f = f(n)$ é de Cauchy.*

Demonstração. (Direta) (Direta) Se $f = f(n)$ é convergente para L, então, para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que se $n > n_0$ então $|f(n) - L| < \varepsilon/2$ e se $m > n_0$ então $|f(m) - L| < \varepsilon/2$. Usando a desigualdade triangular, segue que

$$|f(m) - f(n)| \leq |f(m) - L + L - f(n)| \leq |f(m) - L| + |L - f(n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

garantindo que $f = f(n)$ é de Cauchy. □

Demonstração. (Recíproca) (Recíproca) Se $f = f(n)$ é de Cauchy, então $f = f(n)$ é limitada, logo $f = f(n)$ possui uma subseqüência $f_i = f(n_i)$ convergente para um valor L, isto é, $L = \lim f(n_i)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_{i0} \in N$ tal que se $n_i > n_{i0}$ então $|f(n_i) - L| < \varepsilon$. Como $n_{i0}, n_i \in N$, então existe $n_0 = n_{i0} \in N$ tal que se $n > n_{i0}$ então

$$|f(n) - L| < \varepsilon$$

e a seqüência $f = f(n)$ é convergente. □

124 Definição. *(Conjunto completo) Um conjunto $A \subset R$ é denominado completo se, toda seqüência de Cauchy em A converge para um elemento que pertence ao conjunto A.*

Exercício: Pela definição acima, existem subconjuntos da reta que não são completos. Exiba um subconjunto da reta que não é completo.

Capítulo VII

CONCEITOS TOPOLÓGICOS NA RETA REAL

> "Pelo que também Deus o exaltou soberanamente, e lhe deu o nome que é sobre todo nome; para que ao nome de Jesus se dobre todo joelho dos que estão nos céus, e na terra, e debaixo da terra, e toda língua confesse que Jesus Cristo é Senhor, para glória de Deus Pai." A Bíblia Sagrada, Filipenses 2:9-11

VII.1. Intervalos reais

Um intervalo real é um subconjunto de R definido pelos valores de suas extremidades. Se as duas extremidades são finitas, o intervalo é finito, mas se uma das extremidades é $+\infty$ ou $-\infty$, o intervalo é infinito. Cada intervalo real possui um único *pedaço*.

125 Definição. *(Intervalo aberto) Um intervalo aberto em R é um conjunto da forma (a, b) onde a e b são números reais, sendo que podemos ter $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.* **Não tem sentido** *escrever um intervalo aberto na forma (a, a).*

75 Exemplo. *(Intervalos abertos)*

① $(3, 10) = \{x \in R : 3 < x < 10\}$ *(limitado)*

② $(3, +\infty) = \{x \in R : 3 < x < +\infty\}$ *e* $(-\infty, 10) = \{x \in R : -\infty < x < 10\}$ *(ilimitados)*

③ $R = (-\infty, \infty) = \{x \in R : -\infty < x < \infty\}$ *(ilimitado)*

126 Definição. *(Intervalo fechado) Intervalo fechado em R é um conjunto da forma $[a, b]$ onde a e b são números reais, sendo que a pode ser -∞ se b for bem determinado e b pode ser $+\infty$ se a for bem determinado. Tem sentido escrever um intervalo fechado na forma $[a, a]$.*

76 Exemplo. *(Intervalos fechados)*

① $[3, 10] = \{x \in R : 3 \leq x \leq 10\}$ *(limitado)*

② $[3, \infty) = \{x \in R : 3 \leq x < \infty\}$ *(ilimitado)*

③ $(-\infty, 10] = \{x \in R : -\infty < x \leq 10\}$ *(ilimitado)*

127 Definição. *(Medida de um intervalo) Se as extremidades de um intervalo J são os números a e b, com $a < b$, definimos a medida do intervalo J por $m(J) = b - a$.*

128 Definição. *(Intervalos encaixantes decrescentes) Uma coleção de intervalos encaixantes decrescentes é uma coleção $\{I_n\}_{n\in N}$ não vazia de intervalos reais tal que $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in N$. Para cada $n \in N$: $m(I_{n+1}) \leq m(I_n)$.*

77 Exemplo. *Intervalos encaixantes.*

① *A coleção de intervalos fechados $I_n = [-1/n, 2+1/n]$. Para cada $n \in N$: $m(I_n) = 2+2/n$. O intervalo aberto $I = (0, 2)$ está contido em todos os intervalos I_n.*

② *A coleção de intervalos fechados $J_n = [-1/n, 1/n]$. Para cada $n \in N$: $m(J_n) = 2/n$. O conjunto $\{0\} \subset J_n$ para todo $n \in N$.*

③ *A coleção de intervalos abertos $K_n = (-1/n, 1/n)$. Para cada $n \in N$: $m(K_n) = 2/n$. O conjunto $\{0\} \subset K_n$ para todo $n \in N$.*

④ *A coleção de intervalos abertos $U_n = (0, 1/n)$. Para cada $n \in N$: $m(U_n) = 1/n$. Não existe qualquer número real que pertença a todos os intervalos U_n.*

99 Teorema. *(Intervalos encaixantes) Seja $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma coleção não vazia de intervalos fechados encaixantes cuja seqüência das medidas $m(I_n)$ dos intervalos converge para 0. Então, a interseção de todos os intervalos I_n é formada por exatamente um número real.*

Demonstração. Seja a coleção $C = \{[a_n, b_n], a_n \leq b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como esta é uma coleção C é não vazia e formada por intervalos fechados encaixantes (decrescentes), segue que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n < b_n \leq ... \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

O conjunto $A = \{a_n : n \in N\}$ das extremidades à esquerda dos intervalos da coleção C é limitado superiormente por b_1 e o conjunto $B = \{b_n : n \in N\}$ das extremidades à direita da coleção C é limitado inferiormente por a_1, assim existem $p = \inf(B)$ e $q = \sup(A)$.

Como nenhum elemento de A pode ser maior que algum elemento de B, então $p \leq q$. Para todo intervalo I_n, segue que $a_n \leq p \leq q \leq b_n$ assim $[p, q] \subset [a_n, b_n]$, logo

$$m([p, q]) = q - p \leq m(I_n) = b_n - a_n$$

Como $m(I_n) = b_n - a_n \to 0$, segue pelo teorema da compressão (sanduíche) que $m([p, q]) = 0$. Desse modo, $p = q$ e garantimos que existe um único ponto em todos estes intervalos fechados e limitados. □

Exercício importante: Utilize o Teorema dos intervalos encaixantes para demonstrar que o intervalo fechado $[0, 1]$ é não-enumerável (demonstração de Cantor) e então conclua que o conjunto R dos números reais também é não-enumerável.

VII.2. Conceitos topológicos

129 Definição. *(Vizinhança de um ponto) Seja $x \in R$. Um conjunto $V \subset R$ é uma vizinhança de x se existe um intervalo aberto (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset V$.*

78 Exemplo. *Os conjuntos $V = (-1, 2]$ e $W = (-1, 1)$ são vizinhanças do ponto $x = 0$, pois V e W são conjuntos que contêm intervalos abertos contendo $x = 0$.*

130 Definição. *(Ponto interior) Seja $A \subset R$. Um ponto p é ponto interior de A se existe um intervalo aberto $I_p = (p - r, p + r)$ inteiramente contido em A. É necessário que $r > 0$. O interior de um conjunto A, denotado por A° é o conjunto de todos os pontos interiores de A.*

79 Exemplo. *Pontos interiores.*

① *3, π e 4 são pontos interiores de (2,5).*

② *os números 2, 5 e 8 não são pontos interiores nem de (2,5), nem de (2,5].*

131 Definição. *(Interior de um conjunto) Seja A um subconjunto da reta real. O interior do conjunto A, denotado por A° é o conjunto de todos os pontos interiores de A.*

55 Observação. *O interior de um conjunto A é a reunião de todos os conjuntos U que possuem pontos interiores de A, ou seja*

$$A^\circ = \bigcup_{U \subset A} U \qquad (U \text{ aberto})$$

80 Exemplo. *O conjunto* $(2, 5)$ *é o interior dos conjuntos:* $(2, 5)$, $(2, 5]$, $[2, 5)$ *e* $[2, 5]$

100 Teorema. *Se A e B são subconjuntos da reta real, então:*

1. $A^\circ \subset A$.

   Demonstração. Se $x \in A^\circ$, então existe um intervalo $I_x = (x - r, x + r)$ tal que $x \in I_x \subset A$, logo $x \in A$. □

2. *Se $A \subset B$ então $A^\circ \subset B^\circ$.*

   Demonstração. Se $x \in A^\circ$, então existe um intervalo $I_x = (x - r, x + r)$ tal que $x \in I_x \subset A$. Como $A \subset B$, então $x \in I_x \subset B$ e segue que $x \in B^\circ$. □

3. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

   Demonstração. Como $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$, segue pelo ítem anterior que, $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$ e $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ e temos que $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.
   Mostraremos agora que $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$. Se $x \in A^\circ \cap B^\circ$, então existe um intervalo $I_x = (x - r, x + r)$ tal que $x \in I_x \subset A \cap B$, logo $x \in I_x \subset A$ e $x \in I_x \subset B$, garantindo que $x \in A^\circ$ e $x \in B^\circ$ e segue que $x \in A^\circ \cap B^\circ$. □

4. *Se $A \subset A^\circ$ então $A = A^\circ$.*

   Demonstração. Exercício para casa. □

VII.3. Conjuntos abertos

132 Definição. *(Conjunto aberto) Um conjunto $A \subset R$ é aberto em R, se todos os seus pontos são pontos interiores, ou seja, A é aberto em R se, para cada $x \in A$, existe um intervalo aberto $I_x = (x - r, x + r)$ tal que $x \in I_x \subset A$.*

56 Observação. *O interior de um conjunto A é o "maior" conjunto aberto contido em A, no sentido que a palavra "maior" com aspas significa que o interior de A é o conjunto que contém todos os conjuntos abertos U contidos em A ou seja*

$$A^\circ = \bigcup_{U \subset A} U \qquad (U \text{ aberto})$$

101 Teorema. *Seja $A \subset R$. A e aberto se, e somente se, $A \subset A^\circ$.*

57 Observação. *Se existe um ponto de um conjunto que não seja ponto interior, o conjunto não é aberto.*

81 Exemplo. *(Conjuntos abertos)*

① $A = (3, 10)$ *é um conjunto aberto.*

② $B = (3, 10]$ *não é um conjunto aberto.*

③ $C = (3, 10) \cup (10, 15)$ *é um conjunto aberto.*

④ $D = (3, 10) \cup [10, 15]$ *não é um conjunto aberto.*

⑤ R *é um conjunto aberto pois todo ponto de R é um ponto interior.*

⑥ *O conjunto vazio é aberto pois não possui ponto que não seja interior.*

102 Teorema. *Propriedades dos conjuntos abertos.*

1. *O conjunto vazio e R são conjuntos abertos em R.*
2. *A reunião de qualquer quantidade de conjuntos abertos em R é um aberto em R.*
3. *A interseção de um número finito de conjuntos abertos em R é um aberto em R.*

82 Exemplo. *Conjuntos abertos.*

① *Para cada $n \in N$, os conjuntos $A_n = (-n, n)$ são abertos em R, a reunião deles é um conjunto aberto, a interseção de qualquer quantidade deles é um conjunto aberto.*

② *Para cada $n \in N$, os conjuntos $A_n = (-1/n, 1/n)$ são abertos em R, a reunião desses conjuntos é um conjunto aberto, a interseção finita deles é um conjunto aberto mas a interseção infinita deles é o conjunto $\{0\}$ que não é um conjunto aberto.*

VII.4. Conjuntos fechados

133 Definição. *(Conjunto fechado) Um conjunto $F \subset R$ é fechado se o seu complementar F^c é aberto.*

83 Exemplo. *(Conjuntos fechados)*

① $A = [3, 10]$ *é um conjunto fechado.*

② $B = (3, 10]$ *não é um conjunto fechado.*

③ $C = [3, 10) \cup [10, 15]$ *é um conjunto fechado.*

④ $D = (3, 10) \cup [10, 15]$ *não é um conjunto fechado.*

⑤ *O conjunto R é fechado.*

⑥ *O conjunto vazio é fechado pois o seu complementar é aberto.*

103 Teorema. *(Propriedades dos conjuntos fechados)*

1. *O conjunto vazio e R são conjuntos fechados em R.*
2. *A reunião de um número finito de conjuntos fechados em R é um fechado em R.*
3. *A interseção de qualquer número de conjuntos fechados em R é um fechado em R.*

84 Exemplo. *(Conjuntos fechados)*

① *Para cada* $n \in N$*, os conjuntos da forma* $A_n = [-n, n]$ *são fechados em R, a reunião finita deles é um conjunto fechado, a interseção qualquer deles é um conjunto fechado.*

② *Para cada* $n \in N$*, os conjuntos da forma* $A_n = [-1/n, 1/n]$ *são fechados em R, a reunião finita desses conjuntos é um conjunto fechado, a interseção qualquer deles é um conjunto fechado, mesmo a interseção infinita deles que é o conjunto fechado* $\{0\}$

134 Definição. *(Ponto de aderência) Um ponto p é ponto de aderência de um subconjunto A da reta real se, TODO intervalo real da forma* $I_p = (p - r, p + r)$ *possui algum ponto de A.*

85 Exemplo. *(Pontos de aderência)*

① *Todos os pontos de* $(2, 5)$ *são pontos de aderência de* $(2, 5)$*.*

② 2 *e* 5 *não pertencem a* $(2, 5)$ *mas são pontos de aderência de* $(2, 5)$*.*

③ *Todos os pontos de* $[2, 5]$ *são pontos de aderência de* $[2, 5]$*.*

④ 2 *e* 5 *são pontos de aderência de* $[2, 5]$ *e pertencem a* $[2, 5]$*.*

135 Definição. *(Aderência de um conjunto) Seja A um subconjunto da reta real. O conjunto de todos os pontos de aderência de A, recebe o nome de aderência de A ou fecho de A e é denotado por* $\overline{A}$*.*

58 Observação. *O fecho ou aderência de um conjunto A é o "menor" conjunto fechado contendo A, no sentido que esta palavra "menor" com aspas significa que o fecho de A está contido em todos os conjuntos fechados F contendo A, ou seja,*

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F} F \qquad (F \text{ fechado})$$

86 Exemplo. *O conjunto* $[2, 5]$ *é o fecho dos conjuntos:* $(2, 5)$*,* $(2, 5]$*,* $[2, 5)$ *e* $[2, 5]$*.*

104 Teorema. *Se A e B são subconjuntos da reta real, então:*

1. $A \subset \overline{A}$.

   Demonstração. Se $p \notin \overline{A}$, existe um intervalo $I_p = (p-r, p+r)$ contendo p tal que $I_p \cap A = \emptyset$, assim, $p \notin A$. □

2. *Se $A \subset B$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

   Demonstração. Se $p \in \overline{A}$, então todo intervalo $I_p = (p-r, p+r)$ contendo p possui interseção com o conjunto A, isto é, $I_p \cap A \neq \emptyset$. Como $A \subset B$, então $\emptyset \neq I_p \cap A \subset I_p \cap B$, logo $I_p \cap B \neq \emptyset$, garantindo que $p \in \overline{B}$. □

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Demonstração. Como $A \subset A \cup B$ e $A \subset A \cup B$, então, pelo ítem anterior, segue que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, assim $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Mostraremos que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Se $p \in \overline{A \cup B}$, então todo intervalo $I_p = (p-r, p+r)$ possui interseção com o conjunto $A \cup B$, isto é, $I_p \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, logo $I_p \cap A \neq \emptyset$ ou $I_p \cap B \neq \emptyset$, ou seja, $p \in \overline{A}$ ou $p \in \overline{B}$, isto é, $p \in \overline{A} \cup \overline{B}$. □

4. *Se $\overline{A} \subset A$ então $A = \overline{A}$.*

   Demonstração. Exercício para casa. □

105 Teorema. *Um subconjunto A da reta real é fechado se, e somente se, $\overline{A} \subset A$, isto é, A é fechado se, e somente se, A contém todos os seus pontos de aderência.*

Demonstração. Se A é um conjunto fechado e p um ponto de aderência de A, mostraremos que $p \in A$.

Suponhamos que $p \notin A$. Como p é ponto de aderência de A, todo intervalo I_p deve conter pelo menos um ponto de A. Como A é fechado e estamos assumindo que $p \in A^c$, então existe um conjunto aberto, que é A^c contendo apenas p e este conjunto não tem interseção com A, o que é um absurdo. Concluímos então que $p \in A$.

Reciprocamente, vamos supor que $A \supset \overline{A}$ e mostrar que A é fechado, ou equivalentemente, que A^c é aberto, o que garante que $A^c \subset \overline{A}^c$.

Se $p \in A^c$ então $p \in \overline{A}^c$, o que significa que existe um intervalo I_p que não tem interseção com A, assim:

$$p \in I_p \subset A^c$$

e este fato garante que A^c é um conjunto aberto, isto é, A é fechado. □

136 Definição. *(Ponto de acumulação) Um ponto p é ponto de acumulação de um subconjunto A da reta real se, TODO intervalo real da forma $I_p = (p-r, p+r)$ possui pelo menos algum ponto de A que é* diferente *de p.*

87 Exemplo. *(Pontos de acumulação)*

① -1 *é um ponto de acumulação de* $V = (-1, 1)$ *e também de* $W = [-1, 1)$.

