



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

Tiago Carlos de Oliveira

**Identificação Fuzzy Takagi-Sugeno e Projeto de Controle  
Adaptativo da Articulação do Joelho**

---

Londrina  
2013

Tiago Carlos de Oliveira

## **Identificação Fuzzy Takagi-Sugeno e Projeto de Controle Adaptativo da Articulação do Joelho**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação  
Especialidade: Engenharia Biomédica

Orientador:  
Prof. Dr. Ruberlei Gaino  
Co-orientador:  
Prof. Dr. Márcio Roberto Covacic

Londrina  
2013

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

*Bibliotecária responsável: Marlova Santurio David - CRB 9/1107*

O48i Oliveira, Tiago Carlos de.  
Identificação Fuzzy Takagi-Sugeno e projeto de controle adaptativo da articulação do joelho / Tiago Carlos de Oliveira. – Londrina, 2013.  
77 f. : il.

Orientador: Ruberlei Gaino.

Coorientador: Márcio Roberto Covacic.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Tecnologia e Urbanismo, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2013.

Inclui bibliografia.

1. Estimulação elétrica nervosa transcutânea – Teses. 2. Sistemas de controle linear – Teses. 3. Sistemas difusos – Teses. 4. SIMULINK (Software) – Teses. 5. MATLAB (Software) – Teses. 6. Engenharia biomédica – Teses. I. Gaino, Ruberlei. II. Covacic, Márcio Roberto. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Tecnologia e Urbanismo. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDU 621.3:616-7

Tiago Carlos de Oliveira

**Identificação Fuzzy Takagi-Sugeno e Projeto de Controle Adaptativo da Articulação do Joelho**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação  
Especialidade: Engenharia Biomédica

**Banca Examinadora**

---

Prof. Dr. Ruberlei Gaino  
Dpto. Engenharia Elétrica  
Universidade Estadual de Londrina  
Orientador

---

Prof. Dr. Márcio Roberto Covacic  
Dpto. Engenharia Elétrica  
Universidade Estadual de Londrina  
Co-Orientador

---

Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho  
Dpto. Engenharia Elétrica  
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Londrina, 23 de agosto de 2013

## **AGRADECIMENTOS**

A realização desta dissertação significou uma importante etapa da minha vida. Gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram de forma decisiva para a sua concretização.

Primeiramente a Deus por me amparar nos momentos difíceis e me dar força para superar as dificuldades.

Ao professor e orientador Ruberlei por todo apoio, paciência e sabedoria ao me conduzir ao longo deste trabalho. Também ao professor e co-orientador Márcio e ao colega Anderson pelo auxílio.

À minha esposa Gissa, minha filha Luísa e minha mãe Clarice, as quais amo muito, pelo carinho, paciência e incentivo.

OLIVEIRA, Tiago Carlos de. **Identificação Fuzzy Takagi-Sugeno e Projeto de Controle Adaptativo da Articulação do Joelho**. 2013. 77 fls. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

## RESUMO

Neste trabalho utilizou-se três métodos de projeto para o controle da posição da articulação do joelho de pacientes paraplégicos, por meio de eletroestimulação. Inicialmente, foi aplicada a técnica de controle LQR em malha fechada. Como essa técnica é aplicada a sistemas lineares, foi necessário linearizar o modelo matemático da articulação do joelho, que é não-linear, no ponto de interesse. Posteriormente foi utilizado a técnica *fuzzy* Takagi-Sugeno para obter o controle da posição da perna. Para o cálculo da matriz dos ganhos de realimentação do sistema, foi utilizado o método de alocação de polos. Utilizando LMI, analisou-se a estabilidade para a alocação de polos na obtenção dos ganhos de realimentação da planta. O projeto do regulador *fuzzy* foi construído através da Compensação Distribuída Paralela. Este método faz a combinação *fuzzy* das matrizes de ganho de retroação, obtidas por meio da fórmula de Ackermann, para então chegar a um regulador *fuzzy* que estabiliza o sistema globalmente. Finalmente, realizou-se a identificação do modelo do movimento do paciente paraplégico, utilizando o método dos mínimos quadrados recursivo, e assim obtendo o controlador a partir dos parâmetros dos termos consequentes, parâmetros esses que representam o sistema *fuzzy* Takagi-Sugeno. Todos os métodos de controle foram desenvolvidos em ambiente de simulação computacional com os softwares Matlab/Simulink.

