



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

WEBERTY DOMINGOS SILVA

**PROJEÇÕES DA CESTA DE SIERPINSKI**

---

Londrina  
2018

WEBERTY DOMINGOS SILVA

## PROJEÇÕES DA CESTA DE SIERPINSKI

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Londrina

2018



WEBERTY DOMINGOS SILVA

## PROJEÇÕES DA CESTA DE SIERPINSKI

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

### BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho  
Universidade Estadual de Londrina

---

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira  
Universidade de Brasília

---

Prof. Dr. Paulo Liboni Filho  
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 17 de março de 2018.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me concedido vida, saúde e ânimo para realizar este trabalho, à minha família pelo apoio e compreensão, ao professor Túlio, meu orientador e amigo, por ter me aceitado como aluno, apresentado a esta área da matemática e alguns dos problemas mais interessantes que já vi, por termos trabalhado juntos por estes 2 anos, na maior parte do tempo "dando murro em ponta de faca", mas às vezes conseguindo "acertar o alvo".

Agradeço a todos os companheiros do PGMAC, professores e alunos, que estiveram comigo nessa jornada, para mim todos foram de grande ajuda.

Agradeço à Capes pelo auxílio financeiro.

SILVA, Weberty Domingos. **Projeções da Cesta de Sierpinski**. 2018. 72 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

## RESUMO

Neste trabalho, estudamos a dimensão de Hausdorff de projeções da cesta de Sierpinski na reta. O problema de encontrar a dimensão de Hausdorff de certos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  é delicado, e tem despertado o interesse de muitos matemáticos desde a descoberta dos números transcendentos. A cesta de Sierpinski é um subconjunto do plano cuja dimensão de Hausdorff é 1 e, como consequência disto, um resultado de Marstrand se aplica ao garantir que um subconjunto do plano com dimensão maior ou igual a 1 possui projeções na reta com dimensão 1, para quase todas as direções. Furstenberg conjecturou que a dimensão da projeção da cesta de Sierpinski em uma direção irracional qualquer é 1, e este problema permaneceu aberto até 2014. Apresentamos uma releitura dos trabalhos de Kenyon sobre estes temas. Eles nos fornecem o valor da dimensão para números racionais e algumas estimativas para um subconjunto de irracionais.

**Palavras-chave:** Dimensão de Hausdorff, Projeções, Conjuntos de Cantor, Cesta de Sierpinski.

SILVA, Weberty Domingos. **Projections of the Sierpinski gasket**. 2018. 72 pages. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

### ABSTRACT

In this work we study the Hausdorff dimension of projections of the Sierpinski gasket. The problem of finding the dimension is delicate, and have risen attention of several mathematicians since the discovery of transcendental numbers. The Sierpinski gasket is a subset of  $\mathbb{R}^2$  with Hausdorff dimension equal to 1 and, as a consequence, a result due to Marstrand applies, ensuring that a subset of  $\mathbb{R}^2$  with Hausdorff dimension greater or equal to 1 have projections on  $\mathbb{R}$  with Hausdorff dimension equal to 1, for almost every direction. Furstenberg conjectured that the Hausdorff dimension of the projection of the Sierpinski gasket in an irrational direction should be 1. This problem remained open until 2014. We present a reading of Kenyon's work on these subjects. They provide us this dimension number for rational numbers and some estimatives for a certain subset of irrationals.

**Keywords:** Hausdorff dimension, Projections, Cantor sets, Sierpinski gasket.

## SUMÁRIO

### Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>12</b>
2.1	ALGUMAS DEFINIÇÕES E RESULTADOS . . . . .	12
2.2	A MEDIDA DE HAUSDORFF . . . . .	14
2.2.1	A Dimensão de Hausdorff . . . . .	16
2.3	A DIMENSÃO DE CONTAGEM DE CAIXAS . . . . .	17
2.4	SIMILARIDADES E CONJUNTOS AUTO-SIMILARES . . . . .	18
2.5	A CESTA DE SIERPINSKI . . . . .	25
2.5.1	Propriedades . . . . .	26
<b>3</b>	<b>PROJETANDO A CESTA DE SIERPINSKI</b>	<b>31</b>
3.1	PROPRIEDADES . . . . .	31
3.2	UM EXEMPLO . . . . .	34
3.2.1	Alternativa . . . . .	38
<b>4</b>	<b>A MEDIDA DE ALGUMAS PROJEÇÕES</b>	<b>47</b>
<b>5</b>	<b>A DIMENSÃO DAS PROJEÇÕES</b>	<b>61</b>
5.1	APLICAÇÕES DE GRAFOS A REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS . . . . .	61
5.2	A DIMENSÃO DA PROJEÇÃO EM DIREÇÕES RACIONAIS . . . . .	62
5.3	A DIMENSÃO EM UM CONJUNTO RESIDUAL DE DIREÇÕES . . . . .	67
5.4	COTAS INFERIORES DA DIMENSÃO . . . . .	68
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>71</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O conjunto dos números irracionais possui medida total na reta, e o conjunto dos números irracionais algébricos tem medida nula, o que nos leva ao fato de que os números transcendententes possuem medida total. No entanto, não conhecemos muitos conjuntos que possuem somente números transcendententes e tenha medida de Hausdorff maior que zero e menor que 1. De fato, Mahler [12] conjecturou que o conjunto de Cantor dos terços médios possui apenas números racionais (álgebricos de grau 1) e transcendententes.

Esta foi a ideia em que primeiramente nos baseamos para estudar: encontrar um conjunto de números transcendententes com medida de Hausdorff positiva, mas menor do que 1. Para isso, nos utilizamos de alguns aspectos da dinâmica da aplicação de Gauss, entre outros resultados conhecidos.

O ponto de partida é a sequência de Thue-Morse. Considere o conjunto  $\mathcal{A} = \{a, b\}$ , chamado alfabeto, e o conjunto de sequências finitas ou infinitas em  $\mathcal{A}$ , denotado por  $\mathcal{A}^*$ . Seja a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}^* \\ \varphi(x) &= \begin{cases} ab, & \text{se } x = a, \\ ba, & \text{se } x = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Além disso, dada uma palavra  $v$  em  $\{a, b\}^*$ ,  $\varphi(v)$  é a concatenação da aplicação em cada uma de suas letras. Por exemplo:  $\varphi(a) = ab$ ;  $\varphi(ab) = abba$ ;  $\varphi(abba) = abbabaab$ , e assim por diante. Note que cada palavra da sequência é o prefixo da palavra anterior. Usando a chamada métrica produto, temos que a sequência de Thue-Morse é o limite de  $\tau_n = \varphi^n(a)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Podemos substituir  $a$  e  $b$  por números naturais e obter uma sequência numérica. Por exemplo, usando  $a = 0$  e  $b = 1$ , temos:

$$\tau_1 = 0; \tau_2 = 01; \tau_3 = 0110 \quad \dots$$

Interpretando os dígitos como a expansão na base 2 de um número, tomando  $\tau$  como sendo o limite da sequência e  $t_n$ , o  $n$ -ésimo dígito de  $\tau$  temos:

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} t_n 2^{-n} = 0 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + 0 + \frac{1}{2^5} \dots$$

O limite desta sequência existe e é chamado de *constante de Thue-Morse*:

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(0) \simeq 0.412454033640 \dots$$

Este número não é algébrico e sua transcendência foi provada por Mahler em 1929 [6, 12, 17].

Uma outra abordagem que gera um número distinto, mas também transcendente, se dá no âmbito das frações continuadas, chamada fração continuada de Thue-Morse. Utilizando o mesmo raciocínio, mas tomando  $a = 1$  e  $b = 2$ , construímos uma sequência de números da seguinte forma:

$$r_n := [t_0, t_1, \dots, t_n]$$

em que  $[a_1, a_2, \dots]$  denota a representação em fração continuada:

$$[a_1, a_2, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Tomando o limite quando  $n$  tende ao infinito, obtemos um novo número  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ . Este número também é transcendente, o que foi provado por Queffélec [19] e, mais recentemente Adamczewski e Bugeaud [1, 2] apresentaram uma prova mais curta, usando o teorema dos subespaços de Schmidt e aproximações diofantinas.

Certo é que a aperiodicidade da sequência de Thue-Morse nos garante não apenas que o número  $r$  é transcendente, mas também suas imagens sob a aplicação de Gauss:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right]$$

Aplicando a transformação em  $r$ , obtemos  $\Gamma([t_0, t_1, \dots]) = [t_1, t_2, \dots]$ , o que a qualifica como o *shift* para frações continuadas. É como se "apagássemos" a primeira entrada e um novo número se iniciasse da segunda em diante. O importante aqui é que  $\Gamma(r)$  é um número transcendente, e o mesmo vale para  $\Gamma^n(r)$  qualquer que seja  $n$ . A ideia original desta dissertação foi tomar o fecho do conjunto gerado pelos shifts de  $r$  e calcular sua medida, na esperança de obter um valor estritamente positivo. No entanto, a propriedade de aperiodicidade da sequência é de fato fraca, o termo preciso de *penep periodicidade* é usado por alguns autores, etimologia da "fronteira" da periodicidade. Esta propriedade leva a que este conjunto tenha medida de Hausdorff nula, o que não era o desejado.

Para obter um conjunto de medida (de Hausdorff) positiva, precisamos considerar sequências mais aleatórias. Tentamos ainda conjuntos gerados por somas dos conjuntos anteriores. Não importa quantas vezes somamos o conjunto dos shifts de  $r$

com ele mesmo, nunca se poderia obter um conjunto de medida positiva, então, dado que a ideia inicial não nos forneceu resultados interessantes, tentamos uma abordagem distinta: a partir dos problemas abertos divulgados por Peres e Solomyak [18], escolhemos o trabalho de Kenyon [9] para uma leitura cuidadosa, que se apresenta nesta monografia.

O objetivo deste trabalho é calcular a dimensão de Hausdorff de projeções de um conjunto chamado *cesta de Sierpinski*, contido em  $\mathbb{R}^2$ , sobre a reta real. Um resultado de Marstrand [13] garante que dado um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  de dimensão maior ou igual a 1, suas projeções sobre a reta tem dimensão 1 a menos de um conjunto de medida nula de direções, ou seja, o conjunto de direções cuja dimensão da projeção é 1 tem medida total. A cesta de Sierpinski, como provaremos adiante, é um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  de dimensão 1 e, sobre as projeções deste conjunto, Furstenberg conjecturou que o conjunto de direções cuja dimensão da projeção é 1 continha os irracionais. O problema permaneceu em aberto por muito tempo, com alguns avanços no seu estudo. Kenyon mostrou que para racionais com certas propriedades vale que a dimensão da projeção é 1, e que para qualquer outro racional a dimensão é menor que 1. Além disso, para uma certa classe de irracionais que podem ser bem aproximados por racionais que satisfazem as propriedades (para que se tenha dimensão 1) igualmente tem-se que a dimensão da projeção é igual a 1. No entanto, o estudo de Kenyon não foi suficiente para que a conjectura se provasse verdadeira. A prova de que a dimensão é 1 para qualquer direção irracional foi feita por Hochman em 2014 [7]. Nesta monografia, apresentamos alguns resultados sobre a medida e dimensão das projeções da cesta de Sierpinski nos baseando nos trabalhos de Kenyon [8, 9], Mattila [14] e Falconer [3, 4].

## 2 PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é fundamentar, ainda que de forma sucinta, os resultados apresentados na dissertação.

O ponto de partida é um espaço métrico  $(X, \rho)$ , que assumiremos possuir pelo menos dois elementos, isto é,  $X$  é não-vazio e não-unitário, com vistas às aplicações na determinação da dimensão de Hausdorff.

### 2.1 ALGUMAS DEFINIÇÕES E RESULTADOS

**Definição 2.1.** *Seja  $U$  um subconjunto limitado e não vazio num espaço métrico  $(X, \rho)$ . Definimos o diâmetro de  $U$  como sendo:*

$$|U| = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in U\}.$$

Ou seja, o diâmetro é o supremo das distâncias entre quaisquer dois pontos de um conjunto não-vazio.

**Definição 2.2.** *Dado um conjunto  $X$ , definimos o conjunto das partes de  $X$  ( $\mathcal{P}(X)$ ) por:*

$$\mathcal{P}(X) = \{U : U \subset X\},$$

que é o conjunto de todos os conjuntos contidos em  $X$ .

**Definição 2.3.** *Dizemos que um conjunto  $A$  é fechado com relação a uma operação  $*$  se:*

$$\forall x, y \in A \quad x * y \in A.$$

**Definição 2.4.** *Dado um conjunto  $X$ , um subconjunto  $\Sigma$  de  $\mathcal{P}(X)$  é uma  $\sigma$ -álgebra se:*

- $X \in \Sigma$ ,
- $\Sigma$  é fechado com relação ao complemento,
- $\Sigma$  é fechado com relação a uniões enumeráveis.

**Definição 2.5.** *Dado um conjunto  $X$  e  $\Sigma$  uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  o par  $(X, \Sigma)$  é chamado de espaço mensurável. Sobre estas condições, um conjunto pertencente a  $\Sigma$  é dito mensurável.*

**Definição 2.6.** *Dado um conjunto  $X$  e uma  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$ , dizemos que uma função  $\mu$  que associa conjuntos de  $\Sigma$  a valores da semirreta estendida  $[0, \infty]$  é uma medida se satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- $\forall U \in \Sigma, \mu(U) \geq 0$ , e
- se  $U_i$  é uma coleção enumerável de conjuntos de  $\Sigma$  disjuntos então:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i).$$

A terceira propriedade é chamada  $\sigma$ -aditividade.

**Definição 2.7.** Uma medida exterior é uma função  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  satisfazendo

- $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- Se  $A \subset B$ , então  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ,
- $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ .

**Observação.** Dizemos que um conjunto  $U$  tem medida nula se  $\mu(U) = 0$  e dizemos que uma propriedade vale em quase todo ponto, ou q.t.p., se o conjunto de pontos onde esta propriedade não vale tem medida nula.

Uma medida bastante utilizada é a medida de Lebesgue. Usaremos aqui alguns resultados envolvendo esta medida e a medida exterior de Lebesgue.

**Definição 2.8.** Um subconjunto  $I$  de  $\mathbb{R}$  será chamado de elementar se  $I = [a, b]$ , com  $a \leq b$ . Para este conjunto, definimos  $\mu^*(I) = b - a$ .

Claramente, um subconjunto qualquer de  $\mathbb{R}$  está contido em uma união enumerável de conjuntos elementares, deste modo definimos a *medida exterior* como sendo:

$$\mu^*(U) = \inf \left\{ \sum \mu^*(I_j) : \bigcup_j I_j \supset U \right\},$$

em que cada  $I_j$  é um conjunto elementar.

Seja agora  $A$  um conjunto com  $\mu^*(A) > 0$ , para cada  $x$  em  $A$  definimos a *densidade aproximada* de  $x$  com relação à medida exterior  $\mu^*$ :

$$d_\epsilon(x, \mu^*) = \frac{\mu^*((x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A)}{2\epsilon}.$$

Fazendo  $\epsilon$  se aproximar de zero, obtemos a densidade de Lebesgue no ponto  $x$ .

**Definição 2.9.** A densidade de Lebesgue em  $x$  é dada por:

$$d(x, \mu^*) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d_\epsilon(x, \mu^*)$$

**Teorema 2.10.** (Densidade de Lebesgue) Seja  $A$  um conjunto com medida positiva, então para quase todo ponto  $x \in A$  vale que  $d(x, \mu^*) = 1$

Um ponto  $x$  é ponto de densidade de Lebesgue se  $d(x, \mu^*) = 1$ .

## 2.2 A MEDIDA DE HAUSDORFF

**Definição 2.11.** Dado um conjunto  $U$ , se existe uma coleção enumerável de conjuntos  $\{U_i\}$ , com  $U \subset \bigcup_i U_i$  dizemos que  $\{U_i\}$  é uma cobertura de  $U$ . Se, além disso, para cada  $i$ , vale que  $0 \leq |U_i| \leq \delta$  então  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $U$ .

Sejam  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $s$  um número não-negativo. Para  $\delta > 0$  definimos:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}.$$

Ou seja, olhamos para cada  $\delta$ -cobertura de  $U$  e calculamos a soma dos diâmetros elevados a  $s$ -ésima potência.

Se diminuirmos o valor de  $\delta$  então a classes de coberturas permitidas é reduzida e o valor do ínfimo pode se tornar maior, aproximando-se de um limite quando  $\delta \rightarrow 0$  escrevemos:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Esse valor existe para qualquer conjunto  $F$  e é chamado de *medida de Hausdorff  $s$ -dimensional de  $F$* , embora geralmente seja 0 ou  $\infty$  (pode ser diferente para apenas um valor de  $s$ ). É uma consequência imediata da definição de dimensão de Hausdorff, que esta é zero se  $F$  é um conjunto finito de pontos. Observe que na Definição 2.11 não há restrições sobre os conjuntos que formam a  $\delta$ -cobertura.

**Proposição 2.12.**  $\mathcal{H}^s$  é uma medida exterior.

*Demonstração.* De fato, é fácil ver que  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ , uma vez que qualquer coleção enumerável (de qualquer diâmetro) cobre o vazio. Também temos que  $\mathcal{H}^s(F) \geq 0$  qualquer que seja  $F$ .

Se  $E \subset F$  então qualquer cobertura de  $F$  é também uma cobertura de  $E$ , logo  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ .

Se  $\{F_i\}$  é uma coleção enumerável de conjuntos vale que

$$\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i),$$

uma vez que a união das  $\delta$ -coberturas de  $F_i$  é uma  $\delta$ -cobertura para  $\bigcup_i F_i$ .  $\square$

Decorre da Proposição 2.12, lembrando ainda que a medida de Hausdorff de um conjunto finito é nula, que a medida de Hausdorff de qualquer conjunto enumerável é nula.

### Propriedades da medida de Hausdorff

Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação tal que  $|T(x) - T(y)| = \lambda|x - y|$ ,  $\lambda > 0$ . Se  $F \subset \mathbb{R}^n$  então:

$$\mathcal{H}^s(T(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

*Demonstração.* Se  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$  então  $\{T(U_i)\}$  é uma  $\lambda\delta$ -cobertura de  $T(F)$  logo

$$\begin{aligned} \sum |T(U_i)|^s &= \lambda^s \sum |U_i|^s; \\ \Rightarrow \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(T(F)) &\leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F). \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo. Se  $\delta \rightarrow 0$  temos  $\mathcal{H}^s(T(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$ .

Se substituirmos  $T$  por  $T^{-1}$ , trocamos  $\lambda$  por  $\frac{1}{\lambda}$ ,  $F$  por  $T(F)$  e obtemos a desigualdade invertida.  $\square$

Podemos obter uma versão mais geral deste resultado.

**Proposição 2.13.** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : F \mapsto \mathbb{R}^m$  uma aplicação tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha,$$

*com  $c$  e  $\alpha$  constantes positivas. Então, para cada  $s$*

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

*Demonstração.* Se  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , como  $|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$ , segue que  $\{f(F \cap U_i)\}$  é uma  $\epsilon$ -cobertura de  $f(F)$  com  $\epsilon = c\delta^\alpha$ . Como:

$$\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s,$$

então

$$\mathcal{H}_\epsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Se  $\delta \rightarrow 0$  então  $\epsilon \rightarrow 0$  e assim obtemos o desejado.  $\square$

### 2.2.1 A Dimensão de Hausdorff

Observando o valor de  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ , fixado um conjunto  $F$ , se  $\delta < 1$  então o valor de  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  é não crescente com relação a  $s$ . Logo  $\mathcal{H}^s(F)$  também é não-crescente. Se  $t > s$  e  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s.$$

Tomando o ínfimo temos que  $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Se  $\delta \rightarrow 0$ , vemos que se  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , então  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  para  $t > s$ . Além disso, se  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  então  $\mathcal{H}^t(F) = \infty$  para  $t < s$ . Qualquer que seja  $F$ , o gráfico de  $\mathcal{H}^s(F)$  com relação a  $s$  mostra que existe um único valor  $s$  onde  $\mathcal{H}^s(F)$  "salta" de  $\infty$  para 0. Tal valor é chamado de *dimensão de Hausdorff* de  $F$  (ou *dimensão de Hausdorff-Besicovitch*), que denotamos por  $\dim_H(F)$ .

$$\dim_H(F) = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\},$$

em que usamos a convenção  $\sup\{\emptyset\} = 0$ . Se  $s = \dim_H(F)$  então  $\mathcal{H}^s(F)$  pode ser 0,  $\infty$  ou  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

### Propriedades da Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Monotonicidade*: Se  $E \subset F$  então  $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$ . Segue diretamente das propriedades da medida  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$  para cada  $s$ .
2. *Estabilidade enumerável*: Se  $F_1, F_2, \dots$  é uma sequência enumerável de conjuntos, então  $\dim_H(\cup_i F_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{\dim_H(F_i)\}$ . Certamente que  $\dim_H(\cup_{i=1}^\infty F_i) \geq \dim_H(F_j)$  para cada  $j$ . Por outro lado, se  $s = \dim_H(\cup_{i=1}^\infty F_i) > \dim_H(F_j)$ , para cada  $j$ , então  $\mathcal{H}^s(F_j) = 0, \forall j$  e portanto  $\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^\infty F_i) = 0 \leq \dim_H F_j$ , para cada  $j$ . Assim

$$\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^\infty F_i) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \{\dim_H F_j\};$$

$$\sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^\infty F_i)\} = 0 \Leftrightarrow \dim_H(\cup_{i=1}^\infty F_i) = 0.$$

3. *Conjuntos enumeráveis*: Se  $F$  é um conjunto enumerável então  $\dim_H(F) = 0$ ; separamos  $F$  em  $F_i$ , onde consiste de um ponto apenas então  $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$  para  $s > 0$  e  $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ . Pela estabilidade enumerável obtemos que  $\dim_H(\cup F_i) = 0$ .
4. *Conjuntos abertos*: Se  $U$  é um aberto do  $\mathbb{R}^n$  então  $\dim_H(U) = n$ . Uma vez que qualquer conjunto aberto contém uma bola de dimensão  $n$ ,  $\dim_H(U) \geq n$ , como  $U$  está contido em uma quantidade enumerável de bolas, usando a estabilidade enumerável e a monotonicidade obtemos que  $\dim_H(U) = n$ .

