



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

CLÁUDIA BRUNOSI MEDEIROS

**SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BURGERS 1D E 2D VIA:
UPWIND DE ALTA ORDEM E HOPF-COLE**

Londrina
2013

CLÁUDIA BRUNOSI MEDEIROS

**SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BURGERS 1D E 2D VIA:
UPWIND DE ALTA ORDEM E HOPF-COLE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Profa. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro

Londrina
2013

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

M488s Medeiros, Cláudia Brunosi.
Soluções das equações de Burgers 1D e 2D via: *upwind* de alta ordem e Hopf-Cole /
Cláudia Brunosi Medeiros. – Londrina, 2013.
99 f. : il.

Orientador: Neyva Maria Lopes Romeiro.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2013.

Inclui Bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais - Soluções numéricas - Teses. 2. Análise numérica - Teses. 3. Burgers, Equação de - Soluções numéricas - Teses. I. Romeiro, Neyva Maria Lopes. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.
CDU 519.61-7

CLÁUDIA BRUNOSI MEDEIROS

**SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BURGERS 1D E 2D VIA:
UPWIND DE ALTA ORDEM E HOPF-COLE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Fernando Luiz Pio dos Santos
Universidade Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Londrina, 13 de Fevereiro de 2013.

*Dedico este trabalho
à minha família*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela vida.

À minha mãe Neusa, ao meu pai Valdir e à minha irmã Gabriela pelo amor e pelo apoio nos momentos de fraqueza.

À professora Neyva M. L. Romeiro, pela orientação e atenção.

Ao meu namorado Felipe, por me motivar e me fazer mais feliz.

Aos meus amigos, Cibele, Camila, Giuliane, Edgar, Poliane e Junior pela ajuda e paciência.

Às minhas queridas amigas Fernanda, Andressa e Luana pela motivação, apoio e carinho.

A todos os professores do PGMAC pelos ensinamentos.

Aos funcionários Verginia, Eduardo, Odete e Paulo pela amizade, e prontidão.

À Capes pelo suporte financeiro concedido para a realização deste trabalho.

MEDEIROS, Cláudia Brunosi. **Soluções das Equações de Burgers 1D e 2D via: *upwind* de alta ordem e Hopf-Cole.** 2013. 76. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

No estudo em dinâmica dos fluidos computacional há o interesse em obter soluções numéricas para as equações diferenciais parciais. Um desafio neste contexto é a formação de descontinuidades que pode ser atribuída ao tratamento do termo convectivo não linear em equações diferenciais parciais. Dentro deste cenário, neste trabalho apresenta-se o estudo de um esquema *upwind* de alta resolução, o esquema ADBQUICKEST (*Adaptative Bounded QUICKEST*). Este esquema é aplicado em equações 1D e 2D, comparando qualitativamente os resultados numéricos com as soluções analíticas obtidas via transformação de Hopf-Cole e via uma modificação na transformação de Hopf-Cole. Ainda, o esquema é investigado nas soluções da equação de Burgers 1D e no sistema acoplado de equações de Burgers 1D para diferentes condições iniciais e de fronteira. Além disso, analisam-se os resultados numéricos da equação de Burgers 2D e os resultados no sistema acoplado de equações de Burgers 2D a baixos valores de ν . Por fim, investiga-se a ordem de precisão do esquema ADBQUICKEST em cada exemplo estudado.

Palavras-chave: Equação de Burgers. Diferenças finitas. Esquema *upwind*. ADBQUICKEST.

MEDEIROS, Cláudia Brunosi. **Solution to Burgers Equations 1D e 2D via: upwind of high order and Hopf-Cole.** 2013. 76. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

In the studies in computational fluid dynamics there is interest to obtain numerical solutions for partial differential equations. A challenge in this context is the formation of shock that can be attributed to the treatment of the nonlinear convective term in the partial differential equations. Within this scenario, this paper presents the study of a high-resolution upwind scheme, the ADBQUICKEST scheme. This scheme is applied to equation 1D and 2D, qualitatively comparing the numerical results with analytical solution obtained via Hopf-Cole transformation. Still, the scheme investigated in solutions of 1D Burgers equation and 1D coupled system of Burgers equations for different initial and boundary conditions. Furthermore, the numerical results of 2D Burgers equation and the numerical results of 2D coupled system of Burgers equations with low values of ν are analyzed. Ultimately, investigates the order of precision of the ADBQUICKEST in each example studied.

Keywords: Burgers equation. Finite difference. *Upwind* scheme. ADBQUICKEST.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	18
2.1	EQUAÇÃO DE BURGERS 1D	18
2.2	SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 1D	19
2.3	EQUAÇÃO DE BURGERS 2D	19
2.4	SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 2D	20
3	BASE TEÓRICA	22
3.1	TRANSFORMAÇÃO DE HOPF-COLE	22
3.2	DIFERENÇAS FINITAS	29
3.3	ESQUEMA <i>upwind</i>	31
3.3.1	ADBQUICKEST	31
3.4	ERRO NA NORMA L_2 E L_∞	37
4	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	39
4.1	EQUAÇÃO DE BURGERS 1D	39
4.2	SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 1D	41
4.3	EQUAÇÃO DE BURGERS 2D	42
4.4	SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 2D	43
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	45
5.1	EQUAÇÃO DE BURGERS 1D	45
5.2	SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 1D	49
5.3	EQUAÇÃO DE BURGERS 2D	52
5.3.1	Influência do valor de ν	56
5.3.2	Influência do passo de tempo	59
5.4	SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 2D	60
6	CONCLUSÃO	71
	REFERÊNCIAS	73

LISTA DE FIGURAS

3.1	Malha Computacional.	29
3.2	Nós computacionais.	32
3.3	Célula computacional mostrando o ponto P de discretização dos termos convectivos, seus vizinhos, as faces envolvidas f e g para a aproximação e a variável convectada ϕ sendo transportada com velocidades V_f e V_g	33
3.4	Região CBC no plano $\hat{\phi}_f - \hat{\phi}_U$	34
3.5	Região TVD em variáveis normalizadas.	35
3.6	Gráfico da variável normalizada de ϕ_f para o esquema ADBQUICKEST e $C = 0.5$	36
5.1	Solução numérica da equação de Burgers 1D, equação (2.1), com condição inicial (5.1) e de fronteira (5.2), para $t < 3$	46
5.2	Soluções da equação de Burgers 1D, equação (2.1), com condição inicial (5.4) para $\nu = 0.1$: a) Solução analítica e b) Solução numérica	48
5.3	Soluções da equação de Burgers 1D para o tempo final de simulação $t = 1$	48
5.4	Erro na norma L_∞	49
5.5	Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 1D, sistema (2.4), com condições iniciais (5.11) e condições de fronteira (5.12) para $t = 1$: a) Solução analítica de u , b) Solução numérica de u , c) Solução analítica de v e d) Solução numérica de v	51
5.6	Soluções do sistema acoplado de equações de Burgers 1D, sistema (2.4), para $t = 1$: a) Soluções de u , b) Soluções de v	52
5.7	Superfícies das soluções para a equação de Burgers 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.01$, $\delta t = 0.004$, $\delta x = \delta y = 0.025$ e $t = 2$	54
5.8	Soluções para a equação de Burgers 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.01$	54
5.9	Gráfico do erro para $0 \leq t \leq 2$; $\nu = 0.01$, $\delta x = \delta y = 0.025$ e $\delta t = 0.004$	55
5.10	Gráficos dos erros para diferentes malhas; $\nu = 0.01$ e $t = 2$: a) Norma L_2 e b) Norma L_∞	55
5.11	Superfície da solução numérica para a equação de Burgers de 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.002$, $\delta t = 0.004$, $\delta x = \delta y = 0.025$ e $t = 2$	57
5.12	Gráfico do erro para $0 \leq t \leq 2$; $\nu = 0.002$ e $\delta x = \delta y = 0.025$	57

5.13	Superfície da solução numérica para a equação de Burgers 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.001$, $\delta t = 0.004$, $\delta x = \delta y = 0.025$ e $t = 2$	58
5.14	Gráfico do erro para $0 \leq t \leq 2$; $\nu = 0.001$, $\delta t = 0.004$ e $\delta x = \delta y = 0.025$	58
5.15	Superfície da solução numérica para a equação de Burgers 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.001$, $\delta t = 0.002$, $\delta x = 0.0125$ e $t = 2$	59
5.16	Gráfico do erro para diferentes tempos; $\nu = 0.001$ e $\delta x = 0.0125$	60
5.17	Gráfico dos erros para $\nu = 0.001$ e $t = 2$: a) na norma L_2 e b) na norma L_∞	60
5.18	Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 2D, sistema (2.10), com condições iniciais (5.22) e condições fronteira (5.23); $\nu = 0.001$: a) Solução analítica de u ; b) Solução numérica de u ; c) Solução analítica de v e d) Solução numérica de v	62
5.19	Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 2D, sistema (2.10), com condições iniciais (5.22) e condições fronteira (5.23); $\nu = 0.001$: a) Solução analítica de u ; b) Solução numérica de u ; c) Solução analítica de v e d) Solução numérica de v	63
5.20	Gráfico do erro para diferentes tempos.	63
5.21	Gráficos dos erros para diferentes malhas: a) norma L_2 e b) norma L_∞	64
5.22	Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 2D, sistema (2.10), com condições iniciais (5.25) e condições fronteira (5.26); $\nu = 0.001$: a) Solução analítica de u ; b) Solução numérica de u ; c) Solução analítica de v ; e d) Solução numérica de v	67
5.23	Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 2D, sistema (2.10), com condições iniciais (5.25) e condições fronteira (5.26); $\nu = 0.001$: a) Solução analítica de u ; b) Solução numérica de u ; c) Solução analítica de v ; e d) Solução numérica de v	68
5.24	Gráfico do erro para diferentes tempos.	68
5.25	Gráficos dos erros para diferentes malhas: a) Norma L_2 e b) Norma L_∞	69

LISTA DE TABELAS

5.1	Erro das aproximações para $t = 1$, $C = 0.01$ e $\nu = 0.1$	49
5.2	Erro na norma L_2 para $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$, $\delta x = 1$ e $\delta t = 0.01$	52
5.3	Erro das aproximações para $\delta x = 1/80$, $C = 0.3$ e $\nu = 0.01$	56
5.4	Erro das aproximações para $t = 2$, $C = 0.3$ e $\nu = 0.01$	56
5.5	Erro das aproximações para $\delta x = \delta y = 1/80$, $C < 0.2$ e $\nu = 0.001$	64
5.6	Erro das aproximações para $t = 1$, $C < 0.2$ e $\nu = 0.001$	64
5.7	Erro das aproximações para $\delta x = \delta y = 1/80$, $C < 0.01$ e $\nu = 0.001$	69
5.8	Erro das aproximações para $t = 0.05$, $C < 0.01$ e $\nu = 0.001$	69

LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

- δx : espaçamento da malha em x
 δy : espaçamento da malha em y
 δt : espaçamento temporal
 f : face da célula computacional
 v : coeficiente de velocidade
 ν : coeficiente de viscosidade cinemática do fluido
 t : tempo
 L : tamanho da malha
 N : partição do tempo
 Mx : partição do espaço em x
 My : partição do espaço em y
 C : número de Courant
 Re : número de Reynolds
1D: unidimensional
2D: bidimensional
 α : parâmetro constante
 β : parâmetro constante
 ϕ : variável genérica não normalizada
 ψ : função limitadora de fluxo
 $\hat{\phi}$: variável genérica normalizada
 U_0 : escala de velocidade
 L_0 : escala de comprimento característico

LISTA DE ABREVIATURAS

ADBQUICKEST – “*Adaptative Bounded QUICKEST*”

CBC – “*Convection Boundedness Criterion*”

CFL – “*Courant – Friedrichs – Lewy*”

CUBISTA - “*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection*”

EDO’s – “*Equações Diferencias Ordinárias*”

EDP’s – “*Equações Diferencias Parciais*”

FOU – “*First – Order Upwind*”

HLPA – “*Hybrid – Linear Parabolic Aproximation*”

MDF – “*Métodos de diferenças finitas*”

NV – “*Normalized Variable*”

QUICK – “*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*”

QUICKEST – “*QUICK with Estimated Streaming Terms*”

SHARP – “*Simple High – Accuracy Resolution Program*”

SMART – “*Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport*”

TVD – “*Total Variation Diminishing*”

VONOS – “*Variable – Order Non – Oscillatory Scheme*”

WACEB – “*Weighted – Average Coefficient Ensuring Boundedness*”

ET – “*Erro de Truncamento*”

D – “*Dowstream*”

R – “*Remote – upstream*”

U – “*Upstream*”

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o desenvolvimento científico se beneficiou de um novo método, que engloba os processos práticos com os teóricos, conhecido como método numérico. Este último oferece uma ferramenta indispensável na determinação de soluções aproximadas, uma vez que muitas das soluções analíticas encontradas na literatura envolvem simplificações e descartam as não linearidades presentes na equação. Assim, para escoamentos viscosos, a natureza não linear promove um amplo intervalo de escalas no movimento, exclui soluções analíticas e favorece a utilização do método numérico [11]. Aplicado no estudo do movimento dos fluidos, os esquemas numéricos possuem várias aplicações, por exemplo em problemas de turbulência e processos estocásticos. Um dos problemas estudados na área de dinâmica dos fluidos baseia-se em desenvolver métodos numéricos que encontrem com maior exatidão a solução de um conjunto de equações. A ideia básica desses esquemas é o processo de discretização, que reduz o problema contínuo, com número infinito de variáveis, em um problema discreto com um número finito de variáveis, podendo ser resolvido computacionalmente. Nesta área de pesquisa, pode-se dividir três classes de métodos numéricos: métodos de volumes finitos, métodos de elementos finitos e métodos de diferenças finitas.

Os métodos de volumes finitos fundamentam-se numa formulação física, e são aplicados diretamente sobre malhas estruturadas e não estruturadas. Já os métodos de elementos finitos são utilizados para discretizar domínios geometricamente complexos, e a solução pode ser resolvida por funções de aproximações, que podem ser funções polinomiais. No caso do método de diferenças finitas, sua base é puramente matemática, pois pode ser desenvolvido a partir das aproximações por séries de Taylor que são mais econômicas computacionalmente [16], e é usado como uma abordagem alternativa para obter-se uma solução aproximada de uma equação diferencial parcial (EDP). A ideia do processo de diferenças finitas é transformar a resolução de uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, usando aproximações para as derivadas. Neste trabalho apresenta-se o método de diferenças finitas para a aproximação dos termos: temporal, convectivo e difusivo das equações analisadas.

Nos termos temporal e difusivo da equação de Burgues usa-se a diferença progressiva e central, respectivamente. Já, no termo convectivo desta equação o método de diferenças finitas utilizado é conhecido como esquema *upwind*. Na literatura, encontram-se vários esquemas *upwind*, que podem ser divididos em dois grandes grupos: os de primeira ordem e os de alta ordem. Dentro do grupo de primeira ordem pode-se citar o esquema FOU (*First – Order Upwind*) [6]. Porém, este esquema torna-se inadequado se aplicado por longo período de tempo [25]. Já dentro do grupo de alta ordem, um dos primeiros esquemas, desenvolvido em 1979 por Leonard em [22], é o esquema QUICK (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*), que tem a habilidade em reduzir a difusão numérica sem causar oscilações na solução, mas é condicionalmente estável, sendo inadequado para equações

que envolvem baixos valores do coeficiente de viscosidade cinemática do fluido.

A fim de construir esquemas limitados, em 1988 foi desenvolvido o esquema SHARP (*Simple High – Accuracy Resolution Program*) [23]. Este esquema possui bom desempenho em equações lineares e ainda alcança terceira ordem de precisão. Um outro bom exemplo encontrado na literatura é o esquema SMART (*Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport*), desenvolvido por Gaskell e Lau em 1988 [14], tem baixo custo computacional, e é uma versão limitada do QUICK. Entretanto, estes dois últimos esquemas podem não produzir soluções estáveis em algumas situações [26]. Com o objetivo de superar esse fato, Zhu [39] em 1991, introduz o esquema HLP (Hybrid – Linear Parabolic Approximation), que atinge segunda ordem de precisão. Já em 1998, Varonos e Bergeles desenvolvem o esquema VONOS (*Variable – Order Non – Oscillatory Scheme*) [36], que assim como o SHARP, SMART e HLP, introduz pouca dissipação numérica, e é capaz de resolver equações que envolvem regiões de escoamentos onde os gradientes são de muita importância.

Com o avanço dos estudos de conceitos necessários na construção dos esquemas *upwind*, Song [31] e outros autores em 2000, desenvolvem o WACEB (*Weighted – Average Coefficient Ensuring Boundedness*), esquema limitado, que pode alcançar terceira ordem, mas que pode não convergir quando aplicado a algumas equações, como pode ser observado em [2]. Assim, Alves [2] desenvolve um esquema que fundamenta-se nas restrições TVD (*Total Variation Diminishing*) e no número de Courant, conhecido por esquema CUBISTA (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection*).

Porém a falta de robustez nos métodos citados anteriormente, fez com que nos últimos anos, Kaibara em [20], desenvolve-se um esquema inspirado no modelo WACEB e CUBISTA, entretanto limitado e estável, e que se aplicado as equações diferenciais com baixos valores de ν mostra-se eficiente [9], chamado esquema ADBQUICKEST (*Adaptive Bounded QUICKEST*), cuja idéia básica é usar um esquema preciso em regiões suaves, e eficaz se aplicado a regiões com altos gradientes, ou seja, que mantenha a estabilidade da solução numérica capturando os choques ou as descontinuidades, quando existirem. Como já observado por Ferreira [11], estes esquemas são facilmente empregados na resolução numérica de equações diferenciais não-lineares.

Portanto, o foco deste trabalho é estudar a solução numérica da equação de Burgers, usando no termo convectivo a discretização pelo esquema ADBQUICKEST, analisando o esquema para equações 1D e 2D; comparar os resultados numéricos com as soluções analíticas obtidas via transformação de Hopf-Cole e analisar o erro na norma L_2 e L_∞ .

Desta forma, este trabalho encontra-se dividido em 6 capítulos. No Capítulo 2 apresentam-se as equações estudadas: equação de Burgers 1D, sistema acoplado de equações de Burgers 1D, equação de Burgers 2D e sistema acoplado de equações de Burgers 2D. No Capítulo 3 mostra-se a formalização da transformação de Hopf-Cole, das diferenças finitas, do esquema *upwind*, do erro na norma L_2 e L_∞ . No capítulo 4 discretizam-se as equações citadas

no Capítulo 2. No Capítulo 5 apresentam-se os resultados numéricos das equações estudadas, avaliando o esquema *upwind* de alta ordem utilizado na discretização do termo não linear da equação de Burgers. Finalmente, no Capítulo 6 têm-se as considerações finais deste trabalho.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentam-se as EDP's estudadas neste trabalho, a equação de Burgers 1D, o sistema acoplado de equações de Burgers 1D, a equação de Burgers 2D, e o sistema acoplado de equações de Burgers 2D, bem como as condições iniciais e de fronteira associadas as EDP's.