② 0 *é um ponto de acumulação de* $C = \{1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ...\}$, *mas* $0 \notin C$.

③ *Todos os pontos de* $(2, 5)$ *são pontos de acumulação de* $(2, 5)$.

④ 2 *e* 5 *não pertencem a* $(2, 5)$ *mas são pontos de acumulação de* $(2, 5)$.

⑤ *Todos os pontos de [2,5] são pontos de acumulação de* $[2, 5]$.

⑥ 2 *e* 5 *pertencem a* $[2, 5]$ *e são pontos de acumulação de* $[2, 5]$.

137 Definição. *(Ponto isolado) Um ponto p é isolado se p* **não** *é ponto de acumulação de um subconjunto da reta, isto é, existe um intervalo aberto* I_p *contendo apenas o ponto p.*

88 Exemplo. *Pontos isolados versus pontos de acumulação.*

① $1 \in C$ *e é um ponto isolado de* $C = \{1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ...\}$.

② *Todo ponto do conjunto* $C = \{1/n : n \in N\}$ *é um ponto isolado.*

③ *Um conjunto finito só possui pontos isolados, logo não possui pontos de acumulação, como é o caso de* $F = \{a, e, i, o, u\}$.

④ *O conjunto Z dos números inteiros é um conjunto infinito que não têm pontos de acumulação, pois todos os seus pontos são isolados.*

⑤ *Existem conjuntos infinitos que possuem pontos de acumulação, mas estes conjuntos são limitados, como é o caso de* $[a, b]$.

⑥ *Existem conjuntos infinitos que não são limitados e que possuem pontos de acumulação, como é o caso do conjunto R dos números reais.*

106 Teorema. *Um ponto p é ponto de acumulação de um conjunto K, se todo conjunto aberto contendo p, contém infinitos pontos de K.*

Demonstração. Suponhamos que a afirmação seja falsa, isto é, que existe um conjunto aberto contendo p e contendo somente um número finito de elementos p_1, p_2, ..., p_{no} de K que são diferentes de p. As distâncias entre p e cada p_n são positivas, logo tomando

$$r = \min\{|p - p_1|, |p - p_2|, |p - p_3|, ..., |p - p_{no}|\}$$

e o intervalo $(p - \frac{r}{2}, p + \frac{r}{2})$ segue que somente o ponto $p \in K$ pertence a este intervalo, assim, p é um ponto isolado e p não pode ser ponto de acumulação. Provamos assim o resultado desejado. □

107 Teorema. *(Pontos de acumulação são pontos de aderência) Se p é ponto de acumulação de A, então p é ponto de aderência de A, ou seja,* $A' \subset \overline{A}$.

89 Exemplo. *Pontos de aderência e de acumulação.*

① *Todos os pontos de* $(2,5)$ *são pontos de aderência de* $(2,5)$.

② *Todos os pontos de* $(2,5)$ *são pontos de acumulação de* $(2,5)$.

③ *Os pontos* 2 *e* 5 *não pertencem a* $(2,5)$, *assim* $(2,5)$ *não é fechado.*

④ *Todos os pontos de* $[2,5]$ *são pontos de aderência de* $[2,5]$.

⑤ *Todos os pontos de* $[2,5]$ *são pontos de acumulação de* $[2,5]$.

⑥ $[2,5]$ *é fechado pois contém todos os seus pontos de aderência.*

⑦ $[2,5]$ *é fechado pois contém todos os seus pontos de acumulação.*

Exercício

1. Exibir um ponto de aderência de C que não é ponto de acumulação de C.
2. Mostrar que $0 \notin A$ mas 0 é um ponto de acumulação de $A = \{1/n : n \in N\}$.
3. Mostrar que todo número racional é um ponto de aderência do conjunto R.
4. Mostrar que todo número racional é um ponto de acumulação do conjunto R.
5. Usando o conjunto Z dos números inteiros, mostrar que nem todo conjunto infinito possui pontos de acumulação em R.

138 Definição. *(Derivado de um conjunto) Derivado de A, denotado por A', é o conjunto de todos os pontos de acumulação de A.*

108 Teorema. *Se A e B são subconjuntos da reta real, então:*

1. $A' \subset \overline{A}$.
2. $A \cup A' = \overline{A}$.
3. *Se* $A' \subset A$ *então* $A = \overline{A}$.
4. *A é fechado se, e somente se,* $A' \subset A$.
5. $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$.

109 Teorema. *Um conjunto K é fechado se, e somente se, K contém todos os seus pontos de acumulação.*

Demonstração. (Direta) Vamos assumir que K é fechado e tomar p um ponto de acumulação de K. Mostraremos que p pertence ao conjunto K. Se $p \notin K$, então $p \in K^c$. Como K fechado então K^c é aberto, assim existe um intervalo $(p-r, p+r) \subset K^c$ contendo somente p, logo p é um ponto isolado, e este fato garante que p não pode ser ponto de acumulação de K, contrário à hipótese. □

Demonstração. (Recíproca) Vamos assumir que K contém todos os seus pontos de acumulação e mostraremos que K é fechado. Se $p \in K^c$, então p não pode ser ponto de acumulação de K, assim existe um intervalo aberto $(p-\delta, p+\delta) \subset K^c$, garantindo que K^c é aberto, ou seja K é fechado. □

110 Teorema. *Um ponto p é ponto de acumulação de um conjunto K, se existe uma seqüência de pontos* $(x_n) \subset K$ *tal que* $\lim x_n = p$.

Demonstração. Se p é ponto de acumulação de K, então, pelo Teorema anterior, todo conjunto aberto contendo p, contém infinitos pontos de K. Em particular, para cada intervalo aberto (conjunto aberto) $I_n = (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n})$ podemos escolher números $p_n \in I_n$. Assim temos uma seqüência $(p_n) \subset K$ tal que

$$p - \frac{1}{n} < p_n < p + \frac{1}{n}$$

logo, $p = \lim p_n$. □

111 Teorema. *(Bolzano-Weierstrass) Todo conjunto infinito e limitado de números reais possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja K um conjunto na reta real que é infinito e limitado. Como K é limitado, existem um intervalo da forma $[a, b]$ contendo K.

Calculamos o ponto médio $m = (a + b)/2$ dos extremos do intervalo $[a, b]$ e decompomos este intervalo em dois subintervalos com a mesma medida:

$$[a, b] = [a, m] \cup [m, b]$$

Pelo menos um deles deve conter um conjunto infinito de elementos de K. Identificamos este intervalo com $[a_1, b_1]$.

Calculamos o ponto médio $m_1 = (a_1 + b_1)/2$ dos extremos do intervalo $[a_1, b_1]$ e decompomos este intervalo em dois subintervalos com a mesma medida do anterior:

$$[a_1, b_1] = [a_1, m_1] \cup [m_1, b_1]$$

Pelo menos um deles deve conter um conjunto infinito de elementos de K. Identificamos este intervalo com $[a_2, b_2]$.

Continuamos este processo, para obter uma coleção $[a_n, b_n]$ de intervalos encaixantes com as seguintes características:

1. $b_n - a_n = (b - a)/2^n$
2. $[a_n, b_n]$ contém infinitos elementos de K.
3. $a \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n < b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1 \leq b$.

Como todos os intervalos $[a_n, b_n]$ estão contidos em $[a, b]$, as duas coleções com as extremidades a_n e b_n desses intervalos, formam dois conjuntos

$$A = \{a_n : n \in N\}, \qquad B = \{b_n : n \in N\}$$

O conjunto A é limitado superiormente por b e o conjunto B é limitado inferiormente por a, assim, A possui supremo e B possui ínfimo.

O Teorema dos intervalos encaixantes, garante que $\sup(A) = \inf(B)$, pois

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0$$

e segue que $\lim b_n = \lim a_n$.

Com a notação $p = \sup(A) = \inf(B)$, mostraremos que p é um ponto de acumulação de K.

Pela definição de supremo de a, dado um $\varepsilon > 0$, existe $a_{m_1} \in A$ tal que

$$p - \varepsilon < a_{m_1} \leq p$$

Pela definição de ínfimo de B, dado o mesmo $\varepsilon > 0$, existe $b_{m_2} \in B$ tal que

$$p \leq b_{m_2} < p + \varepsilon$$

Como a seqüência de intervalos $[a_n, b_n]$ é encaixante, podemos garantir que existe um $m \in N$ de modo que $m > m_1$ e $m > m_2$, tal que

$$p - \varepsilon < a_m < b_m < p + \varepsilon$$

Como $b_m - a_m = (b-a)/2^m$, então tomando m suficientemente grande para que $(b-a)/2^m < \varepsilon$, garantimos as desigualdades acima.

Assim

$$p - \varepsilon < a_m \leq p \leq b_m = a_m + (b-a)/2^m < p + \varepsilon$$

Segue que o intervalo $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ contém o intervalo $[a_m, b_m]$ que possui infinitos elementos de K.

Estas últimas desigualdades podem ser simplificadas na forma:

$$a_m \leq p \leq a_m + (b-a)/2^m$$

assim $p = \lim a_m$, logo p é um ponto de acumulação de K. □

VII.5. Conjuntos compactos

139 Definição. *(Compacto) Um conjunto K na reta real é compacto se K é fechado e limitado.*

140 Definição. *(Cobertura) Uma cobertura (aberta) para um conjunto K é uma coleção de conjuntos (abertos) $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ onde Λ é um conjunto de índices e além disso*

$$K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$$

141 Definição. *(Subcobertura) Uma subcobertura (aberta) de uma cobertura $\{C_\lambda\}$ para um conjunto K é uma coleção de subconjuntos (abertos) de $\{C_\lambda\}$ que cobre K.*

112 Teorema. *(Heine-Borel) Se $\{C_\lambda\}$ é uma cobertura aberta de um conjunto K fechado e limitado, então existe uma subcobertura finita aberta de $\{C_\lambda\}$ que ainda cobre K.*

113 Teorema. *(Compacto através de seqüência) Um conjunto K é compacto se, e somente se, TODO subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação em K.*

Demonstração. (Direta) Se K compacto e S um subconjunto infinito de K, mostraremos que S possui um ponto de acumulação no conjunto K. Se K é compacto então K é limitado e S também é limitado como subconjunto de K. Como S é infinito e limitado, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, segue que S possui um ponto de acumulação p e desse modo este ponto p é um ponto de aderência de S, isto é, $p \in \overline{S}$. Como $S \subset K$, então $\overline{S} \subset \overline{K}$ e como K é fechado, então $\overline{S} = K$, assim $p \in K$. □

Demonstração. (Recíproca) Agora, assumiremos que, todo subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação em K e mostraremos que: (a) K é limitado e (b) K é fechado.

Prova que K é limitado: Se K não é limitado superiormente (ou inferiormente), construímos uma seqüência $f = f(n)$ de pontos em K definida por

$$f(1) > 1, \qquad f(n+1) > 1 + f(n)$$

Como todos os termos desta seqüência são pontos isolados, o conjunto $C = f(n)$ não tem pontos de acumulação. Acontece que o conjunto $f(N)$ é infinito e não contém pontos de acumulação como informa a hipótese, assim, concluímos que o conjunto K deve ser limitado.

Prova que K é fechado: Se p é um ponto de acumulação do conjunto K então, pelo Teorema (2), todo conjunto aberto contendo p, possui infinitos pontos de K. Como um caso particular, tomando $\varepsilon_n = 1/n$, segue que existem elementos $y_n \in K$ tal que

$$y_n \in (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n})$$

Construímos assim um conjunto com tais elementos y_n:

$$D = \{y_n \in K : |y_n - p| < 1/n,\ n \in N\}$$

O conjunto D é um subconjunto infinito de K tendo o ponto de acumulação p. Vamos mostrar que este ponto de acumulação é único para este conjunto D. Se existe um número real $r \neq p$ com a distância $d = |r - p|/2$, então, como $d > 0$ e R é um corpo arquimediano, existe pelo menos um número natural n_0 tal que $1/n_0 < d$ e para todo $n > n_0$ segue que $1/n < d$.

Pela construção do conjunto D, para estes $n \in N$ segue que

$$|y_n - p| < 1/n < d$$

garantindo que $d < 2d - |y_n - p|$ e pela desigualdade triangular:

$$2d = |r - p| = |r - y_n + y_n - p| \leq |r - y_n| + |y_n - p|$$

assim

$$d < |r - p| - |y_n - p| \leq |y_n - r|$$

garantindo que existem infinitos pontos fora do intervalo $(r - d, r + d)$, assim existe apenas um número finito de elementos dentro deste intervalo $(r-d, r+d)$, garantindo que tais pontos não podem ser pontos de acumulação do conjunto D. Temos então que p é o único ponto de acumulação de D, garantindo que $p \in K$.

Concluímos que todos os pontos de acumulação de K devem pertencer a K e segue que K é fechado. Concluímos finalmente que K é um conjunto compacto. □

114 Teorema. *Todo conjunto compacto na reta assume os seus valores extremos (máximo e mínimo).*

Demonstração. (K compacto e finito) Se K é compacto e finito, então K é da forma $K = \{k_1, k_2, ..., k_n\}$. Assim, existem $k_i, k_s \in K$ tal que $k_i = \min(K)$ e $k_s = \max(K)$. □

Demonstração. (K compacto e infinito) Se K é compacto (fechado e limitado) e infinito, então K é limitado superiormente, assim, existe $s = \sup(K)$. Pela definição de supremo, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in K$ tal que

$$s - \varepsilon < k_0 \leq s$$

Assim, para cada $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$, existe $k_n \in K$ tal que

$$s - \frac{1}{n} < k_n \leq s$$

e como $s \leq s + \frac{1}{n}$ para todo $n \in N$, segue que

$$s - \frac{1}{n} < k_n \leq s \leq s + \frac{1}{n}$$

que é equivalente a

$$|k_n - s| \leq \frac{1}{n}$$

Desse modo, $s = \lim k_n$ e segue que s é um ponto de acumulação de K, logo s é ponto de aderência de K, assim $s \in \overline{K}$. Como K é fechado, temos que $\overline{K} = K$, garantindo que $s \in K$. Concluímos que

$$s = \sup(K) = \max(K)$$

O mesmo argumento pode ser usado para mostrar que existe $i \in K$ tal que

$$i = \inf(K) = \min(K)$$

□

Exercício:

1. Exibir subconjuntos da reta que não são completos.
2. Explicitar a relação entre conjuntos compactos e completos de R?
3. Exibir as formas gerais que pode assumir um conjunto completo na reta real.

Capítulo VIII

SÉRIES NUMÉRICAS REAIS

"Ai dos que decretam leis injustas; e dos escrivães que escrevem perversidades; para privarem da justiça os necessitados, e arrebatarem o direito aos aflitos do meu povo; para despojarem as viúvas e roubarem os órfãos! Mas que fareis vós no dia da visitação, e na desolação, que há de vir de longe? A quem recorrereis para obter socorro, e onde deixareis a vossa riqueza? Nada mais resta senão curvar-vos entre os presos, ou cair entre os mortos. Com tudo isso não se apartou a sua ira, mas ainda está estendida a sua mão." A Bíblia Sagrada, Isaías 10:1-4

VIII.1. Series reais

142 Definição. *(Série numérica real) Seja $a : N \to R$ uma seqüência de números reais cuja imagem é dada por $a(N) = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$. Uma série de números reais é uma soma infinita dos termos de $a = a(N)$, indicada por qualquer uma das formas abaixo:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

90 Exemplo. *Algumas séries de números reais são:*

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} k!2^k$

VIII.2. Séries convergentes

143 Definição. *(Seqüência das reduzidas) Seja $a : N \to R$ uma seqüência de números reais cuja imagem seja dada por $a(N) = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$. A partir desta é possível definir uma* **outra** *seqüência de números, indicada por*

$$(S_k)_{k\in N} = (S_n) = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...\}$$

denominada a seqüência das reduzidas (somas parciais) da série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ definida por:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ ... &= ... \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \end{aligned}$$

Em geral, a n-ésima reduzida (soma parcial) é dada por:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

144 Definição. *(Soma de uma série convergente real) Uma série de números reais $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente para um número real S se a seqüência $\{S_n\}$ das reduzidas é convergente para S, isto é $S_n \to S$ quando $n \to \infty$. Quando isto acontece, diz-se que esta série é convergente para S que é a soma da série e escrevemos:*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Quando a série não é convergente, diz-se que a série é divergente.