5. *Conjuntos suaves*: Se  $F$  é um conjunto suave (continuamente diferenciável)  $m$ -dimensional, isto é uma superfície  $m$ -dimensional do  $\mathbb{R}^n$  então  $\dim_H(F) = m$  em particular, curvas suaves tem dimensão 1 e superfícies possuem dimensão 2.
6. *Espaços Métricos Discretos*: se  $F \subset X$ , e  $(X, \rho)$  é um espaço métrico discreto, então  $\dim_H(F) = 0$ , se  $F$  é enumerável. Se  $F$  é não-enumerável,  $F$  não possui  $\delta$ -coberturas, para  $\delta < 1$ . Assim  $\dim_H(F) = \infty$ .

### 2.3 A DIMENSÃO DE CONTAGEM DE CAIXAS

Embora a Dimensão de Hausdorff seja uma das mais utilizadas definições de dimensão (dadas estas e outras de suas propriedades), como se pode ver, nem sempre é fácil encontrar este valor.

Nesse sentido, existem definições alternativas de dimensão que estaremos utilizando e, nos conjuntos em que trabalharemos seu valor coincide com a dimensão de Hausdorff, como veremos a seguir.

**Definição 2.14.** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado e  $N_\delta(F)$  o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  que são necessários para cobrir  $F$ . As dimensões de contagem de caixas inferior e superior de  $F$  são denotadas por  $\overline{\dim}_B(F)$  e  $\underline{\dim}_B(F)$  e definidas como:*

$$\overline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log \delta};$$

$$\underline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log \delta}.$$

Se estes valores coincidem então dizemos que a dimensão de Minkowski ou de contagem de caixas de  $F$  é

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log \delta}.$$

Assumindo  $\delta$  pequeno, o valor de  $\log(\delta)$  é negativo, portanto  $\dim_B(F)$  é positivo ou zero.

Encontrar a dimensão de contagem de caixas é mais simples do que encontrar a dimensão de Hausdorff. No entanto existem alguns contrapontos em utilizar a dimensão de contagem de caixas. Por exemplo, considere o conjunto:

$$A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$A$  é um conjunto enumerável, no entanto  $\dim_B(A) \neq 0$ . Para evitar este tipo de "anomalia", devemos colocar algumas restrições nos conjuntos que trabalharemos.

**Observação.** A dimensão de Minkowski de um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  pode ser vista como:

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log \delta},$$

em que  $\log(N_\delta(F))$  pode ser calculado das seguintes maneiras (alternativas):

1. o menor número de bolas fechadas de raio  $\delta$  que cobrem  $F$ ;
2. o menor número de cubos de lado  $\delta$  que cobrem  $F$ ;
3. o número de cubos numa grelha de aresta  $\delta$  que intersectam  $F$ ;
4. o menor número de bolas de raio  $\delta$  disjuntas com centro em  $F$ .

Será importante entender as relações entre as dimensões de Hausdorff e de contagem de caixas.

Se  $F$  pode ser coberto por  $N_\delta(F)$  conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  então:

$$\mathcal{H}^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s$$

Se  $1 < \mathcal{H}^s(F)$  então  $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$ . Se  $\delta$  é suficientemente pequeno, então  $s \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} (\log N_\delta(F)) / (-\log(\delta))$ , portanto

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F)$$

Para todo  $F \subset \mathbb{R}^n$ .

Em geral não temos a igualdade, mas esta vale para conjuntos razoavelmente regulares (no sentido do teorema 2.26).

## 2.4 SIMILARIDADES E CONJUNTOS AUTO-SIMILARES

**Definição 2.15.** Seja  $(X, \rho)$  um espaço métrico. Dada uma função  $f : X \rightarrow X$ , dizemos que  $f$  é uma contração se  $\forall x, y \in X$ :

$$\rho(f(x), f(y)) \leq c\rho(x, y) .$$

para algum  $c$  com  $0 < c < 1$ .

**Definição 2.16.** Para  $k \geq 2$ , dizemos que um conjunto finito de contrações  $\{f_1, \dots, f_k\}$ ;  $f_i : X \rightarrow X$ ,  $(X, \rho)$  um espaço métrico completo, é chamado um sistema de funções iteradas.

**Definição 2.17.** Dizemos que o sistema de funções  $\{f_1, \dots, f_k\}$ ,  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz a condição de conjunto aberto se existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$ , limitado e não-vazio tal que:

$$V \supset \bigcup_{i=1}^k f_i(V), \quad (2.1)$$

com união disjunta.

**Definição 2.18.** Dada uma contração  $f : X \rightarrow X$ , com  $(X, \rho)$  um espaço métrico, dizemos que  $f$  é uma similaridade se  $\exists c$  com  $0 < c < 1$  tal que:

$$\rho(f(x), f(y)) = c\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

$c$  é chamada de razão da similaridade  $f$ .

**Definição 2.19.** Dado um conjunto  $U$ , dizemos que  $U$  é auto-similar se existe um sistema de funções iteradas  $\{f_1, \dots, f_n\}$  onde cada  $f_i$  é uma similaridade e  $U$  satisfaz:

$$U = \bigcup_{i=1}^n f_i(U).$$

A igualdade na Definição 2.19 na decomposição de  $U$  como união de imagens sob cada  $f_i$  do próprio  $U$  contém o conceito geométrico da parte repetir o todo, uma das noções que chamam a atenção nas propriedades dos fractais.

**Definição 2.20.** Dada uma função contínua  $f$ , um conjunto  $A$  é dito invariante com relação à  $f$  se:

$$f(A) \subset A.$$

Se

$$f(A) = A,$$

então  $A$  é dito fortemente invariante com relação à  $f$ .

**Observação.** As definições de invariante e fortemente invariante podem ser estendidas para sistemas de funções iteradas. Neste caso se  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  é um sistema de funções iteradas e:

$$\bigcup_{i=1}^k f_i(A) \subset A,$$

para algum conjunto  $A$ , este conjunto é dito invariante ao sistema de funções iteradas  $F$ . Além disso, se:

$$\bigcup_{i=1}^k f_i(A) = A,$$

então  $A$  é dito fortemente invariante com relação ao sistema  $F$ .

**Proposição 2.21.** *Seja  $\mu$  uma medida em  $F$  e suponha que para algum  $s$  existam  $c > 0$  e  $\varepsilon > 0$  tais que :*

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

para qualquer conjunto  $U \subset F$  com  $|U| \leq \varepsilon$ . Então  $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$  e:

$$s \leq \dim_H(F) \leq \dim_B(F)$$

*Demonstração.* Seja  $\{U_i\}$  uma cobertura de  $F$ , logo:

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s.$$

Tomando o ínfimo,  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \mu(F)/c$  se  $\delta$  é suficientemente pequeno, então  $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ . Como  $\mu(F) > 0$ , temos que  $\dim_H(F) \geq s$ .  $\square$

**Lema 2.22.** *Seja  $\{V_i\}$  uma coleção de abertos disjuntos em  $(X, \rho)$  tais que cada  $V_i$  contém uma bola de raio  $a_1 r$  e está contido em uma bola de raio  $a_2 r$ . Então qualquer bola de raio  $r$  intersecta no máximo  $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$  destes conjuntos  $\bar{V}_i$ .*

*Demonstração.* Seja  $B$  uma bola de raio  $r$ . Se  $\bar{V}_i$  intersecta  $B$  então  $\bar{V}_i$  está contido em uma bola de raio  $(1 + 2a_2)r$  e cujo centro coincide com o centro de  $B$ . Suponha que existe uma quantidade  $q$  destes conjuntos  $\bar{V}_i$  que intersectam  $B$ , somando os volumes das bolas interiores de raio  $a_1 r$ , segue que

$$q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n \Leftrightarrow q \leq \frac{(1 + 2a_2)^n r^n}{(a_1^n r^n)} = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$$

com isso temos a limitação para  $q$ .  $\square$

**Definição 2.23.** *Um conjunto compacto  $A \subset X$ ,  $X$  espaço métrico, é chamado um atrator para o conjunto de funções  $\{f_1, \dots, f_k\}$  se, para cada  $i$  existem  $V$  uma vizinhança de  $A$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que  $f_i^n(V) \subset V$ , para  $n > n_0$  e  $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq k} f_i^m(V)$ .*

**Teorema 2.24.** *Sejam  $f_1, \dots, f_m$  similaridades de razões  $c_1, \dots, c_m$  satisfazendo a condição de conjunto aberto,  $K$  um atrator para estas funções satisfazendo*

$$K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K),$$

então  $\dim_B(K) = \dim_H(K) = s$ , em que  $s$  satisfaz a equação

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Sejam  $s$  satisfazendo (2.2) e  $\mathcal{I}_n$  o conjunto de todas as sequências com  $n$  termos  $(i_1, \dots, i_n)$  onde  $1 \leq i_j \leq m$ . Dado um conjunto  $A$  escrevemos  $A_{i_1 \dots i_n} = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(A)$ . Pode-se notar que  $K = \cup_{\mathcal{I}_n} K_{i_1 \dots i_n}$ . Além disso, estes conjuntos nos fornecem uma estimativa para a cobertura de  $K$  uma vez que a aplicação  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}$  é uma similaridade de razão  $c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \dots \cdot c_{i_n}$ . Daí temos,

$$\sum_{\mathcal{I}_n} |K_{i_1 \dots i_n}|^s = \sum_{\mathcal{I}_n} (c_{i_1} \cdot \dots \cdot c_{i_n})^s |K|^s = \left( \sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{i_n} c_{i_n}^s \right) |K|^s = |K|^s.$$

Usando (2.2) na última igualdade. Para qualquer  $\delta > 0$ , podemos escolher  $n$  tal que  $(\max_i c_i)^n |K| \leq \delta$  e então  $\mathcal{H}^s(K) \leq |K|^s$ . Uma vez que  $|K|^s$  é finito, temos que  $\dim_H(K) \leq s$ .

A outra desigualdade é um pouco mais trabalhosa. Seja  $\mathcal{I}$  o conjunto de todas as sequências infinitas  $(i_1, i_2, \dots)$  onde  $1 \leq i_j \leq m \forall j$  e  $I_{i_1, \dots, i_n} = \{(i_1, \dots, i_n, q_{n+1}, \dots); 1 \leq q_j \leq m\}$ , o cilindro de todas as sequências em  $\mathcal{I}$  que se iniciam com  $(i_1, \dots, i_n)$ .

Introduziremos uma medida  $\mu$  em  $\mathcal{I}$  tal que  $\mu(I_{i_1, \dots, i_n}) = (c_{i_1} \dots c_{i_n})^s$ . Usando (2.2), temos que  $\sum_{i=1}^m (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i)^s = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$ , e com isso,  $\mu$  é uma medida de probabilidade em  $\mathcal{I}$ , ou seja,  $\mu(\mathcal{I}) = 1$ .

A partir de  $\mu$  podemos definir uma medida  $\bar{\mu}$  em  $K$  pondo:

$$\bar{\mu}(A) = \mu(\{(i_1, \dots, i_n) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}).$$

para  $A$  subconjunto de  $K$ , lembrando que  $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{i_1, \dots, i_n}$ . Assim, a medida  $\bar{\mu}$  de um subconjunto  $A \subset K$  é a medida  $\mu$  das sequências correspondentes em  $\mathcal{I}$ . É fácil ver que  $\bar{\mu}(K) = 1$ , uma vez que  $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq m} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(K)$ . Mostraremos que  $\bar{\mu}$  satisfaz as hipóteses da Proposição 2.21.

Defina  $F(A) = \bigcup_i f_i(A)$ . Seja  $V$  satisfazendo a condição de conjunto aberto, (2.1), então  $F(\bar{V}) \subset \bar{V}$ . A sequência de iterados  $F^n(\bar{V})$  converge para  $K$ , pois  $K$  é atrator do sistema iterado de funções  $\{f_1, \dots, f_m\}$ . Sabemos que  $K \subset \bar{V}$  e, portanto  $K_{i_1, \dots, i_n} \subset \bar{V}_{i_1, \dots, i_n}$  para qualquer sequência finita de índices,  $(i_1, \dots, i_n)$ . Seja  $B$  uma bola de raio  $r < 1$ . Vamos estimar a medida  $\bar{\mu}(B)$  considerando os conjuntos  $V_{i_1, \dots, i_n}$  que têm diâmetro comparável ao de  $B$  e cujo fecho intersecta  $K \cap B$ .

Dada a sequência  $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$ , fazemos um truncamento após o primeiro termo  $i_n$  tal que:

$$\left( \min_{1 \leq i \leq m} c_i \right) r \leq c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \dots \cdot c_{i_n} \leq r \quad (2.3)$$

Defina  $Q$  como sendo o conjunto de todas as sequências finitas obtidas deste modo.

Observe que  $Q$  é finito.

Para cada sequência infinita  $(i_1, i_2, \dots)$  existe um valor de  $n$  tal que  $(i_1, \dots, i_n) \in Q$ . Como  $V_1, \dots, V_m$  são disjuntos, o mesmo se pode dizer de  $V_{i_1, \dots, i_n, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_n, m}$  para cada  $(i_1, \dots, i_n)$ . Com isso, temos que a coleção de conjuntos abertos  $\{V_{i_1, \dots, i_n} : (i_1, \dots, i_n) \in Q\}$  é disjunta. Similarmente  $K \subset \bigcup_Q K_{i_1, \dots, i_n} \subset \bigcup_Q \overline{V}_{i_1, \dots, i_n}$ .

Escolha  $a_1$  e  $a_2$  de tal forma que  $V$  contenha uma bola de raio  $a_1$  e esteja contido em uma bola de raio  $a_2$ . Para cada  $(i_1, \dots, i_n) \in Q$ ,  $V_{i_1, \dots, i_n}$  contém uma bola de raio  $c_{i_1} \dots c_{i_n} a_1$  e está contido em uma bola de raio  $c_{i_1} \dots c_{i_n} a_2$ . Por (2.3)  $V_{i_1, \dots, i_n}$  contém uma bola de raio  $(\min_i c_i) a_1 r$  e está contido em uma bola de raio  $a_2 r$ . Seja agora  $Q_1$  o conjunto de todas as sequências  $(i_1, \dots, i_n)$  em  $Q$  tais que  $B$  intersecta  $\overline{V}_{i_1, \dots, i_n}$ . Pelo Lema 2.22, temos no máximo  $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^n$  sequências em  $Q_1$ . Então:

$$\overline{\mu}(B) = \overline{\mu}(K \cap B) = \mu\{(i_2, \dots) : x_{i_1, \dots} \in K \cap B\} \leq \mu \left\{ \bigcup_{Q_1} I_{i_1, \dots, i_n} \right\}.$$

Uma vez que  $x_{i_1, \dots} \in K \cap B \subset \bigcup_{Q_1} \overline{V}_{i_1, \dots, i_n}$ , existe um inteiro  $n$  tal que  $(i_1, \dots, i_n) \in Q_1$ . Logo, usando (2.3) temos:

$$\overline{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_n}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \dots c_{i_n})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q.$$

Uma vez que qualquer conjunto  $U$  está contido em uma bola de raio  $|U|$  temos que  $\overline{\mu}(U) \leq |U|^s q$  e, pela proposição  $\mathcal{H}^s(K) \geq q^{-1} > 0$  e, portanto  $\dim_H(K) \geq s$ . Como já tínhamos que  $\dim_H(K) \leq s$  obtemos que  $\dim_H(K) = s$ .

Finalmente, consideramos a dimensão de contagem de caixas. Se  $\mathcal{F}$  é um conjunto qualquer de sequências finitas onde para cada  $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$  existe exatamente um  $n$  tal que  $(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{F}$  então segue por indução sobre (2.2) que  $\sum_{\mathcal{F}} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = 1$ . Além disso, se  $\mathcal{F}$  é escolhido como em (2.3) então ele contém no máximo  $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$  sequências. Para cada sequência  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{F}$ , temos que  $|\overline{V}_{i_1, \dots, i_k}| = c_{i_1} \dots c_{i_k} |\overline{V}| \leq r |\overline{V}|$ , então  $F$  pode ser coberto por  $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$  conjuntos de diâmetro  $r |\overline{V}|$  para qualquer  $r < 1$ . Concluimos que  $\overline{\dim}_B(F) \leq s$ . Como  $s = \dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F) \leq s$  obtemos a igualdade.  $\square$

**Teorema 2.25.** *Seja  $(F, d)$  um espaço métrico compacto não-vazio com  $\dim_H(F) = s$ . Suponha que existem  $\lambda_0$ ,  $a > 0$  e um inteiro  $m$  tais que para qualquer conjunto  $N \subset F$  com  $|N| < \lambda_0$  existem conjuntos  $N_j$  com  $N \subset \bigcup_{j=1}^m N_j$  e aplicações  $\Phi_j : N_j \rightarrow F$  ( $1 \leq j \leq m$ ) satisfazendo:*

$$ad(x, y) \leq |N| d(\Phi_j(x), \Phi_j(y)),$$

para todo  $x, y \in N_j$ . Então  $a^s m^{-1} \leq \mathcal{H}^s(F)$

*Demonstração.* Suponha, por absurdo que  $0 \leq \mathcal{H}^s(F) < a^s m^{-1}$ . Então, dado  $\delta > 0$  com

$\delta < \min\{\lambda_0, \frac{1}{2}a\}$ , encontramos conjuntos  $U_1, \dots, U_k$  com  $|U_i| < \delta$  e  $F \subset \cup_{i=1}^k U_i$  e

$$\sum_{i=1}^k |U_i|^s < a^s m^{-1},$$

logo, para algum  $t < s$  temos

$$\sum_{i=1}^k |U_i|^t < a^t m^{-1}.$$

Por hipótese, existem conjuntos  $U_{i,j}$  e aplicações  $\Phi_{i,j}$  tais que  $U_i \subset \cup_{j=1}^m U_{i,j}$  e

$$ad(x, y) < |U_i|d(\Phi_{i,j}(x), \Phi_{i,j}(y)).$$

Para  $x, y \in U_{i,j}$ . Então

$$a|U_{i,j}| < |U_i| \sup_{x,y \in U_{i,j}} d(\Phi_{i,j}(x), \Phi_{i,j}(y)).$$

Assim, obtemos

$$|\Phi_{i,j}^{-1}(U_q)| < a^{-1}|U_i||U_q| < \frac{1}{2}\delta.$$

Uma vez que o domínio de  $\Phi_{i,j}$  é  $U_{i,j}$ ,  $\Phi_{i,j}\Phi_{i,j}^{-1}(U_q) = U_q$  e  $|U_i| < \delta$ . Logo,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^k |\Phi_{i,j}^{-1}(U_q)|^t < ma^{-t} \left( \sum_{i=1}^k |U_i|^t \right) \left( \sum_{q=1}^k |U_q|^t \right) < a^t m^{-1}$$

Mas,  $F \subset \cup_{i,j,q} \Phi_{i,j}(U_q)$  e, uma vez que  $F$  é coberto por conjuntos de diâmetro menor que  $\frac{\delta}{2}$ . Repetindo o argumento, encontramos conjuntos  $V_i$ , de diâmetro no máximo  $2^{-n}\delta$  cobrindo  $F$  tais que

$$\sum |V_i|^t < a^t m^{-1}.$$

Disto segue que  $\mathcal{H}^t(F) \leq a^t m^{-1}$  e, com isso  $\dim_H(F) \leq t < s$  o que é um absurdo, uma vez que  $\dim_H(F) = s$ .  $\square$

**Teorema 2.26.** *Seja  $(F, d)$  um espaço métrico compacto e não-vazio e suponha que existam  $\lambda_0, a > 0$  tais que para qualquer conjunto  $N \subset F$  com  $|N| < \lambda_0$  existe uma aplicação  $\Phi : N \rightarrow F$  tal que:*

$$ad(x, y) \leq |N|d(\Phi(x), \Phi(y)),$$

para quaisquer  $x, y \in N$ . Então  $\dim_H(F) = \underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F)$ .