2.1 EQUAÇÃO DE BURGERS 1D

A equação de Burgers 1D adimensional com viscosidade $\nu > 0$ é dada por

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

com condição inicial:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x_0 \leq x \leq x_f, \quad (2.2)$$

e condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u(x_0, t) &= f_1(x_0, t), \\ u(x_f, t) &= f_2(x_f, t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $u = u(x, t)$ é a velocidade, x é a coordenada espacial, t é o tempo, $Re = \frac{U_0 L_0}{\nu}$ o número de Reynolds, que representa a razão entre as forças inerciais responsáveis pelo movimento do fluido, com U_0 e L_0 as escalas de velocidade e comprimento característico, respectivamente, e ν é o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido.

A equação de Burgers 1D é considerada uma forma simplificada das equações de Navier-Stokes. Bateman em 1915 [3] resolve equações com características parecidas com a equação (2.1) para problemas 1D. Mas a equação (2.1) foi plenamente proposta como um modelo matemático por Burgers em 1948 [5], quando conclui sua forma como um modelo na teoria da turbulência. Sua natureza versátil permite a modelação de problemas tão distintos como os correspondentes a propagação de sinais acústicos, estudo da turbulência, formação de ondas de choque, ou modelo de sedimentação.

Observa-se que a equação (2.1) pode ser resolvida analiticamente dependendo das condições iniciais e de fronteira. Na literatura, encontra-se a primeira solução analítica da equação de Burgers em 1951 que foi desenvolvida a partir da transformação de Hopf-Cole [17]. Em 1966, Miller [28] apresenta uma outra solução analítica, válida para a equação (2.1) apenas a baixos valores de ν . Entretanto, em [4], Benton e Platzman exibem uma lista de soluções analíticas da equação de Burgers 1D para diferentes condições iniciais e de fronteira,

válidas para todos os valores de ν . Neste trabalho utiliza-se a transformação de Hopf-Cole para expressar a solução analítica da equação (2.1) para diferentes condições iniciais e de fronteira.

As soluções numéricas da equação de Burgers atraem muita atenção dos pesquisadores, e assim diferentes métodos são apresentados para resolver essa equação, tais como: método da decomposição de Adomian, método da interação varacional, método de Crank-Nicolson, método da descontinuidade local de Galerkin, método de transformação diferencial, entre vários outros [7]. Neste trabalho, utiliza-se o esquema *upwind* de alta resolução, o esquema ADBQUICKEST, no termo convectivo, no termo temporal aplica-se diferenciação progressiva, e no termo difusivo usa-se diferença central, para discretizar as equações a serem abordadas.

2.2 SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 1D

Seja o sistema acoplado de equações de Burgers 1D definido por:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2uu_x + \alpha(uv)_x = 0 \\ v_t - v_{xx} + 2vv_x + \beta(uv)_x = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde α e β são constantes arbitrárias. Considera-se o sistema (2.4) com condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad x_0 \leq x \leq x_f \\ v(x, 0) &= v_0(x), \quad x_0 \leq x \leq x_f, \end{aligned} \quad (2.5)$$

e condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u(x_0, t) &= g_1(x_0, t) \\ u(x_f, t) &= g_2(x_f, t) \\ v(x_0, t) &= g_3(x_0, t) \\ v(x_f, t) &= g_4(x_f, t), \quad \text{com } t > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

O sistema acoplado dado em (2.4), proposto por Esipov [8], é um modelo simples de sedimentação ou evolução de concentração de volume em escala de dois tipos de partículas em suspensão fluida ou coloidal sob efeito da gravidade.

2.3 EQUAÇÃO DE BURGERS 2D

Considera-se a equação

$$u_t + uu_x + uu_y = \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad t > 0, \quad (2.7)$$

com condição inicial:

$$u(x, y, 0) = u_0(x), \quad x_0 \leq x \leq x_f \quad \text{e} \quad y_0 \leq y \leq y_f, \quad (2.8)$$

e condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u(x_0, y, t) &= h_1(x_0, y, t) \\ u(x_f, y, t) &= h_2(x_f, y, t) \\ u(x, y_0, t) &= h_3(x, y_0, t) \\ u(x, y_f, t) &= h_4(x, y_f, t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo $u = u(x, y, t)$ a velocidade a ser determinada.

O modelo utilizado corresponde à equação geral de Burgers 2D, caracterizada pela presença do termo difusivo $\nu(u_{xx} + u_{yy})$ e do termo convectivo $uu_x + uv_y$. Na literatura [25] sabe-se que para $\nu \gg 0$, o termo difusivo produz soluções suaves, já para $\nu \rightarrow 0$ as soluções podem apresentar descontinuidades, mesmo no caso de condições iniciais suaves. Por este motivo, neste trabalho estuda-se a equação (2.7) com baixos valores de ν , e investiga-se a influência do passo de tempo na solução numérica gerada pelo esquema *upwind*, comparando esta solução com a analítica calculada a partir da transformação de Hopf-Cole.

2.4 SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 2D

Seja o sistema acoplado de equações de Burgers 2D definido por:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = \nu(u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t + uv_x + vv_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}) \end{cases} \quad (2.10)$$

Considera-se o sistema (2.10) com condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad x_0 \leq x \leq x_f \quad \text{e} \quad y_0 \leq y \leq y_f \\ v(x, y, 0) &= v_0(x, y), \quad x_0 \leq x \leq x_f \quad \text{e} \quad y_0 \leq y \leq y_f, \end{aligned} \quad (2.11)$$

e condições de fronteira:

$$\begin{aligned}
 u(x_0, y, t) &= p_1(x_0, y, t) \\
 u(x_f, y, t) &= p_2(x_f, y, t) \\
 u(x, y_0, t) &= p_3(x, y_0, t) \\
 u(x, y_f, t) &= p_4(x, y_f, t) \\
 v(x_0, y, t) &= p_5(x_0, y, t) \\
 v(x_f, y, t) &= p_6(x_f, y, t) \\
 v(x, y_0, t) &= p_7(x, y_0, t) \\
 v(x, y_f, t) &= p_8(x, y_f, t), \text{ com } t > 0.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

O sistema (2.10) é um modelo simplificado das equações de Navier-Stokes, com os mesmos efeitos não lineares convectivos e dissipativos, embora os termos do gradiente de pressão não existem neste sistema. É interessante observar que o sistema acoplado de equações de Burgers 2D vêm se consolidando como equações testes para comparações de técnicas computacionais. Neste trabalho, analisam-se dois exemplos do sistema (2.10) com condições iniciais e de fronteira diferentes, quando aplicado a baixos valores de ν .

3 BASE TEÓRICA

Como já observado no Capítulo 1, a equação de Burgers possui grande importância no cenário de dinâmica dos fluidos. Logo, a proposta deste trabalho é analisar um método numérico de resolução dessa EDP. Nos próximos capítulos, apresentam-se as soluções analíticas, via transformação de Hopf-Cole, e soluções numéricas desta equação para diferentes casos. Entretanto, é necessário primeiramente desenvolver alguns tópicos teóricos, vistos a seguir.

3.1 TRANSFORMAÇÃO DE HOPF-COLE

A equação (2.1) é uma equação diferencial parcial não-linear parabólica de segunda ordem, que possui solução analítica dependente das condições iniciais e de fronteira. Uma das técnicas usadas para a resolução desta equação é a chamada transformação de Hopf-Cole [17], que por meio de uma substituição, transforma a equação (2.1) na equação linear do calor, que pode ser resolvida facilmente, por exemplo via série de Fourier ou numericamente. Observa-se a seguir, o teorema que prova tal transformação.

Teorema 3.1. *Seja a equação (2.1) com condição inicial e de fronteira dadas em (2.2) e (2.3) respectivamente. Se $\theta(x, t) > 0$ é a solução da equação do calor*

$$\theta_t = \nu \theta_{xx}, \quad (3.1)$$

então a transformação de Hopf-Cole

$$u = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta} \quad (3.2)$$

é solução de (2.1).

A demonstração pode ser obtida em [19].

Teorema 3.2. *Sejam $\theta(x, t)$ a solução da equação (3.1), e $u(x, t)$ definida pela equação (3.2) então $u(x, t)$ é independente de $\alpha(t)$.*

Para verificar este teorema, considere $\beta(t) = \int \alpha(t) dt$ então $\beta'(t) = \alpha(t)$. Multiplicando ambos os lados da equação do calor, $\theta_t - \alpha(t)\theta = \nu \theta_{xx}$, por $e^{-\beta(t)}$ tem-se

$$e^{-\beta(t)}\theta_t - \alpha(t)e^{-\beta(t)}\theta = \nu e^{-\beta(t)}\theta_{xx}, \quad (3.3)$$

ou ainda,

$$(e^{-\beta(t)}\theta)_t = \nu(e^{-\beta(t)}\theta)_{xx}. \quad (3.4)$$

Seja $\varphi(x, t) = e^{-\beta(t)}\theta(x, t)$ então φ satisfaz a equação do calor

$$\varphi_t = \nu\varphi_{xx}. \quad (3.5)$$

Como pode-se observar, a diferença entre a solução da equação do calor e da equação (3.5) é o fator $e^{-\beta(t)}$. Entretanto

$$u = -2\nu\frac{\theta_x}{\theta} = -2\nu\frac{e^{-\beta(t)}\theta_x}{e^{-\beta(t)}\theta} = -2\nu\frac{\varphi_x}{\varphi}, \quad (3.6)$$

isto é, u independe de α .

Uma aplicação do Teorema 3.1, pode ser dada, considerando a equação (2.1) com condição inicial:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.7)$$

e condições de fronteira:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.8)$$

Suponha que as hipóteses do Teorema 3.1 sejam satisfeitas. Pela transformação (3.2) obtêm-se a derivada em relação ao tempo

$$u_t = -2\nu\frac{\theta_{tx}}{\theta} + 2\nu\frac{\theta_x\theta_t}{\theta^2}; \quad (3.9)$$

a derivada primeira em relação a x

$$u_x = -2\nu\frac{\theta_{xx}}{\theta} + 2\nu\frac{\theta_x\theta_x}{\theta^2}; \quad (3.10)$$

e a derivada segunda em relação a x

$$u_{xx} = -2\nu\frac{\theta_{xxx}}{\theta} + 6\nu\frac{\theta_x\theta_{xx}}{\theta^2} - 4\nu\frac{\theta_x\theta_x\theta_x}{\theta^3}. \quad (3.11)$$

Logo o termo convectivo uu_x é dado por

$$uu_x = \left(-2\nu\frac{\theta_x}{\theta}\right) \left(-2\nu\frac{\theta_{xx}}{\theta} + 2\nu\frac{\theta_x\theta_x}{\theta^2}\right) = 4\nu^2\frac{\theta_x\theta_{xx}}{\theta^2} - 4\nu^2\frac{\theta_x\theta_x\theta_x}{\theta^3}. \quad (3.12)$$

Substituem-se (3.9), (3.11) e (3.12) em (2.1), e encontra-se

$$-2\nu\frac{\theta_{tx}}{\theta} + 2\nu\frac{\theta_x\theta_t}{\theta^2} + 4\nu^2\frac{\theta_x\theta_{xx}}{\theta^2} - 4\nu^2\frac{\theta_x\theta_x\theta_x}{\theta^3} + 2\nu^2\frac{\theta_{xxx}}{\theta} - 6\nu^2\frac{\theta_x\theta_{xx}}{\theta^2} + 4\nu^2\frac{\theta_x\theta_x\theta_x}{\theta^3} = 0,$$

que simplificada fica

$$\frac{\theta_x\theta_t}{\theta} - \theta_{tx} - \nu\frac{\theta_x\theta_{xx}}{\theta} + \nu\theta_{xxx} = 0,$$

e isto implica que

$$\left(\frac{\theta_t}{\theta}\right)_x = \nu\left(\frac{\theta_{xx}}{\theta}\right)_x. \quad (3.13)$$

Integra-se (3.13) em relação a variável x e obtém-se

$$\theta_t = \nu\theta_{xx} + \alpha(t)\theta, \quad (3.14)$$

onde $\alpha(t)$ é uma função arbitrária, que pelo Teorema 3.2 não interfere na solução $u(x, t)$ da equação (2.1), assim sem perda de generalidade tome $\alpha(t) = 0$.

Portanto a equação (2.1), pela transformação de Hopf-Cole, torna-se a equação linear do calor (3.1), com solução θ .

Para obter a condição de fronteira da equação (3.1), substitui-se a condição (3.8) na transformação (3.2) da seguinte forma

$$0 = u(0, t) = -2\nu\frac{\theta_x(0, t)}{\theta(0, t)}, \quad (3.15)$$

$$0 = u(l, t) = -2\nu\frac{\theta_x(l, t)}{\theta(l, t)}, \quad (3.16)$$

com $\theta(0, t) > 0$ e $\theta(l, t) > 0$, então

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(l, t) = 0. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.7) em (3.2) obtém-se

$$-2\nu\frac{\theta_x(x, 0)}{\theta(x, 0)} = u(x, 0) = u_0(x),$$

integrando em relação a variável x

$$-2\nu\int_0^x \frac{\theta_x(\xi, 0)}{\theta(\xi, 0)} d\xi = \int_0^x u_0(\xi) d\xi,$$

assim

$$\ln \theta(x, 0) - \ln \theta(0, 0) = -(2\nu)^{-1} \int_0^x u_0(\xi) d\xi, \quad (3.18)$$

aplicando a função exponencial em (3.18) encontra-se

$$\theta(x, 0) = C_0 \exp \left(-(2\nu)^{-1} \int_0^x u_0(\xi) d\xi \right), \quad (3.19)$$

que é a condição inicial da equação (3.1), com $C_0 = \theta(0, 0) > 0$.

Utilizando o método da separação de variáveis determina-se a solução da equação (3.1) com a condição (3.17), isto é, reescreve-se $\theta(x, t)$ como

$$\theta(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.20)$$

com $X, T \neq 0$. Logo as derivadas de (3.20) são

$$\theta_t(x, t) = X(x)T'(t) \quad \text{e} \quad \theta_{xx}(x, t) = X''(x)T(t). \quad (3.21)$$

Substituindo as derivadas (3.21) na equação (3.1), obtém-se

$$X(x)T'(t) = \nu X''(x)T(t),$$

e, dividindo por $\nu X(x)T(t)$,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\nu} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

onde $-\lambda$ é uma constante. Então obtém-se duas EDO's

$$T'(t) + \nu\lambda T(t) = 0, \quad (3.22)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (3.23)$$

Da condição (3.17) tem-se a condição de fronteira

$$X'(0) = 0 = X'(l). \quad (3.24)$$

Pode-se afirmar que λ é um valor real e positivo, como demonstrado em [18], logo a solução da EDO (3.23) com a condição (3.24) é

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \text{sen}(\sqrt{\lambda}x), \quad (3.25)$$

com A e B constantes arbitrárias. Impondo a condição (3.24) em (3.25) segue que

$$\begin{aligned} X'(0) &= \sqrt{\lambda}B = 0, \\ X'(l) &= -\sqrt{\lambda}A \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}l = 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$ segue que $B = 0$. Suponha que $A \neq 0$, assim $\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}l = 0$, ou ainda, $\sqrt{\lambda}l = n\pi$ com n inteiro, logo os auto-valores de (3.23) são

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad (3.26)$$

e as auto-funções associadas são

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (3.27)$$

Por outro lado, a solução da EDO (3.22) é dada por

$$T(t) = c \exp(-\lambda\nu t), \quad (3.28)$$

com c constante, assim substituindo (3.26) tem-se

$$T_n(t) = c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{l^2}\right), \quad (3.29)$$

onde c_n é constante arbitrária.

Portanto, substituindo (3.27) e (3.29) em (3.20), obtém-se a solução da equação (3.1)

$$\theta(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{l^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (3.30)$$

onde os coeficientes de Fourier são:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l \theta(x, 0) dx, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \theta(x, 0) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \end{aligned}$$

e, impondo (3.19), tornam-se

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \exp\left((2\nu)^{-1} \int_0^x u_0(\xi) d\xi\right) dx, \quad (3.31)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \exp\left((2\nu)^{-1} \int_0^x u_0(\xi) d\xi\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (3.32)$$

Logo pelo Teorema 3.1 tem-se que (3.2) é a solução de (2.1) e como θ é dado em (3.30), segue que

$$\theta_x(x, t) = \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{l^2}\right) n \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{l}\right), \quad (3.33)$$

assim substituindo (3.30) e (3.33) em (3.2) obtém-se

$$u(x, t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{l^2}\right) n \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{l}\right)}{a_0 l + l \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{l^2}\right) \cos\left(\frac{n \pi x}{l}\right)}. \quad (3.34)$$

Na literatura, ainda é possível encontrar outros métodos para resolver a equação de Burgers 1D analiticamente [7].

Ao contrário da transformação (3.2) que é válida para todos os casos de equação de Burgers 1D, equação (2.1), transformando-a na equação do calor, a transformação de Hopf-Cole 2D não pode ser utilizada para reduzir toda equação de Burgers 2D na equação linear do calor, e sim apenas as equações onde a condição de potencial simétrico [24]

$$u_y = v_x \quad (3.35)$$

é válida. Tal transformação foi realizada por Fletcher em [13]. Usando a transformação de Hopf-Cole 2D

$$u = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta}, \quad (3.36)$$

$$v = -2\nu \frac{\theta_y}{\theta},$$

obtêm-se $u_t, v_t, u_x, u_y, v_x, v_y, u_{xx}, u_{yy}, v_{xx}$ e v_{yy} como

$$u_t = -2\nu \frac{\theta_{xt} - \theta_x \theta_t}{\theta^2}, \quad (3.37)$$

$$v_t = -2\nu \frac{\theta_{yt} - \theta_y \theta_t}{\theta^2}, \quad (3.38)$$

$$u_x = -2\nu \frac{\theta_{xx} \theta - \theta_x^2}{\theta^2}, \quad (3.39)$$

$$u_y = -2\nu \frac{\theta_{xy} \theta - \theta_x \theta_y}{\theta^2}, \quad (3.40)$$

$$v_x = -2\nu \frac{\theta_{xy} \theta - \theta_x \theta_y}{\theta^2}, \quad (3.41)$$

$$v_y = -2\nu \frac{\theta_{yy} \theta - \theta_y^2}{\theta^2}, \quad (3.42)$$

$$u_{xx} = -2\nu \left(\frac{\theta_{xxx}\theta - \theta_{xx}\theta_x}{\theta^2} - \frac{2\theta_x\theta_{xx}\theta^2 - 2\theta\theta_x^3}{\theta^4} \right), \quad (3.43)$$

$$u_{yy} = -2\nu \left(\frac{\theta_{xyy}\theta - \theta_{xy}\theta_y}{\theta^2} - \frac{\theta_y\theta_{xy}\theta^2 + \theta_x\theta_{yy}\theta^2 - 2\theta\theta_x\theta_y^2}{\theta^4} \right), \quad (3.44)$$

$$v_{xx} = -2\nu \left(\frac{\theta_{xxy}\theta - \theta_{xy}\theta_x}{\theta^2} - \frac{\theta_y\theta_{xx}\theta^2 + \theta_x\theta_{xy}\theta^2 - 2\theta\theta_y\theta_x^2}{\theta^4} \right), \quad (3.45)$$

$$v_{yy} = -2\nu \left(\frac{\theta_{yyy}\theta - \theta_{yy}\theta_y}{\theta^2} - \frac{2\theta_y\theta_{yy}\theta^2 - 2\theta\theta_y^3}{\theta^4} \right). \quad (3.46)$$

Substituindo (3.36), e (3.34)-(3.43) no sistema (2.10) tem-se

$$\begin{cases} \theta_{xt} - \theta_x\theta_t = \nu(\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_{xx}) + \nu(\theta\theta_{xyy} - \theta_x\theta_{yy}), \\ \theta_{yt} - \theta_y\theta_t = \nu(\theta\theta_{xxy} - \theta_y\theta_{xx}) + \nu(\theta\theta_{yyy} - \theta_y\theta_{yy}) \end{cases} \quad (3.47)$$

Dividindo ambos os lados de (3.44) por θ^2 segue que

$$\left(\frac{\theta_t}{\theta} \right)_x = \nu \left[\left(\frac{\theta_{xx}}{\theta} \right)_x + \left(\frac{\theta_{yy}}{\theta} \right)_x \right] \quad (3.48)$$

$$\left(\frac{\theta_t}{\theta} \right)_y = \nu \left[\left(\frac{\theta_{xx}}{\theta} \right)_y + \left(\frac{\theta_{yy}}{\theta} \right)_y \right] \quad (3.49)$$

Integrando as equações (3.48) e (3.49) em relação a variável x , obtêm-se

$$\begin{cases} \theta_t = \nu(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + \alpha_1(y, t)\theta, \\ \theta_t = \nu(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + \alpha_2(x, t)\theta, \end{cases} \quad (3.50)$$

onde $\alpha_1(y, t)$ e $\alpha_2(x, t)$ são funções arbitrárias que depende somente de x , y e t . Pode-se resumir (3.50) pela equação

$$\theta_t = \nu(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + \alpha(t)\theta, \quad (3.51)$$

em que $\alpha(t)$ é uma função arbitrária que depende somente de t .