**Palavras-chave:** Modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno. Eletroestimulação. Controle não-linear. Engenharia de reabilitação. Identificação de sistemas.

OLIVEIRA, Tiago Carlos de. **Takagi-Sugeno Fuzzy Identification and Adaptive Control Design for Knee Joint**. 2013. 77 fls. Dissertation (Master's Degree in Electrical Engineering) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013

### **ABSTRACT**

In this research, three design methods are employed for the control of the knee joint position of paraplegic patients, by electrostimulation. First of all, the LQR closed-loop control technique is applied. Since this technique is applied to linear systems, the mathematical model of the knee joint, which is nonlinear, needed to be linearized at the interest point. After that, the Takagi-Sugeno *fuzzy* technique is applied to obtain the leg position control. To compute the feedback gain matrix of the system, the pole allocation method is used. Using LMI, stability was analyzed for pole allocation, for the obtaining of the feedback gains of the plant. The *fuzzy* regulator design was done by Parallel Distributed Compensation. This method realizes the *fuzzy* combination of the feedback gain matrices that globally stabilize the system. Finally, identification of the movement of the paraplegic patient model is realized using the recursive square minimum method, getting, then, the controller from the consequent terms parameters, which represent the Takagi-Sugeno *fuzzy* system. The stabilization time leg position, using models fuzzy Takagi-Sugeno was lower compared to LQR control technique. All control methods were developed in computational simulation environment, by software Matlab/Simulink.

**Key words:** *Fuzzy* Takagi-Sugeno models. Electrostimulation. Nonlinear control. Rehabilitation engineering. System identification.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esquema de representação da perna. ....	16
Figura 2: Curvas da função $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ exata e aproximação por série de Taylor de sétima ordem, em torno do ponto de operação $x_1 = \pi/6$ . ....	20
Figura 3: Ilustração da aproximação obtida por modelos <i>fuzzy</i> T-S).....	25
Figura 4 - Interpretação geométrica de estabilidade: a) estável; b) assintoticamente estável; c) instável. ....	28
Figura 5 - Resposta do sistema controlado para condições iniciais $(\theta_v, \dot{\theta}_v, M_a) = (0, 0, 0)$ , considerando somente a estabilidade.....	35
Figura 6 - Curvas da função $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ exata e aproximação por série de Taylor de quinta ordem . ....	37
Figura 7 - Projeto do Regulador LQR.....	41
Figura 8 - Representação da variável $\theta_v$ tendo a referência igual a 0,52 rad.....	42
Figura 9 - Representação da variável $\dot{\theta}_v$ , tendo como referência o degrau igual a 0,52 rad. ....	43
Figura 10 - Representação da variável $M_a$ tendo como referência o degrau igual a 0,52 rad. ....	43
Figura 11 - Ilustração de um sistema de identificação. ....	46
Figura 12 - Equações dinâmicas do modelo da articulação do joelho do paciente paraplégico representadas no <i>software</i> Simulink. ....	54
Figura 13 - Exemplo de um função de pertinência do tipo gaussiana. ....	55
Figura 14 - Identificação <i>Fuzzy</i> utilizando RLS. ....	56
Figura 15 - Parâmetros dos termos consequentes do modelo. ....	57
Figura 16 - Performance do controlador com a referência igual a $r(k)=0,5\sin(0,2\pi k)$ . ....	57
Figura 17 - Erro do controlador para a referência $r(k)=0,5 \sin(0,2\pi k)$ . ....	58
Figura 18 - Performance do controlador com a referência igual a $r = 0,52$ rad. ....	58
Figura 19 - Erro do controlador quando a referência foi igual a 0,52 rad. ....	59
Figura 20 - Identificação <i>fuzzy</i> Takagi-Sugeno com 13 regras.....	61
Figura 21 - Controlador paralelo distribuído com rastreamento. ....	62
Figura 22 - Erro do controle paralelo distribuído com rastreamento.....	63