O processo para obter a soma S é determinar a seqüência das reduzidas S_n e mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

91 Exemplo. *Para mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, devemos obter as n-ésimas reduzidas, dadas por:*

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 && = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \\ S_2 &= (a_1) + a_2 && = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ S_3 &= (a_1 + a_2) + a_3 && = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \\ ... &\quad \textit{parece que} && = ... \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n && = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Para completar o exemplo, demonstre que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \qquad e \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

145 Definição. *(Resto de ordem n de uma série) Define-se o resto de ordem n de uma série de números reais* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *por*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

e este resto é entendido da seguinte forma: Se a série acima converge para o número S, então:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

logo $S = S_n + R_n$ *e a seqüência dos restos convergirá para* 0*, pois:*

$$R_n = S - S_n \to 0$$

115 Teorema. *Se* $a_k \geq 0$ *então, ou a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge ou* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

92 Exemplo. *(A importantíssima série geométrica) Uma das mais importantes séries numéricas reais é a série definida para cada* $|a| < 1$ *por:*

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$$

Com a troca $a = -b$*, obtemos:*

$$\frac{1}{1+b} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, b^k$$

Com a troca $b = c^2$*, obtemos:*

$$\frac{1}{1-c^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k}$$

59 Observação. *Existe um interessante método para obter a divisão longa de um número por uma expressão polinomial. Você poderá obter mais informações no link Seqüências de Fibonacci em* `http://mat.uel.br/matessencial`

116 Teorema. *(Linearidade de séries convergentes) Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *são séries convergentes e* $\mu \in R$*, então*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} (\mu a_k) = \mu \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

VIII.3. Critérios de convergência de séries

117 Teorema. *(Critério de Cauchy para séries) Uma série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in N$ *tal que* $|S_m - S_n| < \varepsilon$ *para todos os* $m, n > n_0$*.*

Demonstração. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, então existe um número real S tal que $\lim S_n = S$, que equivale a afirmar que a seqüência (S_n) converge, o que é equivalente a afirmar que, a seqüência (S_n) é de Cauchy. □

118 Teorema. *(Critério do termo geral) Se uma série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é convergente, então, o termo geral converge a* 0*, isto é:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Demonstração. Se a série converge, então pelo critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que se $m > n > n_0$ então

$$|S_m - S_n| < \varepsilon$$

Se escolhermos $m = n + 1$, obteremos

$$a_m = S_m - S_{m-1} = S_m - S_n$$

o que garante que $|a_m| < \varepsilon$ e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

□

3 Corolário. *(do critério do termo geral) Se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, então a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é divergente.*

146 Definição. *(Convergência condicional) Uma série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge condicionalmente se a série converge, mas a série dos valores absolutos* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *não converge.*

93 Exemplo. *A série* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ *converge, mas a série* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *não converge.*

147 Definição. *(Convergência absoluta) Uma série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge absolutamente se a série dos valores absolutos* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *é convergente.*

94 Exemplo. *A série* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ *converge absolutamente e a série* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *também converge.*

119 Teorema. *(Convergência absoluta) Se uma série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é absolutamente convergente, então ela é convergente.*

120 Teorema. *(Critério da comparação de séries) Se para todo* $n \in N$: $|a_n| \leq b_n$ *e a série* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge, então a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também converge.*

Demonstração. Sejam $S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$ e $T_N = \sum_{k=1}^{N} b_k$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, então a seqüência (T_N) é de Cauchy, logo

$$|T_M - T_N| = |\sum_{k=N+1}^{M} b_k| \to 0$$

e desse modo

$$|S_M - S_N| = |\sum_{k=N+1}^{M} a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{M} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{M} b_k \to 0$$

garantindo que a seqüência (S_N) é de Cauchy, logo, a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é absolutamente convergente, logo convergente. □

121 Teorema. *(Critério da razão) Seja a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *tal que* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \in N$ *e* $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. *Assim,*

1. *Se* $L < 1$, *a série converge;*
2. *Se* $L > 1$, *a série diverge;*
3. *Se* $L = 1$, *o critério não garante a convergência da série.*

Demonstração. Suponhamos que $L < 1$. Tomemos $r = \frac{1}{2}(1 + L)$ e $b_n = |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Como por hipótese $b_n \to L$, então existe um $n_0 \in N$ tal que $0 < b_n < r < 1$ para todo $n > n_0$, assim

$$R_{n_0} = |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + ... + |a_{n_0+k}| + ...$$

e pondo o termo $|a_{n_0+1}|$ em evidência, teremos:

$$R_{n_0} = |a_{n_0+1}|(1 + \frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} + \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+1}|} + ... + \frac{|a_{n_0+k}|}{|a_{n_0+1}|} + ...)$$

expressão que pode ser escrita na forma:

$$R_{n_0} = |a_{n_0+1}|(1 + \frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} + \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|}.\frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} + \frac{|a_{n_0+4}|}{|a_{n_0+3}|}.\frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|}.\frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} + ...)$$

ou ainda na forma

$$R_{n_0} = |a_{n_0+1}|(1 + b_{n_0+1} + b_{n_0+1}.b_{n_0+2} + b_{n_0+1}.b_{n_0+2}.b_{n_0+3} + ...)$$

e usando o fato inicial que $0 < b_n < r < 1$, segue que

$$R_{n_0} \leq |a_{n_0+1}|(1 + r + r^2 + r^3 + ...)$$

e a soma dentro dos parênteses é uma soma geométrica, logo

$$R_{n_0} \leq |a_{n_0+1}|\frac{1}{1-r} < \infty$$

e a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutamente convergente (convergente).

Se tomarmos $L > 1$, teremos que para n suficientemente grande:

$$|a_n| \leq |a_{n+1}| \leq |a_{n+2}| \leq |a_{n+3}| \leq ...$$

e como esses termos crescem em valor absoluto e nenhum deles é igual a zero, segue que a série dada é divergente.

Se $L = 1$, podemos exibir séries convergentes e divergentes com esta propriedade. □

122 Teorema. *(Critério para séries alternadas) Consideremos uma série alternada:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\, a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + ...$$

Esta série é convergente, se valem as três características:

1. $a_k > 0$ *para todo* $k = 1, 2, 3, ...$;
2. $a_{k+1} \leq a_k$ *para todo* $k = 1, 2, 3, ...$;
3. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Demonstração. Tomemos a n-ésima reduzida da série como:

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + ... + a_n$$

Observamos que $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 - a_2 < S_1$ e $S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = S_1 - (a_2 - a_3) < S_1$, logo

$$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = S_2 + a_3 > S_2$$

o que nos garante até o momento que:

$$S_2 < S_3 < S_1$$

Temos também que

$$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = S_1 - (a_2 - a_3 + a_4) < S_1$$

mas também temos que $S_4 = S_3 - a_4 < S_3$, garantindo até o momento que

$$S_2 < S_4 < S_3 < S_1$$

Se continuarmos este processo, obteremos:

$$S_2 < S_4 < S_6 < S_5 < S_3 < S_1$$

e logo após:

$$S_2 < S_4 < S_6 < S_8 < S_7 < S_5 < S_3 < S_1$$

A seqüência de índices pares $\{S_{2k}\}$ é crescente e limitada quando $k \to \infty$ e a seqüência de índices ímpares $\{S_{2k-1}\}$ é decrescente e limitada quando $k \to \infty$. Assim, estas seqüências convergem, respectivamente, para S_p e S_i, isto é:

$$S_p = \lim_{k\to\infty} S_{2k} \qquad \text{e} \qquad S_i = \lim_{k\to\infty} S_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k+1}$$

Como $a_{2k+1} = S_{2k+1} - S_k$, o critério do termo geral garante que:

$$0 = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} - \lim_{k\to\infty} S_k = S_i - S_p$$

garantindo que $S_i = S_p = S$. Concluímos que a série estudada converge para S. □

123 Teorema. *(Critério da raiz) Seja a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|}$. *Assim*

1. *se* $L < 1$, *a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge;*
2. *se* $L > 1$, *a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge;*
3. *se* $L = 1$, *o critério não garante a convergência.*

Demonstração. Suponhamos que $L < 1$. Pela definição de L, podemos escolher $r < 1$ e $k_0 \in N$ tal que para todo $k > k_0$:

$$\sqrt[n]{|a_k|} < r$$

Dessa forma, para $k > k_0$, teremos que:

$$|a_k| < r^k$$

e

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \sum_{k=n_0+1}^{\infty} r^n = \frac{r^{n_0+1}}{1-r} < \infty$$

Concluímos que a série sob análise é absolutamente convergente, logo também convergente.
Se $L > 1$, então para k suficiente grande $|a_k| > 1$, assim $\lim_{k\to\infty} |a_k| \geq 1$ logo pelo critério do termo geral, a série é divergente. □

VIII.4. Operações com séries reais

148 Definição. *(Igualdade de séries reais) Sejam as séries reais* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$*. Estas séries são iguais se, para todo* $k = 0, 1, 2, 3, ...$ *temos que* $a_k = b_k$*.*

149 Definição. *(Produto de Cauchy) O produto de Cauchy entre as séries reais* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *é uma outra série de números reais* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *tal que para cada* $k = 0, 1, 2, 3, ...$*, se tem que:*

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0$$

Exercício: Usando o produto de Cauchy, eleve ao quadrado a série de números reais:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Exercício: Usando o produto de Cauchy, multiplique as séries de números reais:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

124 Teorema. *(Convergência do produto de séries reais) Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *são séries convergentes, então a série-produto (de Cauchy) também será convergente.*

Exercício: Exiba exemplos de duas séries divergentes cujo produto de Cauchy delas seja uma série convergente.

Capítulo IX

LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES REAIS

"O que atende à instrução está na vereda da vida; mas o que rejeita a repreensão anda errado. O que encobre o ódio tem lábios falsos; e o que espalha a calúnia é um insensato. Na multidão de palavras não falta transgressão; mas o que refreia os seus lábios é prudente. A língua do justo é prata escolhida; o coração dos ímpios é de pouco valor. Os lábios do justo apascentam a muitos; mas os insensatos, por falta de entendimento, morrem." A Bíblia Sagrada, Provérbios 10:17-21

IX.1. Limites de funções reais

150 Definição. *(Limite de uma função em um ponto) Seja $f : D \to R$ e a um ponto de acumulação de D. Um número real L é o limite de $f = f(x)$ no ponto $x = a$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$. Se o limite L existe, usamos a notação

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

60 Observação. *Detalhes sobre a definição de limite.*

1. *A notação $\delta = \delta(\varepsilon)$ significa que para cada ε que exibido, deve ser possível construir um número δ que talvez seja diferente mas dependente do ε.*
2. *A função $f = f(x)$ não precisa estar definida em $x = a$, razão pela qual usamos o símbolo $0 < |x - a| < \delta$.*
3. *O conceito de limite de uma função estende o conceito de limite de uma seqüência real.*
4. *O limite de uma função $f = f(x)$ no ponto $x = a$ é obtido pelo comportamento da função f nas vizinhanças do ponto, considerando os valores de x à esquerda e à direita de a.*

95 Exemplo. *Uma função simples. Seja $f : R \to R$ definida por $f(x) = x + 1$. Para calcular o limite de f no ponto $x = 1$, basta analisar o comportamento desta função nas proximidades deste ponto e é fácil observar que*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$$

Realmente, dado $\varepsilon > 0$, podemos construir $\delta = \varepsilon > 0$ tal que se $0 < |x-1| < \delta$, então

$$|f(x) - 2| = |(x+1) - 2| = |x-1| < \delta = \varepsilon$$

96 Exemplo. *Uma função racional. Seja $f : R - \{1\} \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Esta função não está definida no ponto $x = 1$, mas para valores de $x \neq 1$, construiremos duas tabelas para mostrar alguns valores que a função f assume nas vizinhanças de $x = 1$, tanto à direita como à esquerda de $x = 1$.*

$x > 1$	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	...	$x \to 1$
$f(x)$	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	...	$f(x) \to 2$

$x < 1$	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999	...	$x \to 1$
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999	...	$f(x) \to 2$

Quando $x \neq 1$, é possível realizar a divisão para obter a função $f_d(x) = x + 1$.

As funções f e f_d coincidem para todo $x \neq 1$ assim, seria melhor definir a função original com $f(1) = 2$, através da função f_d obtida na divisão. Podemos mostrar que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Realmente, dado $\varepsilon > 0$, é possível construir $\delta = \varepsilon > 0$ tal que se $0 < |x-1| < \delta$, então

$$|f(x) - 2| = |\frac{x^2-1}{x-1} - 2| = |(x+1) - 2| = |x-1| < \delta = \varepsilon$$

97 Exemplo. *Usando a definição de limite. Para a função $f : R \to R$ definida por $f(x) = 3x + 7$, mostraremos que $\lim_{x \to 5} f(x) = 22$. Usando a definição, temos que dado $\varepsilon > 0$, podemos construir $\delta = \varepsilon/3 > 0$ tal que se $0 < |x-5| < \delta$ então*

$$|f(x) - 22| = |(3x+7) - 22| = 3|x-5| < 3\delta = \varepsilon$$

98 Exemplo. *Usando a definição de limite. Para $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$, mostraremos que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. Aqui, a construção de δ é muito mais complicada. Como:*

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|.|x+2|$$

poderíamos assumir $\varepsilon > 0$ e construir $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x-2| < \delta_1$ então:

$$|f(x) - 4| < \delta_1 |x+2| < \delta_1 (|x| + 2)$$

Se para nós faltasse o rigor e tomássemos

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{|x| + 2}$$

resolveríamos o nosso problema, mas acontece que $x \in R$, o que significa que este δ_1 depende de ε mas também depende de x. Esta não é uma boa escolha.
Devemos trabalhar com desigualdades e considerar que estamos calculando o limite de uma

função nas vizinhanças de $x = 2$. *Trabalhando em um pequeno conjunto* $0 < |x-2| < 1$, *ficariam mais fáceis as nossas estimativas e poderíamos garantir que neste caso* $1 < x < 3$, *logo* $|x| > 1$ *e assim*

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{|x|+2} < \frac{\varepsilon}{1+2} = \frac{\varepsilon}{3}$$

Demonstramos então que dado $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \min\{1, \delta_1\}$ *sendo* $\delta_1 = \varepsilon/3$ *tal que se* $0 < |x-2| < \delta$, *então*

$$|f(x) - 4| = |(x-2)(x+2)| < \delta(|x|+2) < 3\delta_1 = \varepsilon$$

Forma alternativa: Dado $\varepsilon > 0$, *podemos construir* $\delta = \varepsilon/5$, *tal que se* $0 < |x-2| < \delta < 1$, *então*

$$|f(x) - 4| = |(x-2)(x+2)| < \delta|x+2|$$

Acontece que, pela desigualdade triangular:

$$|x+2| = |x-2+4| \leq |x-2| + 4 < \delta + 4$$

assim

$$|f(x) - 4| < \delta|x+2| < \delta(\delta+4) = \delta^2 + 4\delta$$

Como $0 < \delta < 1$, *então* $0 < \delta^2 < \delta < 1$, *logo:*

$$|f(x) - 4| < \delta^2 + 4\delta < \delta + 4\delta = 5\delta = \varepsilon$$

125 Teorema. *(Unicidade do limite) Se uma função* $f = f(x)$ *tem limite quando* $x \to a$, *este limite deve ser único, isto é, se* $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ *então* $L_1 = L_2$.

IX.2. Limites laterais

151 Definição. *(Limite lateral à direita) Tomemos* $f : D \to R$ *e a um ponto de acumulação de* D. *Um número real* L_d *é o limite lateral de* $f = f(x)$ *à direita no ponto* $x = a$ *se, dado* $\varepsilon > 0$, *existe um* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que* $|f(x) - L_d| < \varepsilon$ *se* $x \in D$ *e* $a < x < a + \delta$. *Quando este limite lateral à direita* L_d *existe, usamos a notação*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L_d$$

152 Definição. *(Limite lateral à esquerda) Um número real* L_e *é o limite lateral de* $f = f(x)$ *à esquerda no ponto* $x = a$ *se, dado* $\varepsilon > 0$, *existe um* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que* $|f(x) - L_e| < \varepsilon$ *se* $x \in D$ *e* $a - \delta < x < a$. *Quando este limite* L_e *existe, usamos a notação*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = L_e$$

99 Exemplo. *A função* $f : R \to R$ *definida por*

$$f(x) = sinal(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

não possui limite em $x = 0$, embora possua limites laterais neste ponto. Em todos os outros pontos de $R - \{0\}$. Se tomarmos $x \to 0$ com $x > 0$ a função terá o limite:

$$f(0_+) = \lim_{x \to 0+} f(x) = +1$$

Se tomarmos $x \to 0$ com $x < 0$ a função terá o limite

$$f(0_-) = \lim_{x \to 0-} f(x) = -1$$

126 Teorema. *(Unicidade do limite lateral pela direita) Se uma função f tem limite lateral à direita quando $x \to a$, este limite lateral é único.*

127 Teorema. *(Unicidade do limite lateral pela esquerda) Se uma função f tem limite lateral à esquerda quando $x \to a$, este limite lateral é único.*

128 Teorema. *(Limite em função de limites laterais) Seja $f : D \to R$ e a um ponto de acumulação de D à direita de $x = a$ e também à esquerda de $x = a$. isto é, a é um ponto de acumulação de $D \cap (-\infty, a)$ e de $D \cap (a, \infty)$. Então*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

61 Observação. *(Importante) Para mostrar que uma função* **não** *tem limite em um ponto $x = a$, basta mostrar que os dois limites laterais são diferentes, isto é,*

$$f(a_-) = \lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x) = f(a_+)$$

100 Exemplo. *A função característica $K_S : R \to R$ definida por*

$$K_S(x) = \begin{cases} 1 & e \quad x \in S \\ 0 & e \quad x \notin S \end{cases}$$

não possui limite em cada extremidade do conjunto S mas possui limites laterais em todos os pontos de R e podemos mostrar que

$$sinal(x) = K_{(0,\infty)}(x) - K_{(-\infty,0)}(x)$$

IX.3. Limites infinitos

153 Definição. *(Limite +infinito) Seja $f : D \to R$ e a um ponto de acumulação de D. A função f tem limite infinito $(+\infty)$ no ponto $x = a$ se, dado qualquer número real P, existe um $\delta = \delta(P) > 0$ tal que se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > P$.*

154 Definição. *(Limite -infinito) Uma função f tem limite -infinito $(-\infty)$ no ponto $x = a$ se, dado qualquer número real N, existe um $\delta = \delta(N) > 0$ tal que $f(x) < N$ se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$.*

62 Observação. *Para denotar os limites infinitos em $x = a$, escrevemos:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

101 Exemplo. *Seja a função $f : R - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = 1/x$. Neste caso*

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$$

mas não existe $\lim f(x)$ *quando* $x \to 0$.