Observa-se que na equação (3.51) não pode-se determinar unicamente uma função $\alpha(t)$. Porém, nota-se pelo Teorema 3.3 que $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ são independentes da escolha de $\alpha(t)$.

Teorema 3.3. *Sejam $\theta(x, y, t)$ a solução da equação (3.51), $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ como definidas em (3.36), então $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ são independentes de $\alpha(t)$.*

A demonstração pode ser obtida em [24].

Assim, pelo Teorema 3.3, pode-se considerar $\alpha(t) = 0$ na equação (3.51) e

obter a equação do calor

$$\theta_t = \nu(\theta_{xx} + \theta_{yy}). \quad (3.52)$$

Utilizando o método da separação de variáveis determina-se a solução da equação (3.52), analogamente como Srivastava [32] faz para o caso da equação do calor 3D.

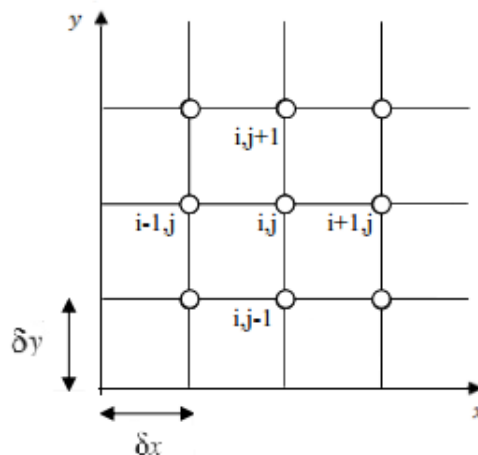
Neste trabalho será considerado a equação de Burgers 2D e o sistema acoplado de equações de Burgers 2D sempre com a condição $u_y = v_x$ válida.

3.2 DIFERENÇAS FINITAS

Utiliza-se o método de diferenças finitas (MDF) na busca de resolver numericamente as EDP's estudadas, para isto basta representá-las por expressões algébricas, ou seja, discretizá-las em função dos pontos de malha. Para se obter um solução numérica pelo método de diferenças finitas, primeiramente é necessário discretizar a região onde procura-se a solução, e assim substituir as derivadas presentes na equação diferencial pelas aproximações obtidas. Então, define-se uma malha computacional, Figura 3.1, que é um conjunto finito de pontos, frequentemente chamado de nós da malha.

Considera-se uma função $u(x, y)$ contínua e de derivadas contínuas, e um plano $x - y$ subdividido em retângulos iguais de lados δx e δy como na Figura 3.1. Se a coordenada de P é (x, y) , então $(x, y) = (i\delta x, j\delta y)$, com i e j inteiros, e os valores de δx e δy são os espaçamentos da malha em x e y , respectivamente. Se δx e δy são iguais, a malha é dita uniforme.

Figura 3.1: Malha Computacional.



Fonte: Adaptado de Ferreira [11].

Como $u(x, y)$ é contínua e têm derivadas contínuas, é possível expandi-la em

série de Taylor da seguinte forma:

$$u(x + \delta x) = u(x) + \delta x u'(x) + \frac{1}{2} \delta x^2 u''(x) + \frac{1}{6} \delta x^3 u'''(x) + \dots, \quad (3.53)$$

ou

$$u(x - \delta x) = u(x) - \delta x u'(x) + \frac{1}{2} \delta x^2 u''(x) - \frac{1}{6} \delta x^3 u'''(x) + \dots \quad (3.54)$$

Consideram-se (3.53) e (3.54) até o segundo termo, obtêm-se duas aproximações possíveis para a derivada de u em relação a x :

$$u'(x) \approx \frac{u(x + \delta x) - u(x)}{\delta x} \quad (3.55)$$

chamada de diferença finita *progressiva*, e

$$u'(x) \approx \frac{u(x) - u(x - \delta x)}{\delta x} \quad (3.56)$$

conhecida por diferença finita *regressiva*.

Por outro lado subtraindo-se (3.53) de (3.54), tem-se

$$u'(x) \approx \frac{u(x + \delta x) - u(x - \delta x)}{2\delta x} \quad (3.57)$$

denominada de diferença finita *centrada* para a primeira derivada.

E finalmente, somando (3.53) e (3.54) obtêm-se a aproximação para a derivada segunda de u em relação a x dada por:

$$u''(x) \approx \frac{u(x + \delta x) - 2u(x) + u(x - \delta x)}{\delta x^2} \quad (3.58)$$

notada por diferença finita *centrada* para a segunda derivada u'' .

Todas as aproximações obtidas para as derivadas possuem um erro de truncamento [11]. No caso da diferença finita *progressiva* o Erro de Truncamento (ET) é dado por

$$ET = \frac{\delta x^2}{2} u''(x) + \frac{\delta x^3}{6} u'''(x) + \dots = O(\delta x). \quad (3.59)$$

Já para a aproximação dada por (3.56) tem-se

$$ET = \frac{\delta x^2}{2} u''(x) - \frac{\delta x^3}{6} u'''(x) + \dots = O(\delta x). \quad (3.60)$$

E no caso da diferença finita *centrada* para a primeira derivada o erro de truncamento é o seguinte

$$ET = \frac{\delta x^2}{6}u'''(x) + \frac{\delta x^4}{120}u^{iv}(x) + \dots = O(\delta x^2). \quad (3.61)$$

3.3 ESQUEMA *upwind*

No estudo em dinâmica dos fluidos computacional há o interesse na obtenção de soluções numéricas para as equações diferenciais parciais. Tais equações são significativamente afetadas pela escolha do método de discretização do termo convectivo, em geral não-linear. Este termo convectivo é o principal causador de dificuldades numéricas nas simulações, dessa forma, a discretização deste termo merece atenção especial. Neste trabalho, o foco é analisar as soluções numéricas da equação de Burgers para diferentes condições iniciais e de fronteira, usando no termo temporal diferenciação progressiva, no termo convectivo o esquema ADBQUICKEST [10] e no termo difusivo diferença central. A seguir apresentam-se as principais ferramentas necessárias para o desenvolvimento de tal esquema, no contexto das variáveis normalizadas de Leonard [23], no critério de limitação CBC (*Convection Boundedness Criterion*) de Gaskell e Lau [14] e da propriedade TVD (*Total Variation Diminishing*) de Harten e Sweby [15].

3.3.1 ADBQUICKEST

Para a discretização dos termos convectivos pelo esquema *upwind* utilizam-se as seguintes notações para as posições dos nós computacionais, com respeito a face f e o sinal da velocidade V_f de uma variável convectada ϕ na face f : D ("*Dowstream*"), U ("*Upstream*") e R ("*Remote – upstream*"), representados na Figura 3.2. Se a face analisada for a face g a análise é realizada de maneira análoga, como pode ser observado na Figura 3.3.

Neste contexto, pode-se representar a variável ϕ_f na forma funcional por

$$\phi_f = \phi_f(\phi_D, \phi_U, \phi_R), \quad (3.62)$$

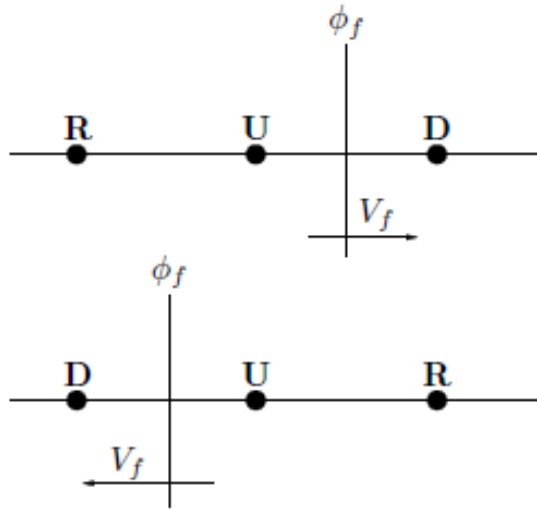
onde ϕ é a variação de um escalar na direção normal a face f . Da mesma forma, pode-se definir a variável convectada na face g , denotada por ϕ_g .

Para se obter esquemas capazes de resolver gradientes elevados, e manter estabilidade na solução numérica, a variável ϕ pode ser formulada usando-se a variável normalizada de Leonard da seguinte forma

$$\hat{\phi}_{[]} = \frac{\phi_{[]} - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}, \quad (3.63)$$

em que ϕ_D e ϕ_R são os valores não normalizados da propriedade ϕ nos pontos D e R , respectivamente. A partir da definição (3.63) observa-se que $\hat{\phi}_R = 0$ e $\hat{\phi}_D = 1$, e caso $\hat{\phi}_U = 0$ então

Figura 3.2: Nós computacionais.



Fonte: Adaptado de [11] (p. 16).

$\phi_U = \phi_R$, e se $\hat{\phi}_U = 1$, segue que $\phi_U = \phi_D$. Assim qualquer esquema escrito na forma (3.62) pode ser representado na forma funcional simplificada como

$$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_f(\hat{\phi}_U), \quad (3.64)$$

onde

$$\hat{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_R}{\phi_D - \phi_R} \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}. \quad (3.65)$$

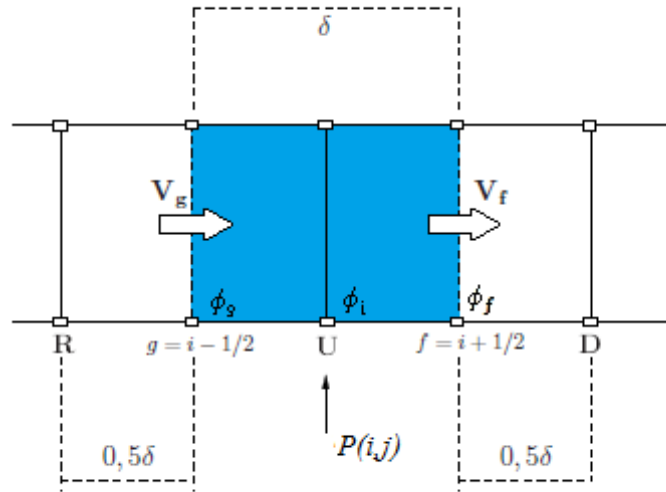
Considerando-se a importância de soluções limitadas, isto é, aquelas que não ultrapassem os valores máximos e mínimos da propriedade transportada, Gaskell e Lau [14] formularam o critério CBC. No contexto de NV (*Normalized Variable*), um esquema convectivo produz solução limitada se o seu valor em um ponto computacional é limitado pelos valores da solução em pontos vizinhos, ou ainda, o esquema deve satisfazer as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 1], & \text{se } \hat{\phi}_f \in [0, 1], \\ \hat{\phi}_f = 0, & \text{se } \hat{\phi}_U = 0, \\ \hat{\phi}_f = 1, & \text{se } \hat{\phi}_U = 1, \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U, & \text{se } \hat{\phi}_f \notin [0, 1]. \end{array} \right. \quad (3.66)$$

A região correspondente ao esquema limitado é apresentada pela região hachurada da Figura 3.4.

A importância do critério CBC é fornecer uma condição necessária e sufici-

Figura 3.3: Célula computacional mostrando o ponto P de discretização dos termos convectivos, seus vizinhos, as faces envolvidas f e g para a aproximação e a variável convectada ϕ sendo transportada com velocidades V_f e V_g .



Fonte: Adaptado de [12] (p. 55).

ente para garantir que a solução obtida por um esquema seja limitada [30]. Apesar do critério CBC tratar da limitação da solução, ele não garante sua convergência. Para a solução ser convergente tem-se que as propriedades TVD de Harten e Sweby [15] devem ser satisfeitas. No contexto NV essas restrições são expressas por:

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 2\hat{\phi}_U] \text{ e } \hat{\phi}_f \leq 1, & \hat{\phi}_U \in [0, 1], \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (3.67)$$

A região TVD ilustrada na Figura 3.5 representa as condições dadas em (3.67).

Conhecido o esquema ADBQUICKEST, o limitador de fluxo correspondente $\psi(r_f)$ é obtido reescrevendo o esquema da seguinte forma [34]:

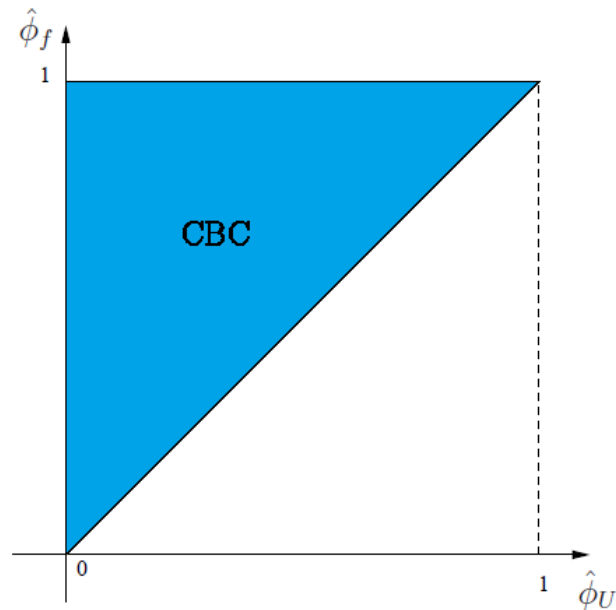
$$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U + \frac{1}{2}\psi(r_f)(1 - \hat{\phi}_U), \quad (3.68)$$

ou ainda, em variáveis não-normalizadas como

$$\phi_f = \phi_U + \frac{1}{2}\psi(r_f)(\phi_D - \phi_U), \quad (3.69)$$

onde r_f é um parâmetro de suavização, definido como a razão de dois gradientes consecutivos,

Figura 3.4: Região CBC no plano $\hat{\phi}_f - \hat{\phi}_U$.



Fonte: Adaptado de [25] (p. 19).

dado por

$$r_f = \frac{(\partial\phi/\partial x)_g}{(\partial\phi/\partial x)_f} \approx \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_U}. \quad (3.70)$$

Neste contexto, Sweby [34] introduziu o seu princípio de monotonicidade, definido por

$$\text{se } r_f \longrightarrow 0, \text{ então } \psi(r_f) = 2. \quad (3.71)$$

E segundo Sweby [34], o limitador atinge segunda ordem de precisão em malhas uniformes, se ψ satisfaz

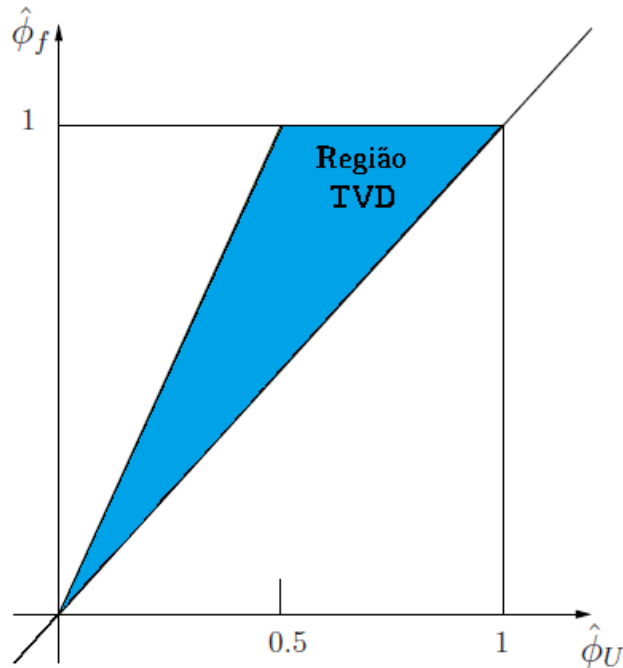
$$\psi(1) = 1. \quad (3.72)$$

Já de acordo com Zijlema [40], a condição para que um esquema atinga terceira ordem de precisão é que

$$\psi'(1) = \frac{1}{4}. \quad (3.73)$$

O esquema ADBQUICKEST satisfaz o critério (3.66) e a relação (3.67), e seu fluxo numérico obedece o princípio (3.71), e as equações (3.72) e (3.73). Em resumo, o esquema ADBQUICKEST é um melhoramento do esquema QUICKEST e é definido, em

Figura 3.5: Região TVD em variáveis normalizadas.



Fonte: Dissertação [25] (p. 21).

variáveis não normalizadas, como [20]

$$\phi_f = \begin{cases} (2 - C)\phi_U - (1 - C)\phi_R, & \text{se } \hat{\phi}_U \in (0, a), \\ \alpha_D\phi_D + \alpha_U\phi_U - \alpha_R\phi_R, & \text{se } \hat{\phi}_U \in [a, b], \\ (1 - C)\phi_D + C\phi_U, & \text{se } \hat{\phi}_U \in (b, 1), \\ \phi_U, & \text{se } \hat{\phi}_U \notin [0, 1] \end{cases} \quad (3.74)$$

com

$$\alpha_D = (2 - 3|C| + C^2)/6, \quad (3.75)$$

$$\alpha_U = (5 + 3|C| - 2C^2)/6, \quad (3.76)$$

$$\alpha_R = (1 - C^2)/6, \quad (3.77)$$

$$a = (2 - 3|C| + C^2)/(7 - 6C - 3|C| + 2C^2), \quad (3.78)$$

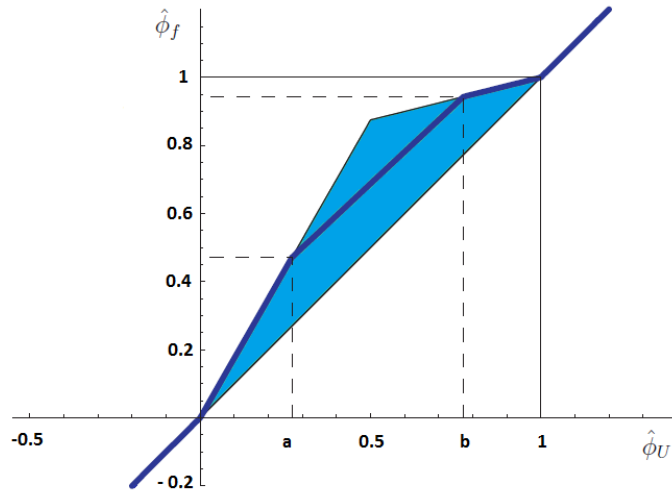
$$b = (-4 + 6C - 3|C| + C^2)/(-5 + 6C - 3|C| + 2C^2). \quad (3.79)$$

Observe que C , chamado de número de Courant, representa a condição CFL (*Courant – Friedrichs – Lewy*) [33], sendo que para manter a estabilidade do esquema ADBQUICKEST deve-se ter $C \leq 1$.