## LISTA DE ABREVIATURAS

**CBEB** Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica

**CDP** Compensação Distribuída Paralela

**FES** *Functional Electrical Stimulation* - Estimulação Elétrica Funcional

**LMI** *Linear Matrix Inequalities* - Desigualdades Matriciais Lineares

**LQR** *Linear-Quadratic Regulator* - Regulador Linear Quadrático

**PID** Proporcional Integral e Derivativo

**RLS** *Recursive Least Square* - Mínimos Quadrados Recursivos

**SNC** Sistema Nervoso Central

**T-S** Takagi-Sugeno

**WRLS** *Weighted Recursive Least Square* - Mínimos Quadrados Recursivos Ponderados

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
1.1	DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO .....	13
<b>2</b>	<b>TÉCNICAS DE CONTROLE LINEAR E NÃO-LINEAR APLICADA AO MOVIMENTO DE PACIENTES PARAPLÉGICOS COM O USO DE ESTIMULAÇÃO ELÉTRICA .....</b>	<b>15</b>
2.1	MODELO NÃO-LINEAR MATEMÁTICO DO MOVIMENTO DA ARTICULAÇÃO DO JOELHO DO PACIENTE PARAPLÉGICO .....	15
2.2	REGULADOR <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO COM ALOCAÇÃO DE POLOS .....	20
2.2.1	ALOCAÇÃO DE POLOS.....	21
2.2.2	REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO .....	22
2.2.3	REGULADORES COM MODELOS <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO .....	26
2.2.4	CONDIÇÕES PARA A ESTABILIDADE DE REGULADORES <i>FUZZY</i> .....	27
2.3	RESULTADOS .....	31
2.3.1	MODELOS LOCAIS .....	31
2.3.2	GANHOS DE REALIMENTAÇÃO COM ALOCAÇÃO DE POLOS PARA O CASO DO PARAPLÉGICO .....	33
2.3.3	ANÁLISE DA ESTABILIDADE.....	33
2.4	MODELO LINEARIZADO DO MOVIMENTO DA ARTICULAÇÃO DO JOELHO DO PACIENTE PARAPLÉGICO.....	35
2.5	APLICAÇÃO COM CONTROLADOR LQR.....	37
2.5.1	TEORIA DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO.....	37
2.6	CONCLUSÃO PARCIAL DO CAPÍTULO .....	43
<b>3</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO <i>FUZZY</i> E RASTREAMENTO DO SINAL .....</b>	<b>45</b>
3.1	MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVOS .....	45
3.2	MODELO <i>FUZZY</i> MAMDANI .....	49
3.3	SISTEMAS <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO .....	50
3.4	CONTROLE PARALELO DISTRIBUÍDO COM RASTREAMENTO.....	51
3.5	IDENTIFICAÇÃO E PROJETO DO CONTROLADOR .....	
3.5.1	COLETA DOS DADOS.....	
3.5.2	IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS.....	55
3.5.3	PROJETO DO CONTROLADOR PARALELO DISTRIBUÍDO COM RASTREAMENTO.....	56
3.6	IDENTIFICAÇÃO OBTIDA EM EXPERIMENTOS REALIZADOS EM PESSOAS HÍGIDAS E PARAPLÉGICOS DO SEXO MASCULINO .....	59
3.7	CONCLUSÃO PARCIAL DO CAPÍTULO .....	62
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>64</b>
4.1	SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS .....	65

<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>66</b>
<b>APÊNDICES</b> .....	<b>69</b>
APÊNDICE A - Série de Taylor de Sétima Ordem para $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ - Caso Não - Linear.....	70
APÊNDICE B - Série de Taylor de Quinta Ordem para $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ - Caso Linearizado .....	71
APÊNDICE C - Formas de Funções de Pertinência.....	72
APÊNDICE D - Parâmetros dos Consequentes do Modelo da Articulação do Paciente Paraplégico .....	73

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo do controle do movimento de pacientes paraplégicos com o uso de estimulação elétrica neuromuscular é um assunto relevante na engenharia de reabilitação (GAINO, 2009; GAINO et al., 2008, 2010, 2011; FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

A reabilitação em malha fechada utilizando estimulação elétrica funcional (FES - *Functional Electrical Stimulation*) é uma forma de tratamento que utiliza a corrente elétrica para provocar a contração de músculos (CRAGO; MORTIMER; PECHAM, 1980). A FES, pelo princípio de funcionamento e pelos resultados obtidos, produz contração muscular semelhante à contração gerada por um estímulo enviado pelo Sistema Nervoso Central (SNC). Sua aplicação em tratamentos fisioterápicos de pacientes paraplégicos tem eficácia comprovada (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

A motivação para a realização deste trabalho concentra-se na pouca informação existente no Brasil sobre grupos de pesquisas com aplicação de FES em pacientes paraplégicos com realimentação em malha fechada (GAINO, 2009). No Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica (CBEB), realizado em Salvador-BA em 2008, os únicos trabalhos publicados sobre reabilitação de pacientes paraplégicos com FES em malha fechada foram realizados por Gaino et al. (2008) e Prado et al. (2008), com foco na solução dos problemas vivenciados por pacientes paraplégicos e hemiplégicos com o objetivo de melhorar a qualidade de suas vidas.