*Demonstração.* Sempre temos que  $\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F)$ .

Suponha que  $s > \dim_H(F)$ . Então

$$0 = \mathcal{H}^s(F) < a^s .$$

Escolha um inteiro  $k$  e  $U_1, \dots, U_k$  subconjuntos de  $F$  com  $0 < |U_i| < \min\{\frac{a}{2}, \lambda_0\}$ , para cada  $i$ , tais que  $F \subset \cup_{i=1}^k U_i$  e

$$\sum_{i=1}^k |U_i|^s < a^s .$$

Por hipótese, existem  $\Phi_i : U_i \rightarrow F$  tais que:

$$ad(x, y) \leq |U_i|d(\Phi_i(x), \Phi_i(y)) ,$$

para  $x, y \in U_i$ .

Seja  $J_q = \{i_1, \dots, i_q : 1 \leq i_j \leq k\}$  o conjunto de todas as sequências de  $q$  termos onde cada entrada é positiva e menor que  $k$ . Tome  $J = \cup_{i=1}^{\infty} J_i$  o conjunto de todas as sequências finitas construídas deste modo e  $J_{\infty}$  o conjunto de todas as sequências infinitas construídas deste modo. Para cada  $(i_1, \dots, i_q) \in J_q$  tome

$$U_{i_1, \dots, i_q} = \Phi_{i_1}^{-1}(\Phi_{i_2}^{-1}(\dots(\Phi_{i_q}^{-1}(F)))) .$$

Se  $x, y \in U_{i_1, \dots, i_q}$  usando a desigualdade repetidas vezes obtemos:

$$d(x, y) < a^{-q}|U_{i_1}| \dots |U_{i_q}|d(\Phi_{i_1}(\Phi_{i_2}(\dots(\Phi_{i_q}(x)))) - \Phi_{i_1}(\Phi_{i_2}(\dots(\Phi_{i_q}(y))))) .$$

Portanto,

$$d(x, y) < a^{-q}|U_{i_1}| \dots |U_{i_q}||F| .$$

Seja agora  $b = \min_{1 \leq i \leq k} a^{-1}|U_i|$ . Note que  $b > 0$  e  $\max_{1 \leq i \leq k} a^{-1}|U_i| < \frac{1}{2}$ . Tome  $\varepsilon < |F|$ . Para cada sequência em  $J_{\infty}$ , fazemos o truncamento desta sequência no menor valor  $q$  que satisfaça

$$b\varepsilon < (a^{-1}|U_{i_1}|)(a^{-1}|U_{i_2}|) \dots (a^{-1}|U_{i_q}|)|F| \leq \varepsilon .$$

Seja  $S$  o conjunto das sequências finitas obtidas deste modo. Para cada sequência em  $J$  existe exatamente uma sequência em  $S$  que possui o mesmo prefixo. Um uso repetido da seguinte inclusão

$$F \subset \cup_{i=1}^k U_i = \cup_{i=1}^k \Phi_i^{-1}(F),$$

nos fornece que

$$F \subset \bigcup_{i_1, \dots, i_q \in S} U_{i_1, \dots, i_q} .$$

Como  $\sum_{i=1}^k a^{-1}|U_i|^s < 1$  temos

$$(b\varepsilon)^s \#S < \sum_{i_1, \dots, i_q \in S} (a^{-1}|U_{i_1}|)^s \dots (a^{-1}|U_{i_q}|)^s |F|^s < |F|^s,$$

como  $F$  pode ser coberto por  $|F|^s(b\varepsilon)^{-s}$  conjuntos de diâmetro no máximo  $\varepsilon$  segue que  $\lim n(\varepsilon)\varepsilon^s < \infty$  e, portanto  $\overline{\dim}_B(F) \leq s$ , sendo assim  $\overline{\dim}_B(F) \leq \dim_H(F)$ . Uma vez que temos a desigualdade oposta, vale a igualdade.  $\square$

## 2.5 A CESTA DE SIERPINSKI

Considere em  $\mathbb{R}^2$  o seguinte conjunto:

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}; \alpha_i \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \right\}. \quad (2.4)$$

Este conjunto é um conjunto de Cantor regular, como definido em [16], chamado de cesta de Sierpinski unidimensional. A Figura 2.1 mostra uma aproximação da cesta de Sierpinski, com 150 mil pontos. Para estudar suas projeções, vamos inicialmente mostrar algumas de suas propriedades.

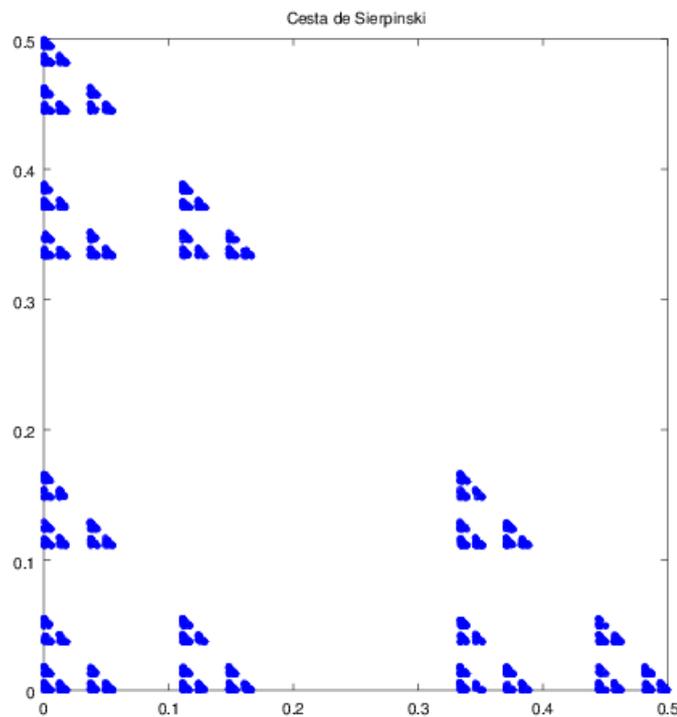


Figura 2.1: A cesta de Sierpinski.

### 2.5.1 Propriedades

Seja  $C$  o conjunto de Cantor dos terços médios com intervalo inicial  $[0, \frac{1}{2}]$ .

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0, 1\} \right\}.$$

Vejamos que  $S$  pode ser escrito como

$$\{(x, y) \in C^2 : x + y \in C\}.$$

Chamemos  $S'$  este segundo conjunto.

Seja  $x \in S$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}.$$

Pondo

$$\alpha_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}), \text{ e } x = (x_1, x_2),$$

temos  $\forall i, \alpha_{1i} \in \{0, 1\}$  equivale a

$$x_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{1i} 3^{-i} \in C.$$

Semelhantemente,  $\forall i, \alpha_{2i} \in \{0, 1\}$  equivale a

$$x_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{2i} 3^{-i} \in C.$$

Por fim,  $\alpha_{1i} + \alpha_{2i} \in \{0, 1\}$ , uma vez que  $\alpha_i \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$  e este fato implica que  $x_1 + x_2 \in C$ . Concluimos que  $x \in S'$ .

Reciprocamente, se  $x = (x_1, x_2) \in S'$ , temos  $x_1, x_2 \in C$  e além disso  $x_1 + x_2 \in C$ . Portanto a soma das expansões de  $x_1$  e  $x_2$  satisfaz

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}, \quad a_i \in \{0, 1\}; \\ x_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i}, \quad b_i \in \{0, 1\}; \\ x_1 + x_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) 3^{-i}, \quad a_i + b_i \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Como  $a_i + b_i \in \{0, 1\}$ , temos que  $(a_i, b_i) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ , ou seja,  $x \in S$ .

Agora vamos mostrar que  $S$  é compacto. Uma vez que  $S \subset C \times C$ , basta mostrar que  $S$  é fechado.

**Afirmção:**  $S$  é fechado.

Considere  $x_n$  uma sequência limitada em  $S$  e suponha que  $x_n$  não possua subsequência que converge em  $S$ . Como  $C \times C$  é compacto, certamente  $x_n$  possui uma subsequência que converge para algum elemento  $y$  de  $C \times C$ .

Seja  $y_n$  essa subsequência, com  $y = \lim y_n \in C \times C \setminus S$ . Considerando  $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}$  existe  $j$  tal que  $\alpha_j = (1, 1)$ . Para cada  $n$ ,  $y_n \in S$ , portanto

$$|y - y_n| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{n_i} 3^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} \right|.$$

Como  $\alpha_{n_i} \neq (1, 1)$ ,  $\forall i$ , ao menos uma das coordenadas de  $\alpha_j - \alpha_{n_j}$  é igual a 1. Tomando  $i_0$  como o primeiro coeficiente tal que  $\alpha_{i_0} = (1, 1)$ , vamos obter uma cota uniforme para a distância  $|y_n - y|$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que a primeira diferença ocorre na primeira coordenada. Portanto

$$|y_n - y| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_{n_i} - \alpha_i) 3^{-i} \right| = \left| 3^{-i_0} (1, 0) + \sum_{i>i_0} (\alpha_{n_i} - \alpha_i) 3^{-i} \right|.$$

O menor valor para  $\rho$  é dado quando  $(\alpha_{n_i} - \alpha_i) = (-1, 0)$  para todo  $i > i_0$ . Neste caso

$$|y - y_n| \geq 3^{-i_0} - \sum_{i>i_0} 3^{-i} = 3^{-i_0} - \frac{1}{2 \times 3^{i_0}},$$

o que prova que  $y$  não é limite de nenhuma sequência de elementos de  $S$ . Isto conclui a prova da afirmação.

Consideremos agora o conjunto de funções  $\{f_1, f_2, f_3\}$ , com  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left( \frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right), \\ f_2(x, y) &= \left( \frac{x+1}{3}, \frac{y}{3} \right), \\ f_3(x, y) &= \left( \frac{x}{3}, \frac{y+1}{3} \right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Mostraremos que este *sistema iterado de funções* [4] satisfaz a condição de conjunto aberto (2.1) e tem  $S$  como atrator.

Seja  $V = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ .  $V$  é um conjunto aberto. Além disso:

$$f_1(V) = \left\{ \left(0, \frac{1}{3}\right) \times \left(0, \frac{1}{3}\right) \right\};$$

$$f_2(V) = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(0, \frac{1}{3}\right) \right\};$$

$$f_3(V) = \left\{ \left(0, \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

Observando estes conjuntos vemos que  $f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset$  se  $i \neq j$  e  $V \supset \bigcup_i f_i(V)$ . Logo o sistema iterado de funções (2.5) satisfaz a condição de conjunto aberto.

Para verificar que  $S$  é o atrator de (2.5), vejamos que  $f_i(S) \subset S$ . Se  $x \in S$  então,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}; \quad \alpha_i \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\},$$

Escrevendo  $\alpha_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i})$ , temos

$$f_1(x) = \left( \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{1i} 3^{-i}}{3}, \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{2i} 3^{-i}}{3} \right)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i}.$$

Definindo

$$\beta_i = \begin{cases} (0, 0), & \text{se } i = 1, \\ \alpha_{i-1}, & \text{se } i > 1, \end{cases}$$

vemos que  $f_1(x) \in S$ . Como  $x$  é arbitrário, temos que  $f_1(S) \subset S$ .

Para  $f_2$ , os cálculos são análogos

$$f_2(x) = \left( \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{1i} 3^{-i}}{3}, \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{2i} 3^{-i}}{3} \right) + \left( \frac{1}{3}, 0 \right)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} + \left( \frac{1}{3}, 0 \right) = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} + \left( \frac{1}{3}, 0 \right).$$

Portanto basta definir

$$\beta_i = \begin{cases} (1, 0), & \text{se } i = 1, \\ \alpha_{i-1}, & \text{se } i > 1, \end{cases}$$

para ver que  $\forall x \in S, f_2(x) \in S$ .

Finalmente, notamos que

$$f_3(x) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} + \left( 0, \frac{1}{3} \right),$$

o que leva a definirmos

$$\beta_i = \begin{cases} (0, 1), & \text{se } i = 1, \\ \alpha_{i-1}, & \text{se } i > 1, \end{cases}$$

para ver que  $f_3(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in S$ , qualquer que seja  $x \in S$ .

Portanto,  $S$  é invariante. Vejamos que ele é o *menor* conjunto compacto (na ordem da inclusão) com esta propriedade.

Tome agora um conjunto compacto  $F \neq \emptyset$  tal que  $f_i(F) \subset F$ . Seja agora  $z$  um elemento de  $F$ . A sequência  $f_1^n(z) = 3^{-n}z$  converge para  $(0, 0)$ . Como  $F$  é fechado, temos que  $(0, 0) \in F$ .

Dado  $x \in S$ ,  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}$ , tome a sequência  $\{x_n\}$  dada por

$$x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i 3^{-i},$$

que converge para  $x$ .

Para cada  $n$ , mostraremos que  $x_n \in F$ .

Começando com  $n = 1$ , temos que  $x_1 = \frac{\alpha_1}{3}$ , neste caso

$$x_1 = \begin{cases} f_1((0, 0)), & \text{se } \alpha_1 = (0, 0); \\ f_2((0, 0)), & \text{se } \alpha_1 = (1, 0); \\ f_3((0, 0)), & \text{se } \alpha_1 = (0, 1). \end{cases}$$

consideremos esta  $f$  como sendo  $f^1$ .

Para  $n = 2$ ,  $x_2 = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{9}$  e, neste caso:

$$x_2 = \begin{cases} f^1(f_1((0, 0))), & \text{se } \alpha_2 = (0, 0); \\ f^1(f_2((0, 0))), & \text{se } \alpha_2 = (1, 0); \\ f^1(f_3((0, 0))), & \text{se } \alpha_2 = (0, 1). \end{cases}$$

e prosseguimos assim para cada  $n$ .

Como  $F$  é compacto e  $x_n$  converge para  $x$ , temos que  $x \in F$  e, portanto  $S \subset F$ , o que mostra que  $S$  é o menor conjunto invariante com relação às  $f_i$ . Além disso

$$S = \bigcup_{i=1}^3 f_i(S).$$

Da invariância de  $S$  pelo sistema iterado de funções, já sabemos que  $S \supset \bigcup_{i=1}^3 f_i(S)$ . Para mostrar a outra inclusão tome  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} \in S$ . Considere  $y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i}$ , onde  $\beta_i = \alpha_{i+1}$ . Claramente  $y \in S$ .

Temos que

$$x = \begin{cases} f_1(y), & \text{se } \alpha_1 = (0, 0), \\ f_2(y), & \text{se } \alpha_1 = (1, 0), \\ f_3(y), & \text{se } \alpha_1 = (0, 1). \end{cases}$$

e assim obtemos a igualdade.

Por fim, note que

$$|f_1(x) - f_1(y)| = |f_2(x) - f_2(y)| = |f_3(x) - f_3(y)| = \frac{1}{3}|x - y| \quad \forall x, y.$$

Ou seja,  $f_1, f_2$  e  $f_3$  são similaridades de razão  $\frac{1}{3}$  e  $S$  é um conjunto auto-similar. Pelo Teorema 2.24,  $\dim_B(S) = \dim_H(S) = s$  onde  $s$  é tal que

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Portanto  $s = 1 = \dim_H(S)$ .

### 3 PROJETANDO A CESTA DE SIERPINSKI

Faremos agora projeções da cesta de Sierpinski na reta real.

Seja:

$$S_u = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} : \alpha_i \in \{0, 1, u\} \right\}; u \in \mathbb{R}.$$

A projeção de  $S$  na direção  $u$ . Ou ainda  $S_u = \pi_u(S)$  onde  $\pi_u$  é a projeção definida pela matriz:

$$[\pi_u] = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde,  $\pi_u(1, 0) = 1$  e  $\pi_u(0, 1) = u$ .

#### 3.1 PROPRIEDADES

**Proposição 3.1.** *Considere o seguinte conjunto de funções  $\{f_1, f_2, f_3\}$  onde:*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x}{3}, \\ f_2(x) &= \frac{x+1}{3}, \\ f_3(x) &= \frac{x+u}{3}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

*Temos que estas funções são similaridades de comprimento  $\frac{1}{3}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ , logo:

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f_1(y)| &= \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| = \frac{1}{3}|x - y|. \\ |f_2(x) - f_2(y)| &= \left| \frac{x}{3} + \frac{1}{3} - \frac{y}{3} - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}|x - y|. \\ |f_3(x) - f_3(y)| &= \left| \frac{x}{3} + \frac{u}{3} - \frac{y}{3} - \frac{u}{3} \right| = \frac{1}{3}|x - y|. \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.2.**  *$S_u$  é o atrator do sistema iterado de funções (3.1)*

*Demonstração.* Seja  $x \in S_u$ . Deste modo  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}$  para uma sequência  $\{\alpha_i\} \in \{0, 1, u\}^*$ .

$$f_1(x) = \frac{x}{3} = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i}$$

considerando:

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & i = 1; \\ \alpha_{i-1} & i > 1, \end{cases}$$

temos que  $f_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in S_u$ .

Para  $f_2$  agimos de modo semelhante:

$$f_2(x) = \frac{x+1}{3} = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} + \frac{1}{3},$$

e considerando:

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & i = 1; \\ \alpha_{i-1} & i > 1, \end{cases}$$

temos que  $f_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in S_u$ .

Analogamente para  $f_3$  temos:

$$f_3(x) = \frac{x+u}{3} = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} + \frac{u}{3},$$

e considerando:

$$\beta_i = \begin{cases} u, & i = 1; \\ \alpha_{i-1} & i > 1, \end{cases}$$

temos que  $f_3(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in S_u$ .

Com isso  $S_u$  é invariante com relação às funções  $f_1, f_2$  e  $f_3$ .

Se algum conjunto compacto e não vazio  $V$  é invariante ao sistema iterado de funções  $\{f_1, f_2, f_3\}$  então temos que  $0 \in V$ , uma vez que  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1^n(v)$  para algum  $v \in V$ .

Seja agora  $x \in S_u$ , deste modo,  $x = \sum \alpha_i 3^{-i}$ . Considere  $x_n$  a sequência que converge para  $x$  dada por:

$$x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i 3^{-i}.$$

Mostraremos que para cada  $n$ ,  $x_n \in V$ . De fato, façamos a seguinte construção: Começando com  $n = 1$ , temos que  $x_1 = \frac{\alpha_1}{3}$ , neste caso:

$$x = \begin{cases} f_1(0), & \text{se } \alpha_1 = 0; \\ f_2(0), & \text{se } \alpha_1 = 1; \\ f_3(0), & \text{se } \alpha_1 = u. \end{cases}$$

consideremos esta  $f$  como sendo  $f^1$ .

Para  $n = 2$ ,  $x_2 = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{9}$  e, neste caso:

$$x = \begin{cases} f^1(f_1(0)), & \text{se } \alpha_2 = 0 ; \\ f^1(f_2(0)), & \text{se } \alpha_2 = 1 ; \\ f^1(f_3(0)), & \text{se } \alpha_2 = u , \end{cases}$$

e prosseguimos assim para cada  $n$ . Como  $V$  é compacto, temos que  $x \in V$ , portanto  $V \supset S_u$  □

Além de ser invariante,  $S_u$  satisfaz:

$$S_u = \bigcup_{i=1}^3 f_i(S_u) .$$

Como  $S_u$  é invariante, temos que  $\bigcup f_i(S_u) \subset S_u$ . Para mostrar que  $S_u$  é fortemente invariante basta mostrar que  $S_u \subset \bigcup f_i(S_u)$ .

De fato, seja  $x \in S_u$ , digamos:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}; \text{ com } a_i \in \{0, 1, u\} .$$

É fácil ver que

$$y = \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i+1} \in S_u ,$$

tomando  $b_i = a_{i+1}$ , temos que:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i} .$$

Dividiremos a prova em 3 casos:

**Caso 1:**  $a_1 = 0$

Neste caso:

$$f_1(y) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i} = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i+1} = \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} ,$$

uma vez que  $a_1 = 0$ .