A Figura 3.6 mostra o esquema ADBQUICKEST no diagrama de variável

normalizada.

Figura 3.6: Gráfico da variável normalizada de ϕ_f para o esquema ADBQUICKEST e $C = 0.5$.



Fonte: Adaptado de Ferreira [9] (p. 429).

Para encontrar o fluxo numérico para o esquema ADBQUICKEST, reescreve

(3.74) por (3.69), e têm-se

- para $\hat{\phi}_U \in (0, a)$

$$\begin{aligned} (2 - C)\phi_U - (1 - C)\phi_R &= \phi_U + \frac{1}{2}\psi(r_f)(\phi_D - \phi_U) \\ \longrightarrow \psi(r_f) &= 2 \left(\frac{(1 - C)\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_U} \right) \\ \longrightarrow \psi(r_f) &= 2(1 - C)r_f, \end{aligned}$$

- para $\hat{\phi}_U \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \alpha_D\phi_D + \alpha_U\phi_U - \alpha_R\phi_R &= \phi_U + \frac{1}{2}\psi(r_f)(\phi_D - \phi_U) \\ \longrightarrow \psi(r_f) &= \left(\frac{(2 + C^2 - 3C)\phi_D + (5 + 3C - 2C^2)\phi_U - (1 - C^2)\phi_R - \phi_U}{3(\phi_D - \phi_U)} \right) \\ \longrightarrow \psi(r_f) &= \frac{2 - 3C + C^2 + (1 - C^2)r_f}{3}, \end{aligned}$$

- para $\hat{\phi}_U \in (b, 1)$

$$\begin{aligned} (1 - C)\phi_D - C\phi_U &= \phi_U + \frac{1}{2}\psi(r_f)(\phi_D - \phi_U) \\ \longrightarrow \psi(r_f) &= 2(1 - C), \end{aligned}$$

- para $\widehat{\phi}_U \notin (b, 1)$

$$\begin{aligned}\phi_U &= \phi_U + \frac{1}{2}\psi(r_f)(\phi_D - \phi_U) \\ \longrightarrow \psi(r_f) &= 0.\end{aligned}$$

Então pode-se dizer que

$$\psi(r_f) = \begin{cases} 2r_f, & \text{se } \widehat{\phi}_U \in (0, a), \\ \frac{2+C^2-3C+(1-C^2)r_f}{3-3C}, & \text{se } \widehat{\phi}_U \in [a, b], \\ 2, & \text{se } \widehat{\phi}_U \in (b, 1), \\ 0, & \text{se } \widehat{\phi}_U \notin (b, 1). \end{cases} \quad (3.80)$$

O limitador de fluxo do esquema ADBQUICKEST (3.80) pode ser escrito também na forma mais utilizada na literatura, como em [37], da seguinte forma

$$\psi(r_f) = \max \left\{ 0, \min \left[2r_f, \frac{2 + C^2 - 3C + (1 - C^2)r_f}{3 - 3C}, 2 \right] \right\}. \quad (3.81)$$

3.4 ERRO NA NORMA L_2 E L_∞

Para uma melhor análise, de forma quantitativa, do comportamento do esquema utilizado, apresentam-se as definições de erro nas normas L_2 e L_∞ , bem como, a forma de calcular a estimativa para a ordem de convergência.

Considera-se o erro relativo por E_h , com $h = \delta x$, e utiliza-se neste trabalho, a norma do erro relativo em L_2 e L_∞ [25],

$$\|E_h\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N |u_{i,analtica} - u_{i,numrica}|^2}{\sum_{i=0}^N |u_{i,analtica}|^2}}, \quad (3.82)$$

$$\|E_h\|_\infty = \frac{\max_{0 \leq i \leq N} |u_{i,analtica} - u_{i,numrica}|}{\max_{0 \leq i \leq N} |u_{i,analtica}|}. \quad (3.83)$$

onde N é o número de pontos da malha.

Assim uma estimativa para o erro $\|E\|_k$, com $k = 2, \infty$, é dada por [35]

$$\|E_h\|_k \approx bh^p, \quad (3.84)$$

com b sendo uma constante dependente do problema e p a ordem de convergência. Logo

$$\|E_{\frac{h}{2}}\|_k \approx b \left(\frac{h}{2}\right)^p. \quad (3.85)$$

Para calcular p divide-se (3.84) por (3.85)

$$\frac{\|E_h\|_k}{\|E_{\frac{h}{2}}\|_k} \approx \frac{h^p}{\left(\frac{h}{2}\right)^p} = 2^p, \quad (3.86)$$

e aplica-se o logaritmo, obtendo-se

$$p \approx \frac{\log \frac{\|E_h\|_k}{\|E_{\frac{h}{2}}\|_k}}{\log 2}. \quad (3.87)$$

4 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Neste capítulo, mostra-se a discretização das EDP's e dos sistemas de EDP's, citados no Capítulo 2. Em todas as equações e sistemas de equações estudados neste trabalho, aplica-se no termo temporal diferenciação progressiva, no termo convectivo usa-se a discretização pelo esquema *upwind* de alta resolução ADBQUICKEST, e no termo difusivo usa-se a diferença central.

4.1 EQUAÇÃO DE BURGERS 1D

Neste caso, discretizam-se os termos da equação (2.1) no ponto $P = (i, j)$ da malha computacional, Figura 3.3, considerando $\delta x = i$ e $\delta t = j$, da seguinte forma, aproxima-se a derivada temporal por diferença progressiva e a derivada espacial do termo difusivo por diferença central:

$$u_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t}, \quad (4.1)$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\delta x^2}, \quad (4.2)$$

e o termo convectivo $CONV(u) = \frac{1}{2}(uu)_x$ é aproximado pela esquema *upwind*

$$\begin{aligned} CONV(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}u|_f - \bar{u}u|_g}{\delta x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j}u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

em que

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i,j}), \quad (4.4)$$

e

$$\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i-1,j}). \quad (4.5)$$

Pelo esquema ADBQUICKEST determinam-se as variáveis convectadas

$u_f = u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2},j}$ por:

• Se $\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} > 0$ e $\hat{u}_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}$, então

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} (2-C)u_{i,j} - (1-C)u_{i-1,j}, & \hat{u}_{i,j} \in (0, a), \\ \alpha_D u_{i+1,j} + \alpha_U u_{i,j} - \alpha_R u_{i-1,j}, & \hat{u}_{i,j} \in [a, b], \\ (1-C)u_{i+1,j} + C u_{i,j}, & \hat{u}_{i,j} \in (b, 1), \\ u_{i,j}, & \hat{u}_{i,j} \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (4.6)$$

• Se $\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} \leq 0$ e $\hat{u}_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{u_{i,j} - u_{i+2,j}}$, então

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} (2-C)u_{i+1,j} - (1-C)u_{i+2,j}, & \hat{u}_{i+1,j} \in (0, a), \\ \alpha_D u_{i,j} + \alpha_U u_{i+1,j} - \alpha_R u_{i+2,j}, & \hat{u}_{i+1,j} \in [a, b], \\ (1-C)u_{i,j} + C u_{i+1,j}, & \hat{u}_{i+1,j} \in (b, 1), \\ u_{i+1,j}, & \hat{u}_{i+1,j} \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (4.7)$$

• Se $\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j} > 0$ e $\hat{u}_{i-1,j} = \frac{u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{u_{i,j} - u_{i-2,j}}$, então

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} (2-C)u_{i-1,j} - (1-C)u_{i-2,j}, & \hat{u}_{i-1,j} \in (0, a), \\ \alpha_D u_{i,j} + \alpha_U u_{i-1,j} - \alpha_R u_{i-2,j}, & \hat{u}_{i-1,j} \in [a, b], \\ (1-C)u_{i,j} + C u_{i-1,j}, & \hat{u}_{i-1,j} \in (b, 1), \\ u_{i-1,j}, & \hat{u}_{i-1,j} \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (4.8)$$

• Se $\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j} \leq 0$ e $\hat{u}_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}$, então

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} (2-C)u_{i,j} - (1-C)u_{i+1,j}, & \hat{u}_{i,j} \in (0, a), \\ \alpha_D u_{i-1,j} + \alpha_U u_{i,j} - \alpha_R u_{i+1,j}, & \hat{u}_{i,j} \in [a, b], \\ (1-C)u_{i-1,j} + C u_{i,j}, & \hat{u}_{i,j} \in (b, 1), \\ u_{i,j}, & \hat{u}_{i,j} \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (4.9)$$

Utilizam-se as discretizações (4.1) e (4.2) na equação (2.1), e considera-se $CONV(u)$ como definida em (4.3),

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} + CONV(u) = \nu \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\delta x^2} \right), \quad (4.10)$$

então determina-se um método numérico explícito para resolver a equação de Burgers 1D dado por

$$u_{i,j+1} = -\delta t CONV(u) + u_{i+1,j} r \nu + u_{i,j} (1 - 2r \nu) + u_{i-1,j} r \nu, \quad (4.11)$$

onde $r = \frac{\delta t}{\delta x^2}$.

4.2 SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 1D

No sistema (2.4), discretizam os termos temporais u_t , v_t , e os difusivos u_{xx} e v_{xx} de forma análoga as equações (4.1) e (4.2), respectivamente. Quanto aos termos convectivos, primeiro, define-se

$$CONV(U) = (uu)_x + \alpha(uv)_x \quad e \quad CONV(V) = (vv)_x + \beta(uv)_x,$$

na sequência estes termos são aproximados pelo esquema *upwind* ADBQUICKEST, como segue

$$\begin{aligned} CONV(U) &= \frac{\bar{u}u|_f - \bar{u}u|_g}{\delta x} + \alpha \left(\frac{\bar{v}u|_f - \bar{v}u|_g}{\delta x} \right) \\ &= \left(\frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j}u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) \\ &\quad + \alpha \left(\frac{\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{v}_{i-\frac{1}{2},j}u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} CONV(V) &= \frac{\bar{v}v|_f - \bar{v}v|_g}{\delta x} + \beta \left(\frac{\bar{v}u|_f - \bar{v}u|_g}{\delta x} \right) \\ &= \left(\frac{\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j}v_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{v}_{i-\frac{1}{2},j}v_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right) \\ &\quad + \beta \left(\frac{\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{v}_{i-\frac{1}{2},j}u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

em que

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i,j}), \quad (4.14)$$

$$\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i-1,j}), \quad (4.15)$$

e

$$\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(v_{i+1,j} + v_{i,j}), \quad (4.16)$$

$$\bar{v}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{i-1,j}). \quad (4.17)$$

As variáveis $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j}$ são dadas pelas equações (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9). Analogamente determinam-se as variáveis $v_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i-\frac{1}{2},j}$. Utilizam-se as discretizações (4.1),

(4.2) no sistema (2.4), e sejam $CONV(U)$ e $CONV(V)$ como definidos em (4.12) e (4.13),

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} - \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\delta x} \right) + CONV(U) &= 0, \\ \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\delta t} - \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\delta x} \right) + CONV(V) &= 0, \end{aligned}$$

assim o método explícito para o sistema (2.4) é dado por

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = -\delta t CONV(U) + u_{i+1,j}r + u_{i,j}(1 - 2r) + u_{i-1,j}r, \\ v_{i,j+1} = -\delta t CONV(V) + v_{i+1,j}r + v_{i,j}(1 - 2r) + v_{i-1,j}r. \end{cases} \quad (4.18)$$

4.3 EQUAÇÃO DE BURGERS 2D

No caso da equação (2.7) discretizam-se as derivadas no ponto $P = (i, j)$ na malha computacional tal que $\delta x = i$ e $\delta y = j$, considerando as derivadas parciais espaciais no nível de tempo n .

A discretização para a derivada temporal da equação (2.7), por diferença progressiva, é dada por

$$u_t = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t} \quad (4.19)$$

e a discretização do termo difusivo, usando diferença central, é:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\delta y^2}, \quad (4.20)$$

Para a equação 2D, obtém-se o termo convectivo, $CONV(u^n) = uu_x + uu_y$, pela estratégia *upwind* da seguinte forma:

$$\begin{aligned} CONV(u^n) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}^n u^n|_f - \bar{u}^n u^n|_g}{\delta x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}^n u^n|_w - \bar{u}^n u^n|_z}{\delta y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n u_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^n u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\delta y} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

em que

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{1}{2}(u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n), \quad (4.22)$$

$$\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n = \frac{1}{2}(u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n), \quad (4.23)$$

$$\bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n), \quad (4.24)$$

$$\bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n). \quad (4.25)$$

Pelo esquema ADBQUICKEST determina-se u_f^n , u_g^n , u_w^n e u_z^n . Com isso, substituindo (4.19), (4.20) e (4.21) em (2.7) temos a discretização para a equação de Burgers 2D dada por

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t} + CONV(u^n) = \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\delta y^2} \right),$$

ou ainda,

$$u_{i,j}^{n+1} = -\delta t CONV(u^n) + \delta t \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\delta y^2} \right),$$

logo, obtém-se o método explícito para a equação (2.7)

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & -\delta t CONV(u^n) + (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n)r\nu + u_{i,j}^n(1 - 2\nu(r + q)) \\ & + (u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n)q\nu, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde $r = \frac{\delta t}{\delta x^2}$ e $q = \frac{\delta t}{\delta y^2}$.

4.4 SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 2D

Neste caso, a condição de potencial simétrico, dada por $u_y = v_x$, é satisfeita, assim o sistema dado em (2.10) transforma-se no sistema

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_x = \nu(u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t + uv_y + vv_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}) \end{cases} \quad (4.27)$$

O resultado da discretização para os termos convectivos,

$$CONV(uv^n) = uu_x + vv_x \quad e \quad CONV(vu^n) = uv_y + vv_y, \quad (4.28)$$

é o seguinte

$$\begin{aligned} CONV(uv^n) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}^n u^n|_f - \bar{u}^n u^n|_g}{\delta x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}^n v^n|_f - \bar{v}^n v^n|_g}{\delta x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n u_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n v_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{v}_{i-\frac{1}{2},j}^n v_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta x} \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
CONV(vu^n) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}^n u^n|_w - \bar{u}^n u^n|_z}{\delta y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}^n v^n|_w - \bar{v}^n v^n|_z}{\delta y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^n u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\delta y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^n v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^n v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\delta y} \right),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

em que $\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n$, $\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n$, $\bar{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n$, $\bar{v}_{i-\frac{1}{2},j}^n$, $\bar{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n$, $\bar{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^n$, $\bar{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ e $\bar{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^n$ são calculados de forma análoga aos da equação (2.7).

Portanto o método explícito neste caso é dado por

$$\begin{cases} u_{i,j}^{n+1} = & -\delta t CONW(uv^n) + (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n)r\nu \\ & + u_{i,j}^n(1 - 2\nu(r+q)) + (u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n)q\nu \\ v_{i,j}^{n+1} = & -\delta t CONW(vu^n) + (v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n)r\nu \\ & + v_{i,j}^n(1 - 2\nu(r+q)) + (v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n)q\nu, \end{cases} \tag{4.31}$$

onde $r = \frac{\delta t}{\delta x^2}$ e $q = \frac{\delta t}{\delta y^2}$.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados das simulações numéricas obtidas para as EDP's estudadas com específicas condições iniciais e de fronteira. Também faz-se uma análise comparativa entre as soluções numéricas e analíticas, comentam-se os resultados obtidos e analisa-se os resultados encontrados na literatura.

5.1 EQUAÇÃO DE BURGERS 1D

Nesta seção investigam-se as soluções numéricas para a equação de Burgers 1D. Para isto, consideram-se tal equação com condições iniciais e de fronteira de diferentes formas. O objetivo é mostrar que o esquema ADBQUICKEST é eficiente em várias situações.

Teste 1: Formação de choque. Considera-se a equação (2.1) resolvida com as condições inicial e de fronteira:

$$u(x, 0) = 1 + \cos(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (5.1)$$

$$u(0, t) = 1 + \cos(t), \quad (5.2)$$

$$u(2\pi, t) = \cos(t) + \cos(2\pi). \quad (5.3)$$

Essas condições foram escolhidas com o objetivo de promover a formação de choque. Para a simulação adota-se $\nu = 0.001$, e analisa-se os resultados para $\delta x = 0.00125$, $\delta t = 0.0002$ e tempo final $t = 3$, com $C = u \frac{\delta t}{\delta x}$. A Figura 5.1 mostra as soluções numéricas em diferentes tempos.

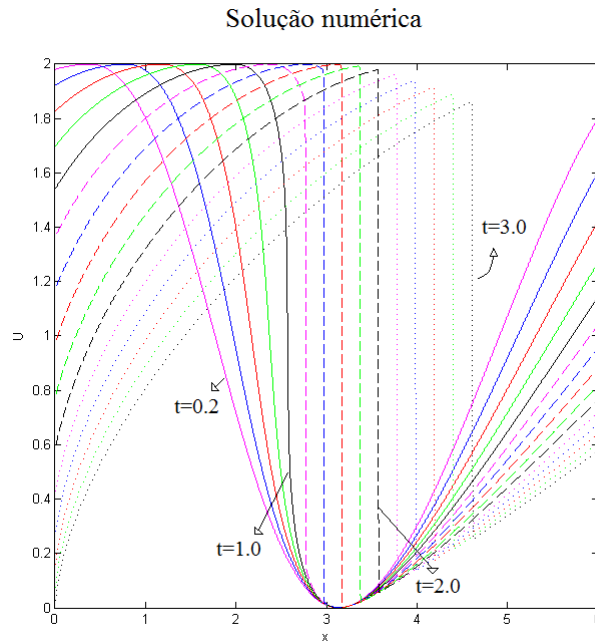


Figura 5.1: Solução numérica da equação de Burgers 1D, equação (2.1), com condição inicial (5.1) e de fronteira (5.2), para $t < 3$

Nota-se a partir da Figura 5.1 que houve a formação de choque, e observa-se a capacidade do esquema ADBQUICKEST em reproduzir tal descontinuidade sem produzir oscilações. Além disso, percebe-se pela Figura 5.1 que os resultados numéricos obtidos são compatíveis qualitativamente aos resultados apresentados por Lima [25].