Posteriormente, outros trabalhos foram publicados. Em Gaino et al. (2010) foi utilizado software computacional para projeto e implementação de controladores digitais em malha fechada, utilizando eletro-estimulador neuromuscular com o objetivo de auxiliar a restauração de movimentos em paraplégicos. Foram utilizados conceitos de teoria de controle, instrumentação eletrônica e modelos fisiológicos, unidos em uma única plataforma, isto é, todos estes elementos foram integrados no software ISIS Proteus. Em Gaino et al. (2011), foi apresentado um método de projeto de controle visando variar o ângulo da articulação do joelho em pacientes paraplégicos por meio de FES. O sistema de controle não-linear da dinâmica do paciente paraplégico foi descrito por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) e o sinal de realimentação obtido por meio de acelerômetros. Em Oliveira et al. (2012) foram utilizados modelos *fuzzy* T-S para

obter o controle da posição da perna de um paciente paraplégico. Calculou-se a matriz de ganho de realimentação do sistema com o método de alocação de polos. O projeto do regulador *fuzzy* foi construído através da Compensação Distribuída Paralela – CDP.

Este trabalho tem como objetivo aplicar o método de identificação dos mínimos quadrados recursivos (RLS - Recursive Least Square) para a identificação do modelo matemático proposto por Ferrarin e Pedotti (2000), que relaciona de maneira empírica, a largura do pulso aplicado com o torque gerado em torno da articulação do joelho do paciente paraplégico, e assim, a partir das informações obtidas dessa identificação, projetar o controlador do tipo paralelo distribuído com modelos *fuzzy* (T-S), para seguir um sinal de referência.

A identificação de sistemas é uma área do conhecimento que estuda técnicas alternativas de modelagem matemática. Uma das características dessas técnicas é que pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema é necessário e, conseqüentemente, tais métodos são também referidos como modelagem (ou identificação) caixa preta ou modelagem empírica. Essas técnicas de identificação de sistemas surgem do fato de que, frequentemente, não se conhecem as equações envolvidas no funcionamento de um determinado sistema ou elas são conhecidas, mas seria impraticável, por limitações de tempo e recursos, levantar tais equações e estimar seus respectivos parâmetros (AGUIRRE, 2007).

Nos últimos anos, houve um crescente interesse em pesquisas de teoria e aplicações de sistemas nebulosos, mais conhecidos como sistemas *fuzzy*. Este interesse se deve à similaridade destes sistemas com o comportamento humano na solução de problemas complexos. Assim, os sistemas *fuzzy* permitem que o projetista utilize o seu conhecimento experimental para elaborar o projeto de controle do seu sistema (MACHADO, 2003).

Duas razões principais motivam o estudo da teoria *fuzzy*. A primeira é que esses sistemas conjugam a capacidade de processar informação de natureza incerta ou qualitativa com a capacidade de aproximação universal. A precisão com que os sistemas *fuzzy* podem aproximar sistemas reais pode ser, em geral, estipulada pelo projetista. A segunda razão está relacionada com a existência de vários tipos de modelos existentes, adequados a diferentes tipos de aplicação, indo dos modelos linguísticos na modelagem de um determinado sistema, aos modelos T-S (MACHADO, 2003), com estruturas adequadas para aplicações em controle. As

contribuições desta dissertação concentram-se nos modelos *fuzzy* T-S e estão relacionadas a aproximação e controle de sistemas não-lineares.