**Caso 2:**  $a_1 = 1$

Neste caso:

$$f_2(y) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i+1} + \frac{1}{3} = \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i} + \frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} .$$

**Caso 3:**  $a_1 = u$

Neste caso:

$$f_3(y) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i} + \frac{u}{3} = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i+1} + \frac{u}{3} = \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i} + \frac{u}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}.$$

### 3.2 UM EXEMPLO

Considerando que :

$$S = \{(x, y) \in C \times C; x + y \in C\},$$

fica fácil perceber que  $S_0 = C$ .

Além disso, também é fácil ver que  $S_{1/2} = [0, 1/2]$ , para isto, basta recordar que:

$$S_u = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}; a_i \in \{0, 1, u\} \right\}.$$

Como cada número  $x$  em  $[0, 1]$  pode ser escrito da forma

$$x = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i}, b_i \in \{0, 1, 2\} \right\},$$

temos que:

$$\frac{x}{2} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b'_i 3^{-i} b'_i \in \{0, 1, 1/2\} \right\},$$

que é um elemento de  $S_{1/2}$ .

Estes dois exemplos são triviais mas nem sempre é fácil explicitar o conjunto  $S_u$ . Trazemos agora um exemplo para uma outra escolha de  $u$  onde não encontramos  $S_u$  explicitamente, mas foi possível mostrar que  $S_u$  contém um intervalo.

Consideremos o conjunto  $S_u$  com  $u = \frac{-1}{4}$ . Multiplicando este conjunto por 4 obtemos o conjunto:

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}; a_i \in \{0, -1, 4\} \right\}.$$

A Figura 3.1 a seguir mostra a densidade acumulada de  $S_{-1/4}$ . Os pontos onde o gráfico não é constante estão em  $S_{-1/4}$ . Nota-se que o intervalo contendo 1, onde a densidade acumulada é constante, não pertence a  $S_{-1/4}$ .

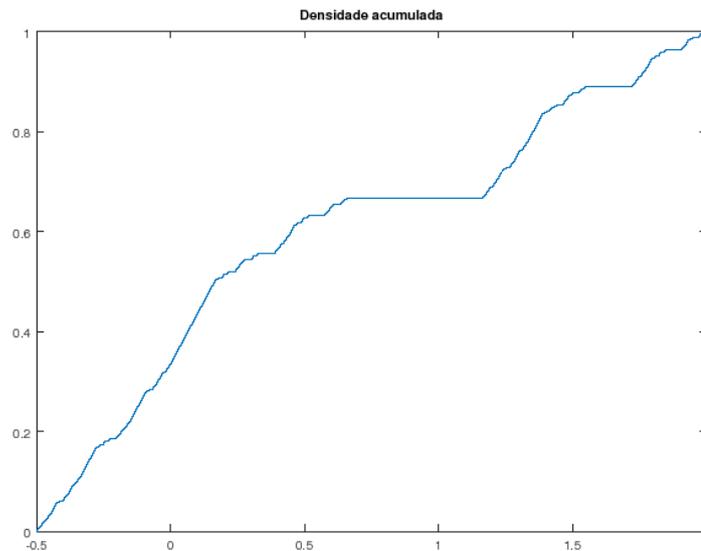


Figura 3.1: Densidade acumulada aproximada de  $S_{-1/4}$ .

Kenyon [8] afirma que o intervalo  $[0, 1/6] \subset K$ . Podemos ver que

$$\frac{1}{6} = \frac{4}{27} + \frac{4}{243} + \cdots + \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{9^k} + \cdots = \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{1 - 1/9}.$$

Outros números podem ter expansão finita, como por exemplo

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} &= -\frac{1}{3} + \frac{4}{9}; \\ \frac{11}{81} &= \frac{4}{27} - \frac{1}{81}. \end{aligned}$$

O problema é conhecer qual o subconjunto dos reais tal que existe uma sequência  $a_k \in \{-1, 0, 4\}^{\mathbb{N}}$  tal que

$$x \in K \Leftrightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}.$$

A questão é mostrar que há um conjunto denso de racionais que podem ser obtidos como expansões na base 3 no intervalo  $[0, 1/6]$ . Se  $\frac{p}{3^j}$ , com  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p < 3^{j-1}/2$  tem expansão finita nesta base, então

$$\frac{p}{3^j} = \sum_{k=1}^{j+1} a_{j+1-k} 3^{-k},$$

e ao multiplicar a equação correspondente por  $3^{j+1}$ , obtemos um polinômio com coefi-

cientes em  $D = \{-1, 0, 4\}$  tal que:

$$P(3) = \sum_{k=0}^j a_k 3^k = 3p. \quad (3.2)$$

Não é de se esperar que, variando sobre todos os polinômios de grau menor ou igual a  $j$ , possamos obter todos os naturais no intervalo  $[0, 3^j - 1]$ .

De fato, Matula [15] mostra que não existe polinômio tal que  $P(3) = -2$ . Isto indica que o conjunto de polinômios com coeficientes em  $D$ , quando calculado em 3, não é sobrejetivo sobre um intervalo arbitrário de inteiros.

Mostremos que  $1 \notin K$ . De fato, se  $1 \in K$ :

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$$

Caso  $a_1 = 4 \Rightarrow -\frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k 3^{-k}$

$$-1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 3^{-k} \geq -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-1/3} = -\frac{1}{2}, \text{ absurdo.}$$

Caso  $a_1 = 0 \Rightarrow 3 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 3^{-k} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-1/3} = 2, \text{ absurdo.}$

Caso  $a_1 = -1 \Rightarrow 4 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 3^{-k} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-1/3} = 2, \text{ absurdo.}$

Da equação (3.2), obtemos  $a_1 = 0$ , e é suficiente supor  $\text{mdc}(p, 3) = 1$ , donde  $a_2 \in \{-1, 4\}$ . Há portanto  $2 \cdot 3^{j-2}$  polinômios  $P$  e  $3^j$  valores no intervalo  $[0, 3^j - 1]$ . Considere uma sequência  $w = (a_1, \dots, a_j)$ , com  $a_j \in D$ ,  $a_i \neq 0$  para algum  $1 \leq i \leq j$ , e a esta associamos o polinômio

$$P_w(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_j x^j.$$

**Lema 3.3.** *Se  $w \neq w'$ , então  $P_w(3) \neq P_{w'}(3)$ .*

*Demonstração.* Escrevendo  $w' = (b_1, b_2, \dots, b_j)$ , temos

$$a_1 3 + a_2 3^2 + \dots + a_j 3^j = b_1 3 + b_2 3^2 + \dots + b_j 3^j \Rightarrow$$

$$3a_1 \equiv 3b_1 \pmod{9} \Rightarrow a_1 \equiv b_1 \pmod{3} \Rightarrow a_1 = b_1.$$

Tomando isto em conta, e igualando agora os valores  $P_w(3)$  e  $P_{w'}(3)$  módulo 27, concluímos que  $a_2 = b_2$ , e assim sucessivamente até  $a_j = b_j$ .  $\square$

**Lema 3.4.** O número  $\frac{1}{2}$  tem uma única expansão com os dígitos  $D$  na base 3, que é

$$a_{2k-1} = 0, a_{2k} = 4, k \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* A soma de uma PG de razão  $\frac{1}{9}$  e primeiro termo  $\frac{4}{9}$  é  $\frac{1}{2}$ .

Se  $a_1 = -1$ , e  $\sum_{k \geq 1} a_k 3^{-k} = \frac{1}{2}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= -\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 3^{-k-1} \\ \frac{5}{6} \cdot 3 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 3^{-k} \leq 4 \cdot \frac{1}{1-1/3} = 2 ; \text{ o que é um absurdo.} \end{aligned}$$

Se  $a_1 = 4$ , e  $\sum_{k \geq 1} a_k 3^{-k} = \frac{1}{2}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 3^{-k-1} \\ -\frac{5}{6} \cdot 3 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} 3^{-k} \geq -\frac{1}{1-1/3} = -\frac{3}{2} ; \text{ o que é um absurdo.} \end{aligned}$$

Portanto  $a_1 = 0$ . Se  $a_2 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+2} 3^{-k-2} \\ \frac{9}{2} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+2} 3^{-k} \leq 4 \cdot \frac{1}{1-1/3} = 2 ; \text{ o que é um absurdo.} \end{aligned}$$

Se  $a_2 = -1$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= -\frac{1}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+2} 3^{-k-2} \\ \frac{11}{2} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+2} 3^{-k} \leq 2 ; \text{ o que é um absurdo.} \end{aligned}$$

Portanto  $a_2 = 4$ . O resultado segue pela repetição indutiva do argumento.  $\square$

**Lema 3.5.** O número  $\frac{1}{6}$  tem precisamente duas expansões em  $D$  na base 3. São elas

$$\frac{1}{6} = [0, 0, 4, 0, 4, \dots] = [-1, 4, 0, 4, 0, \dots].$$

*Demonstração.* Se  $a_1 = 4$ , já vimos que  $x = \sum_{k \geq 1} a_k 3^{-k} \geq \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$ .

Se  $a_1 = 0$ , então  $3 \sum_{k \geq 2} a_k 3^{-k} = 1/2$ , o que só ocorre para a primeira expansão.

Se  $a_1 = -1$ , então  $-\frac{1}{3} + \sum_{k \geq 2} a_k 3^{-k} = \frac{1}{6}$  se, e somente se, a série  $\sum_{k \geq 2} a_k 3^{-k}$  tem como soma  $\frac{1}{2}$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

Dado  $x > 0$ , escrevemos uma expansão nos dígitos  $D$  na base 3 para  $x$  da seguinte forma: tome  $a_1 = 0$ , e suponha definidos  $a_1, \dots, a_k, k \geq 1$ . Defina:

$$x_k = \sum_{i=1}^k a_i 3^{-i},$$

e

$$a_{k+1} = \begin{cases} 4, & \text{se } |x - x_k - \frac{4}{3^{k+1}}| < \frac{1}{3^{k+1}}; \\ -1, & \text{se } |x - x_k + \frac{1}{3^{k+1}}| < \frac{1}{3^{k+1}}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que a sequência  $(a_k)$  está bem definida, pois

$$-\frac{1}{3^{k+1}} < x - x_k - \frac{4}{3^{k+1}} < \frac{1}{3^{k+1}} \Rightarrow \frac{4}{3^{k+1}} < x - x_k + \frac{1}{3^{k+1}} < \frac{6}{3^{k+1}},$$

neste caso temos  $|x - x_k + \frac{1}{3^{k+1}}| > \frac{4}{3^{k+1}}$ . Por outro lado,

$$-\frac{1}{3^{k+1}} < x - x_k + \frac{1}{3^{k+1}} < \frac{1}{3^{k+1}} \Rightarrow -\frac{6}{3^{k+1}} < x - x_k - \frac{4}{3^{k+1}} < -\frac{4}{3^{k+1}},$$

e, neste caso temos  $|x - x_k - \frac{4}{3^{k+1}}| > \frac{4}{3^{k+1}}$ .

Se existem infinitos  $k$  tais que  $a_k \neq 0$ ,  $(x_k)$  converge para  $x$ . Se a expansão é finita, ou seja, existe  $N$  tal que  $a_k = 0$  para todo  $k \geq N$ , esta expansão pode não convergir.

### 3.2.1 Alternativa

Denotamos por  $D = \{0, -1, 4\}$  o alfabeto ou conjunto de dígitos na base 3, por  $D^*$  o conjunto de palavras finitas em  $D$ . Se  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação linear (injetiva em  $D$ ), uma expansão finita com dígitos  $a_0 \dots a_k$  é indicada por

$$R_\psi(a_0 \dots a_k) = a_0 + \psi(a_1) + \dots + \psi^k(a_k). \quad (3.3)$$

O domínio fundamental, ou tijolo, é denotado por  $T_0 = \overline{\{\varphi^{-1}R_{\varphi^{-1}}(D^*)\}}$ , em que o fecho é tomado na topologia usual da reta e  $\varphi$  denota a multiplicação por 3. assumamos que, dado  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_0 \in T_0$  tal que

$$x = 3^n x_0 .$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} [0; 0, 2]_{D'} &= \frac{2}{9} = -1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{9} = [-1; 4, -1] , \\ [0; 2, 1]_{D'} &= \frac{7}{9} = -1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = [-1; 4, 4] . \end{aligned}$$

Sabemos que qualquer  $x \in (0, 1)$  tem uma expansão na base 3 com os dígitos  $\{0, 1, 2\}$ . De fato, há um conjunto enumerável com duas expansões, entre as quais escolhemos as que terminam. O objetivo é descrever um algoritmo através do qual obtemos uma expansão (3.3) com  $\psi = \varphi^{-1}$ , dada a expansão em  $D' = \{0, 1, 2\}$ .

Note que o conjunto de expansões finitas em  $D'$  é denso em  $(0, 1)$ . Os exemplos das expansões de  $\frac{2}{9}$  e  $\frac{7}{9}$  podem ser generalizados da seguinte forma: se  $b_1 \cdots b_k$  é a expansão de  $x \in (0, 1)$  em  $D'$ , com  $b_k \neq 0$ , definimos a expansão  $[a_{-1}, a_0; a_1, \dots, a_k]$  da seguinte forma

$$a_k \equiv b_k \pmod{3} .$$

Para  $0 \leq j < k$ , então

$$a_j + a_{j+1} \equiv b_j \pmod{3} ,$$

notando que  $b_0 = 0$ . Finalmente, se  $a_0 = 4$ , então  $a_{-1} = -1$  e  $a_{-1} = 0$  nos dois outros casos.

Vejamos como isso funciona para a expansão de  $\frac{5}{27}$ :

$$[0; 0, 1, 2]_{D'} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{4}{3} - 1 = [-1; 4, -1, -1] .$$

**Proposição 3.6.** *Seja  $x \in (0, 1)$  com expansão  $0, b_1 \cdots b_k$  na base 3, digamos:*

$$x = \sum_{j=1}^k \frac{b_j}{3^j} ,$$

com  $b_j \in \{0, 1, 2\} = D'$ ,  $b_k \neq 0$ . Defina  $a_j \in D$ ,  $-1 \leq j \leq k$  e  $x_j$ ,  $-1 \leq j \leq k$  pela seguinte recorrência reversa:

$$a_k \equiv b_k \pmod{3} , x_k = 0 .$$

Se  $a_j = -1$  então,

$$x_{j-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j \geq 0; \\ 0, & \text{se } x_j = -1. \end{cases}$$

Se  $a_j = 0$  então,

$$x_{j-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j \geq 0; \\ 0, & \text{se } x_j = -1. \end{cases}$$

Se  $a_j = 4$ , então  $x_{j-1} = -1$ , e para  $j \geq 1$ ,  $a_{j-1} \equiv x_{j-1} + b_{j-1} \pmod{3}$ . Finalmente  $a_{-1} = -1$ , somente se  $a_0 = 4$ .

*Demonstração.* A igualdade a ser demonstrada é equivalente à seguinte:

$$\sum_{j=i-2}^{k-2} a_j 3^{-j} + \{a_{k-1} 3^{-k+1} + (a_k - b_k) 3^{-k}\} = \sum_{j=i}^{k-1} b_j 3^{-j}.$$

Multiplicando-a por  $3^{i-1}$ , e deslocando os índices, podemos assumir que  $b_1 \neq 0$ .

Provemos por indução sobre o comprimento da expansão  $k$ . Para  $k = 1$ , temos duas expansões a desenvolver, que são

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= -1 + \frac{4}{3} \Rightarrow a_0 = -1 \text{ e } a_1 = 4, \\ \frac{2}{3} &= -1 \cdot 3 + 4 - \frac{1}{3} \Rightarrow a_{-1} = -1, a_0 = 4 \text{ e } a_1 = -1. \end{aligned}$$

Note que

$$a_k - b_k = 3x_{k-1}.$$

Para  $k - 1 > 0$ , há, portanto, seis casos a analisar.

**Caso 1.**  $a_k = 4$  e  $b_{k-1} = 0$  implica que  $x_{k-1} = -1$  e  $a_{k-1} = -1$ . Podemos cancelar os dois últimos termos

$$-1 \cdot 3^{-k+1} + 3 \cdot 3^{-k} = 0,$$

ficando com

$$\sum_{j=-1}^{k-2} a_j 3^{-j} = \sum_{j=1}^{k-2} b_j 3^{-j},$$

e  $x_{k-2} = 0$ . O resultado segue por indução.

**Caso 2.**  $a_k = 4$  e  $b_{k-1} = 1$  implica que  $x_{k-1} = -1$  e  $a_{k-1} = 0$ . Agrupando os termos entre chaves,

$$0 \cdot 3^{-k+1} + 3 \cdot 3^{-k} = b_{k-1} \cdot 3^{-k+1},$$

há um cancelamento aditivo com o termo correspondente do membro direito. Ficamos com a igualdade

$$\sum_{j=-1}^{k-2} a_j 3^{-j} = \sum_{j=1}^{k-2} b_j 3^{-j},$$

com  $x_{k-2} = 0$ . O resultado também segue por indução.

**Caso 3.**  $a_k = 4$  e  $b_{k-1} = 2$  implica que  $x_{k-1} = -1$  e  $a_{k-1} = 4$ . Os dois últimos termos podem ser agrupados da seguinte forma:

$$4 \cdot 3^{-k+1} + 3 \cdot 3^{-k} = 2 \cdot 3^{-k+1} + 1 \cdot 3^{-k+2}.$$

Cancelando o termo  $b_{k-1} 3^{-k+1}$  nos dois membros, a igualdade equivale a

$$\sum_{j=-1}^{k-2} a_j 3^{-j} + 3^{-k+2} = \sum_{j=1}^{k-2} b_j 3^{-j}.$$

Note ainda que  $x_{k-2} = -1$ .

Se  $k - 2 = 0$ ,  $a_0 = -1$  e, conseqüentemente,  $a_{-1} = 0$  fecham a expansão.

Se  $k - 2 > 0$ , podemos continuar analisando as possibilidades decorrentes dos possíveis valores de  $b_{k-2}$ :

- $b_{k-2} = 0 \Rightarrow a_{k-2} = -1, x_{k-2} =$ , e a indução se aplica.
- $b_{k-2} = 1 \Rightarrow a_{k-2} = 0$ , e depois de cancelar os termos em ambos os membros, a indução se aplica.
- $b_{k-2} = 2 \Rightarrow a_{k-2} = 4$ , e podemos repetir o argumento, se  $k - 3 > 0$ .

Se o último caso ocorre a cada passo, a expansão tem  $b_k = 1$  e  $b_j = 2$  para  $1 \leq j < k$ . Assim,  $x_0 = -1$  e  $a_0 \equiv x_0 \pmod{3}$  fornecem  $a_0 = -1$  e  $a_{-1} = 0$ . Este argumento finaliza o terceiro caso.

**Caso 4.**  $a_k = -1$  e  $b_{k-1} = 0$  implica que  $x_{k-1} = 1$  e  $a_{k-1} = 4$ . Os termos entre chaves somam

$$4 \cdot 3^{-k+1} - 3 \cdot 3^{-k} = 1 \cdot 3^{-k+2}.$$

A igualdade equivale a

$$\sum_{j=-1}^{k-2} a_j 3^{-j} + 3^{-k+2} = \sum_{j=1}^{k-2} b_j 3^{-j},$$

com  $x_{k-2} = -1$ . Se  $k - 2 = 0$ , a soma no membro direito é zero, e  $a_0 = x_{k-2} = -1$ , e  $a_{-1} = 0$ , zerando o membro esquerdo.

Se  $k - 2 > 0$ , podemos continuar analisando as possibilidades decorrentes dos possíveis valores de  $b_{k-2}$ .

Se  $b_{k-2} = 0$ , então  $a_{k-2} = -1$  e  $x_{k-3} = 0$ . Neste caso ficamos com

$$\sum_{i=-1}^{k-3} a_j 3^{-j} = \sum_{i=1}^{k-3} b_j 3^{-j},$$

e a indução se aplica.

Se  $b_{k-2} = 1$  então  $a_{k-2} = 0$  e  $x_{k-3} = 0$ . Podemos assim cancelar  $b_{k-2} 3^{-k+2}$ , restando os termos

$$\sum_{i=-1}^{k-3} a_j 3^{-j} = \sum_{i=1}^{k-3} b_j 3^{-j}.$$

para aplicarmos a hipótese de indução.

Se  $b_{k-2} = 2$ , então  $a_{k-2} = 4$  e  $x_{k-3} = -1$ . A análise é análoga ao *Caso 3*:

$$\sum_{j=-1}^{k-3} a_j 3^{-j} + 3^{-k+3} = \sum_{j=1}^{k-3} b_j 3^{-j},$$

com um termo a menos.