Teste 2: Comparação entre as soluções numérica e analítica. Seja a equação como definida em (2.1) com condição inicial:

$$u(x, 0) = 4x(1 - x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5.4)$$

e condições de fronteira:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad , \quad t > 0. \quad (5.5)$$

Usando a transformação de Hopf-Cole [17], dada em (3.2), tem-se que as condições (5.4) e (5.5) convertem-se nas seguintes condições

$$\begin{aligned} \theta(x, 0) &= \exp \left(-(2\nu)^{-1} \left(\int_0^x 4s - 4s^2 ds \right) \right) \\ &= \exp \left(-(3\nu)^{-1} (3x^2 - 2x^3) \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

e

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = 0, \quad (5.7)$$

logo a solução da equação (3.1) com as condições (5.6) e (5.7) é dada por

$$\theta(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \cos(n\pi x), \quad (5.8)$$

e a derivada de $\theta(x, t)$ em relação a x é

$$\theta_x(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \operatorname{sen}(n\pi x) n. \quad (5.9)$$

Substituindo (5.8) e (5.9) na transformação (3.2), encontra-se a solução analítica

$$u(x, t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) n \operatorname{sen}(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \cos(n\pi x)}, \quad (5.10)$$

onde os coeficientes de Fourier são :

$$a_0 = \int_0^1 \exp(-x^2 (3\nu)^{-1} (3 - 2x)) dx,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp(-x^2 (3\nu)^{-1} (3 - 2x)) \cos(n\pi x) dx.$$

Apresenta-se na Figura 5.2, os resultados obtidos por meio das soluções numérica e analítica, onde adota-se $\delta x = 0.1$, $\delta t = 0.001$, tempo final de simulação $t = 1$ e número de Courant $C = 0.01$. Para a viscosidade utiliza-se $\nu = 0.1$.

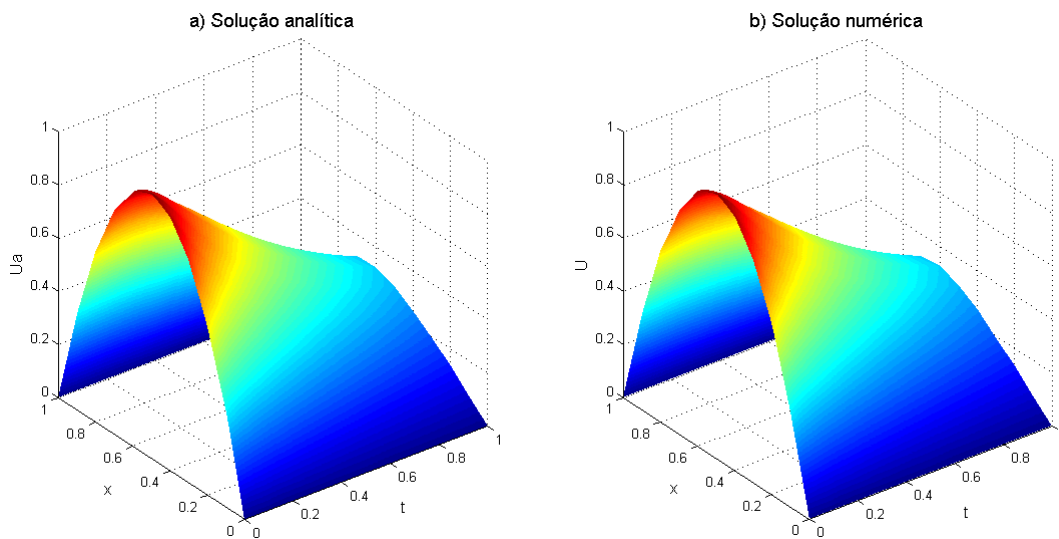


Figura 5.2: Soluções da equação de Burgers 1D, equação (2.1), com condição inicial (5.4) para $\nu = 0.1$: a) Solução analítica e b) Solução numérica

Observa-se pela Figura 5.2 que a solução numérica é similar a solução analítica, tal resultado pode ser confirmado a partir da Figura 5.3 onde realizou-se um corte na solução para $t = 1$.

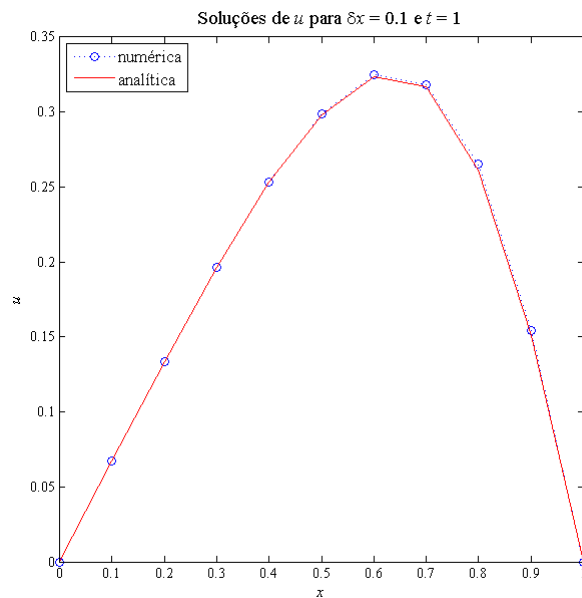


Figura 5.3: Soluções da equação de Burgers 1D para o tempo final de simulação $t = 1$.

Para analisar a influência da malha, discretiza-se o domínio em 10, 20 e 40 elementos, com $\delta t = 0.001$, e utiliza-se o erro na norma L_∞ . Observa-se pela Figura 5.4 que os resultados numéricos melhoraram consideravelmente quando aumenta-se o número de elementos na malha, resultando erros na norma L_∞ da ordem 10^{-4} para $Mx = 40$ e primeira ordem de convergência como nota-se pela Tabela 5.1.

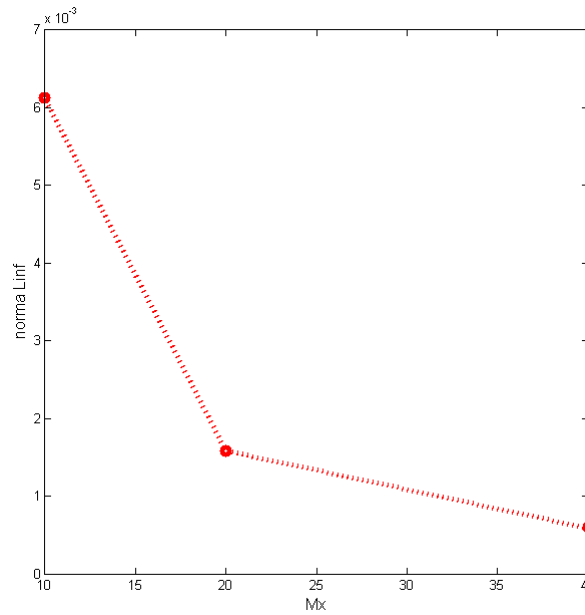


Figura 5.4: Erro na norma L_∞

Tabela 5.1: Erro das aproximações para $t = 1$, $C = 0.01$ e $\nu = 0.1$.

Mx	L_∞	p
10	$5.9731e - 004$	-
20	$1.5878e - 003$	1.41
40	$6.1230e - 003$	1.95

5.2 SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 1D

Nesta seção investiga-se um sistema acoplado de equações, a fim de comparar o resultado numérico dado pelo esquema ADBQUICKEST com o resultado obtido por Khater em [21], observa-se ainda que para as condições iniciais dadas, as soluções deste sistema podem ser obtidas via uma modificação transformação de Hopf-Cole.

Teste 3: Soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 1D.

Seja o sistema acoplado de equações de Burgers 1D definido em (2.4) com condições iniciais:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= a_0 - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(Ax), \\
 v(x, 0) &= a_0 \left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(Ax), \quad -10 \leq x \leq 10,
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

e condições de fronteira:

$$\begin{aligned}
u(-10, t) &= a_0 - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(A(-10 - 2At)), \\
u(10, t) &= a_0 - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(A(10 - 2At)), \\
v(-10, t) &= a_0 \left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(A(-10 - 2At)), \\
v(10, t) &= a_0 \left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(A(10 - 2At)), \quad t > 0,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

onde a_0 , α e β são constantes e $A = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0(4\alpha\beta - 1)}{2\alpha - 1} \right)$. Com estas condições pode-se obter as soluções analíticas do sistema (2.4) por uma modificação na transformação de Hopf-Cole

$$u = -2K \frac{\theta_x}{\theta}, \tag{5.13}$$

$$v = 2K \left(A \left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - \frac{\theta_x}{\theta} \right), \tag{5.14}$$

com $K = \frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1}$, para

$$\theta(x, t) = \exp(-2A(x - 2At)) + 1, \tag{5.15}$$

e

$$\theta_x(x, t) = -2A \exp(-2A(x - 2At)). \tag{5.16}$$

Substituindo (5.15) e (5.16) na transformação de Hopf-Cole modificada, dada por (5.13) e (5.14), tem-se que

$$\begin{cases} u(x, t) = \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \left(\frac{4A}{1 + \exp(2A(x - 2At))} \right), \\ v(x, t) = \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) 2A \left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} - 1 \right) + \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \left(\frac{4A}{1 + \exp(2A(x - 2At))} \right), \end{cases} \tag{5.17}$$

ou equivalentemente [27],

$$\begin{cases} u(x, t) = a_0 - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(A(x - 2At)), \\ v(x, t) = a_0 \left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(A(x - 2At)). \end{cases} \tag{5.18}$$

Apresentam-se na Figura 5.5 soluções numéricas obtidas pelo esquema ADBQUICKEST, assim como sua solução analítica, para $a_0 = 0.05$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\delta t = 0.1$,

$\delta x = 2$ e tempo final de simulação $t = 1$.

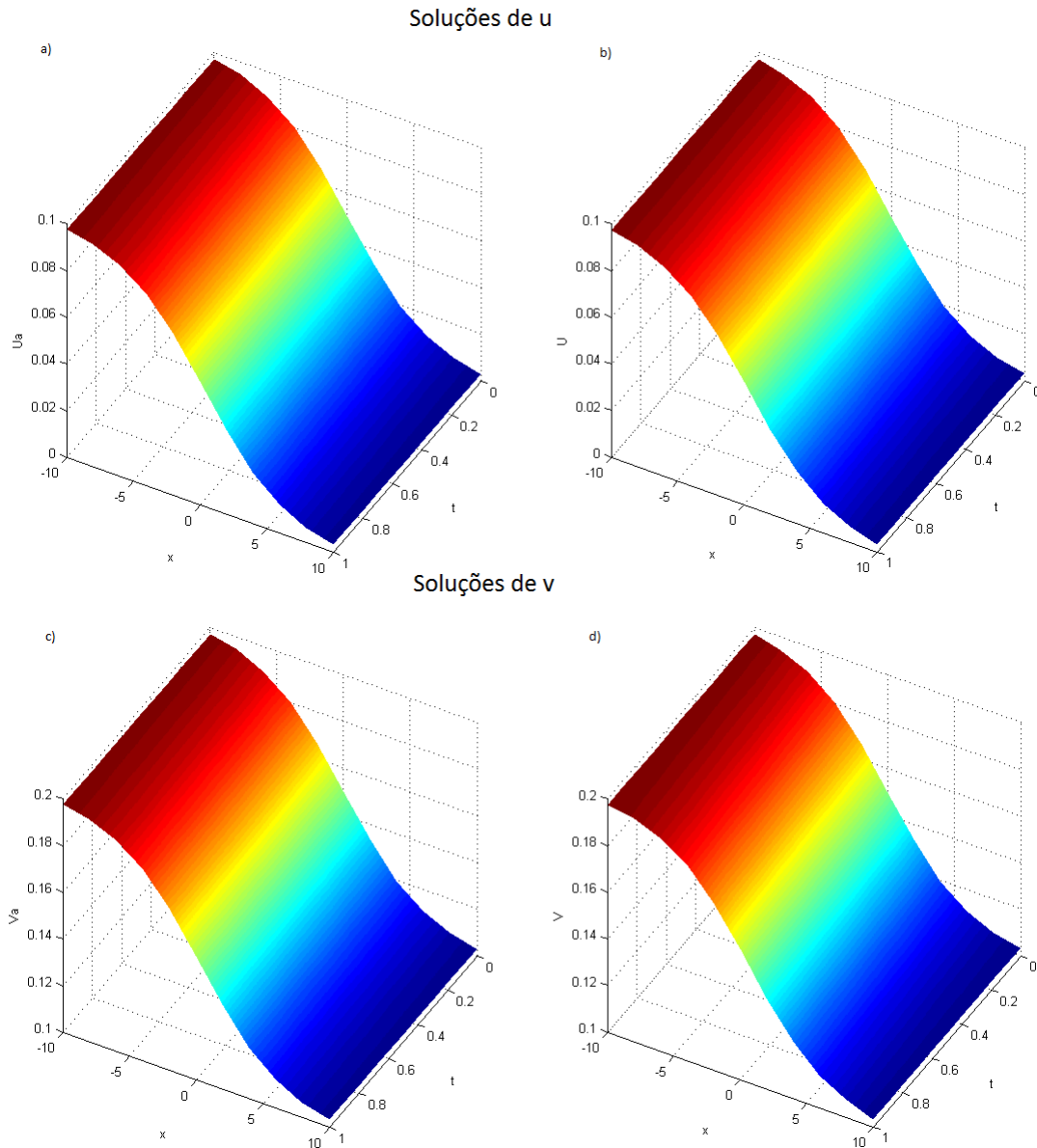


Figura 5.5: Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 1D, sistema (2.4), com condições iniciais (5.11) e condições de fronteira (5.12) para $t = 1$: a) Solução analítica de u , b) Solução numérica de u , c) Solução analítica de v e d) Solução numérica de v .

Observa-se pela Figura 5.5 que o esquema *upwind* utilizado obteve soluções numéricas similares as soluções analíticas, onde o erro na norma L_∞ é de ordem 10^{-3} , como pode-se observar pela Figura 5.6 onde realizou-se um corte nas soluções de u e de v para $t = 1$.

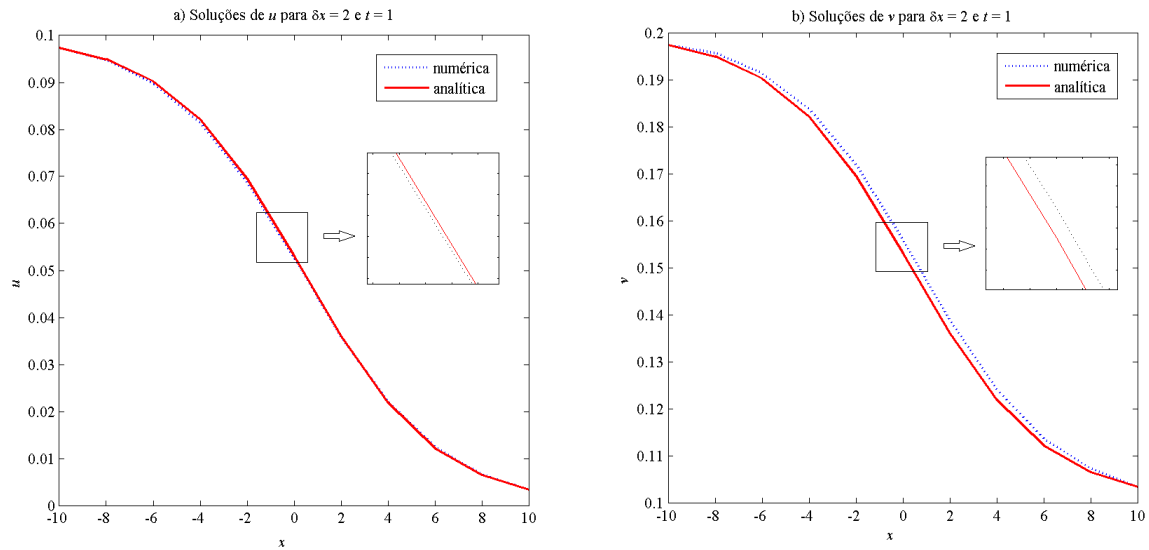


Figura 5.6: Soluções do sistema acoplado de equações de Burgers 1D, sistema (2.4), para $t = 1$: a) Soluções de u , b) Soluções de v .

Verifica-se pela Tabela 5.2, que as soluções numéricas geradas pelo esquema ADBQUICKEST, em comparação quantitativa, encontram-se de acordo com os resultados dados por Khater em [21].

Tabela 5.2: Erro na norma L_2 para $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$, $\delta x = 1$ e $\delta t = 0.01$.

t	[21]	ADBQUICKEST
0.5	$1.44e - 003$	$6.84e - 004$
1.0	$1.27e - 003$	$1.39e - 003$

5.3 EQUAÇÃO DE BURGERS 2D

A seguir, investiga-se a equação de Burgers 2D. Primeiramente analisou-se o esquema aplicando $\nu = 0.01$ na equação para comparação dos resultados numéricos dados pelo esquema ADBQUICKEST com a solução analítica via Hopf-Cole [17], e também com resultados numéricos encontrados na literatura [21, 38]. E na sequência analisa-se o esquema ADBQUICKEST quando aplicado a baixos valores de ν , bem como a influência no passo de tempo.

Teste 4: Comparação entre as soluções numérica e analítica. Considera-se a equação de Burgers 2D definida por (2.7) com condição inicial:

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x+y}{2\nu}\right)}, 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 2, \quad (5.19)$$

e condições de fronteira:

$$\begin{aligned}
 u(0, y, t) &= \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{y-t}{2\nu}\right)}, \\
 u(2, y, t) &= \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{2+y-t}{2\nu}\right)}, \\
 u(x, 0, t) &= \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x-t}{2\nu}\right)}, \\
 u(x, 2, t) &= \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{2+x-t}{2\nu}\right)}, t > 0.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

A solução analítica da equação (2.7) com as condições (5.19) e (5.20), pode ser gerada utilizando a transformação de Hopf-Cole [17, 38], dada em (3.2), onde

$$\theta(x, y, t) = \exp\left(\frac{-x - y + t}{2\nu}\right) + 1$$

e

$$\theta_x(x, y, t) = -\frac{1}{2\nu} \exp\left(\frac{-x - y + t}{2\nu}\right).$$

Portanto a solução analítica é dada por:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x+y-t}{2\nu}\right)}. \tag{5.21}$$

Para analisar os resultados, utilizam-se $\nu = 0.01$ e tempo final de simulação $t = 2$. Considera-se, para quatro diferentes espaçamentos na malha $\delta x = 0.025$, $\delta x = 0.05$, $\delta x = 0.1$ e $\delta x = 0.2$, o número de Courant $C = u\left(\frac{\delta t}{\delta x} + \frac{\delta t}{\delta y}\right) = 0.3$.

Na Figura 5.7 apresenta-se a solução numérica do esquema ADBQUICKEST e a solução analítica para $\delta x = \delta y = 0.025$.