IX.4. Teoremas sobre limites de funções

155 Definição. *(Função limitada superiormente) Um função f definida sobre um subconjunto S de números reais é limitada superiormente se existe um número $M \in R$ tal que $f(x) \leq M$.*

156 Definição. *(Função limitada inferiormente) Um função f definida sobre um subconjunto S de números reais é limitada inferiormente se existe um número $N \in R$ tal que $N \leq f(x)$.*

157 Definição. *(Função limitada) Um função f definida sobre um subconjunto S de números reais é limitada se existem números reais $M \in R$ e $N \in R$ tal que $N \leq f(x) \leq M$ ou alternativamente, se existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$.*

63 Observação. *(Função ser limitada é diferente de função ter limite) A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = sinal(x)$ é limitada em R mas não tem limite no ponto $x = 0$ e a função $g(x) = x^2$ tem limite em $x = 0$ mas não é limitada em R.*

64 Observação. *Nas situações seguintes, tomaremos D como os domínios das funções envolvidas e $x = a$ um ponto de acumulação de D. Para uma vizinhança de $x = a$ sem o ponto central $x = a$, usaremos a notação*

$$V_{a'} = \{x \in D : 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$$

2 Lema. *(Para o próximo teorema)*

1. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, *então existe uma vizinhança $V_{a'}$ na qual f é limitada.*
2. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$, *então existe uma vizinhança $V_{a'}$ e um número $m > 0$ tal que $|f(x)| \geq m$ para todo $x \in V_{a'}$.*

129 Teorema. *Se existem os limites* $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$, *então valem as propriedades*

1. $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a}(f - g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$.
4. $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x)$, *desde que* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

130 Teorema. *(Limites versus seqüências) Seja $f : D \to R$ e a um ponto de acumulação de D. Assim, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, para toda seqüência $x_n \to a$, com $x_n \in D - \{a\}$ tivermos que $f(x_n) \to L$.*

65 Observação. *Se existem duas seqüências x_n e y_n tal que $x_n \to a$ e $y_n \to a$ mas que $f(x_n) \to L_1$ e $f(y_n) \to L_2$, com $L_1 \neq L_2$ então a função f não tem limite em $x = a$.*

158 Definição. *(Funções monótonas reais) Uma função $f : D \to R$ e $x \in D$ e $y \in D$ é*

1. *Crescente (não decrescente) se $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$.*
2. *Decrescente (não crescente) se $x < y$ implica que $f(x) \geq f(y)$.*
3. *Estritamente crescente se $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$.*
4. *Estritamente decrescente se $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$.*

66 Observação. *A palavra monótona substitui qualquer uma das quatro características acima.*

131 Teorema. *(Limites de funções monótonas) Se $f : [a, b] \to R$ é uma função monótona, então f tem limites laterais em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) e além disso, existem os limites laterais $\lim_{x\to a+} f(x)$ e $\lim_{x\to b-} f(x)$.*

IX.5. Funções contínuas

159 Definição. *(Função contínua em um ponto) Seja $f : D \to R$ e $a \in D$. A função f é contínua em $x = a$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ sempre que $x \in D$ e $|x - a| < \delta$.*

67 Observação. *Sobre a continuidade num ponto.*

1. *A notação $\delta = \delta(\varepsilon)$ significa que para cada ε exibido, devemos construir um número δ que possivelmente seja diferente mas que depende de ε.*
2. *A função $f = f(x)$ precisa estar definida em $x = a$.*
3. *O intervalo utilizado é $|x - a| < \delta$.*
4. *A continuidade de uma função $f = f(x)$ no ponto $x = a$ é obtida pelo comportamento da função f nas vizinhanças do ponto, inclusive no ponto $x = a$.*

Exercício: Pesquise nos livros de Análise sobre a forma de definir a continuidade de uma função em um ponto $x = a$ isolado.

160 Definição. *(Função contínua em um conjunto) Diz-se que uma função $f : S \to R$ é contínua em um conjunto S se f é contínua para todo $x \in S$.*

102 Exemplo. *Seja $f : R \to R$, $f(x) = x + 1$. Para mostrar que f é contínua em um ponto $x = a$, basta observar que dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \varepsilon$ tal que se $|x - a| < \delta$, então*

$$|f(x) - f(a)| = |(x + 1) - (a + 1)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

103 Exemplo. *A função* $f : R \to R$ *definida por* $f(1) = 2$ *e por* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *para* $x \neq 1$, *está definida no ponto* $x = 1$, *mas construiremos uma tabela para mostrar o comportamento da função* f *nas vizinhanças de* $x = 1$.

$x > 1$	$f(x)$	$x < 1$	$f(x)$
$1,1$	$1,1$	$0,9$	$1,9$
$1,01$	$2,01$	$0,99$	$1,99$
$1,001$	$2,001$	$0,999$	$1,999$
$1,0001$	$2,0001$	$0,9999$	$1,9999$
...	...	...	...
1	2	1	2

Quando $x \neq 1$, *a função* f *se comporta como a função* $f_d(x) = x + 1$. *As funções* f *e* f_d *coincidem para todo* $x \in R$, *assim, dado um* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \varepsilon > 0$ *tal que se* $0 < |x-1| < \delta$, *então*

$$|f(x) - 2| = |\frac{x^2-1}{x-1} - 2| = |(x+1) - 2| = |x-1| < \delta = \varepsilon$$

104 Exemplo. *A função* $f : R \to R$, $f(x) = C$ *(constante) é contínua para cada* $a \in R$, *pois dado* $\varepsilon > 0$, *podemos tomar* $\delta = \varepsilon$ *tal que se* $|x-a| < \delta$ *então*

$$|f(x) - f(a)| = |C - C| = 0 < \varepsilon$$

105 Exemplo. *A função* $f : R \to R$, $f(x) = 3x + 7$ *é contínua para cada* $a \in R$, *pois dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \varepsilon/3$ *tal que se* $|x-a| < \delta$ *então*

$$|f(x) - f(a)| = |(3x+7) - (3a+7)| = 3|x-a| < 3\delta = \varepsilon$$

106 Exemplo. *A função* $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ *é contínua para cada* $a \in R$. *A construção de* δ *é mais complicada do que no caso anterior. Como:*

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)|$$

Como analisamos a continuidade de f *no ponto* $x = a$ *e nas suas vizinhanças, consideraremos o intervalo* $|x-a| < \delta < 1$. *Pela desigualdade triangular, os valores de* x *satisfazem às desigualdades:*

$$|x + a| = |x - a + 2a| \leq |x - a| + |2a| \leq 1 + 2|a|$$

assim

$$|f(x) - f(a)| = |(x-a)(x+a)| < \delta(1 + 2|a|)$$

Se tomarmos

$$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\}$$

o problema estará resolvido pois

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

107 Exemplo. *A função $f : R \to R$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

é contínua para todo $a \neq 0$, mas também é contínua em $x = 0$, pois dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \varepsilon$ tal que se $|x| = |x - 0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(0)| = |x \cdot \sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \cdot |\sin(\frac{1}{x})| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

108 Exemplo. *A função $f : R \to R$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

é contínua para todo $a \neq 0$, mas também f é contínua em $0 \in R$, pois dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \min(1, \varepsilon)$ tal que se $|x| = |x - 0| < \delta < 1$, então

$$|f(x) - f(0)| = |x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})| \leq |x^2| \cdot |\sin(\frac{1}{x})|$$

assim, se $0 < \delta < 1$ então $0 < \delta^2 < \delta < 1$ e

$$|f(x) - f(0)| \leq |x|^2 < \delta^2 < \delta = \varepsilon$$

109 Exemplo. *A função $f : R \to R$ definida por*

$$sinal(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

não é contínua em $x = 0$, mas é contínua à direita e à esquerda de $x = 0$.

132 Teorema. *(Continuidade e limite) Seja $f : D \to R$ e a um ponto de acumulação de D. f é contínua em $x = a$ se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

68 Observação. *Para mostrar que uma função f* **não** *é contínua em um ponto $x = a$, basta mostrar que vale uma das situações (ou ambas) abaixo:*

1. *f não está definida em $x = a$, ou*
2. $\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$

161 Definição. *(Módulo de uma função) Dada uma função real $f = f(x)$, define-se o módulo da função f, denotada por $|f|$, por*

$$|f|(x) = |f(x)|$$

110 Exemplo. *A função $f : R \to R$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in Q \\ -1 & se \quad x \notin Q \end{cases}$$

não é contínua mas o módulo desta função $f = f(x)$, definido por $|f|(x) = 1$ é uma função contínua sobre R.

3 Lema. *Sobre o valor absoluto de uma função. Seja $f : D \to R$ uma função e $a \in D$. Se f é contínua em $x = a$, demonstre que a função $|f| : D \to R$ definida por $|f|(x) = |f(x)|$ é contínua no ponto $x = a$.*

4 Lema. *Sobre a limitação em uma vizinhança.*

1. *Se f é contínua em $x = a$, então existe uma vizinhança $(a - \delta, a + \delta)$ na qual f é limitada.*
2. *Se f é contínua em $x = a$ e $f(a) \neq 0$, então existe uma vizinhança $V_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ do ponto $x = a$ e existe $m > 0$ tal que $|f(x)| \geq m > 0$.*

133 Teorema. *(Operações com funções contínuas) Sejam $f : D \to R$ e $g : D \to R$ funções contínuas em $x = a \in D$ e $k \in R$. Então $f + g$, $f - g$, $k.f$, $f.g$, f/g se $g(a) \neq 0$, $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ são também contínuas. As duas últimas funções são, respectivamente, definidas por:*

$$\begin{aligned} \max(f, g)(x) &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \\ \min(f, g)(x) &= \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} \end{aligned}$$

134 Teorema. *(Continuidade e seqüências) Seja $f : D \to R$ uma função e $a \in D$. f é contínua no ponto $x = a$ se, e somente se, para toda seqüência $(x_n) \subset D$ tal que $x_n \to a$, temos que $f(x_n) \to f(a)$.*

69 Observação. *Se existem duas seqüências (x_n) e (y_n) tal que $x_n \to a$ e $y_n \to a$ tal que $f(x_n) \to L_1$ e $f(y_n) \to L_2$, com $L_1 \neq L_2$ então a função f não é contínua em $x = a$.*

111 Exemplo. *A função $f : R \to R$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

não é contínua em $x = 0$, pois existem duas seqüências que convergem para 0 de modo que as imagens dessas seqüências pela função $f = f(x)$ são duas seqüências que convergem para valores diferentes. Realmente,

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0 \qquad e \qquad y_n = \frac{1}{(n + 1/2)\pi} \to 0$$

mas

$$f(x_n) = \sin(\frac{1}{x_n}) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$$

e

$$f(y_n) = \sin(\frac{1}{y_n}) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1$$

A definição de função contínua em um ponto pode ser reescrita com o auxílio de intervalos.

162 Definição. *(Função contínua por intervalos) Seja $f : D \to R$ e a um ponto de acumulação de D. A função $f : D \to R$ é contínua em $a \in D$ se, para cada intervalo $I_\varepsilon = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, existe um intervalo $I_\delta = (a - \delta, a + \delta)$ tal que $f(I_\delta) \subset I_\varepsilon$*

135 Teorema. *(Imagem inversa de aberto) Seja $f : D \to R$ uma função contínua sobre D. Se B é um conjunto aberto em R, então $f^{-1}(B)$ é um conjunto aberto em D.*

Demonstração. Se $x \in f^{-1}(B)$, então $f(x) \in B$. Como B é aberto, existe um intervalo $I_r = (f(x) - r_x, f(x) + r_x)$, com $r_x > 0$, tal que $f(x) \in I_r \subset B$.

Como f é contínua em x, existe $I_x = (x - d_x, x + d_x)$, com $d_x > 0$, tal que

$$x \in I_x \subset f^{-1}(B)$$

Mas

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{x \in f^{-1}(B)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(B)} I_x \subset f^{-1}(B)$$

e segue que

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{x \in f^{-1}(B)} I_x$$

ou seja, $f^{-1}(B)$ é a reunião de conjuntos abertos, logo $f^{-1}(B)$ também é um conjunto aberto. □

4 Corolário. *(Imagem inversa de fechado) Seja X um conjunto fechado em R, $Y \subset R$ e $f : X \to Y$ uma função contínua sobre X. Se F é um conjunto fechado em Y, então $f^{-1}(F)$ é um conjunto fechado em X.*

Demonstração. Conseqüência imediata do Teorema anterior com $B = F^c$. □

136 Teorema. *(Continuidade com seqüências) Seja p um ponto de acumulação de D. $f : D \to R$ é uma função contínua em p se, e somente se, toda seqüência $(x_n) \subset D - \{p\}$ tal que $\lim x_n = p$ implica que $\lim f(x_n) = f(p)$.*

Demonstração. Ver teorema semelhante a este no capítulo de Limites e use $L = f(p)$. □

IX.6. Propriedades importantes das funções contínuas

137 Teorema. *(Imagem compacta) Se $f : K \to R$ é uma função contínua e K um conjunto compacto, então a imagem $f(K)$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Lembremos o Teorema 113 da página 111. Para mostrar que o conjunto $f(K)$ é compacto, devemos mostrar que todo subconjunto infinito de $f(K)$ possui um ponto de acumulação em $f(K)$.
Seja (y_n) uma seqüência em $f(K)$. Para cada $y_n \in f(K)$, existe $x_n \in K$ tal que $y_n = f(x_n)$. A seqüência (x_n) é um conjunto infinito e limitado, assim, o conjunto (x_n) possui um ponto de acumulação p em K, ou seja, $p = \lim x_n$.
Como f é contínua, segue que $f(p) = \lim f(x_n)$ e como $y_n = f(x_n)$, então existe uma seqüência (y_n) em $f(K)$ tal que $f(p) = \lim y_n$, garantindo que $f(p)$ é um ponto de acumulação de $f(K)$. □

138 Teorema. *(Valores extremos) Se $f : K \to R$ é uma função contínua sobre um conjunto compacto (fechado e limitado) K, então a função f assume o seu máximo $M = \max(f)$ e o seu mínimo $m = \min(f)$ em K, isto é, existem $u, v \in K$ tal que*

$$m = f(u) \leq f(x) \leq f(v) = M$$

Demonstração. Se K é compacto e $f : K \to R$ é contínua, então $f(K)$ também é um conjunto compacto. Pelo Teorema anterior o conjunto $f(K)$ possui mínimo e máximo, garantindo que existem $u, v \in K$ tal que

$$\min(f) = f(u) \leq f(x) \leq f(v) = \max(f)$$

□

163 Definição. *(Conjunto conexo) Um conjunto C da reta real é conexo se* **não** *pode estar contido na reunião $C \subset A \cup B$, sendo que A e B são abertos, não vazios e disjuntos.*

112 Exemplo. *O conjunto $C = R - \{0\}$ NÃO é* conexo *pois $C = A \cup B$ e os conjuntos $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$ são abertos, não vazios e disjuntos.*

164 Definição. *(Intervalo na reta) Um conjunto C da reta real é um intervalo se, dados $x, y \in C$ tal que $x < u < y$, então u deve pertencer ao conjunto C. Intuitivamente, um intervalo é um conjunto formado por apenas* um pedaço.

113 Exemplo. *(Conexos na reta) São conjuntos conexos os seguintes intervalos*

$$(-\infty, b), \quad (-\infty, b], \quad (a, b), \quad (a, b], \quad [a, b], \quad [a, b), \quad (a, \infty), \quad [a, \infty), \quad R$$

e todo conjunto conexo em R deve ter uma destas formas.

139 Teorema. *(Conexão de um intervalo) Um conjunto C da reta real é um conjunto conexo se, e somente se, C é um intervalo.*

Demonstração. (Direta) Negaremos a tese e chegaremos à negação da hipótese. Se C é um conjunto conexo, mostraremos que C é um intervalo.

Se C não é um intervalo, existem elementos $x, y \in C$ e $u \notin C$ tal que $x < u < y$.