**Caso 5**  $a_k = -1$  e  $b_{k-1} = 1$  implica que  $x_{k-1} = 1$  e  $a_{k-1} = -1$ . Os termos entre chaves se agrupam como

$$-1 \cdot 3^{-k+1} - 3 \cdot 3^{-k} = -2 \cdot 3^{-k+1}.$$

Subtraindo agora  $b_{k-1} 3^{-k+1}$ , a igualdade equivale a

$$\sum_{j=-1}^{k-2} a_j 3^{-j} - 3^{-k+2} = \sum_{j=1}^{k-2} b_j 3^{-j},$$

com  $x_{k-2} = 1$ . Se  $k - 2 = 0$ ,  $a_0 = 4$  e  $a_{-1} = -1$ , fazendo valer a igualdade.

Se  $k - 2 > 0$ , podemos continuar analisando as possibilidades decorrentes dos possíveis valores de  $b_{k-2}$ :

- $b_{k-2} = 0 \Rightarrow a_{k-2} = 4$  e  $x_{k-3} = -1$ , e voltamos ao *Caso 4*, com um termo a menos:

$$\sum_{j=-1}^{k-3} a_j 3^{-j} + 3^{-k+3} = \sum_{j=1}^{k-3} b_j 3^{-j}.$$

- $b_{k-2} = 1 \Rightarrow a_{k-2} = -1$ , recaímos num ciclo, pois ao subtrairmos  $b_{k-2} 3^{-k+2}$  de ambos os membros, obtemos

$$\sum_{j=-1}^{k-3} a_j 3^{-j} - 3^{-k+3} = \sum_{j=1}^{k-3} b_j 3^{-j}.$$

- $b_{k-2} = 2 \Rightarrow a_{k-2} = 0$ , e depois de subtrairmos o termo  $b_{k-2}3^{-k+2}$ , recaímos na igualdade

$$\sum_{j=-1}^{k-3} a_j 3^{-j} - 3^{-k+3} = \sum_{j=1}^{k-3} b_j 3^{-j}.$$

No pior dos casos, o ciclo segue. Após  $k$  iterações, todos os termos do membro direito terem sido subtraídos, e ficamos com

$$a_{-1}3 + a_0 - 1 = 0,$$

O que acontece, tendo 2 formas de se chegar até aqui.

$$b_1 = 1 \text{ e } a_1 = -1 \rightarrow x_1 = 1 \rightarrow x_0 = 1 \text{ e, portanto } a_0 = 4 \rightarrow a_{-1} = -1.$$

ou,

$$b_1 = 2; \quad a_1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \rightarrow x_0 = 1 \text{ e } a_0 = 4, \quad a_{-1} = -1.$$

**Caso 6.**  $a_k = -1$  e  $b_{k-1} = 2$  implica que  $x_{k-1} = 1$ ;  $a_{k-1} = 0$ . Os termos entre chaves se agrupam como

$$0 \cdot 3^{-k+1} - 3 \cdot 3^{-k} = -1 \cdot 3^{-k+1}.$$

Subtraindo agora  $b_{k-1}3^{-k+1}$ , a igualdade equivale a

$$\sum_{j=-1}^{k-2} a_j 3^{-j} - 3^{-k+2} = \sum_{j=1}^{k-2} b_j 3^{-j},$$

que pode ser tratado como o *caso 5*.

□

**Proposição 3.7.** *Seja  $x = \sum_{i=1}^k a_i 3^{-i} = \sum_{i=1}^k b_i 3^{-i}$ . Para cada  $n$  com  $0 \leq n \leq k$ , temos que  $\sum_{i=1}^{k-n} a_i 3^{-i} - x_{k-n} 3^{-k+n} = \sum_{i=1}^{k-n} b_i 3^{-i}$ .*

*Demonstração.* De fato, para  $n = 0$ , temos que  $k - n = k$  e  $x_k = 0$ , além disso,  $\sum_{i=1}^k a_i 3^{-i} = \sum_{i=1}^k b_i 3^{-i}$ , o que mostra válida a igualdade.

Se, para algum  $n$ , vale a igualdade

$$\sum_{i=1}^{k-n} a_i 3^{-i} - x_{k-n} 3^{-k+n} = \sum_{i=1}^{k-n} b_i 3^{-i},$$

então

$$\sum_{i=1}^{k-n-1} a_i 3^{-i} - x_{k-n} 3^{-k+n} + a_{k-n} 3^{-k+n} = \sum_{i=1}^{k-n-1} b_i 3^{-i} + b_{k-n} 3^{-k+n}.$$

$$\sum_{i=1}^{k-n-1} a_i 3^{-i} - x_{k-n} 3^{-k+n} + (a_{k-n} - b_{k-n}) 3^{-k+n} = \sum_{i=1}^{k-n-1} b_i 3^{-i}.$$

então devemos mostrar que:

$$x_{k-n} 3^{-k+n} - (a_{k-n} - b_{k-n}) 3^{-k+n} = x_{k-n-1} 3^{-k+n+1}.$$

Se  $x_{k-n} = 0$ , então  $a_{k-n} \equiv b_{k-n} \pmod{3}$ . Caso  $a_{k-n} = 4$  então  $x_{k-n-1} = -1$  e  $b_{k-n} = 1$  ( $a_{k-n} - b_{k-n} = 3$ ). Portanto vale a igualdade.

Caso  $a_{k-n} = -1$ ;  $b_{k-n} = 2$ ;  $x_{k-n-1} = 1$  e vale a igualdade.

Caso  $a_{k-n} = 0$ ;  $b_{k-n} = 0$ ;  $x_{k-n-1} = 0$ ,

Se  $x_{k-n} = 1$  devemos analisar as possibilidades de  $a_{k-n}$ .

Se  $b_{k-n} = 0$ , então  $a_{k-n} = 4$  e  $x_{k-n-1} = -1$ . Ficamos com:

$$3^{-k+n} - 4 \cdot 3^{-k+n} = -3 \cdot 3^{-k+n} = -3^{-k+n+1} = -1 \cdot 3^{-k+n+1}.$$

Se  $b_{k-n} = 1$ , então  $a_{k-n} = -1$  e,  $x_{k-n-1} = 1$ . Ficamos com:

$$3^{-k+n} + 3 \cdot 3^{-k+n} = 3 \cdot 3^{-k+n} = 3^{-k+n+1} = 1 \cdot 3^{-k+n+1}.$$

Se  $b_{k-n} = 2$ , então  $a_{k-n} = 0$  e,  $x_{k-n-1} = 1$ . Ficamos com:

$$3^{-k+n} + 2 \cdot 3^{-k+n} = 3^{-k+n+1} = 1 \cdot 3^{-k+n+1}.$$

Se  $x_{k-n} = -1$ , analisamos as possibilidades de  $a_{k-n}$ .

Se  $b_{k-n} = 0$ , então  $a_{k-n} = -1$  e  $x_{k-n-1} = 0$ . Ficamos com:

$$-3^{-k+n} - (-1 \cdot 3^{-k+n}) = -3^{-k+n} + 3^{-k+n} = 0.$$

Se  $b_{k-n} = 1$ , então  $a_{k-n} = 0$ ,  $x_{k-n-1} = 0$  e vale a igualdade.

Se  $b_{k-n} = 2$ , então  $a_{k-n} = 4$ ,  $x_{k-n-1} = -1$ . Ficamos com:

$$-3^{-k+n} - 2 \cdot 3^{-k+n} = -3 \cdot 3^{-k+n} = -1 \cdot 3^{-k+n+1}.$$

Em todos os casos vale a igualdade. □

A partir desta proposição, podemos definir  $x_i$  da seguinte forma:

$x_k = 0$ ;  $x_{i-1} = \frac{x_i + b_{i-1} - a_i}{3}$  e, assim temos:

**Proposição 3.8.** *Seja  $x = \sum_{i=1}^n b_i 3^{-i}$  com  $b_i \in D' = \{0, 1, 2\}$ . Defina:*

- $c_k = 0$ .
- $a_i \equiv b_i + c_i \pmod{3}$ ;  $a_i \in D = \{0, -1, 4\}$ .

$$\bullet c_{i-1} = \frac{c_i + b_i - a_i}{3}.$$

$$\text{Então } \sum_{i=-1}^n a_i 3^{-i} - c_i 3^{-i} = \sum_{i=1}^n b_i 3^{-i}.$$

Note que as definições para  $a_i$  e  $c_i$  não dependem diretamente de  $D'$ , logo, podemos trocar os elementos de  $D'$  e verificar se o algoritmo de conversão ainda é válido.

Tentamos agora, encontrar pontos de  $T_0$  que sejam negativos. Para isso, consideramos  $D = \{0, -1, 4\}$ ;  $D' = \{0, 1, 2\}$ ;  $D'' = \{-1, 0, 1\}$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \rightarrow y = x + 1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

E sabemos que  $y$  tem representação em  $D'$ . Além disso, se a representação de um número  $z$  em  $D$  tem  $a_{-1} = -1$  e  $a_0 = 4$ , então  $z - 1 \in T_0$ . Procuramos agora encontrar este conjunto.

Como sabemos que:

$$\sum_{i=-1}^1 a_i 3^{-i} - \frac{x_1}{3} = \frac{b_1}{3}.$$

Como  $a_{-1} = -1$  e  $a_0 = 4$ , ficamos com:

$$1 + \frac{a_1}{3} - \frac{x_1}{3} = \frac{b_1}{3},$$

donde  $x_1$  não pode ser  $-1$ , pois neste caso  $1 + \frac{a_1}{3} = \frac{b_1 - 1}{3}$ . Como o máximo valor para  $b_1$  é  $2$ , teríamos que  $1 + \frac{a_1}{3} \leq \frac{1}{3}$ , o que não acontece.

Se  $x_1 = 0$ , então

$$1 + \frac{a_1}{3} = \frac{b_1}{3},$$

donde  $b_1$  não pode ser  $0$  ou  $1$  pelo mesmo motivo anterior, logo, devemos ter que  $b_1 = 2$ , neste caso  $a_1 = -1$  e vale a igualdade.

Se  $x_1 = 1$ , então

$$1 + \frac{a_1}{3} = \frac{b_1 + 1}{3},$$

donde  $b_1$  não pode ser zero, mas pode ser  $1$  ou  $2$ ; em ambos os casos vale a igualdade.

Temos então as seguintes restrições:

- $b_1 = 1$ , com  $a_1 = -1$ ;  $x_1 = 1$
- $b_1 = 2$ , com  $x_1 = 1$  ou  $x_1 = 0$  e  $a_1 = 0$  ou  $a_1 = -1$
- $b_1$  não pode ser zero.
- $x_1$  não pode ser  $-1$
- $a_1$  não pode ser  $4$

- Como  $x_1$  não pode ser 1, concluímos que  $a_2$  não pode ser 4.

Com isto temos que existe um conjunto denso em  $(0, \frac{1}{6})$  contido em  $T_0$ .

**Proposição 3.9.** *O intervalo  $[0, \frac{1}{6}]$  está contido em  $T_0$ .*

*Demonstração.* Já vimos que a expansão de  $\frac{1}{6}$  indica que  $\frac{1}{6} \in T_0$ . Provamos que um conjunto denso contido em  $[0, \frac{1}{6}]$  está contido em  $T_0$ . Seja  $x \in (0, \frac{1}{6})$  finitamente expansível na base  $D'$  e sejam  $0, b_1 b_2 \cdots b_k$  seus dígitos na base  $D'$ . Temos que  $b_1 = 0$  e  $b_2 < 2$ , pois  $\frac{1}{6} < \frac{2}{9}$ . Se  $b_2 = 0$ , então  $a_0 = 0$  por construção.

A ideia é mostrarmos que  $a_1 \neq 4$ , pois somente neste caso poderia ocorrer  $a_0 = -1 \neq 0$ .

Se  $b_2 = 1$ , então

$$a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod{3};$$

$$a_2 + a_3 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Se  $a_3 = 4$  então  $a_2 = 0$  e  $a_1 = 0$ . Se  $a_3 = 0$ , então  $a_2 = 4$  e  $a_1 = -1$ . Se  $a_3 = -1$ , então  $a_2 = 4$  e  $a_1 = -1$ . Em qualquer caso,  $a_0 = 0$ , por construção.

□

#### 4 A MEDIDA DE ALGUMAS PROJEÇÕES

Como visto, tomando  $u = \frac{-1}{4}$ , temos que  $S_u$  contém um intervalo, uma vez que  $4S_u$  contém. Com isso,  $\dim_H(S_{\frac{-1}{4}}) = 1$ . Para quais valores de  $u$  isto é válido é a pergunta que procuraremos responder agora.

Mostraremos agora que a medida de  $S_u$  é positiva se  $u = \frac{p}{q}$  escrito de forma irredutível com  $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ . Denote por  $\varphi(u) := \dim_H S_u$ . Mostraremos também que  $\varphi(u) < 1$  se  $u$  é um racional com  $p + q \not\equiv 0 \pmod{3}$ .

Suponha  $\mu(S_u) > 0$ . Usaremos o seguinte lema para auxiliar na demonstração de que  $S_u$  contém um intervalo.

**Lema 4.1.**

$$S_u \cup (S_u + 1) \cup (S_u + u) = 3S_u .$$

Similarmente, para  $n > 1$ ,  $3^n S_u$  pode ser coberto por  $3^n$  translações de  $S_u$  disjuntas em medida, ou seja  $\mu(S_u \cap (S_u + u)) = \mu(S_u \cap (S_u + 1)) = \mu((S_u + u) \cap (S_u + 1)) = 0$ .

*Demonstração.* De fato, seja  $x$  no conjunto à esquerda da igualdade. Assim temos 3 possibilidades:

- $x \in S_u$ ;
- $x \in S_u + 1$ ;
- $x \in S_u + u$ .

Caso  $x \in S_u$ :

$$x \in S_u \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} .$$

Tomando

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{para } i = 1 ; \\ \alpha_{i-1}, & \text{para } i \geq 2 , \end{cases}$$

temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in S_u \quad \text{e} \quad 3 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} = 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = x .$$

Caso  $x \in S_u + 1$ , procedemos de maneira semelhante ao caso anterior, tomando agora

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & \text{para } i = 1 ; \\ \alpha_{i-1} & \text{para } i \geq 2 . \end{cases}$$

Caso  $x \in S_u + u$ , tomamos

$$\beta_i = \begin{cases} u & \text{para } i = 1; \\ \alpha_{i-1} & \text{para } i \geq 2. \end{cases}$$

Assim obtemos que  $S_u \cup (S_u + 1) \cup (S_u + u) \subset 3S_u$

Seja agora  $x \in 3S_u$  dado por:

$$x = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}.$$

Se  $\alpha_1 = 0$  então

$$x = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1} 3^{-i}.$$

Tomando  $\beta_i = \alpha_{i+1}$  temos que  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in S_u$

Caso  $\alpha_1 = 1$ , temos

$$x = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} + 1.$$

Agora, procedemos de maneira semelhante ao caso anterior na soma. Assim temos que  $x \in S_u + 1$ .

Caso  $\alpha_1 = u$ . Neste caso temos

$$x = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} + u,$$

e, novamente, procedemos de forma análoga, obtemos que  $x \in S_u + u$

Como  $3\mu(S_u) \geq \mu(S_u \cup (S_u + 1) \cup (S_u + u)) = \mu(3S_u) = 3\mu(S_u)$ . A consequente igualdade das medidas implica que as 3 cópias transladadas de  $S_u$  cobrem  $3S_u$  e devem ser disjuntas em medida.

Similarmente, para  $9S_u$  é coberto por 9 translações de  $S_u$  disjuntas em medida duas a duas, como veremos. Temos que

$$9S_u = 3 \cdot 3S_u = 3S_u \cup (3(S_u + 1)) \cup (3(S_u + u)),$$

donde segue que,  $9S_u$  pode ser coberto por 3 cópias de  $3S_u$  (disjuntas em medida) e cada uma destas, por sua vez, é coberta por 3 cópias de  $S_u$  disjuntas em medida, o que mostra o desejado.

Se  $x \in 9S_u \Rightarrow x = 9 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}$  com  $\alpha_i \in \{0, 1, u\}$

Se  $\alpha_1 = 0$ ,

$$x = 9 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 3 \cdot 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} = 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1} 3^{-i}.$$

Tomando  $\beta_i = \alpha_{i+1}$  temos  $x = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in 3S_u$ .

Se  $\alpha_1 = 1$ , então

$$\begin{aligned} x &= 9 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 9 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} + 3 = 3 \left( 3 \left( \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} \right) + 1 \right) = 3 \left( \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} + 1 \right) \\ &= 3 \left( \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} + 1 \right) = 3 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1} 3^{-i} + 1 \right). \end{aligned}$$

Considere  $\beta_i = \alpha_{i+1}$ . Assim temos

$$x = 3 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1} 3^{-i} + 1 \right) = 3 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} + 1 \right) \in 3(S_u + 1).$$

Se  $\alpha_1 = u$  então

$$\begin{aligned} x &= 9 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 9 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} + 3u = 3 \left( 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} + u \right) = 3 \left( \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} + u \right) \\ &= 3 \left( \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} + u \right) = 3 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1} 3^{-i} + u \right). \end{aligned}$$

Considere  $\beta_i = \alpha_{i+1}$ . Assim,

$$x = 3 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1} 3^{-i} + u \right) = 3 \left( \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} + u \right) \in 3(S_u + u).$$

Mostraremos agora a outra inclusão.

Seja  $x \in 3S_u \cup (3(S_u + 1)) \cup (3(S_u + u))$

Se  $x \in 3S_u$ , considere

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{para } i = 1; \\ \alpha_{i-1} & \text{para } i > 1. \end{cases}$$

De modo que

$$x = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i+1} = 3 \cdot 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i}.$$

$$3 \cdot 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} = 9 \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i 3^{-i} = 9 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in 9S_u .$$

Se  $x \in 3(S_u + 1)$ ,

$$x = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} + 3 = 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i+1} + 3 .$$

Tomando

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & \text{para } i = 1 ; \\ \alpha_{i-1} & \text{para } i > 1 . \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i+1} + 3 &= 3 \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i 3^{-i+1} + 3 = 3 \left( 3 \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \right) + 3 = \\ &= 3 \left( 3 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \right) = 9 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in 9S_u . \end{aligned}$$

Para o caso  $x \in 3(S_u + u)$  procedemos de forma análoga ao caso anterior.

A prova de que estas cópias são disjuntas em medida é feita de forma análoga ao caso anterior. Com efeito, temos que:

$$9\mu(S_u) = \mu(9S_u) = \mu(3S_u \cup (3(S_u + 1)) \cup (3(S_u + u))) \leq 9\mu(S_u) .$$

Como cada cópia de  $3S_u$  é coberta por 3 cópias de  $S_u$  disjuntas em medida, cada uma das translações de  $3S_u$  é coberta pelas translações destas cópias que devem ser disjuntas em medida pela igualdade acima.

O caso geral segue por indução sobre  $n$ . Com efeito,

suponhamos que para  $n = k$  vale que  $3^k S_u$  é coberto por  $3^k$  cópias de  $S_u$ .

Mostraremos que  $3^{k+1} S_u$  pode ser coberto por  $3^{k+1}$  cópias de  $S_u$ .

O caso  $9S_u$  pode ser traduzido para mostrar que  $3^{k+1} S_u$  pode ser coberto por 3 cópias de  $3^k S_u$ . O restante do argumento segue de forma análoga ao caso  $n = 2$ .

**Afirmção:**

$$3^{k+1} S_u = 3 \cdot 3^k S_u = 3^k S_u \cup (3^k(S_u + 1)) \cup (3^k(S_u + u)) .$$

De fato se  $x \in 3^{k+1} S_u$

$$x = 3^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} .$$

Se  $\alpha_i = 0$  então

$$x = 3^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 3^k \cdot 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 3^k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} = 3^k \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} .$$

Tome  $\beta_i = \alpha_{i+1}$  temos que;

$$3^k \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} = 3^k \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^i \in 3^k S_u .$$

Se  $\alpha_1 = 1$

$$x = 3^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 3^k \cdot 3 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 3^k \left( \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} + 1 \right) .$$

$\beta_i = \alpha_{i+1}$  temos que;

$$3^k \left( \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i 3^{-i+1} + 1 \right) = 3^k \left( \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} + 1 \right) \in 3^k (S_u + 1) .$$

A demonstração para  $\alpha_1 = u$ , é feita de maneira análoga ao caso anterior.

Seja agora  $x \in 3^k S_u \cup (3^k (S_u + 1)) \cup (3^k (S_u + u))$ .