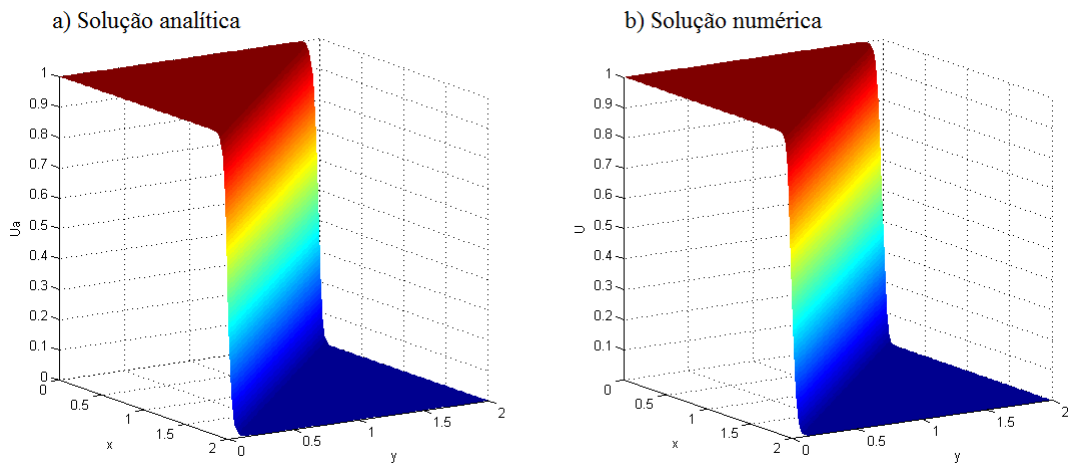


Figura 5.7: Superfícies das soluções para a equação de Burgers 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.01$, $\delta t = 0.004$, $\delta x = \delta y = 0.025$ e $t = 2$.

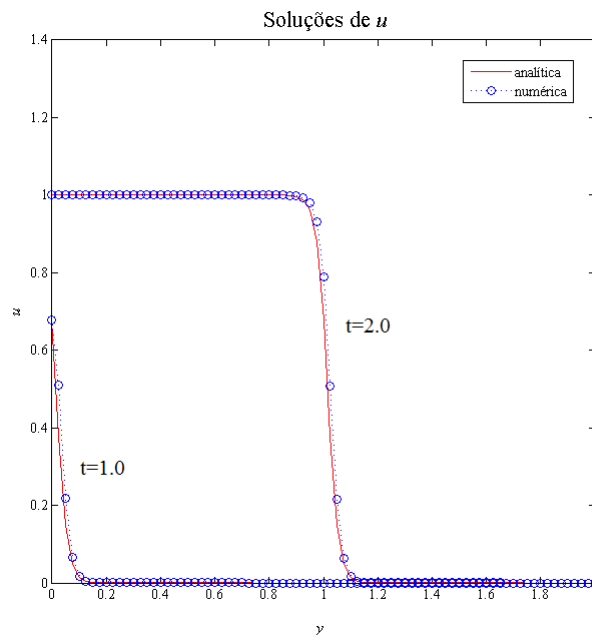


Figura 5.8: Soluções para a equação de Burgers 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.01$.

Pelas Figuras 5.7 e 5.8, nota-se que o esquema ADBQUICKEST reproduziu uma solução numérica similar à solução analítica. E confrontando os resultados obtidos pelo esquema ADBQUICKEST com os resultados dados pela descontinuidade local de Galekin (LDG) em [38], observa-se um benefício, uma vez que o método LDG utiliza elementos finitos para aproximar as derivadas, o esquema ADBQUICKEST aproxima as derivadas por diferenças finitas, que é um método mais simples.

Confirma-se tais resultados pelas Figuras 5.9 e 5.10, onde apresentam-se os erros nas normas L_2 e L_∞ . Na Figura 5.9 utilizam-se o tempo entre $0 \leq t \leq 2$ e o valor fixo de $\delta x = \delta y = 0.025$, já na Figura 5.10 o tempo que é fixo, $t = 2$, e o erro é analisado para quatro diferentes malhas 10, 20, 40 e 80, em $t = 2$.

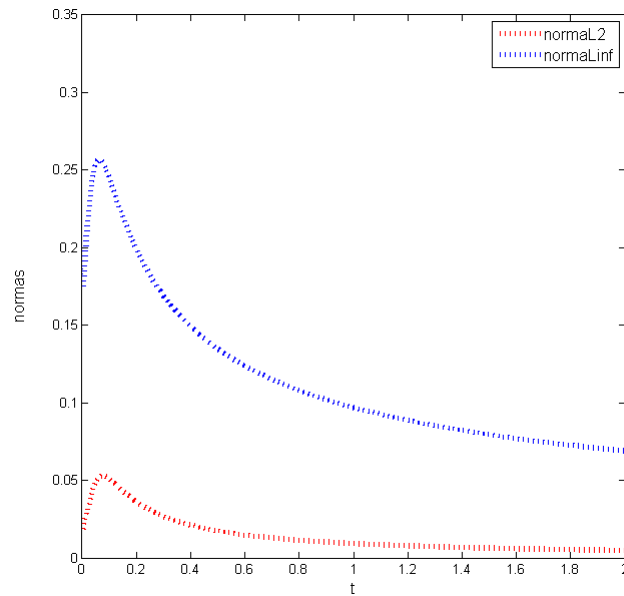


Figura 5.9: Gráfico do erro para $0 \leq t \leq 2$; $\nu = 0.01$, $\delta x = \delta y = 0.025$ e $\delta t = 0.004$.

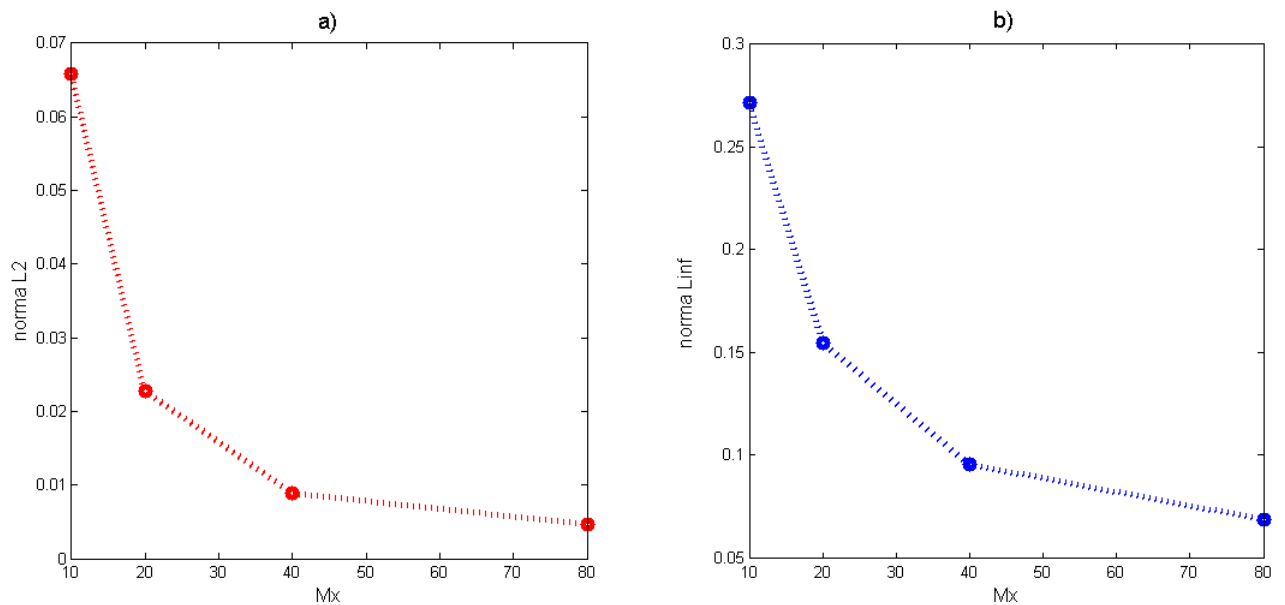


Figura 5.10: Gráficos dos erros para diferentes malhas; $\nu = 0.01$ e $t = 2$: a) Norma L_2 e b) Norma L_∞ .

Na Tabela 5.3 analisa-se o erro para diferentes tempos e uma malha fixa com

80 elementos. Na segunda Tabela 5.4 utiliza-se quatro malhas 10, 20, 40, e 80 em $t = 2$, bem como estimativas para a ordem de convergência.

Tabela 5.3: Erro das aproximações para $\delta x = 1/80$, $C = 0.3$ e $\nu = 0.01$.

t	L_2	L_∞
0.5	$1.7294e - 002$	$1.3453e - 001$
1.0	$9.1527e - 003$	$9.6779e - 002$
1.5	$6.2161e - 002$	$7.9402e - 002$
2.0	$4.69802e - 003$	$6.8916e - 002$

Tabela 5.4: Erro das aproximações para $t = 2$, $C = 0.3$ e $\nu = 0.01$.

Mx	L_2	p	L_∞	p
10	$6.5866e - 002$	-	$2.7164e - 001$	-
20	$2.2743e - 002$	1.53	$1.5471e - 001$	0.81
40	$8.9680e - 003$	1.34	$9.5698e - 002$	0.69
80	$4.6980e - 003$	0.93	$6.8916e - 002$	0.47

Nota-se que o erro na norma L_2 não ultrapassou o valor de 2×10^{-2} , e na norma L_∞ foi inferior a 2×10^{-1} como observa-se na Tabela 5.3. E pela Tabela 5.4 tem-se que para este exemplo, o esquema ADBQUICKEST é de primeira ordem de precisão na norma L_2 para $Mx = 20$ e $Mx = 40$.

5.3.1 Influência do valor de ν

Para testar a capacidade do esquema ADBQUICKEST em problemas cuja a convecção é dominante, utilizam-se $\nu = 0.002$ e $\nu = 0.001$, e analisam-se os resultados para o tempo final de simulação $t = 2$, com $\delta t = 0.004$ e $\delta x = \delta y = 0.025$.

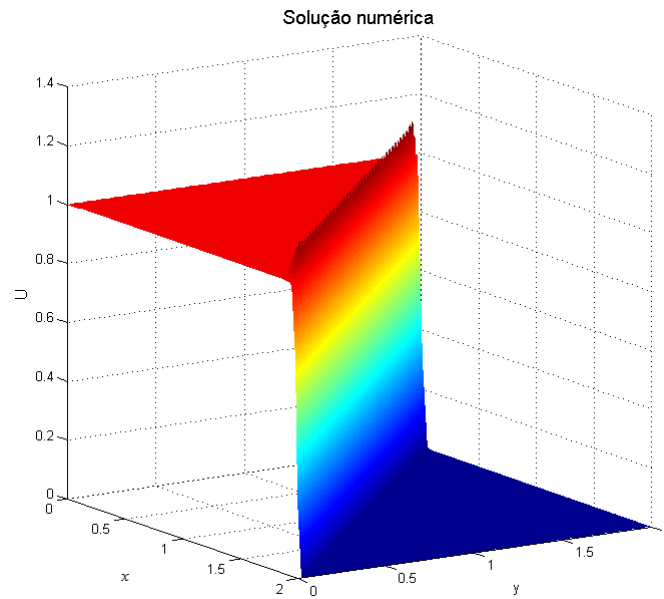


Figura 5.11: Superfície da solução numérica para a equação de Burgers de 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.002$, $\delta t = 0.004$, $\delta x = \delta y = 0.025$ e $t = 2$.

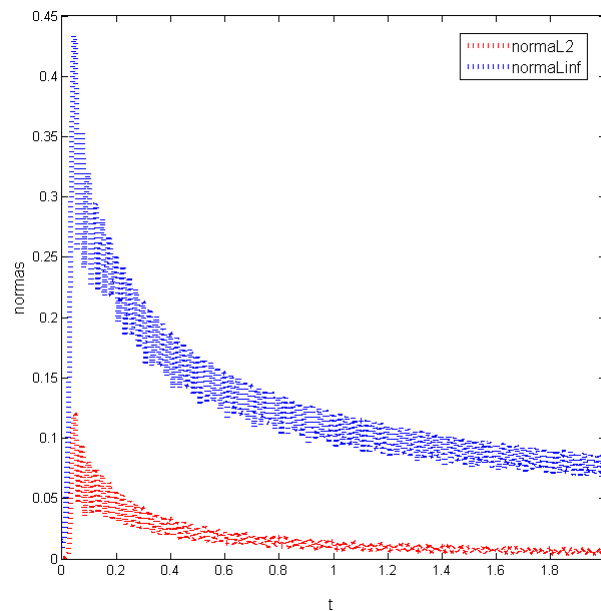


Figura 5.12: Gráfico do erro para $0 \leq t \leq 2$; $\nu = 0.002$ e $\delta x = \delta y = 0.025$.

Na Figura 5.11 nota-se que para $\nu = 0.002$ a solução numérica dada pelo esquema ADBQUICKEST apresentou oscilações. E o erro na norma L_2 foi inferior a 1.5×10^{-1} e na norma L_∞ não alcançou 4.5×10^{-1} , como pode ser observado na Figura 5.12.

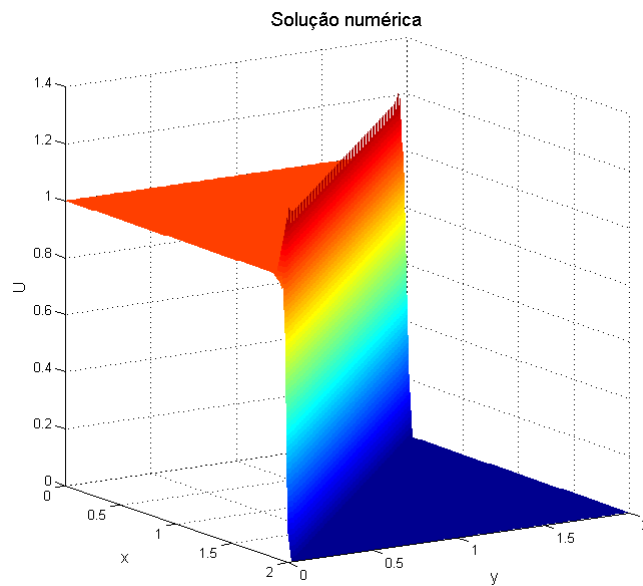


Figura 5.13: Superfície da solução numérica para a equação de Burgers 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.001$, $\delta t = 0.004$, $\delta x = \delta y = 0.025$ e $t = 2$.

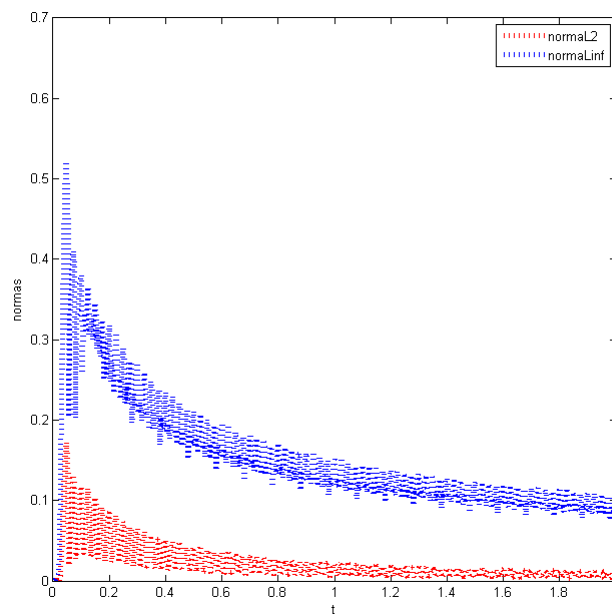


Figura 5.14: Gráfico do erro para $0 \leq t \leq 2$; $\nu = 0.001$, $\delta t = 0.004$ e $\delta x = \delta y = 0.025$.

Já para $\nu = 0.001$, observa-se pela Figura 5.13, que a solução numérica obtida possui oscilações. E neste caso, o erro na norma L_2 dado na Figura 5.14, ultrapassa o valor de 1.5×10^{-1} , e na norma L_∞ é superior a 5×10^{-1} . A fim de melhorar estes últimos resultados, aplica-se um passo menor no tempo, como é feito a seguir.

5.3.2 Influência do passo de tempo

Mostra-se a influência do passo de tempo para $\nu = 0.001$. Para isto diminui-se o passo de tempo para $\delta t = 0.002$ utilizando $\delta x = 0.0125$ e tempo final de simulação $t = 2$. Analisa-se ainda o erro na normas L_2 e L_∞ para $\delta t = 0.004$ e $\delta t = 0.002$.

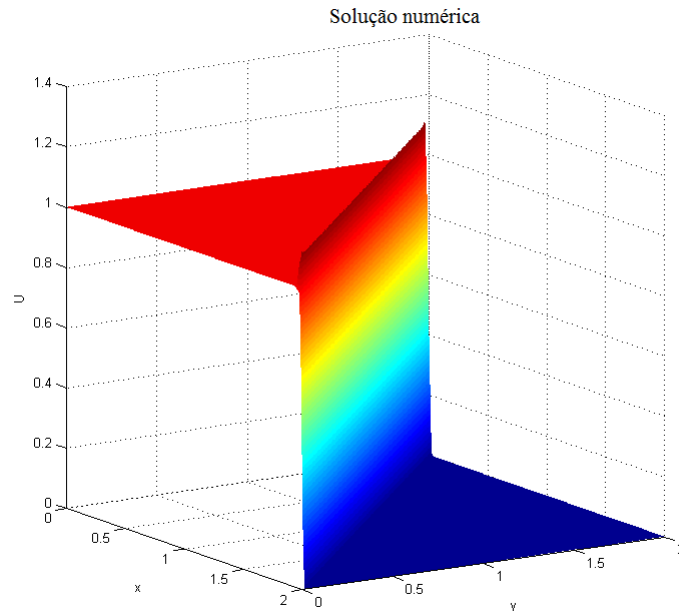


Figura 5.15: Superfície da solução numérica para a equação de Burgers 2D, equação (2.7), com condição inicial (5.19) e condições de fronteira (5.20); $\nu = 0.001$, $\delta t = 0.002$, $\delta x = 0.0125$ e $t = 2$.

Observa-se que na solução numérica, Figura 5.15, as oscilações persistem, mas ao contrário do que acontece na Figura 5.13, refinando o passo no tempo em $\delta t = 0.002$ o esquema ADBQUICKEST obteve um solução numérica melhor.

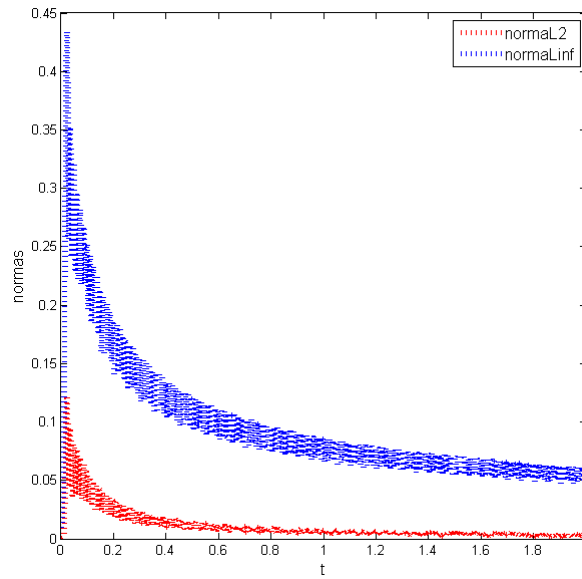


Figura 5.16: Gráfico do erro para diferentes tempos; $\nu = 0.001$ e $\delta x = 0.0125$.