Tomando os conjuntos $A = \{a \in C : a < u\}$ e $B = \{b \in C : u < b\}$, segue que A e B são abertos, disjuntos e não são vazios, e além disso, $C \subset A \cup B$, garantindo que o conjunto C não é conexo. □

Demonstração. (Recíproca) Vamos negar a tese e assumir a hipótese para obter uma contradição. Se o conjunto C não é conexo e se $x, y \in C$ com $x < u < y$ então $u \in C$. Se C não é conexo, existem conjuntos A e B abertos, não vazios e disjuntos tal que $C \subset A \cup B$, sendo que $x \in A$ e $y \in B$.
Tomaremos um conjunto $S = A \cap [x, y]$ e assumiremos que $u = \sup(S)$.
Se $y \in B$ e B é aberto, então $u < y$ e se $x \in A$ e A é aberto, então $x < u$.
Como A é aberto, se tomarmos $u \in A$, segue que u não pode ser cota superior de S, assim, temos que $u \notin A$.
Como B é aberto, se tomarmos $u \in B$, segue que u não pode ser cota inferior de S, e desse modo $u \notin B$.
Como $C \subset A \cup B$, segue que $u \notin C$, contra a hipótese assumida, logo C é um conjunto conexo. □

140 Teorema. *(Valor intermediário) Se $f : [a, b] \to Y$ é uma função contínua tal que $f(a) < c < f(b)$, então existe um ponto $u \in (a, b)$ tal que $f(u) = c$.*

Demonstração. Consideremos $f(a) < c < f(b)$ e definamos os conjuntos

$E = \{x \in [a, b] : f(x) < c\}$

1. $E \neq \emptyset$ pois $a \in E$.
2. $E \subset R$.
3. E é limitado superiormente por b.
4. E possui supremo.

$D = \{x \in [a, b] : f(x) > c\}$

1. $D \neq \emptyset$ pois $b \in D$.
2. $D \subset R$.
3. D é limitado inferiormente por a.
4. D possui ínfimo.

Devemos mostrar que existe $u \in (a, b)$ tal que $f(u) = c$. Negando a tese, obteremos duas situações: (a) $f(u) < c$ ou (b) $f(u) > c$.

1. (a) Consideremos $f(u) < c$ e $u = \sup(K)$. Pela continuidade de f em u, segue que dado $\varepsilon_1 = c - f(s) > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $|x - u| < \delta_1$ então

   $$|f(x) - f(u)| < \varepsilon_1 = c - f(u)$$

   que equivale a $2f(u) - c < f(x) < c$ garantindo que para todo $x \in (u - \delta_1, u + \delta_1)$ temos que

   $$f(x) < c$$

   Como o ponto $u_1 = u + \frac{\delta}{2} \in (u - \delta_1, u + \delta_1)$, então

   $$f(u_1) < c$$

   Assim, existe um valor u_1 maior que u satisfazendo à desigualdade $f(x) < 0$, o que é uma contradição, pois $u = \sup(E)$.

2. (b) Seja agora $f(u) > c$ e $u = \inf(D)$. Pela continuidade de f em s, segue que dado $\varepsilon_2 = f(s) - c > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que se $|x - u| < \delta_2$ então

   $$|f(x) - f(u)| < \varepsilon_2 = f(u) - c$$

que equivale a $f(u) - (f(u) - c) < f(x) < 2f(u) - c$ para todo $x \in (u - \delta_2, u + \delta_2)$ assim

$$c < f(x)$$

Como o ponto $u_2 = u - \frac{\delta}{2} \in (u - \delta_2, u + \delta_2)$, segue que

$$f(s_2) > c$$

Desse modo, existe um valor u_2 menor do que u satisfazendo à desigualdade $f(x) > c$, o que é uma contradição, pois $u = \inf(D)$.

Como não podemos ter $f(u) > c$ e nem $f(u) < c$, segue que $f(u) = c$. □

5 Corolário. *(Imagem direta de um intervalo) Se $f : [a, b] \to R$ é uma função contínua sobre o intervalo $[a, b]$, então a imagem $f[a, b]$) é também um intervalo real.*

141 Teorema. *(Imagem direta de conexo) Seja $f : D \to R$ uma função contínua sobre D. Se A é um conjunto conexo em D, então $f(A)$ é um conjunto conexo em R.*

IX.7. Continuidade uniforme

165 Definição. *(Função uniformemente contínua) Uma função $f : D \to R$ é uniformemente contínua sobre o conjunto D se, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

sempre que $x, y \in D$ e $|x - y| < \delta$.

70 Observação. *Continuidade uniforme versus continuidade.*

1. *Na continuidade uniforme o δ não pode depender do específico $x \in D$, o que significa que o mesmo δ deve valer para todos os $x \in D$.*
2. *Se $f : D \to R$ é uniformemente contínua, então f é contínua sobre todo o conjunto D, como é o caso de $f : R \to R$ definida por $f(x) = \sin(x)$.*
3. *Existem funções $f : D \to R$ que são contínuas mas que não são uniformemente contínuas, como é o caso de $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$.*

142 Teorema. *(Continuidade uniforme e compacto) Se $f : D \to R$ é uma função contínua sobre o conjunto um conjunto compacto D, então f é uniformemente contínua sobre D.*

166 Definição. *(Função Lipschitziana) Uma função $f : D \to R$ é dita lipschitziana sobre D se existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

para todos os elementos $x, y \in D$.

71 Observação. *Este tipo de função desempenha um importante papel na demonstração do teorema de existência e unicidade de solução para uma equação diferencial ordinária com uma condição inicial.*

Exercício: Se uma função $f : D \to R$ é lipschitziana sobre D, mostre que ela é uniformemente contínua sobre D.

Capítulo X

DERIVADAS DE FUNÇÕES REAIS

"Por esta razão te lembro que despertes o dom de Deus, que há em ti pela imposição das minhas mãos. Porque Deus não nos deu o espírito de covardia, mas de poder, de amor e de moderação. Portanto não te envergonhes do testemunho de nosso Senhor, nem de mim, que sou prisioneiro seu; antes participa comigo dos sofrimentos do evangelho segundo o poder de Deus, que nos salvou, e chamou com uma santa vocação, não segundo as nossas obras, mas segundo o seu próprio propósito e a graça que nos foi dada em Cristo Jesus antes dos tempos eternos, e que agora se manifestou pelo aparecimento de nosso Salvador Cristo Jesus, o qual destruiu a morte, e trouxe à luz a vida e a imortalidade pelo evangelho, do qual fui constituído pregador, apóstolo e mestre."
A Bíblia Sagrada, II Timóteo 1:6-11

X.1. Derivadas e funções diferenciáveis

167 Definição. *(Derivada em um ponto) Uma função $f : D \to R$ possui derivada no ponto $a \in D$, se a é um ponto de acumulação de D, e, existe e é finito o limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Quando este limite existe e é finito, ele é denominado a derivada de f no ponto a e denotado por $f'(a)$, isto é:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

168 Definição. *(Derivada em um conjunto) Uma função $f : D \to R$ possui derivada sobre o conjunto D se f possui derivada em todo ponto $x \in D$.*

114 Exemplo. *Derivadas de algumas funções.*

① *A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = 2x$, possui derivada em $a \in R$, pois:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2x - 2a}{x - a} = \lim_{x \to a} 2 = 2$$

② $f : R \to R$ *definida por* $f(x) = x^2$, *possui derivada em* $a \in R$, *pois:*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a}(x + a) = 2a$$

③ *A função* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *definida por* $f(x) = \frac{1}{x}$, *possui derivada em cada ponto* $a \in (0, \infty)$, *pois:*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x} - 1/a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{-1}{ax} = -\frac{1}{a^2}$$

169 Definição. *(Função diferenciável em um ponto) Uma função* $f : D \to R$ *é diferenciável em um* $a \in D$, *se podemos escrever*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)\, h + R(a, h)$$

exigindo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|R(a, h|}{|h|} = 0$$

143 Teorema. *(Diferenciabilidade garante a continuidade) Se uma função* $f : D \to R$ *é diferenciável sobre* D, *então* f *é contínua sobre* D,

170 Definição. *(Derivada lateral à direita) Uma função* $f : D \to R$ *é diferenciável à direita em* $a \in D$, *se* a *é um ponto de acumulação de* $D \cap (a, \infty)$ *e existe (é finito) o limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad (x > a)$$

Tal limite é denominado a derivada lateral de f *à direita no ponto* $x = a$ *e denotado por*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad (x > a)$$

171 Definição. *(Derivada lateral à esquerda) Uma função* $f : D \to R$ *é diferenciável à esquerda em* $a \in D$, *se* a *é um ponto de acumulação de* $D \cap (-\infty, a)$ *e existe (é finito) o limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (x < a)$$

Tal limite é denominado a derivada lateral de f *à esquerda no ponto* $x = a$ *e denotado por*

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad (x < a)$$

172 Definição. *(Derivada versus derivadas laterais) Uma função* $f : D \to R$ *é diferenciável em um ponto de acumulação* a *de* D, *se as duas derivadas laterais à esquerda e à direita em* $a \in D$ *existem e coincidem. Quando isto acontece*

$$f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$$

115 Exemplo. *(Derivadas laterais)*

1. *Seja $f : R \to R$ a função definida por $f(x) = x.\chi_{[0,\infty)}$, que pode ser escrita como:*

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Assim:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x-0} = 1 \quad (x > 0), \qquad f'_-(0) = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0 \quad (x < 0)$$

Esta função é contínua em toda a reta, mas não é diferenciável em $x = 0$, embora seja diferenciável para todo $a \neq 0$.

2. *Seja a função modular $f : R \to R$, definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Para esta função, temos que:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x-0} = 1 \quad (x > 0), \qquad f'_-(0) = \lim_{x\to 0} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \quad (x < 0)$$

Esta função é contínua em toda a reta, mas não é diferenciável em $x = 0$, embora seja diferenciável para todo $a \neq 0$.

144 Teorema. *(Derivadas e seqüências) Uma função $f : D \to R$ é diferenciável em $a \in D$, onde a é um ponto de acumulação de D se, para cada seqüência $x_n \subset D$ tal que $x_n \to a$ e $x_n \neq a$, a seqüência dos quocientes de Newton*

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$$

é convergente.

Exercício: Usando seqüências reais, mostrar que a função real contínua $f : R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x.\sin(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

não é diferenciável em $x = 0$.

Dica: Exibir seqüências distintas $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ tal que

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} \to L_1 \qquad \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} \to L_2$$

sendo $L_1 \neq L_2$.

145 Teorema. *(Operações com funções diferenciáveis) Sejam $f : D \to R$ e $g : D \to R$ funções diferenciáveis em $a \in D$, e $c \in R$ uma constante. Então, $f + g$, $f - g$, $c.f$, $f.g$ e f/g são diferenciáveis em $a \in D$, desde que para $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$.*

Exercício: Usando o Princípio da Indução Matemática, mostrar que a derivada da função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^n$ para cada $n \in N$ é dada por:

$$f'(x) = n.x^{n-1}$$

146 Teorema. *(Regra da cadeia) Se $f : A \to B$ é uma função diferenciável em $a \in A$ e $g : B \to C$ é uma função diferenciável em $b = f(a) \in B$, então a função composta $g \circ f : A \to C$ é uma função diferenciável em $a \in A$ e além disso:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

Exercício: Obter a primeira derivada da função $h : R \to R$ definida por $h(x) = (1 + x^2)^{206}$.

X.2. Aplicações das funções diferenciáveis

173 Definição. *(Máximo local) Um ponto $p \in D$ é um ponto de máximo local para $f = f(x)$ se existe uma vizinhança de p, denotada por V_p tal que se $x \in D \cap V_p$, então $f(x) \leq f(p)$. O valor $f(p)$ é um máximo local de f.*

174 Definição. *(Mínimo local) Um ponto $p \in D$ é um ponto de mínimo local para $f = f(x)$ se existe uma vizinhança de p, denotada por V_p tal que se $x \in D \cap V_p$, então $f(x) \geq f(p)$. O valor $f(p)$ é um mínimo local de f.*

147 Teorema. *(Derivadas, máximos e mínimos) Seja $f : [a, b] \to R$. Se $p \in (a, b)$ é um ponto de máximo (mínimo) local de f e além disso f é diferenciável em p, então $f'(p) = 0$.*

148 Teorema. *(Rolle) Seja $f : [a, b] \to R$. Se f é contínua sobre $[a, b]$ e diferenciável sobre (a, b) e além disso $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c, então $f'(c) = 0$.*

149 Teorema. *(Rolle) Seja $f : [a, b] \to R$. Se f é contínua sobre $[a, b]$ e diferenciável sobre (a, b) e além disso $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto c, então $f'(c) = 0$.*

150 Teorema. *(Valor Médio) Seja $f : [a, b] \to R$. Se f é contínua sobre $[a, b]$ e diferenciável sobre (a, b) então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6 Corolário. *Do teorema do Valor Médio.*

1. *Se $f : [a, b] \to R$ é uma função contínua sobre $[a, b]$, diferenciável sobre (a, b) e $f'(x) > 0$ para cada $x \in (a, b)$, então f é crescente sobre $[a, b]$.*

2. *Se $f : [a,b] \to R$ é uma função contínua sobre $[a,b]$, diferenciável sobre (a,b) e $f'(x) < 0$ para cada $x \in (a,b)$ então f é decrescente sobre $[a,b]$.*

Exercício: Usando o teorema do valor médio, mostre que $\sin(x) \leq x$ se $x \geq 0$. **Dica**: Defina a diferença $d(x) = x - \sin x$ $(x \geq 0)$ e use o TVM para a função d.

Exercício: Mostrar que para todo $x \in R$, vale a desigualdade $|\sin x| \leq |x|$.

7 Corolário. *(do Teorema do Valor Médio de Cauchy) Se $f : [a,b] \to R$ e $g : [a,b] \to R$ são funções contínuas sobre $[a,b]$, diferenciáveis sobre (a,b) e além disso $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a,b)$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Se tomarmos $g(x) = x$ neste teorema, obteremos o teorema do valor médio.

8 Corolário. *(do Teorema da função constante) Se $f : [a,b] \to R$ é uma função contínua sobre $[a,b]$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é constante.*

9 Corolário. *Se $f : [a,b] \to R$ e $g : [a,b] \to R$ são funções contínuas sobre $[a,b]$ e $f'(x) = g'(x)$ para cada $x \in (a,b)$, então $f(x) = g(x) + K$, onde K é uma constante.*

10 Corolário. *(Regra de L'Hopital do tipo zero/zero) Se $f : [a,b] \to R$ e $g : [a,b] \to R$ são funções diferenciáveis sobre um intervalo D que contém uma vizinhança de um ponto p no qual valem as propriedades:*

1. $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0$;
2. $g'(x) \neq 0$ *nas vizinhanças de* p
3. *o limite* $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe*

então:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

11 Corolário. *(Regra de L'Hopital do tipo infinito/infinito) Se $f : [a,b] \to R$ e $g : [a,b] \to R$ são funções diferenciáveis sobre um intervalo D que contém uma vizinhança de um ponto p no qual valem as propriedades:*

1. $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = +\infty$;
2. $g'(x) \neq 0$ *nas vizinhanças de* p
3. $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe*

então:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

X.3. Derivadas sucessivas

175 Definição. *Classes de diferenciabilidade.*

1. *Se uma função $f : D \to R$ é contínua sobre D, escrevemos que $f \in C^0(D)$.*
2. *Se uma função $f : D \to R$ é diferenciável sobre D, então $f' : D \to R$ é uma função contínua sobre D.*
3. *Se é possível realizar a derivada da primeira derivada de uma função f, usamos a notação $f'' : D \to R$ para indicar a função obtida que recebe o nome de segunda derivada.*
4. *Se a função f possui a primeira derivada sobre D e esta primeira derivada é uma função contínua sobre D, diz-se que f é de classe C^1 sobre D, denotando isto por $f \in C^1(D)$.*
5. *Se a função f possui a primeira derivada sobre D, a segunda derivada sobre D e todas elas são funções contínuas sobre D, diz-se que f é de classe C^2 sobre D, denotado por $f \in C^2(D)$.*
6. *Em geral, pode-se escrever:*

$$C^n(D) = \{f : D \to R : f^{(k)} \in C^0(D) \ (k = 0, 1, 2, ..., n)\}$$

7. *Se podemos realizar todas as derivadas possíveis de uma função f sobre D, diz-se que f é infinitamente diferenciável sobre D e denotamos isto por $f \in C^\infty(D)$. 100*

116 Exemplo. *Classes de diferenciabilidade.*

① *A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = |x|$ é contínua sobre R mas não é diferenciável em $x = 0$.*

② *A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ é contínua sobre R é infinitamente diferenciável sobre R.*

③ *A função $f : R \to R$ definida por $f(x) = |x|^3$ é diferenciável até a segunda ordem sobre R mas a terceira derivada não existe em $x = 0$.*

151 Teorema. *(Taylor) Seja $f : [a, b] \to R$. Se $f \in C^n([a, b])$ e $f \in C^{n+1}((a, b))$, então existe $p \in (a, b)$ tal que*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + ... \\ &\quad + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(p) \end{aligned}$$

Substituindo b por x e a por 0, obtemos a fórmula de Taylor com resto:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

onde $0 < p < x$ e

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(p)$$

A fórmula de Taylor também pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\ \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

Para muitas funções, é possível escrever um somatório infinito, garantido pelo fato que quando $n \to \infty$ o resto $R_n(x) \to 0$ e dessa forma temos a série de MacLaurin da função desenvolvida em torno do ponto $x = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\ \frac{x^k}{k!}$$

Se o desenvolvimento ocorre em torno do ponto $x = a$, escrevemos:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a)\ \frac{(x-a)^k}{k!}$$

Se uma função f possui desenvolvimento de Taylor em uma região D, diz-se que f é analítica sobre D o que é garantido, em grande parte pelo fato de f ser infinitamente diferenciável, mas nem todas as funções infinitamente diferenciáveis são analíticas, como é o caso da função $f : R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Capítulo XI

INTEGRAL DE RIEMANN

> "No princípio era o Verbo, e o Verbo estava com Deus, e o Verbo era Deus. Ele estava no princípio com Deus. Todas as coisas foram feitas por intermédio dele, e sem ele nada do que foi feito se fez. Nele estava a vida, e a vida era a luz dos homens; a luz resplandece nas trevas, e as trevas não prevaleceram contra ela."
> A Bíblia Sagrada, João 1:1-5

A derivada e a integral de uma função real formam a essência do Cálculo Diferencial e Integral e também da Análise na reta. Neste capítulo tratamos das integrais de Georg F. B. Riemann (1866-1926), que foi um matemático alemão que primeiramente definiu a integral de uma função de modo a dar consistência para a definição usada no Cálculo Integral.