Se  $x \in 3^k S_u$ , então

$$x = 3^k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} = 3^k \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i+1} = 3^{k+1} \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} .$$

Considere:

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 1 ; \\ \alpha_{i-1} & \text{se } i \geq 2 . \end{cases}$$

Assim, temos

$$3^{k+1} \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} = 3^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in 3^{k+1} S_u .$$

Se  $x \in 3^k (S_u + 1)$ , então

$$\begin{aligned} x &= 3^k \left( \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} + 1 \right) = 3^k \left( \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i+1} + 1 \right) = 3^k \left( 3 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} + 1 \right) = \\ &= 3^k \left( 3 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \right) = 3^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in 3^{k+1} S_u . \end{aligned}$$

$$\text{com } \beta_i = \begin{cases} 1, & \text{para } i = 1 ; \\ \alpha_i, & \text{para } i > 1 . \end{cases}$$

O caso  $x \in 3^k (S_u + u)$  é feito de forma análoga.

Para mostrar que as cópias de  $S_u$  são disjuntas em medida basta notar que as cópias de  $3^k S_u$  são disjuntas em medida, o que prova o lema auxiliar.  $\square$

Podemos ainda determinar as translações de  $S_u$  usadas para cobrir  $3^n S_u$  pois:

$$3S_u = S_u + 0 \cup S_u + 1 \cup S_u + u = S_u + \{0, 1, u\} .$$

Defina  $V_1 = \{0, 1, u\}$  e assim temos que  $3S_u = S_u + V_1$ .

Denotando a soma de conjuntos por

$$A + B = \{x + y : x \in A \text{ e } y \in B\} ,$$

definimos recursivamente os conjuntos  $V_m$  por

$$\begin{aligned} 3^m S_u &= S_u + V_m ; \\ V_m &= V_1 + 3V_1 + \cdots + 3^{m-1} V_1 . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} 9S_u &= 3 \cdot 3S_u = 3(S_u \cup (S_u + 1) \cup (S_u + u)) \\ &= 3S_u \cup (3S_u + 3) \cup (3S_u) + 3u \\ &= S_u + V_1 \cup ((S_u + V_1) + 3) \cup ((S_u + V_1) + 3u) \\ &= S_u + (V_1 \cup (V_1 + 3) \cup (V_1 + 3u)) . \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} V_1 + 3 &= \{3, 4, 3 + u\} ; \\ V_1 + 3u &= \{3u, 3u + 1, 4u\} ; \\ V_1 &= \{0, 1, u\} ; \\ 3V_1 &= \{0, 3, 3u\} ; \\ V_2 &= V_1 + 3V_1 = V_1 \cup (V_1 + 3) \cup (V_1 + 3u) , \end{aligned}$$

donde  $9S_u = S_u + V_2$ .

**Observação:**  $(V_n + 3^n V_n) = V_{2n}$ .

De fato,

$$\begin{aligned} V_n &= V_1 + 3V_1 + \cdots + 3^{n-1} V_1 ; \\ 3^n V_n &= 3^n V_1 + 3^{n+1} V_1 + \cdots + 3^{2n-1} V_1 . \end{aligned}$$

Disto concluímos que

$$V_n + 3^n V_n = V_1 + 3V_1 + \cdots + 3^{2n-1} V_1 = V_{2n} .$$

Como as cópias de  $S_u$  são disjuntas em medida, temos:

$$\mu((S_u + v_1) \cap (S_u + v_2)) = 0 \text{ se, } v_1, v_2 \in V_1 \text{ e } v_1 \neq v_2,$$

que se generaliza para

$$3^m \mu(S_u) = \mu(3^m S_u) \leq \sum_{v \in V_m} \mu(S_u + v) = 3^m \mu(S_u)$$

e,

$$\mu((S_u + v_1) \cap (S_u + v_2)) = 0 \text{ se, } v_1, v_2 \in V_m \text{ e } v_1 \neq v_2.$$

**Definição 4.2.** Os conjuntos da forma  $S_u + v$  serão chamados de telhas (veja [11]) e  $v$  é o centro de  $S_u + v$ . Dado um conjunto  $A$ , se  $V$  é um conjunto finito e

$$A \subset \bigcup_{v \in V} S_u + v.$$

$E$ , além disso se para qualquer subconjunto próprio  $W \subset V$  vale que  $A \not\subset \bigcup_{v \in W} S_u + v$  então este conjunto de telhas é chamado de telhamento de  $A$ .

**Lema 4.3.** Se  $\mu(S_u) > 0$ , então  $S_u$  contém um intervalo.

*Demonstração.* Seja  $x$  um ponto de Lebesgue de  $S_u$ , isto é, um ponto tal que, para todo  $\epsilon > 0$ ,  $\mu((x - \epsilon, x + \epsilon)) > 0$ . Entre as  $3^n$  translações de  $S_u$  que cobrem  $3^n S_u$ , sejam  $S_u + v_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  as que intersectam  $[3^n x - 1, 3^n x + 1]$ . Seja  $W_n = \bigcup_{i=1}^k S_u + v_i$  a união destas translações e  $U_n = \{v_1 - 3^n x, \dots, v_k - 3^n x\}$  as translações em relação ao ponto  $3^n x$ .

Uma vez que as translações de  $S_u$  são disjuntas em medida e têm medida positiva, existe uma limitação em  $k$  que não depende de  $n$ :  $k \leq \frac{2}{\mu(S_u)} + 2$ . Além disso, o módulo de um elemento de  $U_n$  é no máximo  $|S_u| + 1$ .

Uma vez que  $U_n$  é um conjunto de números reais limitado com cardinalidade limitada independentemente de  $n$ , existe uma sequência de inteiros  $\{n_i\}$  tal que  $U_{n_i}$  converge, isto é, a cardinalidade é constante para todo  $i$  suficientemente grande e cada elemento de  $U_{n_i}$  converge.

Seja  $U$  o limite das translações  $U = \lim_{i \rightarrow \infty} U_{n_i}$ . Correspondendo a este  $U$ , existe um conjunto de translações  $V = \bigcup_{v \in U + 3^n x} S_u + v$ .

Tomando  $x \in S_u$  um ponto de densidade de Lebesgue, temos que

$$1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d_\epsilon(x, \mu^*) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu^*((x - \epsilon, x + \epsilon) \cap V)}{2\epsilon}.$$

Podemos tomar  $\epsilon_n$  da forma  $\frac{1}{3^n}$ , obtendo

$$1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d_\epsilon(x, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\epsilon_n}(x, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu((x - \frac{1}{3^n}, x + \frac{1}{3^n}) \cap W)}{\frac{2}{3^n}}.$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \mu\left(\left(x - \frac{1}{3^n}, x + \frac{1}{3^n}\right) \cap W\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left((3^n x - 1, 3^n x + 1) \cap W\right) = 2.$$

Como  $x$  é um ponto de Lebesgue, a medida de  $3^n S_u \cap [3^n x - 1, 3^n x + 1] = W_n \cap [3^n x - 1, 3^n x + 1]$  converge para 2. Assim o complemento de  $W$  com relação ao intervalo  $[3^n x - 1, 3^n x + 1]$  não pode conter abertos, caso contrário a medida de  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n \cap [3^n x - 1, 3^n x + 1]$  não poderia ser 2. Por outro lado, cada  $S_u + v$  é fechado, logo o complementar de  $W$  no intervalo  $[3^n x - 1, 3^n x + 1]$  é vazio, e  $W$  contém um intervalo de comprimento 2, em particular contém um intervalo. Com isto, e o teorema da categoria de Baire, considerando que  $W$  é uma união enumerável (finita) de conjuntos fechados cobrindo um conjunto aberto, segue que ao menos um destes conjuntos fechados contém um aberto. Portanto algum dos transladados de  $S_u$  contém um intervalo. Isto implica que  $S_u$  contém um intervalo.  $\square$

**Lema 4.4.** *Se  $S_u$  tem interior não vazio, então  $S_u$  é o fecho de seu interior. Para todo  $u$ , a fronteira de  $S_u$  tem medida nula.*

*Demonstração.* Suponha que  $S_u$  tem interior. Seja  $y \in S_u$ ,  $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}$ . Então para cada  $k \geq 0$ ,  $y \in \sum_{i=1}^k \alpha_i 3^{-i} + 3^{-k} S_u$ , conjunto cujo diâmetro é  $3^{-k} |S_u|$  e tem interior não-vazio.

Tomando uma sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  onde  $y_n \in \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i 3^{-i} + 3^{-n} S_u\right)^{\circ}$ , note que  $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i 3^{-i} + 3^{-n} S_u\right)^{\circ} \subset S_u^{\circ}$  e que  $y$  é limite desta sequência, uma vez que  $|y - y_n| \leq 3^{-n} |S_u|$ .

Se  $\mu(\partial S_u) > 0$  então  $S_u$  e, pelo Lema 4.3  $S_u$  contém um intervalo. Para  $n$  suficientemente grande  $3^n S_u$  contém um intervalo  $I$  que contém propriamente uma translação de  $S_u$  que chamaremos  $S_u + v$ .  $I \subset 3^n S_u$  é coberto por translações de  $S_u$  disjuntas em medida. Note que a fronteira de  $S_u + v$  está contida na união das demais translações que fazem parte da cobertura de  $3^n S_u$ .

Para mostrar isso, suponhamos que a fronteira não esteja contida. Neste caso existe um ponto  $x \in \partial(S_u + v)$  tal que  $x \notin S_u + v'$ , qualquer que seja  $S_u + v'$  na cobertura de  $3^n S_u$ ,  $v' \neq v$ . Como  $S_u + v'$  é fechado, temos que  $x$  não pode ser aproximado por pontos de  $S_u + v'$ , logo existe  $\varepsilon > 0$  para o qual  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap S_u + v' = \emptyset$ . Como existem finitos  $v'$ , podemos escolher um  $\varepsilon$  tal que a igualdade seja válida pra qualquer um dos  $v'$ . Tomando este  $\varepsilon$ , temos que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (\cup(S_u + v')) = \emptyset$ , um absurdo, pois deste modo  $I$  não pode ser coberto por translações de  $S_u$ , logo  $\partial(S_u + v) \subset \cup_{v' \neq v} (S_u + v')$

Mas, se a fronteira tem medida positiva e está contida nas translações de  $S_u$ , as translações de  $S_u$  se sobrepõem em medida, o que seria um absurdo.  $\square$

**Lema 4.5.** *Se, para algum  $u$  temos que  $\#V_m < 3^m$  então  $\mu(S_u) = 0$  e  $\dim_B S_u = \frac{\log(\#V_m)}{m \log 3}$*

*Demonstração.* Seja  $N = \#V_m$ . Por (4.1) temos que  $S_u = \bigcup_{v \in 3^{-m} V_m} 3^{-m} S_u + v$ . Repetindo este processo  $k$  vezes, obtemos que  $S_u$  é coberto por  $N^k$  translações de  $3^{-km} S_u$ , e cada

um destes conjuntos de diâmetro de, no máximo  $3^{-km}|S_u| < 3^{-km}$ . Seja  $s = \frac{\log N}{m \log 3}$ , então temos que  $N^k(3^{-km})^s = 1$  e o resultado é válido uma vez que  $S_u$  é um conjunto auto semelhante.  $\square$

**Lema 4.6.** *Se  $S_u$  contém um intervalo, então  $u$  é racional.*

*Demonstração.* Suponha agora que  $S_u$  contém um intervalo  $J$ . Deste modo  $\#V_m = 3^m$ , do contrário, teríamos  $\dim_B S_u < 1$ . Além disso, para cada  $m$  temos:

$$|v_1 - v_2| \geq \mu(J) \text{ para } v_1, v_2 \in V_m \text{ com } v_1 \neq v_2, \quad (4.2)$$

pois caso contrário  $(S_u + v_1) \cap (S_u + v_2)$  conteria um intervalo não degenerado, e, portanto teria medida positiva.

Tome  $N$  grande o suficiente para que  $|3^{-N}S_u| < |J|$ . Sabemos que  $S_u$  pode ser coberto por  $3^N$  cópias de  $3^{-N}S_u$  disjuntas em medida, com translações centradas em  $3^{-N}V_N$ . Além disso, se  $N$  é grande o suficiente, existem  $v_1, v_2 \in 3^{-N}V_N$  com  $v_1 < v_2$  tais que:

$$J_1 = 3^{-N}J + v_1 \subset J; J_2 = 3^{-N}J + v_2 \subset J \text{ e } J_1 \cap J_2 = \emptyset.$$

Vamos extrair da cobertura de  $S_u$  por translações de  $3^{-N}S_u$  a menor cobertura para  $J$ , isto é, o telhamento de  $J$ . Seja  $V(J) = \{v \in 3^{-N}V_N : (3^{-N}S_u + v) \cap J \neq \emptyset\}$ , então

$$J \subset \bigcup_{v \in V(J)} (3^{-N}S_u + v), \quad V(J) \subset 3^{-N}V_N.$$

Com isso, tem-se que:

$$3^{-N}J \subset 3^{-N} \bigcup_{v \in V(J)} (3^{-N}S_u + v) = \bigcup_{v \in V(J)} (3^{-2N}S_u + 3^{-N}v),$$

e

$$3^{-N}J + v_i \subset \bigcup_{v \in V(J)} (3^{-2N}S_u + 3^{-N}v + v_i),$$

para  $i = 1, 2$ .

Defina  $V(J_i) = 3^{-N}V(J) + v_i$ . Observe que, como  $v_j \in 3^{-N}V_N$ , segue que

$$3^{-2N}V_N + v_j \subset 3^{-2N}(V_N + 3^N V_N) = 3^{-2N}V_{2N},$$

e portanto  $V(J_i) \subset 3^{-2N}V_N + v_i \subset 3^{-2N}V_{2N}$ .

Agora, tomamos os telhamentos de  $J_1$  e  $J_2$

$$J_1 \subset \bigcup_{v \in V(J_1)} (3^{-2N}S_u + v) \quad \text{e} \quad J_2 \subset \bigcup_{v \in V(J_2)} (3^{-2N}S_u + v).$$

O segundo telhamento pode ser obtido a partir do primeiro somando  $v_2 - v_1$ . De fato,

$$V(J_2) = V(J_1) + v_2 - v_1 .$$

O telhamento é único pois as telhas são disjuntas em medida. Usaremos isto para encontrar um telhamento periódico para  $\mathbb{R}$  de período  $v_2 - v_1$ . Primeiramente, construiremos a cobertura de  $J$  a partir da cobertura de  $J_1$ .

Seja  $I_1$  o maior intervalo tal que:

$$J_1 \subset I_1 \subset \bigcup_{v \in V(J_1)} (3^{-2N}S_u + v) .$$

Note que  $(3^{-2N}S_u + v) \cap I_1 = \emptyset, \forall v \in 3^{-2N}V_{2N} \setminus V(J_1)$ . De fato, se  $(3^{-2N}S_u + v) \cap I_1 \neq \emptyset$  para algum  $v \in 3^{-2N}V_{2N} \setminus V(J_1)$  então esta intersecção iria conter um intervalo não degenerado e assim  $3^{-2N}S_u + v$  intersectaria algum  $3^{-2N}S_u + v'$  com  $v' \in V(J_1)$ , com medida positiva, uma contradição.

Toda telha  $3^{-2N}S_u + v, v \in 3^{-2N}V_{2N} \setminus V(J_1)$  está à direita ou à esquerda de  $I_1$ . Seja  $b$  o extremo direito de  $I_1$ . As telhas  $3^{-2N}S_u + v, v \in 3^{-2N}V_{2N}$ , cobrem  $J$ , mas nenhum deles pode conter uma vizinhança aberta de  $b$ , porque isto contraria a não-sobreposição de medida entre as telhas. Como as telhas são fechados, existe um único  $v(b)$  em  $3^{-2N}V_{2N} \setminus V(J_1)$  tal que  $3^{-2N}S_u + v(b)$  contém  $b$  como seu ponto extremo esquerdo. Para qualquer outra translação da forma  $3^{-2N}S_u + v$  com  $v \in 3^{-2N}V_{2N} \setminus V(J_1)$ , que esteja à direita de  $I_1$ , o ponto extremo tem que ser ao menos  $b + 3^{-2N}\mu(J)$ , pois  $|u_i - u_j| > 3^{-2N}|J|$  para  $u_i, u_j \in 3^{-2N}V_{2N}$  e  $i \neq j$  (usando (4.2)). Lembrando que as telhas  $3^{-2N}S_u + v, v \in 3^{-2N}V_{2N}$  cobrem  $J$ , a justaposição da telha com centro  $v(b)$  deve cobrir  $[a, c]$  para algum  $c > b$ .  
Seja

$$b_2 = \sup \left\{ c : [a, c] \subset \bigcup_{v \in V(J_1) \cup \{v(b)\}} 3^{-2N}S_u + v \right\} ,$$

e  $I_2 = [a, b_2]$ . Assim,

$$I_1 \subset I_2 \subset \bigcup_{v \in W_1} 3^{-2N}S_u + v .$$

Repetindo o proceso, temos que existe um  $v(b_2)$  contendo  $b_2$  como seu ponto extremo esquerdo e, definindo  $W_2 = W_1 \cup \{v(b_2)\}$  podemos obter um intervalo  $I_3 = (a, b_3)$  cujo comprimento é ao menos  $\mu(I_2) + 3^{-2N}\mu(J)$ .

Podemos prosseguir finitos passos até cobrirmos  $d$ , onde  $d$  é o ponto extremo direito de  $J$ . Neste caminho, temos que cobrir  $J_2$ , encontrando seu telhamento por cópias de  $3^{-2N}S_u$ , que, como vimos é uma translação do telhamento de  $J_1$  de tamanho  $v_2 - v_1$ . Com isso, o telhamento encontrado para  $[a, d]$  é periódico.

Sendo assim, podemos extrair um telhamento para  $[a, +\infty)$  por cópias de  $3^{-2N}S_u$  também periódico, basta acrescentar conjuntos da forma  $V(J_1) + K(v_2 - v_1)$  no telhamento

de  $[a, d]$ .

Por outro lado, usando o mesmo raciocínio da direita para a esquerda (partindo de  $J_2 = [a_2, b_2]$ ), obtemos o telhamento de  $(-\infty, b_2]$  e com isso o telhamento de  $\mathbb{R}$ .

Multiplicando por  $3^{2N}$  obtemos o telhamento de  $\mathbb{R}$  por cópias de  $S_u$  como telhas.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{w \in W} S_u + w \quad (4.3)$$

Chamemos de  $T$  este telhamento.  $W$  é um subconjunto discreto da reta. Por periodicidade,  $W = A + p\mathbb{Z}$ , com  $A$  um conjunto finito e  $p = 3^{2N}(v_2 - v_1)$ . Sabemos que existem telhas em  $T$  centradas nos pontos  $1, 3, 3^2, \dots, 3^{n-1}$ , e em  $u, 3u, \dots, 3^{n-1}u$ . Como  $A$  é finito, consideremos as classes de equivalência dadas por

$$\bar{a} = \{x \text{ é centro}, x = a + \alpha n : a \in A\}.$$

Uma vez que o conjunto  $\{m : 3^m \text{ é centro}\}$  é infinito, para algum  $a \in A$ , existem  $x = 3^k$  e  $x' = 3^{k'}$ , com  $k \neq k'$  tais que  $x = a + \alpha n$  e  $x' = a + \alpha n'$ . Assim  $\alpha(n - n') = 3^k - 3^{k'}$ , logo  $\alpha$  é racional. Pelo mesmo argumento, existem  $r, r'$ , com  $r \neq r'$  e  $3^r u - 3^{r'} u \in \alpha\mathbb{Z}$ . Finalmente, como  $\alpha$  é racional, conclui-se que  $u$  também é racional.  $\square$

Como Corolário do argumento final da demonstração destacamos:

**Corolário 4.7.** *Se  $u = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  é irredutível, e satisfaz  $p + q \equiv 0 \pmod{3}$  então o telhamento de  $\mathbb{R}$  por cópias de  $S_u$  tem período racional.*

**Corolário 4.8.** *Se  $u = \frac{p}{q}$ , com  $p + q \equiv 0 \pmod{3}$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$  então o telhamento por cópias de  $qS_u$  tem período inteiro.*

*Demonstração.* Se multiplicamos  $S_u$  por  $q$ , temos

$$qS_u = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} : \alpha_i \in \{0, p, q\} \right\}.$$

Com relação a este conjunto  $qS_u$  temos que  $V_1 = \{0, p, q\}$  que contém apenas inteiros. Da equação (4.1), o mesmo acontece com  $V_m$  para todo  $m$ . Portanto, o período do telhamento deve ser inteiro.  $\square$

Apresentamos uma demonstração do Lema 4.9 diferente daquela de Kenyon [9]. Utilizamos um fato conhecido sobre expansões em base 3, com dígitos  $\{-1, 0, 1\}$ . Este fato é conhecido, mas o reproduzimos aqui para conveniência do leitor (veja p. 207 e seguintes de [10]).