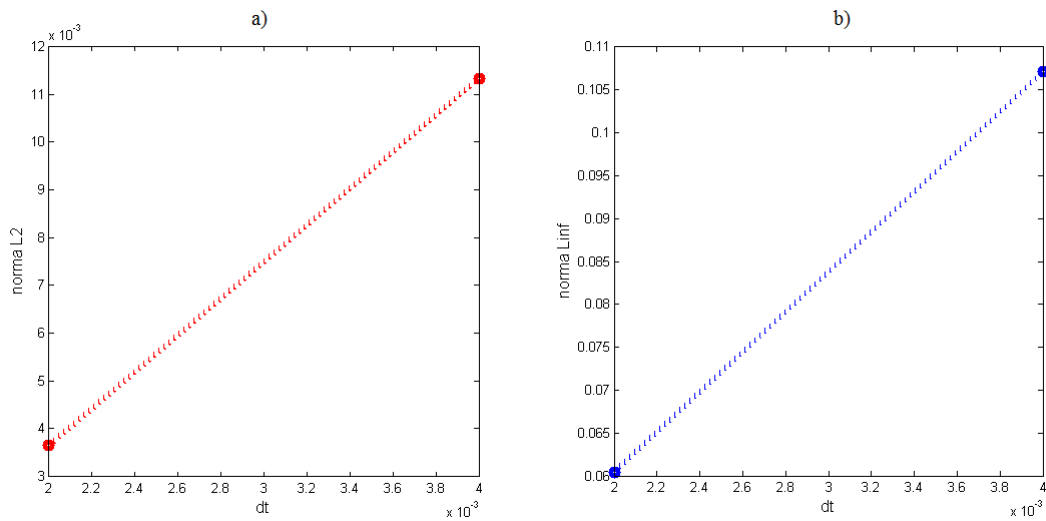


Figura 5.17: Gráfico dos erros para $\nu = 0.001$ e $t = 2$: a) na norma L_2 e b) na norma L_∞ .

O erro na norma L_2 foi inferior a 1.5×10^{-1} e na norma L_∞ não alcançou 1.5×10^{-1} , como pode ser observado na Figura 5.16. E como esperado, ocorre a diminuição do erro quando considera-se $\delta t = 0.002$ como observa-se na Figura 5.17.

5.4 SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE BURGERS 2D

Nesta seção, analisam-se exemplos do sistema acoplado de equações de Burgers 2D, com condições iniciais e de fronteira diferentes. Nos dois casos utilizam-se baixos valores de ν , isto é, a convecção torna-se dominante.

Teste 5: Análise qualitativa e quantitativa das soluções analítica e numérica no sistema acoplado de equações de Burgers 2D. Seja o sistema acoplado de equações de Burgers 2D definido por (2.10) com condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \frac{-4\nu\pi\cos(2\pi x)\sen(\pi y)}{2 + \sen(2\pi x)\sen(\pi y)}, \\ v(x, y, 0) &= \frac{-2\nu\pi\sen(2\pi x)\cos(\pi y)}{2 + \sen(2\pi x)\sen(\pi y)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1, \end{aligned} \quad (5.22)$$

e condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= -2(\nu)\pi\exp(-5\pi^2\nu t)\sen(\pi y), \\ u(1, y, t) &= -2(\nu)\pi\exp(-5\pi^2\nu t)\sen(\pi y), \\ u(x, 0, t) &= 0, \\ u(x, 1, t) &= 0, \\ v(0, y, t) &= 0, \\ v(1, y, t) &= 0, \\ v(x, 0, t) &= -\nu\pi\exp(-5\pi^2\nu t)\sen(2\pi x), \\ v(x, 1, t) &= \nu\pi\exp(-5\pi^2\nu t)\sen(2\pi x), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5.23)$$

As soluções analíticas do sistema (2.10) com as condições (5.22) e (5.23) podem ser geradas utilizando a transformação de Hopf-Cole [17, 38], dada em (3.36), onde

$$\theta(x, y, t) = 2 + \exp(-5\pi^2\nu t)\sen(2\pi x)\sen(\pi y),$$

$$\theta_x(x, y, t) = 2\pi\exp(-5\pi^2\nu t)\cos(2\pi x)\sen(\pi y)$$

e

$$\theta_y(x, y, t) = \pi\exp(-5\pi^2\nu t)\sen(2\pi x)\cos(\pi y).$$

Portanto as soluções analíticas são

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -2\nu\frac{2\pi\exp(-5\pi^2\nu t)\cos(2\pi x)\sen(\pi y)}{2 + \exp(-5\pi^2\nu t)\sen(2\pi x)\sen(\pi y)}, \\ v(x, y, t) &= -2\nu\frac{\pi\exp(-5\pi^2\nu t)\sen(2\pi x)\cos(\pi y)}{2 + \exp(-5\pi^2\nu t)\sen(2\pi x)\sen(\pi y)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para ilustrar os resultados considera-se $\nu = 0.001$, para o tempo de simulação final $t = 1$ e $\delta t = 0.001$, analisam-se, na Figura 5.18, as soluções numéricas e analíticas para $\delta x = \delta y = 0.0125$.

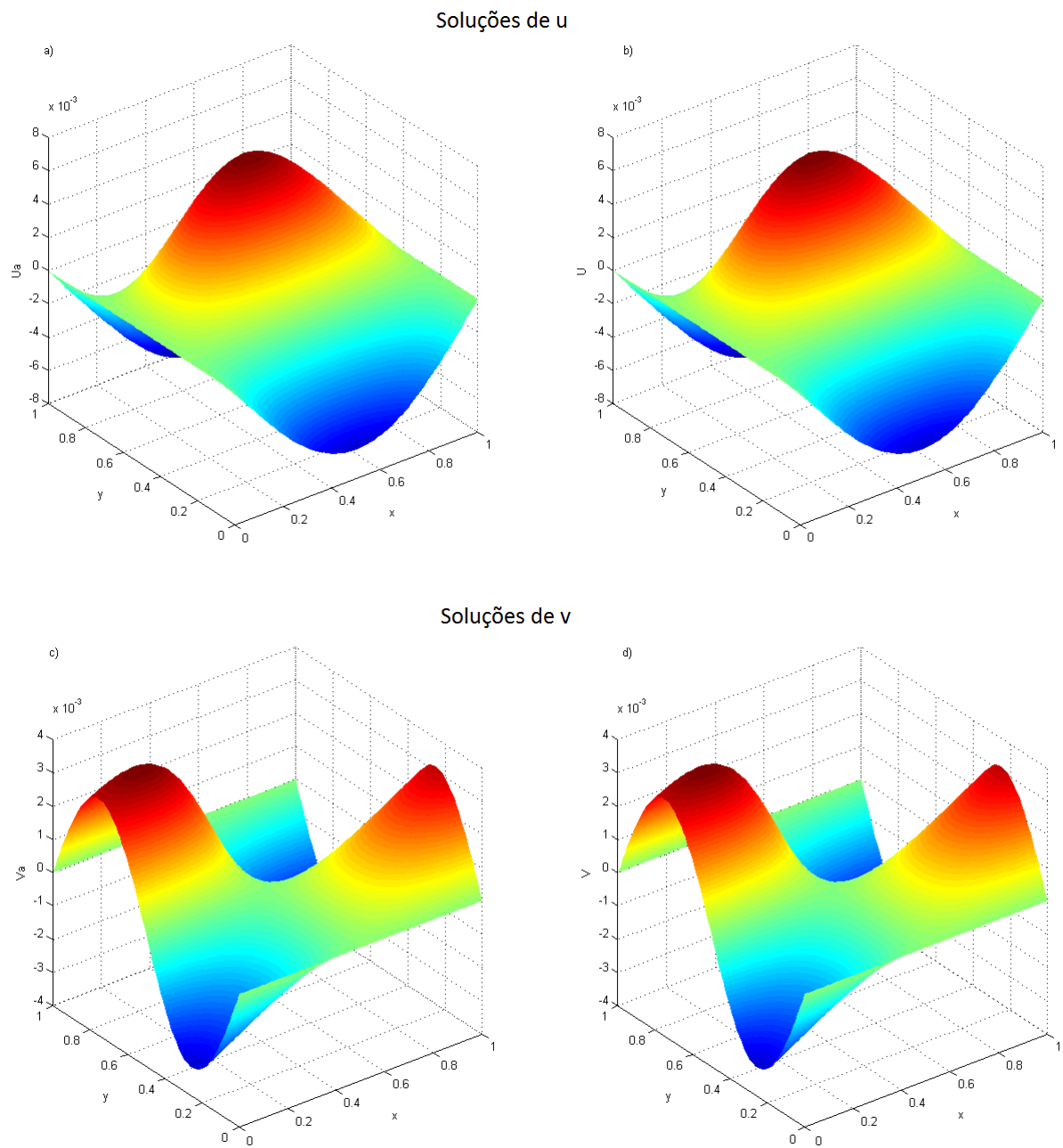


Figura 5.18: Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 2D, sistema (2.10), com condições iniciais (5.22) e condições fronteira (5.23); $\nu = 0.001$: a) Solução analítica de u ; b) Solução numérica de u ; c) Solução analítica de v e d) Solução numérica de v .

Observa-se a partir da Figura 5.18 que o esquema ADBQUICKEST gerou soluções numéricas similares as soluções analíticas, tal resultado é confirmado pela Figura 5.19.

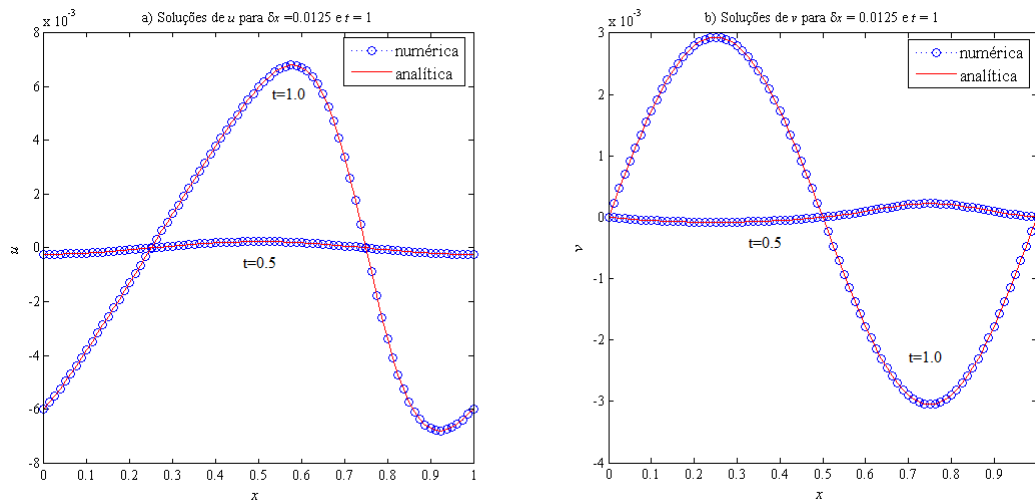


Figura 5.19: Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 2D, sistema (2.10), com condições iniciais (5.22) e condições fronteira (5.23); $\nu = 0.001$: a) Solução analítica de u ; b) Solução numérica de u ; c) Solução analítica de v e d) Solução numérica de v .

A fim de estudar os erros nas normas L_2 e L_∞ , na Figura 5.20 utilizam-se $\delta x = 0.0125$, $\delta x = 0.025$, $\delta x = 0.05$ e $\delta x = 0.1$, o que implica no número de Courant entre $0 < C < 0.2$.

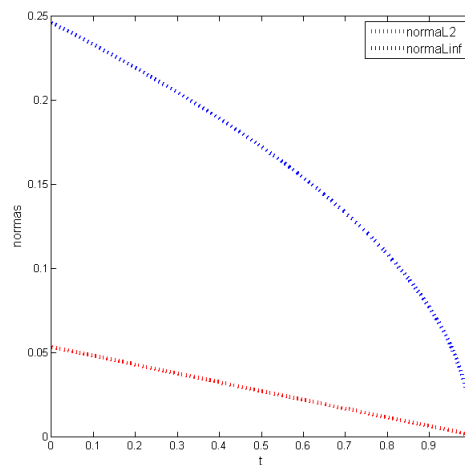


Figura 5.20: Gráfico do erro para diferentes tempos.

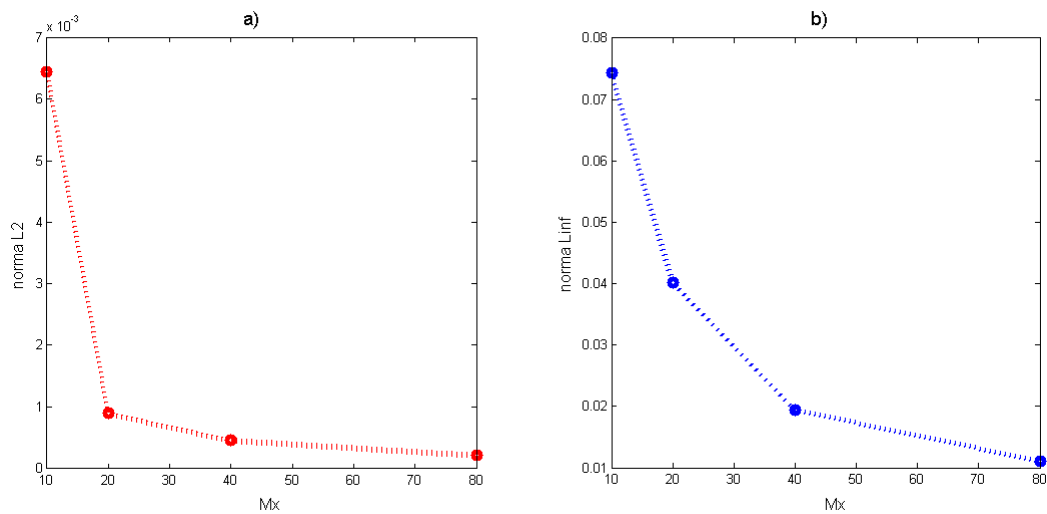


Figura 5.21: Gráficos dos erros para diferentes malhas: a) norma L_2 e b) norma L_∞ .

Na norma L_2 nota-se, pela Figura 5.20, que o erro para diferentes tempos não ultrapassou o valor de 1×10^{-1} , e na norma L_∞ não alcançou 2.5×10^{-1} . E para diferentes malhas nota-se que o erro na norma L_2 não ultrapassa o valor de 7×10^{-3} e na norma L_∞ é inferior a 8×10^{-2} como observa-se na Figura 5.21.

Tabela 5.5: Erro das aproximações para $\delta x = \delta y = 1/80$, $C < 0.2$ e $\nu = 0.001$.

t	L_2	L_∞
0.2	$4.2605e - 002$	$2.1926e - 001$
0.4	$3.2093e - 002$	$4.2271e - 001$
0.6	$2.1653e - 002$	$3.4533e - 001$
0.8	$1.1290e - 002$	$2.4477e - 001$
1.0	$2.0457e - 004$	$1.1138e - 002$

Tabela 5.6: Erro das aproximações para $t = 1$, $C < 0.2$ e $\nu = 0.001$.

Mx	L_2	p	L_∞	p
10	$6.4523e - 003$	-	$7.4332e - 002$	-
20	$8.9210e - 004$	2.85	$4.0140e - 002$	0.88
40	$4.5263e - 004$	0.97	$1.9426e - 002$	1.04
80	$2.0457e - 004$	1.14	$1.1138e - 002$	0.80

Como esperado, percebe-se pela Tabela 5.5 que quanto maior o refinamento na malha menor o erro, ou seja, a solução numérica aproxima-se cada vez mais da solução analítica.

Além disso, pela Tabela 5.6 nota-se que o esquema alcança segunda ordem de precisão na norma L_2 para $Mx = 20$.

Teste 6: Soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 2D.

Seja (2.10) com condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4y-4x}{32\nu}))}, \\ v(x, y, 0) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4y-4x}{32\nu}))}, \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq 1, \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \quad (5.25)$$

e condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4y-t}{32\nu}))}, \\ u(1, y, t) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4y-4-t}{32\nu}))}, \\ u(x, 0, t) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{-4x-t}{32\nu}))}, \\ u(x, 1, t) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4-4x-t}{32\nu}))}, \\ v(0, y, t) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4y-t}{32\nu}))}, \\ v(1, y, t) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4y-4-t}{32\nu}))}, \\ v(x, 0, t) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{-4x-t}{32\nu}))}, \\ v(x, 1, t) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4-4x-t}{32\nu}))}, \end{aligned} \quad t > 0. \quad (5.26)$$

As soluções analíticas da equação (2.10) com as condições (5.25) e (5.26), podem ser encontradas usando uma modificação na transformação de Hopf-Cole dada por

$$u = \frac{3}{4} - 2\nu \frac{\theta_x}{\theta},$$

$$v = \frac{3}{4} - 2\nu \frac{\theta_y}{\theta},$$

onde

$$\theta(x, y, t) = \exp\left(\frac{4x - 4y + t}{32\nu}\right) + 1,$$

$$\theta_x(x, y, t) = \frac{4}{32\nu} \exp\left(\frac{4x - 4y + t}{32\nu}\right)$$

e

$$\theta_y(x, y, t) = -\frac{4}{32\nu} \exp\left(\frac{4x - 4y + t}{32\nu}\right).$$

Assim as soluções analíticas são dadas por:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4y-4x-t}{32\nu}))}; \\ v(x, y, t) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp(\frac{4y-4x-t}{32\nu}))}; \end{aligned} \quad (5.27)$$

Apresentam-se, na Figura 5.22, os resultados do esquema ADBQUICKEST para $\delta x = \delta y = 0.0125$, $\delta t = 0.0001$, tempo final de simulação $t = 0.05$ e $\nu = 0.001$.

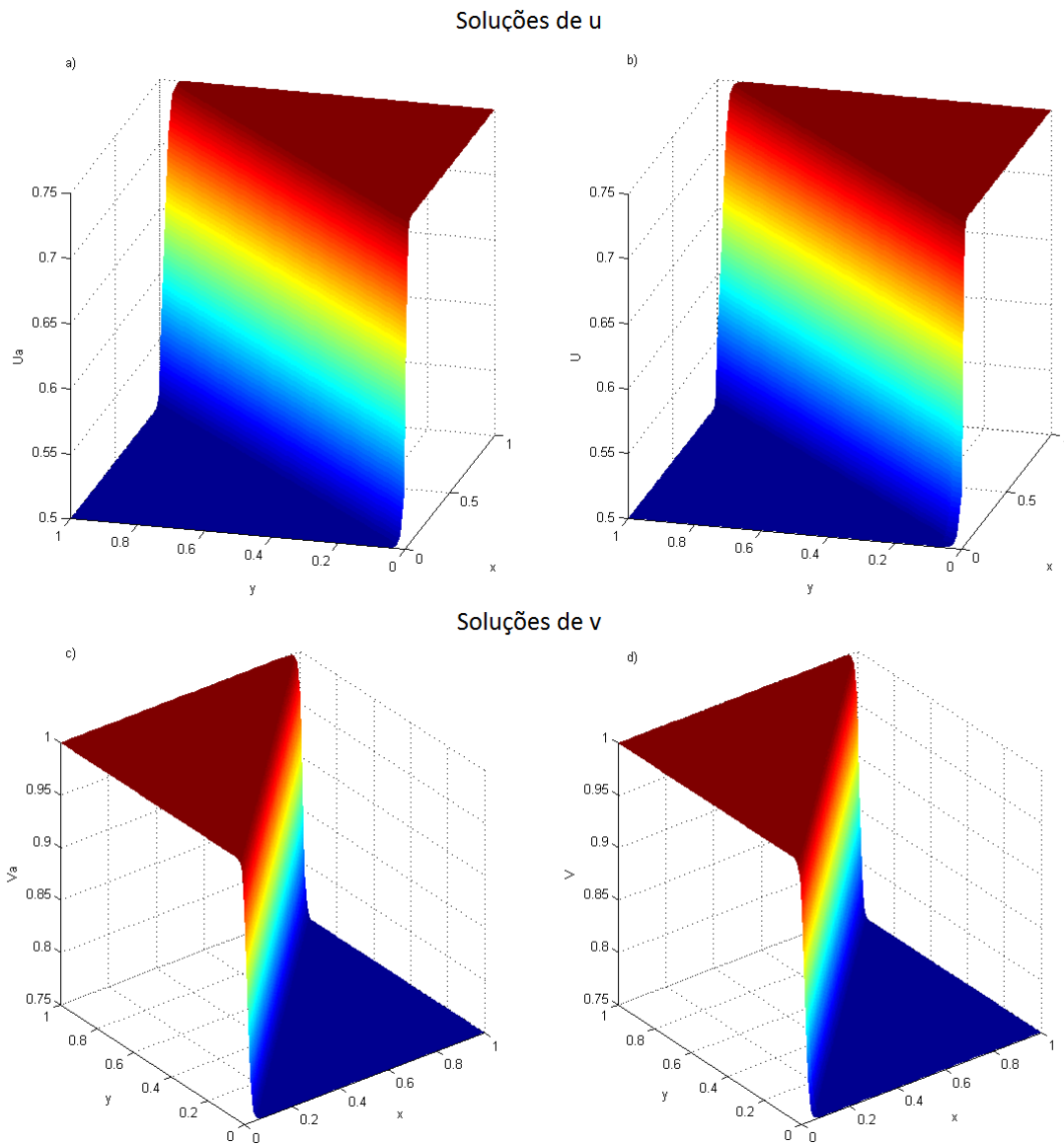


Figura 5.22: Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 2D, sistema (2.10), com condições iniciais (5.25) e condições fronteira (5.26); $\nu = 0.001$: a) Solução analítica de u ; b) Solução numérica de u ; c) Solução analítica de v ; e d) Solução numérica de v .