XI.1. Partições de intervalos

176 Definição. *(Partição de um intervalo) Um conjunto* $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ *com um número finito de pontos é uma partição do intervalo* $[a, b]$ *se*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

Exercício: Mostre que os conjuntos $P = \{0, 1/8, 1/6, 1/2, 1\}$, $Q = \{0, 1/4, 1/3, 1\}$, $P \cap Q$ e $P \cup Q$ são partições do intervalo $[0, 1]$.

72 Observação. *(Sobre uma partição) A cada partição* $P = \{x_1\}_{i=0}^{n}$ *de um intervalo* $[a, b]$*, podemos associar n sub-intervalos fechados da forma* $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ *com comprimento* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$*. Assim, a soma dos comprimentos desses sub-intervalos é o comprimento de* $[a, b]$*, isto é:*

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$$

177 Definição. *(Norma de uma partição) A norma de uma partição* $P = \{x_1\}_{i=0}^{n}$ *de um intervalo* $[a, b]$*, denotada por* $||P||$*, é definida como sendo:*

$$||P|| = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, 3, ..., n\}$$

Exercício: Usando as partições P, Q, $P \cap Q$ e $P \cup Q$ do exercício anterior, calcular as normas dessas partições e constatar que

$$\|P \cup Q\| \leq \min\{\|P\|, \|Q\|\} \leq \|P \cap Q\|$$

178 Definição. *(Partição mais fina) Sejam P e Q partições de $[a,b]$. P é mais fina do que Q se $P \supset Q$. Quando P é mais fina do que Q, diz-se que P é um refinamento de Q.*

179 Definição. *(Partição menos fina) Sejam P e Q partições de $[a,b]$. P é menos fina do que Q se $P \subset Q$.*

152 Teorema. *Sejam P e Q são partições de $[a,b]$. Assim*

1. *$P \cup Q$ é mais fina do que P;*
2. *P é mais fina do que $P \cap Q$.*

180 Definição. *(Somas de Darboux de uma função) Seja $f : [a,b] \to R$ uma função real limitada e $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ uma partição de $[a,b]$. Para cada $i = 1, 2, ..., n$, tomamos*

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]$$

e

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Definimos a soma superior $S(f,P)$ e a soma inferior $I(f,P)$ de Darboux de f para a partição P, por:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

e

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Exercícios:

1. Seja a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   e a partição $P = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$. Obtenha as somas de Darboux $S(f,P)$ e $I(f,P)$ e observe que

$$I(f,P) \leq S(f,P)$$

2. Seja a função $f : [0,5] \to R$ definida por $f(x) = x + 3$, $P = \{0,1,3,5\}$ e $Q = \{0,1,2,3,4,5\}$ partições de $[0,5]$. Observa-se que Q é mais fina do que P. Calcule as quatro somas de Darboux $I(f,P)$, $I(f,Q)$, $S(f,Q)$ e $S(f,P)$, observando que

$$I(f,P) \leq I(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

153 Teorema. *(Comparação entre as somas de Darboux) Para toda partição P de um intervalo* $[a,b]$*, tem-se*

$$I(f,P) \leq S(f,P)$$

154 Teorema. *(Comparação de somas de Darboux e partições) Se P e Q são partições de um intervalo* $[a,b]$*, sendo Q mais fina que P, então*

$$I(f,P) \leq I(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

Dica: A demonstração pode ser encontrada na pag.123 de [13].

155 Teorema. *(Comparação de somas e partições gerais) Quaisquer que sejam as partições P e Q de um intervalo* $[a,b]$*, tem-se:*

$$I(f,P) \leq S(f,Q)$$

Dica: A demonstração pode ser encontrada na pag.124 de [13].

181 Definição. *(Integral de uma função real) Seja* $f : [a,b] \to R$ *uma função limitada e* $\mathcal{P}[a,b]$ *o conjunto de todas as partições do intervalo* $[a,b]$*. Definimos as integrais superior e inferior de* f *no intervalo* $[a,b]$*, respectivamente por*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

e

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{I(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

73 Observação. *Tais integrais são consistentes, pois o conjunto de todas as somas inferiores (superiores) de* f *é um subconjunto não vazio de R que é limitados superiormente (inferiormente), assim concluímos que existe supremo (ínfimo) para estes subconjuntos de R.*

156 Teorema. *(Integral superior versus integral inferior] Se* $f : [a,b] \to R$ *é uma função limitada, então*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

157 Teorema. *(Função integrável) Uma função real* $f : [a,b] \to R$ *é integrável segundo Riemann, se valem as duas afirmações:*

1. *f é limitada sobre* $[a,b]$*;*
2. $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

74 Observação. *Quando* f *é integrável sobre* $[a,b]$*, a integral de* f *segundo Riemann é simplesmente denotada por*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$$

onde a letra x que aparece na integral faz o papel de variável **muda***, o que significa que se trocarmos esta letra por outra, o valor da integral será o mesmo.*

Exercício: Mostrar que a função $f : [a,b] \to R$ definida por $f(x) = c$ é integrável.

117 Exemplo. *(Função que não é integrável segundo Riemann) A função* $f : [0,1] \to R$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in Q \\ 1 & se \quad x \notin Q \end{cases}$$

não é Riemann-integrável sobre $[0,1]$.

182 Definição. *(Área de uma região) Quando a função real* $f : [a,b] \to R$ *satisfaz à desigualdade* $f \geq 0$, *a integral de* f *sobre* $[a,b]$ *representa a área da região compreendida entre as retas* $y = 0$, $x = a$, $x = b$ *e o gráfico de* $y = f(x)$.

158 Teorema. *(Função integrável) Seja* $f : [a,b] \to R$ *uma função limitada.* f *é integrável segundo Riemann se, e somente se, para cada* $\varepsilon > 0$, *existir uma partição* $P \in \mathcal{P}[a,b]$ *tal que*

$$S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$$

Demonstração. Suponhamos que para cada $\varepsilon > 0$, exista uma partição $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$$

Levando em consideração que

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} \leq S(f,P)$$

$$I(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f = \sup\{I(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

então, já mostramos que

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$$

o que significa que

$$\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$$

mas já sabemos do Teorema [156], que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

Assim

$$\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

o que garante que

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

isto é, f é integrável sobre $[a,b]$.

Reciprocamente, consideremos f integrável sobre $[a,b]$, isto é:

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

Esta igualdade é o mesmo que

$$\inf\{S(f,Q) : Q \in \mathcal{P}[a,b]\} = \sup\{I(f,Q) : Q \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

Pela definição de supremo, temos que dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, existe uma partição $P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$\sup\{I(f,Q) : Q \in \mathcal{P}[a,b]\} - \varepsilon < I(f,P_2)$$

e pela hipótese formulada, temos que

$$\inf\{S(f,Q) : Q \in \mathcal{P}[a,b]\} < I(f,P_2) + \varepsilon$$

Pela definição de ínfimo, existe uma partição $P_1 \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$S(f,P_1) < I(f,P_2) + \varepsilon$$

Tomando a partição $P = P_1 \cup P_2$, seguirá que P é mais fina do que P_1 e P_2, logo:

$$S(f,P) \leq S(f,P_1)$$

e

$$I(f,P_2) \leq I(f,P)$$

assim, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$$

□

159 Teorema. *(Função crescente e limitada é integrável) Se $f : [a,b] \to R$ é uma função crescente e limitada, então f é integrável.*

Dica: A demonstração está na pag.126 de [13].

160 Teorema. *(Função contínua sobre [a,b] é integrável). Se $f : [a,b] \to R$ é uma função contínua, então f é integrável.*

Demonstração. Neguemos a tese. Se f não é uma função integrável e é contínua sobre $[a,b]$, então

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = d > 0$$

Seja um conjunto de partições $(P_n)_{n\in N}$ do intervalo $[a,b]$, construída da forma:

$$P_1 = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$$

e

$$P_{n+1} = P_n \cup M_n$$

onde M_n é o conjunto dos pontos médios dos subintervalos obtidos em P_n.

Como $f : [a,b] \to R$ é contínua e definida sobre um conjunto compacto, segue que f é uniformemente contínua sobre $[a,b]$, logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x_1 - x_2| < \delta$ então

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Em particular, escolhendo $\varepsilon = d/(b-a)$, teremos que

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{d}{b-a}$$

para quaisquer $x_1 \in [a,b]$ e $x_2 \in [a,b]$ tal que $|x_1 - x_2| < \delta$.

Como construímos as partições P_n, segue que as suas normas $||P_n|| \to 0$ quando $n \to \infty$, existirá um índice natural $n_0 \in N$ tal que

$$||P_{n_0}|| < \delta$$

sendo que $P_{n_0} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_k = b\}$, $M_i - m_i < \varepsilon$ em cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, uma vez que $M_i = \max_{x\in I_i} f(x)$ e $m_i = \min_{x\in I_i} f(x)$. Dessa forma:

$$S(f, P_{n_0}) - I(f, P_{n_0}) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a) = d$$

e desse modo, pelas definições de ínfimo e supremo, segue que

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < d$$

o que é um absurdo, pois a diferença entre estas duas integrais foi suposta inicialmente igual a d. Assim, garantimos que se f é uma função contínua e definida sobre um conjunto compacto $[a,b]$, então f é integrável sobre este conjunto $[a,b]$. □

XI.2. Propriedades das funções integráveis

161 Teorema. *Sejam $f : [a,b] \to R$ e $g : [a,b] \to R$ funções integráveis e $k \in R$. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *Para $c \in [a,b]$, tem-se* $\int_c^c f = 0$.
2. *Para cada $c \in [a,b]$, tem-se* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. *Troca dos limitantes:* $\int_b^a f = -\int_a^b f$.
4. *Aditividade:* $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
5. *Homogeneidade:* $\int_a^b (k.f) = k\int_a^b f$.
6. *Se $f \leq g$ sobre $[a,b]$, então* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
7. *Desigualdade:* $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.
8. *Se $m \leq f \leq M$ sobre $[a,b]$, $m, M \in R$, então* $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Exercício: Mostre que para cada $y \in R$ fixo, as funções $f : [0,y] \to R$ definida por $f(x) = x$ e $g : [0,y] \to R$ definida por $g(x) = x^2$ são integráveis. **Dica**: Calcular as integrais de Riemann, usando as somas de Darboux.

Exercício com Integral como um limite: Definir a integral de Riemann de uma função através de limites. **Dica**: Ver a pag.130 de [13].

XI.3. O Teorema Fundamental do Cálculo

Este teorema é fundamental, exatamente porque faz a conexão entre as integrais de Riemann (definidas) e as primitivas (indefinidas) para uma função real.

162 Teorema. *(da Primitiva) Seja $f : [a,b] \to R$ uma função integrável e para cada $x \in [a,b]$ definamos:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Então:

1. *$F : [a,b] \to R$ é contínua sobre $[a,b]$. F é* **uma** *primitiva (integral indefinida) para f.*
2. *Para cada $p \in [a,b]$ onde f é contínua, a função F é diferenciável e $F'(p) = f(p)$.*

163 Teorema. *(Fundamental do Cálculo) Seja* $f : [a,b] \to R$ *uma função contínua e* $G : [a,b] \to R$ *tal que* $G'(x) = f(x)$ *para cada* $x \in [a,b]$*. Então*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

12 Corolário. *(do Teorema Fundamental do Cálculo) Se é* $f : [a,b] \to R$ *uma função diferenciável tal que* f' *é uma função integrável sobre* $[a,b]$*, então*

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

164 Teorema. *(Integração por partes) Se é* $f : [a,b] \to R$ *e* $g : [a,b] \to R$ *são funções diferenciáveis e* f' *e* g' *são integráveis sobre* $[a,b]$*, então*

$$\int_a^b f(x).g'(x)\,dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)\,dx$$

165 Teorema. *(Integral por substituição) Se é* $f : [a,b] \to R$ *é contínua e* $u : [a,b] \to [c,d]$ *é uma função com a primeira derivada contínua, tal que* $u(a) = c$*,* $u(c) = d$ *e para cada* $x \in [a,b]$*, então*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f(u(x)).u'(x)\,dx$$

166 Teorema. *(Valor médio para integrais) Se* $f : [a,b] \to R$ *é uma função contínua, então existe* $p \in (a,b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(p)\cdot(b-a)$$

Capítulo XII

seqüências e séries de funções reais

"Ao Senhor, nosso Deus, pertencem a misericórdia e o perdão; pois nos rebelamos contra ele, e não temos obedecido à voz do Senhor, nosso Deus, para andarmos nas suas leis, que nos deu por intermédio de seus servos, os profetas." A Bíblia Sagrada, Daniel 9:9-10

XII.1. Seqüências de funções

183 Definição. *(seqüência de funções reais) Uma seqüência de funções reais é uma função $\varphi : N \to R$, que associa a cada $n \in N$ uma função $f_n : I \to R$, onde I é um conjunto da reta real. Podemos escrever o conjunto imagem de uma tal seqüência de funções como:*

$$\varphi(N) = \{f_1, f_2, f_3, ..., f_n, ...\}$$

75 Observação. *Algumas vezes usaremos o próprio conjunto imagem $\varphi(N)$ como sendo a seqüência e neste caso denotamos a seqüência de funções por uma das formas:*

$$\varphi(N) = \{f_n\}_{n\in N} = (f_n)_{n\in N} = (f_n)$$

118 Exemplo. *Seqüências de funções reais.*

1. $f_n(x) = x^n$
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$
3. $f_n(x) = 10$
4. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$

76 Observação. *(Sobre uma seqüência em um ponto) Seja (f_n) uma seqüência de funções reais definidas sobre um intervalo I da reta real. Para cada $a \in I$ fixado, a seqüência de funções (f_n) se transformará em uma seqüência numérica $(f_n(a))_{n\in N}$.*

119 Exemplo. *Para $f_n : [-1, 1] \to R$, definida por $f_n(x) = x^n$, se tomarmos $a = 1/2$, obteremos a seqüência real $f_n(1/2) = (1/2)^n = 2^{-n}$.*

184 Definição. *(Convergência simples) Uma seqüência (f_n) de funções reais definidas sobre um intervalo $I \subset R$ converge (pontualmente) em $x = a$ para o valor $\ell_a \in R$ se, para cada $\varepsilon > 0$ e arbitrário, existe um índice $n_0 = n_0(\varepsilon, a) \in N$ tal que para todo $n > n_0$, vale:*

$$|f_n(a) - L_a| < \varepsilon$$

Indicamos este fato por:

$$L_a = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$$

185 Definição. *(Convergência simples em um intervalo) Diz-se que uma seqüência (f_n) é convergente (ou converge) para uma função $f : I \to R$ sobre um intervalo I da reta se ela é convergente para todo $x \in I$. Neste caso:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

186 Definição. *(Convergência uniforme) Seja (f_n) uma seqüência de funções reais definidas sobre um intervalo I da reta. Diz-se que esta seqüência é uniformemente convergente em I para a função $f : I \to R$ (limite uniforme) se, para todo $x \in I$ e para cada $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in N$* **(não depende de x)** *tal que para todo $n > N_0$ tem-se que:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Também indicamos este fato por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Exercício: Se uma seqüência (f_n) converge uniformemente, então (f_n) converge.

77 Observação. *Se uma seqüência (f_n) converge para uma função f, todas as (f_n) definidas sobre um intervalo I da reta, escrevemos:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

78 Observação. *(Problema principal com a convergência) Se a seqüência (f_n) é formada, respectivamente, por funções contínuas, diferenciáveis e integráveis, é verdade que a função limite f também tem a mesma propriedade?*

79 Observação. *(Troca dos limites, continuidade e seqüências) Afirmar que a função contínua f é o limite de uma seqüência de funções reais contínuas (f_n) num ponto $x = a$ é o mesmo que garantir a troca dos limites na relação abaixo:*

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

120 Exemplo. *(Uma seqüência dupla) Seja a seqüência real dupla, definida por*

$$f(m,n) = \frac{m}{m+n}$$

Para cada $n \in N$ fixado, tem-se que $\lim_{m\to\infty} f(m,n) = 1$, logo $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f(m,n) = 1$ e para cada $m \in N$ fixado $\lim_{n\to\infty} f(m,n) = 0$, logo $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(m,n) = 0$. Desse modo:

$$1 = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f(m,n) \neq \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(m,n) = 0$$

80 Observação. *O exemplo apresentado mostra que, nem sempre podemos trocar a ordem nos limites duplos de seqüências de números reais, quanto mais quando estivermos trabalhando com seqüências de funções, que são objetos matemáticos mais complexos.*

121 Exemplo. *Situações interessantes.*

① **A função limite é contínua**: *Seja a seqüência de funções* (f_n) *definida por* $f_n(x) = x^n$ *onde* $n = 1, 2, 3, ...$, $x \in (0, 1)$. *Esta é uma seqüência de funções contínuas cujo limite* f *é a função contínua definida por* $f(x) = 0$.