**Lema 4.9.** *Se  $u = \frac{p}{q}$  é uma fração irredutível com  $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ , então  $\mu(S_u) = \frac{1}{q}$ .*

*Demonstração.* Seja  $u = \frac{p}{q}$  irredutível, com  $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ . Consideremos, sem perda de generalidade,  $0 < p < q$ . Seja  $\mathcal{S} = qS_u$ , ou seja,

$$\mathcal{S} = S_{p,q} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} : \alpha_i \in \{0, p, q\} \right\}.$$

Mostraremos que  $\mathcal{S}$  tem medida de Lebesgue 1 e, portanto  $S_u$  tem medida  $\frac{1}{q}$ . Defina

$$\mathcal{S}^n = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k 3^{-k} ; \alpha_k \in \{0, p, q\} \right\},$$

o conjunto dos  $3^n$  racionais triádicos.

Vejamos que, com a hipótese  $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\mathcal{S}^n$  tem todos os elementos distintos. Se

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k 3^{-k} = \sum_{k=1}^n \beta_k 3^{-k},$$

então

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k 3^{n-k} = \sum_{k=1}^n \beta_k 3^{n-k},$$

que é uma igualdade entre números inteiros. Tomando a equação em módulo 3 temos que  $\alpha_1 = \beta_1 \pmod{3}$ . Como  $\alpha_i, \beta_i \in \{0, p, q\}$ ,  $\text{mdc}(p, q) = 1$  e  $p \equiv -q \pmod{3}$ , então  $\alpha_1 = \beta_1$ .

Uma vez valendo a igualdade, cancelamos os termos, dividimos por 3 e repetimos o argumento para concluir que  $\alpha_k = \beta_k$ , para cada  $1 \leq k \leq n$ .

Há portanto  $3^n$  elementos distintos em  $\mathcal{S}^n$ .

Sabemos que existe um telhamento de  $\mathbb{R}$  por cópias de  $\mathcal{S}$ , com período inteiro. Mostraremos que o período deste telhamento é 1.

Consideramos o conjunto das translações utilizadas para telhar a reta usando  $\mathcal{S}$  como telha. Note que  $V_1 = \{0, p, q\}$ ,  $V_2 = V_1 + 3V_1 \supset V_1$ , e  $V_{m+1} \supset V_m$ , já que  $0 \in V_m$ . Observe que  $V_m \subset \mathbb{Z}$  (confronte com eq.(4.1)). Seja  $R_m = V_m + (-V_m)$ , a soma dos conjuntos  $V_m$  e  $-V_m$ . Evidentemente,  $R_m \subset R_{m+1}$ . Denotamos por  $R_\infty$  o seguinte conjunto

$$R_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Agora, para mostrar que o período é 1, vamos primeiro mostrar que  $1 \in R_\infty$ , e finalizar com  $R_\infty = \mathbb{Z}$ .

De fato, como  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , temos que existem inteiros  $a$  e  $b$  tais que  $ap + bq = 1$ .

Temos que  $V_n$  e  $-V_n$  estão contidos em  $R_\infty$  para qualquer que seja  $n$ . Os números da forma  $\sum_{i=1}^n \alpha_i 3^i$  com  $\alpha_i \in \{0, p, q, -p, -q\}$  estão em  $R_\infty$ . Para mostrar que  $ap \in R_n$ , para

algum  $n$ , basta que existam coeficientes  $a_i \in \{0, 1, -1\}$  tais que:

$$a = \sum_{i=1}^n a_i 3^i .$$

De fato, vamos mostrar que qualquer inteiro pode ser escrito desta forma.

Sabemos que qualquer inteiro  $z$  pode ser escrito da forma

$$z = \sum_{i=1}^m b_i 3^i, \quad b_i \in \{0, 1, 2\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

a menos do sinal. Consideramos  $z > 0$ , sendo o caso  $z < 0$  tratado ao final. Usando a representação de  $z$  com dígitos  $0, 1, 2$ , construiremos uma nova representação para  $z$  usando os dígitos  $0, -1, 1$ .

Caso a representação de  $z$  com os dígitos  $0, 1$  e  $2$  não tenha o dígito  $2$  então fazemos a mesma representação e obtemos o desejado.

Suponhamos que para algum índice  $i$ ,  $b_i = 2$ .

Seja então  $i_0$  o primeiro índice com  $b_{i_0} = 2$ . Temos então, tomamos  $a_i = b_i$  para  $i < i_0$  e:

$$\sum_{i=0}^{i_0-1} b_i 3^i = \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i 3^i .$$

Tomamos então  $a_{i_0}$  tal que  $a_{i_0} \equiv b_{i_0} \pmod{3}$  e  $c_{i_0+1}$  tal que:

$$\sum_{i=0}^{i_0} a_i 3^i + c_{i_0+1} 3^{i_0+1} = \sum_{i=0}^{i_0} b_i 3^i .$$

Neste caso em específico, temos que  $a_{i_0} = -1$ ,  $b_{i_0} = 2$  e  $c_{i_0+1} = 1$ .

Para as entradas seguintes fazemos  $a_i \equiv b_i + c_i \pmod{3}$  e  $c_{i+1}$  é construído da mesma forma que  $c_{i_0+1}$ .

A partir de algum índice  $k$  obteremos  $a_i = b_i = c_{i+1} = 0 \forall i > k$  e, deste modo

$$\sum_{i=0}^k a_i 3^i = \sum_{i=0}^m b_i 3^i = z . \tag{4.4}$$

Vejamus que de fato existe este  $k$ .

Partindo de  $i_0 + 1$ , temos que:

1.  $a_{i_0+1} = 1$  e  $c_{i_0+2} = 0$  se  $b_{i_0+1} = 0$ .
2.  $a_{i_0+1} = -1$  e  $c_{i_0+2} = 1$  se  $b_{i_0+1} = 1$ .
3.  $a_{i_0+1} = 0$  e  $c_{i_0+2} = 1$  se  $b_{i_0+1} = 2$ .

No caso 1 temos  $\sum a_i = \sum b_i$ , e obtemos o desejado para  $i_0 + 1$  índices.

Nos casos 2 e 3 podemos ter laços, que podem ser de apenas um tipo dos casos ou podem alternar, mas observe que voltamos na situação anterior pois  $c_i = 1$ .

Como a representação de  $z$  é finita, para todo índice maior que  $m$  temos que  $b_i = 0$ . Logo, em algum momento caímos no caso 1 e, como os índices restantes são todos nulos encontramos  $k$  satisfazendo (4.4).

Com isso temos que qualquer inteiro pode ser escrito da forma desejada (para números negativos basta trocar 1 por -1 e vice versa).

Assim  $ap$  e  $bq \in R_\infty$  e, deste modo  $1 \in R_\infty$ , estando portanto em  $R_n$ , para algum  $n$  fixado, como  $R_{n+k}$  contém  $R_n$  e suas somas, temos que  $R_\infty = \mathbb{Z}$ .

Dado  $n \in \mathbb{Z}$ , concluímos que  $n \in R_\infty$  usando as expansões de  $(an)$  e  $(bn)$ , pois

$$(an)p + (bn)q = n .$$

□

**Lema 4.10.** Se  $u = \frac{p}{q}$  com  $p + q \not\equiv 0 \pmod{3}$  então  $\mu(S_u) = 0$  e  $\varphi(u) < 1$ .

*Demonstração.* Se  $p + q \not\equiv 0 \pmod{3}$  então  $\#V_n \neq 3^n$ , usando o lema 4.5 obtemos o resultado. □

## 5 A DIMENSÃO DAS PROJEÇÕES

### 5.1 APLICAÇÕES DE GRAFOS A REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS

Nesta seção vamos construir um grafo que vai nos encaminhar um resultado sobre a contagem de caixas da cobertura de uma projeção  $S_u$ .

Defina  $S_u^k = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i 3^{-i}; \alpha_i \in \{0, 1, u\} \right\}$ , isto é, o conjunto das projeções dos elementos de  $S_u$  com expansões finitas. Lembremos que, se  $u = \frac{p}{q}$  racional, e  $x_i \in \{0, p, q\}$ , usamos a notação

$$\mathcal{S}^k = \left\{ \sum_{i=1}^k x_i 3^{-i} : x_i \in \{0, p, q\} \right\} = q S_u^k.$$

Para determinar a cardinalidade de  $3^n S_u^n$ , basta determinar a cardinalidade de  $3^n \mathcal{S}^n$ . A vantagem é que  $3^n \mathcal{S}^n \subset \mathbb{Z}$ .

As expansões de  $\mathcal{S}^n$ , fixado  $n$ , são aqui chamadas *palavras* no alfabeto  $D = \{0, p, q\}$ . Em princípio, há  $3^n$  palavras de tamanho  $n$  em  $D$ . Construimos um grafo que fornece a redundância das representações finitas no alfabeto  $D$ . Um *fator* de uma palavra  $x_1 \dots x_n$  é uma palavra  $w = x_k x_{k+1} \dots x_{k+l}$ ,  $l \geq 0$  e  $1 \leq k \leq n$ .

Dada uma palavra  $x_1 \dots x_n$  em  $D$ , defina:

$$r(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n x_i 3^{i-1},$$

que é um ponto de  $3^n \mathcal{S}^n$ , correspondendo à expansão:

$$3^n \left( \frac{x_1}{3^n} + \frac{x_2}{3^{n-1}} + \dots + \frac{x_n}{3} \right).$$

Para cada palavra  $x_1 \dots x_n$ , existe uma palavra  $y_1 \dots y_n$  de mesmo tamanho que é a menor na ordem lexicográfica satisfazendo  $r(x_1 \dots x_n) = r(y_1 \dots y_n)$ . Lembramos que a ordem lexicográfica no alfabeto  $D$  significa

$$x_1 \dots x_n > y_1 \dots y_n \Leftrightarrow k = \min_{1 \leq j \leq n} \{x_j \neq y_j\} \leq n \text{ e } x_k > y_k.$$

Chamamos  $y_1 \dots y_n$  de *palavra minimal* associada a  $r(y_1 \dots y_n)$ .

Seja  $T_n(u)$  o conjunto de todas as palavras minimais de comprimento  $n$ . Então os elementos de  $r(T_n(u))$  são distintos e  $r(T_n(u)) = 3^n \mathcal{S}^n$ .

Dado  $u = \frac{p}{q}$ , com  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . Assumimos que  $0 < |p| < q$  e definimos  $m = \lfloor \frac{q - \min\{p, 0\} - 1}{2} \rfloor$ . Construimos um grafo orientado  $G_u$  com  $2m + 1$  vértices, que nomearemos de  $-m$  a  $m$ . Cada aresta de  $G_u$  está associada a um par ordenado de letras em  $D$ . Do vértice 0 sai uma aresta para um vértice  $k$  se existe um par ordenado  $(d_1, d_2)$ , com  $d_1 > d_2$

e  $k = \frac{d_1 - d_2}{3} \in \mathbb{Z}$ ; esta aresta (se existir) liga 0 a  $\frac{d_1 - d_2}{3}$ . Para cada vértice  $x$  diferente de zero e cada par  $(d_1, d_2)$ , se  $k = \frac{x + d_1 - d_2}{3}$  é inteiro, colocamos uma aresta ligando  $x$  a  $\frac{x + d_1 - d_2}{3}$  e dizemos que a aresta ligando  $x$  a  $\frac{x + d_1 - d_2}{3}$  é rotulada por  $(d_1, d_2)$ . Um caminho no grafo rotulado é uma palavra em  $(D \times D)^k$ :

$$(d_{i_1}, d_{j_1})(d_{i_2}, d_{j_2}) \dots (d_{i_l}, d_{j_l}) .$$

Por exemplo, para  $q = 2$  e  $p = 1$ ,  $G_u$  tem apenas a aresta 0. Para  $q = 3$  e  $p = 1$ , temos  $G_u$  como na Figura 5.2. Note que  $G_u$  pode ser redutível.

**Lema 5.1.**  $T_n(u)$  consiste de todas as palavras de comprimento  $n$  tais que se

$$(d_{i_1}, d_{j_1})(d_{i_2}, d_{j_2}) \dots (d_{i_l}, d_{j_l})$$

é um caminho que começa e termina em 0 no grafo  $G_u$ , então nenhum elemento de  $T_n(u)$  contém  $d_{i_1} \dots d_{i_l}$  como fator. Reciprocamente, se  $x_1 \dots x_n > y_1 \dots y_n$  satisfaz  $r(x_1 \dots x_n) = r(y_1 \dots y_n)$ , então

$$(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$$

é um ciclo no grafo  $G_u$  começando do vértice 0.

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  um caminho em  $G_u$  que leve 0 em 0 com arestas rotuladas por  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots, (x_k, y_k)$ . Sendo assim:

$$\frac{\frac{x_1 - y_1}{3} + x_2 - y_2}{3} + x_3 - y_3 + \dots + (x_k - y_k) = 0$$

Então  $r(x_1 \dots x_k) = r(y_1 \dots y_k)$ , mas como  $x_1 > y_1$ , a palavra  $y_1 \dots y_n$  é menor na ordem lexicográfica do que  $x_1 \dots x_n$ , para todo  $n \geq 1$ . Portanto nenhum prefixo da palavra  $x_1 \dots x_k$  pode ser prefixo de qualquer palavra de  $T_n(u)$ .

Por outro lado, se a palavra  $x_1 \dots x_k$  é maior do que  $y_1 \dots y_k$  e satisfaz  $r(x_1 \dots x_k) = r(y_1 \dots y_k)$ , com  $x_1 \neq y_1$  então escolhendo as arestas representadas por  $(x_i, y_i)$  temos um caminho que leva 0 em 0 no grafo  $G_u$ .  $\square$

## 5.2 A DIMENSÃO DA PROJEÇÃO EM DIREÇÕES RACIONAIS

**Proposição 5.2.** Seja  $u = \frac{p}{q}$ . Então  $\lim_{k \rightarrow \infty} |S_u^k|^{\frac{1}{k}}$  existe.

*Demonstração.* O problema agora se reduz a contar as palavras em  $D^*$ , que é o conjunto das palavras finitas no alfabeto  $D$ , as quais não possuem fatores  $x_1 \dots x_k$  tais que exista um ciclo rotulado por  $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \dots (x_k, y_k)$  começando em 0 no grafo  $G_u$ .

Observe que nem sempre sai uma aresta de 0, por exemplo para  $p = 1$  e  $q = 2 + 3k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Por outro lado, se  $m \geq 1$ , sempre existe  $x \in [-m, m]$  tal que

$$x + d_1 - d_2 = 0, \quad d_1, d_2 \in \{0, p, q\},$$

o que significa que a aresta com rótulo  $(d_1, d_2)$  liga o vértice  $x$  ao vértice 0. Assim, existe um subgrafo irredutível de  $G_u$  que contém o vértice 0.

Um resultado clássico da teoria de matrizes, devido a Perron, afirma que uma matriz não-negativa (e não-nula), associada a um grafo irredutível, possui um autovalor positivo  $r$  de módulo máximo tal que todos os outros autovalores têm módulo estritamente menores do que  $r$ . Para este resultado, pode-se consultar [5].

Da construção do grafo  $G_u$ , obtemos um conjunto de palavras proibidas em  $D^*$ , aquelas que podemos substituir por outras minimais e que representam o mesmo número. Este conjunto de palavras proibidas pode ser vazio, tendo como consequência que  $|S_u^k| = 3^k$ . Em geral, o conjunto de proibições nos leva a um subshift que é um fator de um shift de tipo finito, denominado *sistema sófico*. De toda forma, a linguagem deste sistema sófico é calculável a partir de uma matriz de adjacência para as arestas rotuladas.  $\square$

**Exemplo 1.** A matriz de adjacência de  $G_{1/2}$  é nula. A matriz de adjacência de  $G_{1/5}$  é

$$A_{1/5} = (a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq 5$$

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow 3(j - 3) = (i - 3) + d_1 - d_2$$

$$A_{1/5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vejamos o grafo para este exemplo.

Temos que  $m = [4/2] = 2$ , neste caso o grafo tem  $2m + 1 = 5$  vértices, que nomeados de  $-2$  a  $2$ . Vamos construir as arestas:

- Saindo do vértice  $-2$ , como  $-2 + 5 - 0 = 3$ , existe uma aresta rotulada por  $(5, 0)$  chegando em 1. Como  $-2 + 0 - 1 = -3$ , existe uma aresta rotulada por  $(0, 1)$  chegando em  $-1$ . Finalmente, de  $-2 + 1 - 5 = -6$ , existe um laço em  $-2$ . Não existem arestas com rótulos  $(0, 5)$ ,  $(1, 0)$  e  $(5, 1)$  saindo do vértice  $-2$ .
- Saindo do vértice  $-1$ , existe uma aresta rotulada por  $(1, 0)$  chegando em 0. Existe uma aresta rotulada por  $(0, 5)$  chegando em  $-2$ . Existe uma aresta rotulada por  $(5, 1)$  chegando em 1.

- Não existem arestas saindo do vértice 0.
- Saindo do vértice 1, existe uma aresta rotulada por  $(5,0)$  chegando em 2. Existe uma aresta rotulada por  $(0,1)$  chegando em 0.
- Saindo do vértice 2, existe uma aresta rotulada por  $(5,1)$  que é um laço. Existe uma aresta rotulada por  $(0,5)$  chegando em  $-1$ . Existe uma aresta rotulada por  $(1,0)$  chegando em 1.

Concluimos então a montagem do grafo:

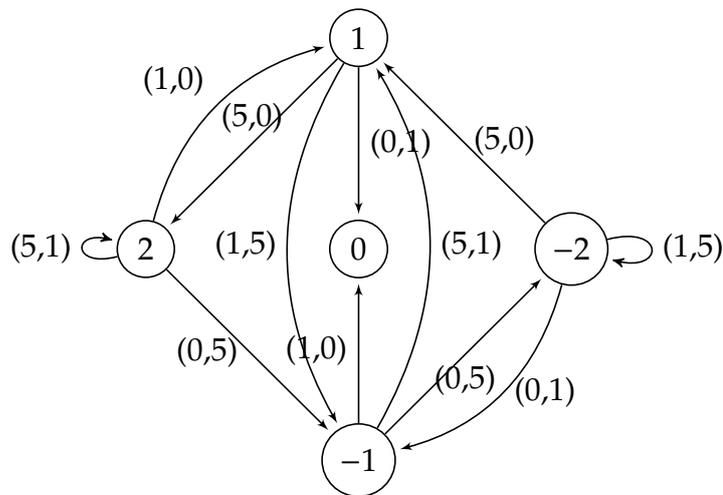


Figura 5.1: Grafo  $G_{1/5}$ .

Fica claro que a linha 3, que conta os caminhos que saem do zero, é sempre nula.

Um exemplo em que o grafo irredutível contendo o vértice 0 é não trivial ocorre para  $G_{1/3}$ . Sua matriz de adjacência é

$$A_{1/3} = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq 3$$

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow 3(j-2) = (i-2) + d_1 - d_2$$

$$A_{1/3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos que o autovalor máximo do bloco  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  é  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Assim, o número de caminhos de tamanho  $n \geq 2$  dos ciclos que começam em 0 se comporta assintoticamente como  $\theta^n$ . Estes ciclos informam que em  $T_n(1/3)$  não ocorrem fatores da forma  $3^k 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Sendo este o conjunto de palavras proibidas, o shift coincide com o shift de tipo finito em que  $30$  é a única palavra proibida. Sua matriz de adjacência contém

um único zero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O autovalor de módulo máximo é  $\theta^2$ . Este cálculo nos leva a concluir que a dimensão de Hausdorff para esta projeção (e também para a projeção na direção  $u = 3$ ) é  $2 \log_3 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ .

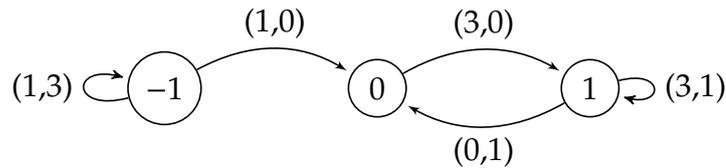


Figura 5.2: Grafo  $G_{1/3}$ .

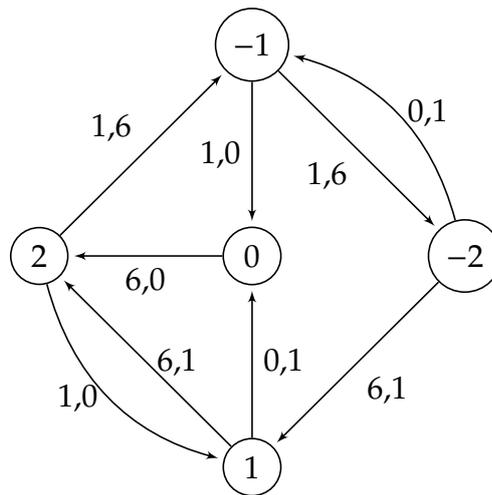


Figura 5.3: Grafo usando dígitos 0,1 e 6.