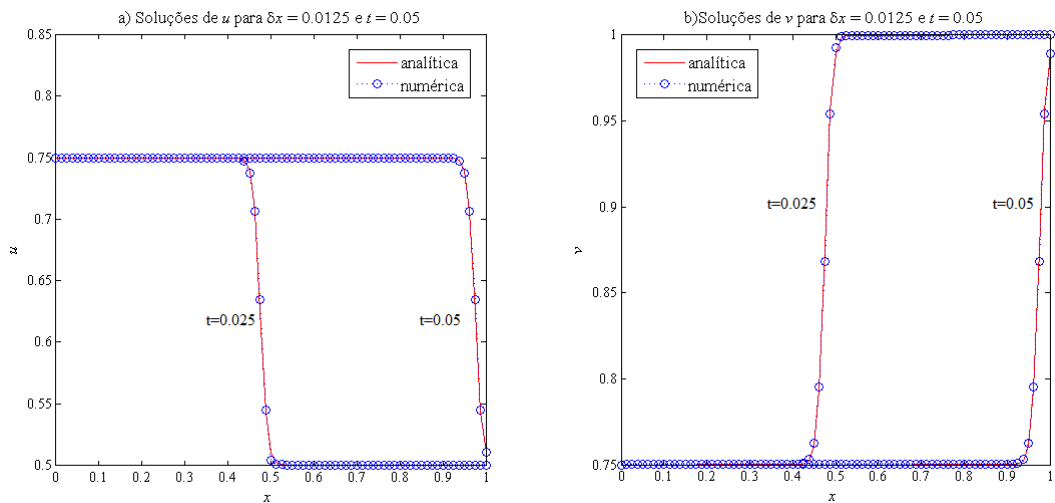


Figura 5.23: Superfícies das soluções para o sistema acoplado de equações de Burgers 2D, sistema (2.10), com condições iniciais (5.25) e condições fronteira (5.26); $\nu = 0.001$: a) Solução analítica de u ; b) Solução numérica de u ; c) Solução analítica de v ; e d) Solução numérica de v .

Observa-se na Figura 5.22, que o esquema *upwind* não apresentou oscilação, e os resultados dados pela Figura 5.23 comparados com o de Zhao [38] foram qualitativamente similares.

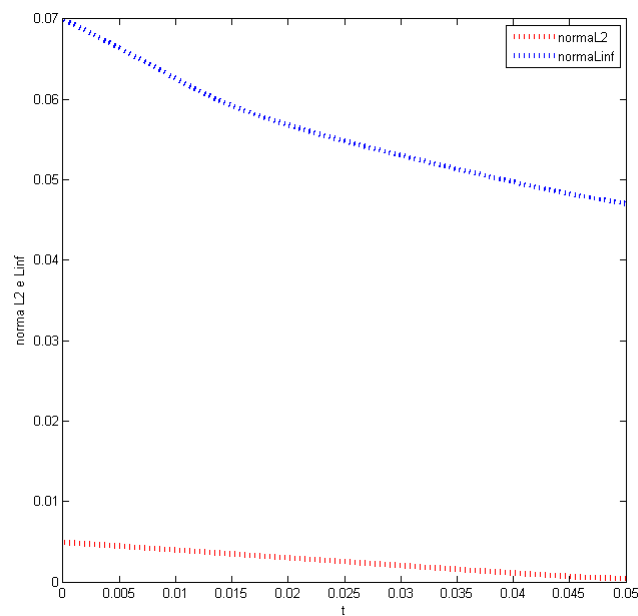


Figura 5.24: Gráfico do erro para diferentes tempos.

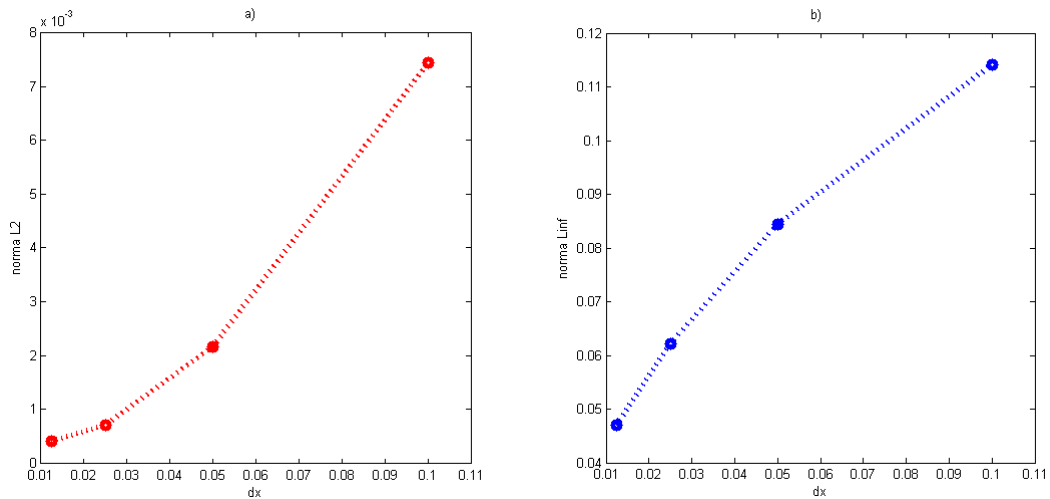


Figura 5.25: Gráficos dos erros para diferentes malhas: a) Norma L_2 e b) Norma L_∞ .

Observa-se na Figura 5.24 que o erro na norma L_∞ atingiu 7×10^{-2} , e na norma L_2 não ultrapassou o valor de 1×10^{-2} . Já pela Figura 5.25a) tem-se que o erro na norma L_2 foi inferior a 8×10^{-3} , e pela Figura 5.21b) observa-se que o erro na norma L_∞ não ultrapassou o valor de 1.2×10^{-1} .

Na Tabela 5.7 analisa-se o erro nas normas L_2 e L_∞ para diferentes tempos, e uma malha fixa com 80 elementos. Apresenta-se na Tabela 5.8 o erro nas normas L_2 e L_∞ , e a ordem de convergência para o tempo fixo $t = 0.05$.

Tabela 5.7: Erro das aproximações para $\delta x = \delta y = 1/80$, $C < 0.01$ e $\nu = 0.001$.

t	L_2	L_∞
0.01	$2.0414e - 003$	$4.5167e - 002$
0.02	$1.5342e - 003$	$3.9155e - 002$
0.03	$1.0266e - 003$	$3.2031e - 002$
0.04	$5.1893e - 004$	$2.2782e - 002$
0.05	$1.2215e - 005$	$5.9768e - 003$

Tabela 5.8: Erro das aproximações para $t = 0.05$, $C < 0.01$ e $\nu = 0.001$.

Mx	L_2	p	L_∞	p
10	$2.9772e - 004$	-	$2.6693e - 002$	-
20	$1.2508e - 004$	1.25	$1.8439e - 002$	0.53
40	$4.1809e - 005$	1.58	$1.0966e - 002$	0.74
80	$1.2215e - 005$	1.77	$5.9768e - 003$	0.87

Pela Tabela 5.7 nota-se que o erro na norma L_2 não ultrapassou o valor de

2.1×10^{-3} . Observa-se a partir da Tabela 5.8 que o esquema ADBQUICKEST neste exemplo atingiu primeira ordem de convergência, como era de se esperar, uma vez que o valor de ν é baixo [29].

6 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi analisar o esquema *upwind* ADBQUICKEST de alta resolução para a discretização do termo convectivo da equação de Burgers. O esquema *upwind* foi primeiramente avaliado na solução da equação de Burgers 1D e sistema acoplado de equações de Burgers 1D, para diferentes condições iniciais e de fronteira. Após, foi aplicado *upwind* também na resolução da equação de Burgers 2D e do sistema acoplado de equações de Burgers 2D. O propósito foi mostrar a flexibilidade do esquema ADBQUICKEST em equações 1D e 2D. Os resultados numéricos foram comparados com as soluções analíticas obtidas pela transformação de Hopf-Cole ou por uma mudança nesta transformação, e também com os dados numéricos encontrados na literatura [25, 38, 1].

No Capítulo 5, os dois primeiros testes analisados referem-se a equação de Burgers 1D com condições iniciais distintas. No Teste 1, percebeu-se a formação de choque, e observou-se a capacidade do esquema ADBQUICKEST em reproduzir tal descontinuidade sem produzir oscilações. No Teste 2, notou-se pelas Figura 5.2 e 5.3 que a solução numérica foi similar a solução analítica, gerando erro de ordem 10^{-3} na norma L_∞ e primeira ordem de precisão. Desta forma, analisou-se no Teste 3 o sistema acoplado de equações de Burgers 1D, e observou-se que as soluções numéricas foram similares as soluções analíticas, confirmando este resultado pela Figura 5.6, onde o erro na norma L_∞ foi de ordem 10^{-3} . Além disso, verificou-se pela Tabela 5.2 que as soluções numéricas geradas pelo esquema ADBQUICKEST, em comparação quantitativa, mostrou-se de acordo com os resultados dados por Khater em [21]. Já no Teste 4, considerou-se a equação de Burgers 2D, e os resultados numéricos obtidos foram comparados qualitativamente com a solução analítica e dados numéricos de Zhao em [38]. Primeiramente analisou-se o esquema considerando $\nu = 0.01$ na equação, neste caso as soluções foram similares as soluções analíticas encontradas a partir da transformação de Hopf-Cole [17]. Depois, tomou-se a equação de Burgers 2D com baixos valores de ν e notou-se que a solução numérica apresentou oscilações. A fim de melhorar os resultados, aplicou-se um passo de tempo menor e observou-se que as oscilações numéricas foram suavizadas. Neste contexto, avaliou-se ainda o esquema ADBQUICKEST para a solução do sistema acoplado de Burgers 2D em exemplos distintos. No Teste 5, notou-se pela Tabela 5.6 que o esquema alcança segunda ordem de precisão na norma L_2 para $Mx = 20$, como em [38]. No Teste 6 observou-se pela Figura 5.22 que o esquema ADBQUICKEST não apresentou oscilações, e comparando os resultados obtidos com os resultados dados pela descontinuidade local de Galekin (LDG) em [38], pode-se observar um benefício, uma vez que o método LDG utiliza elementos finitos para aproximar as derivadas, o esquema ADBQUICKEST aproxima as derivadas por diferenças finitas, que é um método mais simples.

Conclui-se com os testes realizados que o esquema ADBQUICKEST é eficiente para estimar os termos convectivos da equação de Burgers, quando comparados com

as soluções analíticas encontradas via transformação de Hopf Cole e via uma mudança nesta transformação.

A pesquisa descrita neste trabalho pode ser incrementada de várias maneiras. Entre os temas que podem ser considerados para trabalhos futuros, elencamos os seguintes:

1. Utilizar uma transformação na equação de Burgers 1D, com as condições não homogêneas dadas no Teste 1, a fim de obter um problema em que consegue-se aplicar a transformação de Hopf-Cole para o cálculo da solução analítica.
2. Resolver a equação de Burgers por método implícito.
3. Além de tratar problemas em domínios retangulares, analisar regiões irregulares utilizando coordenadas generalizadas em sua discretização.

REFERÊNCIAS

- [1] AKSAN, E. A numerical solution of burgers equation by finite element method constructed on the method of discretization in time. *Applied Mathematics and Computation* 170 (2005), 895–904.
- [2] ALVES, M. A., OLIVEIRA, P. J., AND PINHO, F. T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41 (2003), 47–75.
- [3] BATEMAN, H. Some recent researches on the motion of fluids. *Monthly Weather Review* 43 (1915), 163–170.
- [4] BENTON, E., AND PLATZMAN, G. W. A table of solution of one dimensional burgers equation. *Quarterly of Applied Mathematics* 30 (1972), 195–212.
- [5] BURGERS, M. J. Mathematical examples illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics* 1 (1948), 171–199.
- [6] COURANT, R., ISAACSON, E., AND REES, M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Community Pure Applied Mathematics* 5 (1952), 243–255.
- [7] DHAWAN, S., KAPOOR, S., KUMAR, S., AND RAWAT, S. Contemporary review of techniques for the solution of nonlinear burgers equation. *Journal of Computational Science* 3 (2012), 405–419.
- [8] ESIPOV, S. E. Coupled burgers equations: a model of polydisperse sedimentation. *Physical Review E* 52 (1995), 3711–3718.
- [9] FERREIRA, V., OISHI, C., KUROKAWA, F., KAIBARA, M., CUMINATO, J., CASTELO, A., MANGIAVACCHI, N., TOMÉ, M., AND MCKEE, S. A combination of implicit and adaptative upwind tools for the numerical solution of incompressible free surface flow. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 23 (2007), 419–445.
- [10] FERREIRA, V. G. Assessment of a high-order finite difference upwind scheme for the simulation of convection-diffusion problems. *Community Pure Applied Mathematics* 60 (2009), 1–26.
- [11] FERREIRA, V. G., AND DE LIMA, G. A. B. *Modelagem matemática e simulação numérica em dinâmica dos fluidos*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2005.

- [12] FERREIRA, V. G., DE LIMA, G. A. B., AND CORRÊA, L. *Metodologia para desenvolvimento de esquemas UPWIND de alta resolução*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2011.
- [13] FLETCHER, C. A. J. Generating exact solutions of the two-dimensional burgers a equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 3 (1983), 213–216.
- [14] GASKELL, P. H., AND LAU, A. K. Curvature-compensated convective transport: Smart, a new boundedness-preserving transport algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 8 (1988), 617–641.
- [15] HARTEN, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics* 49 (1983), 357–393.
- [16] HOFFMAN, J. D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. McGraw Hill - Mechanical engineering Series, 1993.
- [17] HOPF, E. The partial differential equation $u_t + uu_x = mu_{xx}$. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 3 (1950), 201–230.
- [18] IÓRIO, V. *EDP, um curso de graduação*. IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [19] KADALBAJOO, M. K., AND AWASTHI, A. A numerical method based on crank-nicolson scheme for burgers equation. *Applied Mathematics and Computation* 182, 2 (2006), 1430–1442.
- [20] KAIBARA, M. K., FERREIRA, V. G., NAVARRO, H. A., CUMINATO, J. A., CASTELO, A., AND TOMÉ, M. F. *Upwind schemes for convection dominated problems*. Proceedings of the 18th International Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto-MG, Brasil, 2005.
- [21] KHATER, A. H., TEMSAH, R. S., AND HASSAN, M. M. A chebyshev spectral collocation method for solving burgers type equations. *Jornal of Computational and Applied Mathematics* 222 (2008), 333–350.
- [22] LEONARD, B. P. The quick algorithm: a uniformly third-order finite difference method for highly convective flows. *Computational Methods Applicate Mechanic Engineering* (1979), 19–59.
- [23] LEONARD, B. P. Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 8 (1988), 1291–1318.

- [24] LIAO, W. A fourth-order finite-difference method for solving the system of two-dimensional burgers equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 64 (2010), 565–590.
- [25] LIMA, G. B. Desenvolvimento de estratégias de captura de descontinuidades para leis de conservação e problemas relacionados em dinâmica dos fluidos. *MS thesis, Dissertação de mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos, SP* (2010).
- [26] LIN, H., AND CHIENG, C. C. Characteristic-based flux limiter of an essentially 3rd-order flux-splitting for hyperbolic conservatin laws. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 13 (1991), 287–301.
- [27] MEYERS, R. A. *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*. Springer, New York, 2012.
- [28] MILLER, E. Predictor-corrector studies of burgers model of turbulent flow. *MS thesis, University of Delaware, Newark, DE* (1966).
- [29] QUEIROZ, R. A. B. Desenvolvimento e teste de esquemas "upwind" de alta resolução e suas aplicações em escoamentos incompressíveis com superfícies livres. *MS thesis, Dissertação de mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos, SP* (2009).
- [30] SEOK KI CHOI, HO YUN NAM, M. C. A comparison of higher-order bounded convection schemes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 121 (1995), 281–301.
- [31] SONG, B., LIU, G. R., LAM, K. Y., AND AMANO, R. S. On a higher-order discretization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 32 (2000), 881–897.
- [32] SRIVASTAVA, V. K., ASHUTOSH, AND TAMSIR, M. Generating exact solution of three dimensional coupled unsteady nonlinear generalized viscous burgers equations. *International Journal of Modern Mathematical Sciences* 5 (2013), 1–13.
- [33] STRIKWERDA, J. C. *Finite difference schemes and partial differential equations*. SIAM, Philadelphia, 2004.
- [34] SWEBY, P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 21 (1984), 995–1011.
- [35] THOMAS, J. W. *Numerical partial differential equations: finite difference methods*. Springer, New York, 1995.

- [36] VARONOS, A., AND BERGELES, G. Development and assessment of a variable-order non-oscillatory scheme for convection term discretization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 26 (1998), 1–16.
- [37] WATERSON, N. P., AND DECONINCK, H. Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach. *Journal of Computational Physics* 224 (2007), 182–207.
- [38] ZHAO, G., YU, X., AND ZHANG, R. The new numerical method for solving the system of two-dimensional burgers equations. *Computers and Mathematics with Applications* 62 (2011), 3279–3291.
- [39] ZHU, J. A low-difusive and oscillation-free convection scheme. *Communications in Applied Numerical Methods* 7 (1991), 225–232.
- [40] ZIJLEMA, M. On the construction of a third-order accurate monotone convection scheme with application to turbulent flows in general domains. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 22 (1996), 619–641.