② **A função limite não é contínua**: *Seja a seqüência de funções* (f_n) *definida por* $f_n(x) = x^n$ *onde* $n = 1, 2, 3, ...$, $x \in (0, 1]$. *Esta é uma seqüência de funções contínuas cujo limite* f *não é uma função contínua.* f *é definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 < x < 1 \\ 1 & se \quad x = 1 \end{cases}$$

③ **Convergência simples mas não uniforme**: *Consideremos a seqüência de funções definida por:*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n-|x|}{n} & se \quad |x| < n \\ 0 & se \quad |x| \geq n \end{cases}$$

Esta é uma seqüência de funções contínuas que, para cada x *fixado, converge para a função* $f(x) = 1$, *mas a convergência não é uniforme em toda a reta real.*

④ **Soma de funções contínuas não é uma função contínua**: *Seja a seqüência* (f_n) *definida por:*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}$$

onde $n = 1, 2, 3, ...$, $x \in R$ *e a série que define a função*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}$$

Esta é uma série geométrica. É fácil observar que $f_n(0) = 0$ *logo*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ 1 + x^2 & se \quad x \neq 0 \end{cases}$$

167 Teorema. *Uma seqüência de funções* (f_n) *definida sobre o conjunto* $I \subset R$ *é uniformemente convergente para uma função* f *definida sobre* I *se, e somente se, a seqüência de números reais* (M_n) *definida abaixo convergir para* 0, *isto é, quando* $n \to \infty$:

$$M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Esta última expressão nos garante que a maior distância entre as funções f_n *e* f *deve convergir para* 0, *quando* $n \to \infty$.

122 Exemplo. *A seqüência de funções definida sobre* $[0, 1]$ *por* $f_n(x) = x^n$ *converge simplesmente para a função (descontínua)*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & se \quad x = 1 \end{cases}$$

Aqui, a convergência não é uniforme pois, se tomarmos x *próximo de 1, teremos que*

$$M_n = \sup_{n \to \infty} |f_n(x) - f(x)| \to 1$$

123 Exemplo. *Interpretação geométrica da convergência uniforme. A convergência uniforme de $f_n \to f$, admite uma interpretação geométrica interessante. Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma faixa de altura 2ε construída em torno da função f de modo que a partir de um certo N_0, todas as funções da seqüência (f_n) com índice $n > N_0$ estão contidas entre os gráficos das funções $f + \varepsilon$ e $f - \varepsilon$.*

124 Exemplo. *Seja a seqüência de funções definida para $x \in R$, por:*

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

Esta seqüência converge uniformemente para $f \equiv 0$, definida sobre a reta real. Dado $\varepsilon = 1/10$, existe o índice natural $N_0 = 10$ tal que para todo $n > 10$, tem-se que os gráficos das funções f_n estão entre os gráficos de $y = -1/10$ e $y = 1/10$.

168 Teorema. *(Critério de Cauchy para seqüências de funções) Uma seqüência de funções (f_n) converge uniformemente para uma função f sobre um conjunto $I \subset R$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_o = N_o(\varepsilon)$ tal que para $n > N_o$ e para todo $m > N_o$ tem-se que:*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in I$.

XII.2. Convergência uniforme e continuidade

169 Teorema. *(Troca dos limites) Se (f_n) é uma seqüência de funções* **uniformemente** *convergente para f sobre um conjunto $I \subset R$, a é um ponto de acumulação de I e $A_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$. Então:*

1. *(A_n) é convergente.*
2. *$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n$.*
3. *$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$.*

170 Teorema. *(Continuidade do limite) Se (f_n) é uma seqüência de funções* **contínuas** *definidas sobre $I \subset R$ que converge* **uniformemente** *para f, então f é contínua.*

XII.3. Séries de funções

187 Definição. *(Série de funções) Seja $\varphi : N \to R$ uma seqüência de funções reais cuja imagem é dada por*

$$\varphi(N) = \{f_1, f_2, f_3, ..., f_n, ...\}$$

Uma série de funções é uma soma infinita dos termos φ, indicada por uma das formas:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n + ...$$

onde essas funções são definidas sobre um intervalo I da reta. Por abuso de notação escrever-emos a variável x na série de funções, assim para cada $x \in I$, escrevemos:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x) + ...$$

188 Definição. *(n-ésima reduzida de uma série) Seja $\varphi : N \to R$ uma seqüência de funções reais cuja imagem seja dada por $\varphi(N) = \{f_1, f_2, f_3, ..., f_n, ...\}$. A partir daí é possível definir* **outra** *seqüência de funções, indicada por*

$$(S_k)_{k\in N} = (S_n) = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...\}$$

que é a seqüência das reduzidas (n-ésima soma parcial) da série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ definida por:

$$\begin{aligned} S_1(x) &= f_1(x) \\ S_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ S_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \\ S_4(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) \\ ... &= ... \\ S_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x) \end{aligned}$$

Em geral, a n-ésima reduzida é dada por:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

XII.4. Convergência de séries de funções

189 Definição. *(Convergência simples de série de funções) Uma série de funções $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ definida sobre um conjunto $I \subset R$ converge para a função $S : I \to R$ se, a seqüência das reduzidas é convergente para S, isto é:*

$$S_n(x) \to S(x)$$

para cada $x \in I$. Quando isto acontece, escrevemos:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

e a função S é a soma desta série de funções.

190 Definição. *(Convergência uniforme de série de funções) Uma série de funções $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ definida sobre um conjunto $I \subset R$ é* **uniformemente** *convergente para a função $S : I \to R$ se, a seqüência das reduzidas é* **uniformemente** *convergente para S sobre o conjunto I.*

191 Definição. *(Resto de uma série de funções) Define-se o resto de uma série de funções* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *todas elas definidas sobre um conjunto* $I \subset R$*, como*

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

e este resto pode ser entendido da seguinte forma: Se a série acima converge uniformemente para a função S*, então:*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

logo

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

e a seqüência dos restos convergirá uniformemente para 0*, pois:*

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) \to 0$$

81 Observação. *(Convergência uniforme versus absoluta) Nem sempre a convergência uniforme de uma série de funções garante a convergência da série com os valores absolutos das funções, como é o caso da série definida para* $x \in R$*, por:*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2 + k}$$

XII.5. Critérios para convergência uniforme

Tendo em vista a importância das séries uniformemente convergentes, apresentaremos dois critérios fáceis para analisar a convergência uniforme: 1. Critério dos majorantes de Weierstrass, 2. Critério de Cauchy.

192 Definição. *(Séries majorantes) Uma série numérica de termos não negativos* $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ *é majorante para uma série de funções* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *se para todo* $x \in I$ *e para todo* $k \in N$*, vale*

$$|f_k(x)| \leq M_k$$

171 Teorema. *(Majorantes de Weierstrass) Se existe uma série majorante* **convergente** *para uma série de funções, definida sobre um conjunto* $I \subset R$*, então a série de funções será* **uniformemente convergente** *sobre* I*. A demonstração segue da desigualdade triangular.*

125 Exemplo. *A série de funções*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$$

é uniformemente convergente em todo R, pois ela é majorada pela série numérica convergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

172 Teorema. *(Critério de Cauchy para convergência uniforme de séries) Uma série de funções* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *converge uniformemente sobre um conjunto I se, para todo* $x \in I$ *e para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $N_0 = N_0(\varepsilon)$ *tal que para todo* $n > N_0$ *e para todo* $m > N_0$*, tem-se que:*

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

82 Observação. *(Sobre a continuidade do limite) Na topologia dos espaços usuais de funções, a soma de um número* **finito** *de funções contínuas é uma função contínua, mas a soma de um número* **infinito** *de funções contínuas poderá não ser uma função contínua. Isto se estende para a diferenciabilidade e integrabilidade de funções.*

173 Teorema. *(Propriedades das séries uniformemente convergentes) Seja uma série das funções* (f_n) *que converge uniformemente para a função S sobre o conjunto* $I \subset R$*, isto é:*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

1. *Se cada* $f_n = f_n(x)$ *é contínua em* $x = a \in I$*, então a soma* $S = S(x)$ *também é contínua em* $x = a$*.*
2. *Se cada* $f_n = f_n(x)$ *é integrável em um intervalo* $J \subset I$*, então a soma* $S = S(x)$ *também é integrável em* $J \subset I$*.*
3. *Se cada* $f_n = f_n(x)$ *é continuamente diferenciável sobre um intervalo* $J \subset I$*, a série das derivadas*

   $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k{}'(x)$$

   é uniformemente convergente no intervalo J, então a soma $S = S(x)$ *também é diferenciável em* $J \subset I$ *e*

   $$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k{}'(x)$$

126 Exemplo. Integração termo a termo *Seja a seqüência de funções* $u_k(x) = kx.e^{-kx^2}$ *definida sobre* $x \in [0, 1]$*. Construindo a série*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [u_k(x) - u_{k-1}(x)]$$

observamos que $\int_0^1 S(x)dx = 0$ *mas temos que a seqüência de reduzidas* (S_n) *desta série é dada por* $S_n(x) = nx.e^{-nx^2}$ *assim*

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} [u_k(x) - u_{k-1}(x)]dx = \int_0^1 nx\, e^{-nx^2} dx = \frac{1 - e^n}{2} \to \frac{1}{2}$$

A série apresentada não é uniformemente convergente no intervalo $[0,1]$ *mas se cada função* f_n *fosse contínua então teríamos garantido a integrabilidade da soma S desta série.*

XII.6. Séries de Potências

193 Definição. *(Série de potências reais) Uma série de potências reais é uma série de funções da forma*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ...$$

sendo que $x = a$ *é o ponto em torno do qual a série está desenvolvida e os expoentes são números inteiros não negativos.*

83 Observação. *Uma série de potências generaliza o conceito de polinômio real e dependendo da região onde os valores de x estão definidos, a série poderá convergir ou não. Estas informações valem para séries de números reais ou complexos.*

127 Exemplo. *A série de potências* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *converge em toda a reta real, a série* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{5^k}$ *converge no intervalo* $(-5,5)$ *e a série* $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$ *é converge somente no ponto* $x = 0$.

194 Definição. *(Região e raio de convergência) O conjunto de todos os valores x onde uma série de potências converge é denominado região (ou intervalo) de convergência e o maior raio do intervalo contido nesta região é o* **raio de convergência** *desta série.*

84 Observação. *Nos exemplos acima, os raios de convergência das séries, são respectivamente:* $+\infty$, 5 *e* 0.

128 Exemplo. *A série* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{5^k}$ *converge absolutamente no intervalo* $I = \{x \in R : |x-3| < 5\}$, *converge em* $x = -2$ *e não converge em* $x = 8$.

85 Observação. *Toda série de potências construída em torno do ponto* $x = a$, *converge neste ponto que é denominado o centro do intervalo de convergência.*

174 Teorema. *(Critério de convergência para séries de potências) Se uma série de potências construída em torno do ponto* $x = a$*:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

converge em um ponto $x = x_0$, *então esta série converge para todo ponto x que satisfaz à desigualdade:*

$$|x-a| < |x_0-a|$$

A demonstração deste critério segue da comparação de duas séries numéricas.

175 Teorema. *(Raio de convergência) Seja uma série de potências construída em torno do ponto $x = a$:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

e

$$L = \lim_{n\to\infty} \|\frac{c_{n+1}}{c_n}\|$$

Então, o raio de convergência desta série é dado por

$$r = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \|\frac{c_n}{c_{n+1}}\|$$

A demonstração deste fato segue do critério da razão para séries numéricas.

176 Teorema. *(Produto de Cauchy para séries de potências) O produto de Cauchy de duas séries de potências*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x-a)^k \qquad e \qquad \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x-a)^k$$

é uma outra série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-a)^k$$

tal que para cada $k = 0, 1, 2, 3, ...$, se tem que:

$$C_k = \sum_{j=0}^{k} A_j B_{k-j} = A_0B_k + A_1B_{k-1} + ... + A_kB_0$$

Exercício sobre produto de séries: Sabendo que para todo $|x| < 1$ vale:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

realizar o produto de Cauchy desta série por ela mesma.

86 Observação. *Se definirmos*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$$

ficará claro que o domínio de f deverá ser a região de convergência da série de potências, mostrando assim que f está bem definida.

195 Definição. *(Igualdade de séries de potências) Sejam duas séries de potências*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k\,(x-a)^k \quad e \quad \sum_{k=0}^{\infty} B_k\,(x-a)^k$$

Dizemos que estas séries são iguais se, para todo $k = 0, 1, 2, 3, ...$ temos que

$$A_k = B_k$$

177 Teorema. *(Propriedades das séries de potências) Seja a série de potências é definida por*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (x-a)^k$$

em sua região de convergência.

1. *A função f é contínua em $x = a$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = c_0$ e f é uniformemente contínua na região de convergência.*

   Demonstração. Como

   $$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, (x-a)^k = (x-a) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, (x-a)^{k-1}$$

   e como esta última série converge absolutamente na região de convergência da série original, então existe um número real finito $M > 0$ tal que

   $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, (x-a)^{k-1} < M$$

   logo

   $$|f(x) - f(a)| \leq M|x-a|$$

   donde segue a continuidade em $x = a$ e também a continuidade uniforme em toda a região de convergência da série. □

2. *A derivada da função f é igual à derivada termo a termo da série, i.e.*

   $$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \, c_k \, (x-a)^{k-1}$$

   e a nova série converge uniformemente na mesma região de convergência que a série dada.
3. *A integral da função f coincide com a integral termo a termo da série, isto é:*

   $$\int_{y=a}^{y=x} f(y)dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k} \, (x-a)^{k+1}$$

   e a nova série converge uniformemente na mesma região de convergência que a série dada.

87 Observação. *Muitas vezes o centro $x = a$ do intervalo de convergência pode ser tomado como $x = 0$, uma vez que ocorrerá apenas uma translação do intervalo de convergência, mas as propriedades das séries transladadas serão as mesmas.*

129 Exemplo. *A importante série geométrica.*

① *Uma das mais importantes séries de potências é a série definida para todo $|t| < 1$ como:*

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

② *Com a troca $t = -x$, obtemos:*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, x^k$$

③ *Com a troca $t = x^2$, obtemos:*

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

④ *Integrando termo a termo a série*

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k$$

entre $t = 0$ e $t = x$, obtemos:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \, x^{k+1}$$

⑤ *Derivando termo a termo a série*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

obtemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \, x^{k-1}$$

88 Observação. *(Analiticidade versus Série de potências) Se uma série de potências está bem definida sobre um intervalo e $R > 0$ é o raio de convergência da série, então esta série representa uma função analítica em todos os pontos do interior deste intervalo e convergência. Além disso, a derivada da função soma pode ser obtida pelo somatório das derivadas dos termos da série.*

XII.7. Séries de Taylor e de MacLaurin

As séries de Taylor e de MacLaurin são ferramentas fundamentais no Cálculo Diferencial e Integral, bem como nas suas aplicações.

196 Definição. *(Séries de Taylor e de MacLaurin) Seja f uma função infinitamente diferenciável de forma que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

sendo a série desenvolvida em torno de $x = a$. Esta é a série de Taylor da função f se para todo $k = 0, 1, 2, 3, ...$:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Se $a = 0$ na série de Taylor, temos a série de MacLaurin de f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, x^k$$

onde para todo $k = 0, 1, 2, 3, ...$:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

178 Teorema. *(Existência da Série de MacLaurin) Uma condição para que exista a série de MacLaurin de uma função f infinitamente diferenciável nos pontos da região de convergência da série, é que todas as derivadas sejam limitadas na região, isto é, deve existir um número real finito $M > 0$ tal que para todo $k = 0, 1, 2, 3, ...$, tem-se:*

$$\|f^{(k)}(x)\| \leq M$$

para todo x na região de convergência da série.

197 Definição. *(Desenvolvimento binomial) Seja $\alpha \in R$ e a função real f, definida por $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ com a condição que $(1 + x) > 0$. Se calcularmos os coeficientes da série de MacLaurin desta função, obteremos:*

$$c_k = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) = \frac{\alpha!}{k!(\alpha - k)!} = \frac{(\alpha)(\alpha - 1)(\alpha - 2)...(\alpha - k + 1)}{1 \; 2 \; 3 \; ... \; k}$$

para $k = 0, 1, 2, 3, ...$

A partir desses cálculos, poderemos escrever:

$$(1 + x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) x^k$$

que representa uma série se $|x| < 1$ extremamente útil no contexto científico e principalmente nas aplicações.