**Corolário 5.3.** Para  $u \in \mathbb{Q}$ ,  $\varphi(u) = \dim_H(S_u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log_3 |S_u^k|$ .

*Demonstração.* Temos que  $\dim_B(S_u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log_3 |S_u^k|$ , e este limite existe, pela Proposição 5.2. Além disso,  $S_u$  satisfaz as condições de autossimilaridade, e, portanto a dimensão de contagem de caixas coincide com a dimensão de Hausdorff.  $\square$

**Teorema 5.4.** Se  $u = \frac{p}{q}$ , irredutível,  $0 < p < q$ ,  $3 \nmid q$  e  $k > 0$ , então existe uma cota superior  $\varphi(3^k u) < f_{p,q} < 1$  independente de  $k$ . Se  $k > 2 \log_3(2q)$  então:

$$\varphi\left(\frac{3^k p}{q}\right) < 1 - \frac{1}{16pq \log_3(2q)}.$$

*Demonstração.* Seja  $G = G_u$  o grafo associado aos dígitos  $\{0, q, 3^k p\}$ , como na Proposição

5.2. Represente  $q$  e  $p$  na base 3 usando os dígitos  $\{0, 1, -1\}$ .

$$q = \sum_{i=0}^l a_i 3^i, \quad p = \sum_{i=0}^{l'} b_i 3^i.$$

Note que  $3^l/2 < q < 3^{l+1}/2$ . De modo semelhante,  $3^{l'}/2 < p < 3^{l'+1}/2$ ,  $qp = \sum_{i=0}^{l'} q b_i 3^i$ . Suponha  $a_0 = 1$  (podemos usar um argumento simétrico para  $a_0 = -1$ ).

Seja  $k > l$ , então existe um caminho em  $G$  que leva 0 em  $pq3^{k-l}$  onde a  $i$ -ésima aresta é rotulada seguindo a regra:

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (3^k p, 0), & \text{se } a_i = 1; \\ (0, 3^k p), & \text{se } a_i = -1; \\ (0, 0), & \text{se } a_i = 0. \end{cases}$$

Por exemplo, tomando  $p/q = 1/7$ , temos que os coeficientes  $a_i$  são respectivamente 1, -1 e 1. Neste caso,  $l = 2$  e consideremos  $k = 3$ . Seguindo a regra temos:

$$(x_0, y_0) = (3^k p, 0) = (27, 0); (x_1, y_1) = (0, 3^k p) = (0, 27); (x_2, y_2) = (3^k p, 0) = (27, 0).$$

Assim, temos o seguinte caminho no grafo

$$0 \rightarrow 3^{k-1}; 3^{k-1} \rightarrow (3^{k-1} + 3^k)/3 = -2 \cdot 3^{k-2}; -2 \cdot 3^{k-2} \rightarrow (-2 \cdot 3^{k-2} + 3^k)/3 = 7 \cdot 3^{k-2}.$$

Como  $l = 2$  e  $p = 1$ , trocando  $k$  por 3 obtemos um caminho que leva 0 em  $3^{k-l}pq$ .

Existem  $3^{k-l}$  caminhos em  $G$  que levam  $pq3^{k-l}$  em  $pq$ , estes são os caminhos que passam pelos vértices da forma  $pq3^{k-l-j}$  para cada  $j \in \{1, \dots, k-l\}$  e, a cada vértice as arestas podem ser rotuladas por  $(0, 0); (3^k p, 3^k p); (q, q)$ , ou seja, 3 a cada passo.

Existe um caminho que liga  $pq$  a 0 onde a  $i$ -ésima aresta é rotulada por:

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (0, q), & \text{se } b_i = 1; \\ (q, 0), & \text{se } b_i = -1; \\ (0, 0), & \text{se } b_i = 0. \end{cases}$$

Usando o mesmo exemplo anterior ( $p/q = 1/7$ ) temos que  $b_0 = 1$ , apenas. Logo,  $(x_0, y_0) = (0, 7)$ , como  $pq = 7$  temos que o vértice  $pq$  de fato se liga ao vértice 0 pela aresta rotulada por  $(0, 7)$ .

Os caminhos ligando 0 em 0 que são combinação destes caminhos tem tamanho  $k+l-l+l' = k+l'$ . Então, ao menos  $3^{k-l}$  arestas de comprimento  $k+l'$  estão proibidas em  $T^n$ .

Dado um caminho de comprimento  $n$ , divida-o em  $\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$  caminhos de compri-

mento  $2k$ . Para um caminho de comprimento  $2k$  contamos os caminhos desabilitados em  $0, l, 2l, \dots, [\frac{k}{l}]l$  e temos no máximo

$$3^{2k}(1 - 3^{-(l+l')})^{[\frac{k}{l}]}.$$

caminhos permitidos, o que nos dá uma taxa de crescimento

$$\gamma \leq 3(1 - 3^{-(l+l')})^{[\frac{k}{l}]^{\frac{1}{2k}}}.$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} \log_3 \gamma &\leq 1 + [\frac{k}{l}] \frac{1}{2k} \log_3(1 - 3^{-(l+l')}) \\ &< 1 - \frac{[\frac{k}{l}]}{2k3^{l+l'} \ln 3} \\ &< 1 - \frac{[\frac{k}{l}]}{8kpq \ln 3} \\ &< 1 - \frac{1}{16pql \ln 3'} \quad \text{se } k > 2l \\ &< 1 - \frac{1}{16pq \ln(2q)}. \end{aligned}$$

Usando que  $\log_3(1 - x) < -\frac{x}{\ln 3}$ ;  $3^l < 2q$ ;  $3^{l'} < 2p$ ; e se  $k > 2l$  então  $\frac{1}{k}[\frac{k}{l}] > \frac{1}{2l}$ .  $\square$

### 5.3 A DIMENSÃO EM UM CONJUNTO RESIDUAL DE DIREÇÕES

Se dois números reais  $u$  e  $v$  estão próximos então os conjuntos  $S_u$  e  $S_v$  estão próximos pela métrica de Hausdorff em  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 5.5.** *Seja  $u \in \mathbb{R}$  e  $\frac{p_i}{q_i}$  uma sequência de racionais tais que  $p_i + q_i \equiv 0 \pmod{3}$ ;  $q_i \rightarrow \infty$  e existem constantes  $C, \alpha > 0$  tais que :*

$$\left| u - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{C}{q_i^\alpha}.$$

Então  $\varphi(u) \geq 1 - \frac{1}{\alpha}$ . Em particular, se  $u$  é muito bem aproximado por racionais desta forma, então  $\varphi(u) = 1$ .

Dizemos que um número  $u$  é muito bem aproximado por racionais quando  $\alpha$  pode ser tomado arbitrariamente grande.

*Demonstração.* Seja  $N_u(\epsilon)$  o número mínimo de intervalos de comprimento máximo  $\epsilon$  necessários para cobrir  $S_u$ , e observe que podemos assumir que os intervalos são da forma  $[m\epsilon, (m+1)\epsilon]$ , uma vez que com esta restrição, reduzimos a quantidade de

intervalos permitidos por um fator constante, o que não muda a taxa de crescimento de  $N_u(\epsilon)$  logo, o valor de  $\varphi(u)$  não é alterado usando apenas estes intervalos, assim temos:

$$\varphi(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_u(\epsilon)}{-\log \epsilon} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_u\left(\frac{c}{q_i^\alpha}\right)}{\alpha \log q_i + \log C}.$$

Uma vez que  $q_i \rightarrow \infty$ , podemos escolher  $\epsilon$  desta maneira. Mostraremos agora que:

$$\text{se } \left|u - \frac{p}{q}\right| < \left(\frac{2}{3}\right) \frac{3^{-k}}{q} \quad \text{então } N_u\left(\frac{3^{-k}}{q}\right) \geq c \cdot 3^k.$$

Onde  $c$  é uma constante e  $p/q$  é algum  $p_i/q_i$ .

Temos que o conjunto  $S_{p/q}^k \subset S_{p/q}$  consiste de  $3^k$  pontos em locais distintos na malha  $(3^{-k}/q)\mathbb{Z}$ . Então necessitamos de, ao menos  $3^k$  intervalos de comprimento  $3^{-k}q$  para cobrir  $S_{p/q}$ .

Para cada ponto  $x \in S_{p/q}$ ,  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}$ . Seja  $x'$  o ponto com a mesma sequência de dígitos, trocando todas as ocorrências de  $p/q$  por  $u$  então:

$$|x - x'| < \sum_{i=1}^{\infty} \left|u - \frac{p}{q}\right| 3^{-i} = \frac{3}{2} \left|u - \frac{p}{q}\right| < \frac{3^{-k}}{q}.$$

Então cada ponto de  $S_{p/q}$  está à uma distância máxima de  $3^{-k}/q$  de um ponto de  $S_u$ . Então necessitamos de ao menos  $3^{k-1}$  intervalos de comprimento  $3^{-k}/q$  para cobrir  $S_u$ . Logo,  $N_u(3^{-k}/q) \geq 3^{k-1}$ .

Considerando  $\epsilon = 3^{-k_i}/q$  podemos escolher  $k_i$  de forma conveniente para que tenhamos  $\epsilon = 3^{-k_i}/q \sim C/q_i^\alpha$ . Fazendo uma mudança de variável em  $C/q_i^\alpha$  e multiplicando por uma constante temos:

$$\varphi(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_u(\epsilon)}{-\log \epsilon} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_u\left(\frac{C}{q_i^\alpha}\right)}{\alpha \log q_i + \log C} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log q_i^{\alpha-1} + \text{const.}}{\alpha \log q_i + \text{const.}} \geq 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

□

**Observação.** O conjunto dos pontos que podem ser aproximados desta forma é um residual (intersecção enumerável de abertos densos).

#### 5.4 COTAS INFERIORES DA DIMENSÃO

O argumento usado anteriormente pode ser refinado para se obter cotas inferiores de  $\varphi(u)$ , quando  $u$  está próximo de algum racional.

Seja  $u = p/q$  em termos irredutíveis com  $p + q \equiv 0 \pmod{3}$  com  $0 < p < q$ . Considere  $S = qS_u$ .

Dada uma sequência  $(x_1, x_2, \dots)$  em  $\{0, p, q\}^{\mathbb{N}}$ , definimos:

$$r(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 3^{-i} \in S.$$

Construímos um grafo  $G_{\partial}$  que descreve as sequências  $(x_1, x_2, \dots)$  para as quais  $r(x_i)$  está na fronteira de  $S$ . Seja  $m = [q/2]$  (assumindo  $q > 2$ ). O grafo  $G_{\partial}$  possui  $2m$  vértices, que vão de  $-m$  a  $m$  (incluindo estes 2). De um vértice  $x$ , sai uma aresta rotulada por  $(d_1, d_2)$  se  $3x + d_1 - d_2$  é um inteiro não nulo em  $[-m, m]$  e  $d_1, d_2 \in \{0, p, q\}$ .

Seja  $\alpha$  um caminho infinito no grafo que se inicia no vértice  $k$  e tem arestas rotuladas  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots)$  então  $r(x_1, x_2, \dots) + k = r(y_1, y_2, \dots)$ . Como as telhas tem interiores disjuntos, o ponto  $r(x_1, x_2, \dots)$  está na fronteira de  $S$ . Por outro lado, dado um ponto  $x$  na fronteira  $\partial S$  existe uma telha  $S - k$  tal que  $x \in S - k$ , uma vez que é possível telhar a reta com cópias de  $S$ . Se  $x \notin \{0, q/2\}$  então  $|k| \leq [(q-1)/2]$ , existe um  $y \in S$  com  $x = y - k$  e, conseqüentemente um caminho infinito em  $G_{\partial}$  cujo as primeiras coordenadas são  $(x_i)$  com  $r(x_i) = x$ , portanto  $G_{\partial}$  descreve todos os pontos da fronteira exceto 0 e  $q/2$ .

**Teorema 5.6.** *Seja  $u \in \mathbb{R}$  e, suponha que existem inteiros coprimos  $p, q$  com  $p + q \equiv 0 \pmod{3}$  e  $\epsilon$  com  $0 < \epsilon < q^{-2q}$  tais que:*

$$\left| u - \frac{p}{q} \right| < \epsilon,$$

então,

$$\varphi(u) > 1 - \frac{1}{\frac{\log \frac{1}{\epsilon}}{q \log q} - 1}.$$

Se  $\epsilon$  é pequeno então a dimensão é próxima de 1.

*Demonstração.* Assumamos, sem perda de generalidade que  $0 < u < 1$  e  $0 < p < q$ . Então  $|S_u| = \frac{q}{2}$ .

Tome  $S = qS_{\frac{p}{q}}$  e, para cada  $k$ , seja  $W_k \subset \{0, p, q\}^{\mathbb{N}}$  o conjunto das sequências  $x = (x_1, x_2, \dots)$  tais que para cada  $l \geq 0$ ,  $r(\sigma^l x)$  está a uma distância de, no mínimo,  $\frac{q}{2} 3^{-k}$  da fronteira de  $S$ , onde  $\sigma$  denota o shift  $\sigma(x_1, x_2, \dots) = (x_2, \dots)$ . Um elemento de  $W_k$  é caracterizado pela seguinte propriedade: nenhuma subpalavra de comprimento  $k$  rotula um caminho no grafo  $G_{\partial}$ , do contrário, se  $x_l, \dots, x_{l+k}$  é tal palavra, existe uma sequência da fronteira  $y_n$  que se inicia com  $x_l, \dots, x_{l+k}$  e então  $|r(y) - r(\sigma^l x)| < \frac{q}{2} 3^{-k}$ .

Mostraremos que se  $k$  é grande, a taxa de crescimento de  $W_k$  está próxima de 3, logo  $W_k$  descreve um subconjunto de  $S$  com dimensão próxima de 1.

O grafo  $G_{\partial}$  tem  $\left[ 2 \frac{q-1}{2} \right] < q$  vértices, para cada vértice  $v$  existe ao menos uma palavra de comprimento máximo  $\log_3 q$  que não rotula um caminho de  $v$  em  $G_{\partial}$ . Mostraremos que existe uma palavra  $\gamma$  de comprimento  $c < q \log_3 q$  que não rotula um caminho em  $G_{\partial}$  independente da escolha do vértice inicial. Para cada palavra  $\beta$ ,

seja  $V_\beta$  o conjunto dos vértices  $x$  onde existe um caminho rotulado por  $\beta$  que se inicia em  $x$ . Para a palavra vazia,  $V_\emptyset$  é o conjunto de todos os vértices. Defina  $\gamma$  da seguinte forma:

Suponha que o segmento inicial de  $\gamma$  é  $\alpha_1$ , que é definido por  $V_{\alpha_1}$ . Tome um vértice  $v$  em  $\alpha_1$  e uma palavra  $\beta$  de comprimento menor que  $\log_3 q$  que não rotula um caminho partindo de  $v$ . Defina  $\alpha_2$  como sendo a concatenação de  $\alpha_1$  e  $\beta$ . Então  $\#V_{\alpha_2} < \#V_{\alpha_1} - 1$  uma vez que ele não contém  $v$ . Repetimos o processo, definindo  $\alpha_3, \alpha_4, \dots$  até obtermos  $\alpha_l$ , para algum  $l < q$ . Seja  $\gamma = \alpha_l$ , então o comprimento de  $\gamma$  é de, no máximo  $q \log_3 q$  e a palavra  $\gamma$  não rotula nenhum caminho em  $G_\partial$ .

Seja  $k > 2c$ . Então  $W_k$  contém todas as sequências da forma:

$$\gamma, w_1, \gamma, w_2, \gamma, \dots$$

Onde  $w_j$  são palavras arbitrárias de comprimento  $k - 2c$ , pois qualquer subpalavra de comprimento  $k$  contém  $\gamma$  como subpalavra e, portanto não rotula caminhos de  $G_\partial$ , então o crescimento de  $W_k$  é de ao menos  $\xi = 3^{\frac{k-2c}{k-c}}$  do crescimento de palavras deste tipo. Como  $c < q \log_3 q$  temos  $\log_3 \xi > 1 - \frac{q \log_3 q}{k - q \log_3 q}$ .

Se duas sequências  $a$  e  $b$  em  $W_k$  tem elementos iniciais diferentes  $a_1$  e  $b_1$  então  $|r(a) - r(b)| \geq \frac{q}{2} 3^{-k}$ .

Para cada  $x$  em  $W_k$  existe uma sequência correspondente  $x'$  obtida trocando cada ocorrência do dígito  $p$  por  $qu$  então  $x'$  descreve uma sequência de dígitos em  $\{0, qu, q\}$  e  $r(x') \in qS_u$ . Note que  $|r(x) - r(x')| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |p - qu| 3^{-i} = \frac{|p-qu|}{2} < \frac{q\epsilon}{2}$ . Seja  $k = -\lceil \log_3 3\epsilon \rceil$  então  $|r(x) - r(x')| < \frac{q3^{-k}}{6}$ . Seja  $W'_k$  o conjunto de tais sequências  $x'$ .

Se  $a'$  e  $b'$  são elementos de  $W'_k$  correspondentes a  $a$  e  $b$  em  $W_k$ , com dígitos iniciais diferentes então:

$$\begin{aligned} |r(a') - r(b')| &\geq |r(a) - r(b)| - |r(a) - r(a')| - |r(b) - r(b')| \\ &\geq \frac{q}{2} 3^{-k} - \frac{q}{6} 3^{-k} - \frac{q}{6} 3^{-k} \\ &\geq \frac{q3^{-k}}{6}. \end{aligned}$$

Então para  $n > k$ , necessitamos de ao menos  $\xi^n$  intervalos de comprimento  $q \frac{3^{-n}}{6}$  para cobrir  $r(W'_k) \subset S_u$ , onde  $\xi$  é a taxa de crescimento de  $W_k$ . Logo,

$$\dim_B(S_u) \geq \log_3 \xi \geq 1 - \frac{1}{\frac{k}{q \log_3 q} - 1} > 1 - \frac{1}{\frac{\log 1/\epsilon}{q \log q} - 1}.$$

□

## Referências Bibliográficas

- [1] ADAMCZEWSKI, B., AND BUGEAUD, Y. Palindromic continued fractions. *Annales de l'Institut Fourier* 57, 5 (2007), 1557–1574.
- [2] ADAMCZEWSKI, B., AND BUGEAUD, Y. A short proof of the transcendence of Thue-Morse continued fractions. *American Math. Monthly* 114-6 (2007), 536–540.
- [3] FALCONER, K. Dimensions and measure of quasi self-similar sets. *Proc. of the American Math. Soc.* 106-2 (1989), 543–554.
- [4] FALCONER, K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & sons, New York, 1990.
- [5] GANTMACHER, F. *The Theory of Matrices*, 3rd ed., vol. II. Chelsea Pub. Co., New York, 1989.
- [6] HAZEWINKEL, M. *Encyclopaedia of Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston, 1997.
- [7] HOCHMAN, M. On self-similar sets with overlaps and inverse theorem for entropy. *Ann. of Math.* 180 (2014), 221–238.
- [8] KENNYON, R. Self-replicating tilings. *Contemp. Math.* 135 (1992), 239–263.
- [9] KENNYON, R. Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket. *Israel J. Math.* 97 (1997), 221–238.
- [10] KNUTH, D. E. *The Art of Scientific Programming*, 3rd ed. Addison Wesley Longman, Reading, Mass., 1997.
- [11] LAGARIAS, J. C., AND WANG, Y. Tiling the line with translates of one tile. *Inventiones Mathematicae* 124, 1-3 (Jan 1996), 341–365.
- [12] MAHLER, K. Some suggestions for further research. *Bull. Austral. Math. Soc.* 29 (1984), 101–108.
- [13] MARSTRAND, J. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractal dimension. *Proc. London Math. Soc.* 4 (1954), 213–250.
- [14] MATTILA, P. *Fourier analysis and Hausdorff dimension*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [15] MATULA, D. W. *Basic digit sets for radix representation*. Naval Postgraduate School, Monterrey, Calif., 1978.

- [16] MOREIRA, C. G. T. A., AND C. YOCOZ, J. Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions. *Ann. of Math.* 154 (2001), 45–96.
- [17] NISHIOKA, K. *Mahler functions and transcendence*. Springer, Berlin New York, 1996.
- [18] PERES, Y., AND SOLOMIAK, B. Problems on self-similar sets and self-affine sets: an update. *Progress in Probability* 46 (2000), 95–106.
- [19] QUEFFÉLEC, M. Transcendance des fractions continues de Thue-Morse. *Journal of Number Theory* 73, 2 (Dec 1998), 201–211.