89 Observação. *(Método prático para obter a série de MacLaurin) Existe um método bastante simples para obter a série de MacLaurin de uma função racional através da divisão longa. Você pode obter mais informações sobre o assunto no link "Seqüências de Fibonacci" em* `http://mat.uel.br/matessencial`

Capítulo XIII

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

> "Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam, e a prova das coisas que não se vêem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê." A Bíblia Sagrada, Hebreus 11:1-3

O símbolo $\int_a^b f$ é usado para a integral de uma função sobre um intervalo com extremidades a e b, mas nem sempre a função é limitada e nem mesmo o intervalo tem extremidades finitas. Construímos as integrais impróprias para resolver estes problemas. Tais integrais são importantes aplicações da Matemática às ciências e alguns exemplos são as transformadas de Laplace e as funções Gama e Beta.

XIII.1. Integrais impróprias

198 Definição. *(Integrais impróprias) Integrais impróprias são integrais da forma $\int_a^b f$, onde ou f não é limitada ou as extremidades a e b do intervalo sobre a qual se calcula a integral não são finitos. Tais integrais são calculadas através de limites e existem dois tipos.*

- **1a. ordem**: *Funções não são limitadas sobre intervalos limitados.*
- **2a. ordem**: *Funções limitadas sobre intervalos não limitados.*

130 Exemplo. *Algumas integrais impróprias.*

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ 2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ 3. $\int_0^\infty e^{-x}dx$ 4. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ 5. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$

199 Definição. *(Integrais impróprias de 1a. ordem) Se f não é limitada sobre um intervalo $|a,b|$, são possíveis duas situações:*

1. $\int_{a+}^b f$ *realizada à direita de a no intervalo $|a,b|$.*
   Consideramos f limitada sobre cada intervalo $[r,b]$ para cada $r > a$ e definimos a integral

imprópria à direita de a, por

$$\int_{a+}^{b} f = \lim_{r\to a}\int_{r}^{b} f$$

2. $\int_{a}^{b-} f$ *realizada à esquerda de b no intervalo* $|a,b|$.
Consideramos f limitada sobre cada intervalo $[a,R]$ *para cada* $R<b$ *e definimos a integral imprópria à esquerda de b, por*

$$\int_{a}^{b-} f = \lim_{R\to b}\int_{a}^{R} f$$

131 Exemplo. *Integrais impróprias de primeira ordem.*

① *Função não limitada, intervalo com extremidades finitas.*

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{r\to 0}\int_r^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{r\to 0}[\ln(x)]_r^1 = +\infty$$

② *Função não limitada, intervalo com extremidades finitas.*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{r\to 0}\int_r^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{r\to 0}[\frac{-1}{x}]_r^1 = +\infty$$

200 Definição. *(Integrais impróprias de 2a. ordem) Se f é limitada sobre um intervalo cujas extremidades não são limitadas, há duas possibilidades para as integrais impróprias através de limites:*

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f$$

e

$$\int_{-\infty}^{b} f = \lim_{r\to-\infty}\int_r^b f$$

132 Exemplo. *Integrais impróprias de segunda ordem.*

① *Função limitada, intervalo com uma extremidade infinita.*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x}dx = \lim_{r\to\infty}[\ln(x)]_1^R = +\infty$$

② *Função limitada, intervalo com uma extremidade infinita.*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^R = 1$$

③ *Função limitada, intervalo com extremidades infinitas.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

pois a função $f(x) = 1/(1+x^2)$ *é par e além disso*

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty}[\arctan(x)]_0^R = \pi/2$$

201 Definição. *(Convergência de integrais impróprias) Diz-se que uma integral imprópria converge se, o valor numérico do cálculo do limite após realizar a integral interna resultar em um número finito. Se a integral não converge, diz-se que ela diverge.*

Exercício: Para cada $n \in N$, obtenha uma relação recursiva para as funções reais definidas por

$$f_n(x) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx$$

XIII.2. Integrais impróprias e séries reais

Seja $f : [a, \infty) \to R$ uma função contínua tal que $f \geq 0$ sobre o intervalo $[a, \infty)$ e consideremos para cada $n \in N$:

$$a_n = \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)\, dx$$

A integral imprópria

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

será convergente se, e somente se, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente.

133 Exemplo. *Integrais impróprias versus séries.*

① *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente porque* $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty$.

② *Seja* $p < 1$. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *é divergente.*

③ *Seja* $p > 1$. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *é convergente porque* $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx < \infty$.

XIII.3. Aplicações das integrais impróprias

202 Definição. *(Transformada de Laplace) Se a função f satisfaz a algumas condições de limitação de tipo exponencial sobre o intervalo $(0, \infty)$, é possível obter a transformada de Laplace de f, que é uma outra função que depende de um parâmetro $s \in (0, \infty)$, sendo esta transformada definida por:*

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-s.x}\, dx$$

90 Observação. *A transformada de Laplace é muito usada no contexto de Equações Diferenciais Ordinárias e nas aplicações para resolver um Problema com valor inicial (PVI).*

134 Exemplo. *Para a função $f(x) = x^k$, onde $x \in R$ e $k = 0, 1, 2, 3, ...$, obtemos*

$$\mathcal{L}(x^k)(s) = \int_0^\infty x^k e^{-s.x} dx = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

e como esta integral imprópria é convergente para $s > 0$, então em particular, para $s = 1$, temos que:

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}\, dx = k!$$

e aqui temos a definição do fatorial *de um número inteiro não negativo e a justificativa para o fato (não justificado antes), que*

$$0! = 1$$

Com a transformada de Laplace de $f(x) = x^{k+1}$ podemos mostrar que, para $s = 1$, vale a relação recursiva

$$k! = k \cdot (k-1)!$$

que é a definição recursiva de fatorial de um número inteiro não negativo.

203 Definição. *(Função Gama) A função Gama é uma função útil em diversos ramos científicos e estende a definição de fatorial a número real x exceto para os números inteiros negativos, para os quais a integral imprópria é divergente. Esta função é definida por:*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du$$

Da forma como foi definida, é possível mostrar que para $k = 0, 1, 2, 3, ...$, vale:

$$\Gamma(k+1) = k.\Gamma(k)$$

o que justifica a afirmação anterior.

Nas aplicações, é de grande interesse o cálculo da função Gama quando o parâmetro x é muito grande e uma aproximação nesse caso é dada pela fórmula de Stirling

$$x! = \Gamma(x+1) \approx x^x\, e^{-x}\ \sqrt{2\pi x}$$

204 Definição. *(Função Beta) A função Beta é muito útil em Estatística e é definida para dois parâmetros $p > 0$ e $q > 0$ através de:*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

Esta função pode ser expressa através da função Gama, como:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Bibliografia

[1] Alencar Filho, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. Nobel. S.Paulo. 1969.

[2] Alencar Filho, E. *Aritmética dos inteiros*. Livraria Nobel. S.Paulo. 1987.

[3] Amoroso Costa, M. *As idéias Fundamentais da Matemática e outros ensaios*, Editora Convívio e EDUSP, S.Paulo. 1981.

[4] Ávila, G. *Análise Matemática para Licenciatura*, Edgard Blücher, S.Paulo. 2001.

[5] Ayres Jr, F. *Álgebra Moderna*. Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda. S. Paulo. 1971.

[6] Ball, D.G. *An Introduction to Real Analysis*, Pergamon Press, Oxford. 1973.

[7] Barbosa, R.M. *Elementos de Lógica aplicada ao ensino secundário*, Livraria Nobel. S.Paulo. 1970.

[8] Bassanezzi, R.C. e Ferreira Jr., W.C. *Equações Diferenciais com aplicações*, Editora Harbra Ltda. S.Paulo. 1998.

[9] Boyer, Carl. B. *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher, S.Paulo. 1974.

[10] Castrucci, B. *Introdução à Lógica Matemática*. Nobel. São Paulo. 1973.

[11] Dieudonné, J. *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press International Edition, 1969.

[12] Eves, Howard *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp. Campinas-SP. 2002.

[13] Figueiredo, D.G. *Análise I*, Edit. Universidade de Brasília e LTC Editora, Rio, 1975.

[14] Gaughan, E. *Introducción al análisis*, Editorial Alhambra, Madrid. 1972.

[15] Jacy Monteiro, L. H. *Iniciação às Estruturas Algébricas*. Nobel. S.Paulo, 1968.

[16] Kaplan, W. *Cálculo Avançado, vols. 1 e 2*, Edgard Blücher, Ed. da Univ. de São Paulo, S.Paulo. 1972.

[17] Korn, H.R. & Liberi, A. W. *An Elementary to Functions*, Mc-Graw Hill, 2nd. edition. New York. 1978.

[18] Kreider, Kuller, Ostberg., *Equações Diferenciais*, Edit. Edgard Blucher Ltda. S.Paulo. 1972.

[19] Kurosh, A.G. *Curso de Álgebra Superior*. Editorial Mir. Moscu. 1968.

[20] Lang,S. *Analysis I*. Addison-Wesley. Reading, Massachusets. 3rd. printing. New York. 1973.

[21] Lick, D.R. *The Advanced Calculus of One Variable*, Appleton, Century, Crofts, New York, 1971.

[22] Lima, E.L. *Análise na Reta*, Impa, Rio de Janeiro.

[23] Lipschutz, S. *Teoria dos Conjuntos*. Ao Livro Técnico. Rio. 1967.

[24] Seeley, R.T. *Calculus of One Variable*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1968.

[25] Sodré, U. *Análise na reta* (Notas de aulas), Dep. de Matemática, Univ. Estadual de Londrina, 1982, 1999, 2001, 2005, 2006.

[26] Sodré, U. *LaTeX Básico com o TeXnicCenter*, Apostila para construção de trabalhos de Matemática com o LaTeX. Dep. de Matemática. UEL. Londrina-PR. 2005.

[27] Suppes, P. e Hill, S. *Introduccion a la lógica matemática* Editorial Reverté. Barcelona. 1963.

[28] Universidade Federal do Rio de Janeiro, *Um Guia em Matemática*, Rio. 1969.

[29] Viswanathan, T.M. *Introdução à Álgebra e Aritmética*. Monografia de Matemática no.33. IMPA. Rio. 1979.

[30] White, A.J. *Análise Real: Uma introdução*, Edgard Blücher, S.Paulo. 1973.

[31] Youse, B.K. *Introduction to Real Analysis*, Allyn and Bacon, Inc, Boston, 1972.

Índice

Área de uma região, 144
Ínfimo de um conjunto, 69

Aderência de um conjunto, 105
Aplicação, 32
  bijetiva, 34
  binária, 44
  composta, 34
  identidade, 34
  injetiva, 34
  inversa, 35
  inversa à direita, 35
  inversa à esquerda, 35
  sobrejetiva, 34

Classe de equivalência, 39
Classes de diferenciabilidade, 139
Cobertura, 110
Compacto, 110
Conectivos, 13
Conjunto
  aberto, 104
  bem ordenado, 56
  complementar, 29
  completo, 100
  conexo, 131
  contável, 40
  de números positivos, 48
  denso, 68
  dos números pares, 32
  enumerável, 40
  fechado, 104
  finito, 40
  imagem de uma seqüência, 74
  indutivo, 50
  limitado, 59
  N dos dos números naturais, 50
  Q dos números naturais, 65
  R dos números reais, 44, 68
  Z dos números inteiros, 59
Conjuntos
  diferentes, 28
  disjuntos, 20, 29
  equivalentes, 38
  iguais, 20, 28
Contradição, 16
Contradomínio, 32
Convergência, 74
  absoluta, 116
  condicional, 116
  integral imprópria, 163
  simples, 149, 150, 153
  uniforme, 150, 153
Corpo, 47
  arquimediano, 66
  ordenado, 49
  ordenado completo, 70
Critério
  Cauchy, 116
  Comparação de séries, 117
  Raiz, 119
  Razão, 117
  Séries alternadas, 118
  Termo geral, 116

Derivada
  em um conjunto, 134
  em um ponto, 134
  lateral, 135
  lateral à direita, 135
  lateral à esquerda, 135
Derivado de um conjunto, 108
Desenvolvimento binomial, 160
Desigualdade de Bernoulli, 76
Distância entre pontos na reta, 49
Distributividade, 46
Divergência para $+\infty$, 80
Divergência para $-\infty$, 80

Domínio, 32

Extensão de uma aplicação, 33
Extremos e Meios em uma PA, 90

Fórmula do termo geral da PG, 93
Função
    Beta, 164
    crescente, 84
    diferenciável em um ponto, 135
    Gama, 164
    limitada, 125
    limitada inferiormente, 125
    limitada superiormente, 125
    Lipschitziana, 133
    Raiz quadrada, 84
    Uniformemente contínua, 133
Função contínua
    em um conjunto, 126
    em um ponto, 126
    por intervalos, 130
Funções monótonas reais, 126

Gráfico de uma seqüência, 73
Grupo, 45

Harmônico global, 83

Igualdade
    séries de potências, 157
    séries reais, 120
Imagem
    de uma aplicação, 32
    direta de conjunto, 36
    inversa de conjunto, 36
Integrais impróprias, 161
Integral de uma função real, 143
Interior de um conjunto, 103
Interpolação
    aritmética, 91
    geométrica, 94
Interseção de conjuntos, 29
Intervalo
    aberto, 101
    fechado, 101
    na reta, 131
Intervalos encaixantes decrescentes, 102
Isomorfismo, 46
    entre corpos, 47
    entre grupos, 46

Limitante, 59
    inferior em R, 68
    inferior em Z, 59
    superior em R, 68
    superior em Z, 59
Limite
    da potência n-ésima C, 77
    da potência n-ésima de n, 78
    da raiz n-ésima de C, 77
    de uma função em um ponto, 121
    lateral à direita, 123
    lateral à esquerda, 123
Limites infinitos, 124

Máximo, 50
    de um conjunto, 56
    em um conjunto de inteiros, 60
    entre números inteiros, 26
    local, 137
Média
    aritmética, 82
    geométrica, 82
    harmônica, 82
Módulo, 49
Módulo de uma função, 128
Mínimo, 50
    de um conjunto, 56
    em um conjunto de inteiros, 60
    entre números inteiros, 26
    local, 137
Maior inteiro menor ou igual a x, 62
Medida de um intervalo, 101

n-ésima reduzida de uma série, 153
Número
    de Euler, 85
    e de Euler, 87
    inteiro, 59
    irracional, 66
    natural, 51
    racional, 66
Norma de uma partição, 141

Operações binárias, 45

PA, 83
Par ordenado, 31
Partição, 141
PG, 83
PH, 83
Ponto
de acumulação, 106
de aderência, 105
interior, 103
isolado, 107
Potências com expoentes naturais, 57
Potências com expoentes negativos, 63
Princípio da Boa Ordem, 60
Princípio de Indução Matemática, 51
Princípio fraco de indução, 51
Produto cartesiano, 31
Produto de Cauchy, 120
Produto de número por conjunto, 32
Progressão Aritmética finita, 88
Progressão Geométrica finita, 92
Progressões Aritméticas finitas, 88
Progressões Aritméticas monótonas, 89
Progressões geométricas finitas, 93
Progressões Geométricas monótonas, 94
Proposição, 12
Proposição lógica, 12
Propriedades das potências, 58
Propriedades das seqüências, 99
Propriedades do módulo, 50

Quantificadores, 22

Raiz quadrada, 66
Região e raio de convergência, 156
Regra da cadeia, 137
Regra de L'Hopital, 138
Regra do sanduíche, 75
Relação, 32
Relação de equivalência, 39
Relação de ordem, 40
Relação de ordem em um corpo, 48
Relação de Stifel, 75
Resto de ordem n de uma série, 115
Resto de uma série de funções, 154
Restrição de uma aplicação, 33
Reunião de conjuntos, 29

Série de funções, 152
Série de potências reais, 156
Série numérica real, 113
Séries de Taylor e de MacLaurin, 159
Segundo Princípio de Indução Matemática, 51, 57
Sentenças equivalentes, 18
Seqüência
Cauchy, 99
convergente, 74
das reduzidas, 114
de Fibonacci, 73
funções reais, 149
limitada, 74, 80
monótona, 78
oscilante, 80
real, 72
recursiva, 73
Soma de uma série convergente real, 114
Soma de uma série geométrica, 95
Somas de Darboux de uma função, 142
Somas dos termos em uma PG, 95
Somatórios ou Somas finitas, 53
Subcobertura, 110
Subconjunto, 20, 28
próprio, 20, 29
Subseqüência, 79
Superconjunto, 28
próprio, 29
Supremo de um conjunto, 69

Tabelas-verdade com valores numéricos, 27
Tautologia, 16
Teorema
Arquimedes, 61
binomial, 76
Bolzano-Weierstrass, 109
Confronto, 75
Continuidade do limite, 152
Convergência absoluta, 117
Convergência do produto, 120
De Morgan, 21, 30
Fundamental do Cálculo, 148
Heine-Borel, 111
Integração por partes, 148

Integral por substituição, 148
Intervalos Encaixantes, 102
Majorantes de Weierstrass, 154
Rolle, 137
Taylor, 139
Troca dos limites, 152
Unicidade do limite, 123
Valor intermediário, 132
Valor médio, 137
Valor médio de Cauchy, 138
Valor médio para integrais, 148
Valores extremos, 131
Termo geral da PA, 88
Termos eqüidistantes dos extremos, 90
Transformada de Laplace, 163
Tricotomia, 49

Unicidade
do limite, 75
do máximo, 56
do mínimo, 56

Validade da
Bicondicional, 15
Condicional, 14
Conjunção, 13
Disjunção, 14
Negação, 14
Vizinhança de um ponto, 102