Serão apresentadas nesta dissertação duas técnicas de projeto aplicadas ao modelo matemático que representa a dinâmica do movimento da articulação da perna do paciente paraplégico. O primeiro modelo de projeto consiste em um regulador linear quadrático (LQR - Linear Quadratic Regulator) em malha fechada. Como o LQR é linear, foi necessário linearizar o modelo do sistema em um determinado ponto de interesse possibilitando, assim, aplicar tal técnica de controle e realizar simulações que demonstraram a eficiência do controlador. Já no segundo, o principal objetivo foi utilizar modelos *fuzzy* T-S para obter o controle da posição da perna e calcular a matriz dos ganhos de realimentação do sistema por meio do método de alocação de polos. Utilizou-se a teoria de Lyapunov para análise da estabilidade da planta com os ganhos de realimentação. O projeto do regulador *fuzzy* foi construído através da Compensação Distribuída Paralela - CDP (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). Este método faz a combinação *fuzzy* das matrizes de ganho de retroação, obtidas por meio da fórmula de Ackermann, para então chegar a um regulador *fuzzy* que estabiliza o sistema globalmente (TEIXEIRA; ŽAK, 1999). O projeto do regulador foi realizado para o ponto de operação de  $30^\circ$ , isto é, a trajetória da perna sai do estado de repouso e estabiliza-se em  $30^\circ$ . Para todas as simulações, foi utilizado o ambiente de simulação computacional com os softwares Matlab/Simulink.

## 1.1 DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO

Este trabalho contém, além desta introdução, mais três capítulos que podem ser assim resumidos:

- **Capítulo 2** – Este capítulo apresenta o modelo linear e não-linear relacionado ao modelo matemático do movimento da articulação do joelho do paciente paraplégico, onde serão aplicadas as técnicas de controle, como a técnica de LQR, o regulador *fuzzy* Takagi-Sugeno com alocação de polos e o controle paralelo distribuído com rastreamento.
- **Capítulo 3** – Será explicada a teoria dos elementos necessários para se projetar um controle paralelo distribuído com rastreamento, para um sistema não-linear.

Será abordada a teoria dos mínimos quadrados recursivos, para identificação dos sistemas *fuzzy*, e também os resultados alcançados.

- **Capítulo 4** – As principais conclusões do trabalho são discutidas neste capítulo.

## 2 TÉCNICAS DE CONTROLE LINEAR E NÃO-LINEAR APLICADA AO MOVIMENTO DE PACIENTES PARAPLÉGICOS COM O USO DE ESTIMULAÇÃO ELÉTRICA

Neste capítulo, são apresentados os modelos matemáticos para aplicação das técnicas de controle para sistemas linear e não-linear, que serão descritas nos próximos capítulos: a técnica de controle LQR, o regulador *fuzzy* Takagi-Sugeno com alocação de polos e o controle paralelo distribuído com rastreamento.

### 2.1 MODELO NÃO-LINEAR MATEMÁTICO DO MOVIMENTO DA ARTICULAÇÃO DO JOELHO DO PACIENTE PARAPLÉGICO

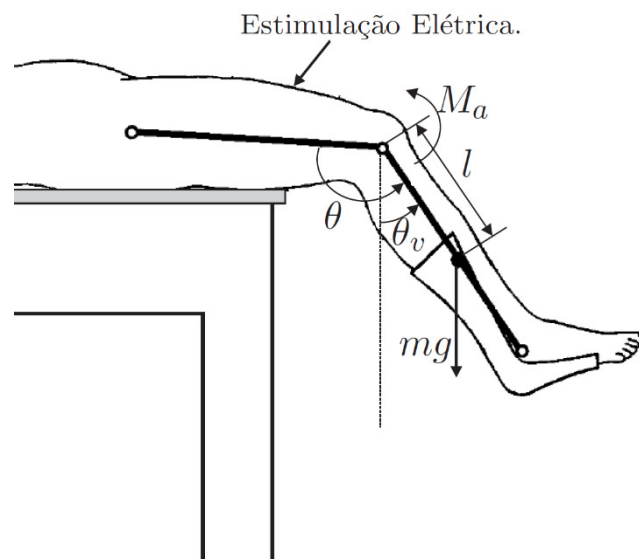
O modelo matemático em estudo foi adaptado de Ferrarin e Pedotti (2000) e representado em variáveis de estado. Esse modelo relaciona a largura do pulso aplicado ao músculo com o torque gerado na articulação do joelho. A perna deve voltar à posição de repouso com a retirada da estimulação no músculo mencionado (GAINO, 2009). Resultados com base neste modelo foram publicados em diversos congressos e periódicos (COVACIC et al., 2012; GAINO, 2009; GAINO et al., 2011; TEIXEIRA et al., 2006a, 2006b;).

Na modelagem o membro inferior foi considerado como uma cadeia cinemática aberta composta de dois segmentos rígidos: a coxa e o complexo canela-pé (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), conforme mostra a Figura 1.

Em Gaino (2009) e Teixeira et al. (2006a, 2006b), é demonstrado todo o equacionamento para se obter a equação de estados não-linear (2.9). Aqui serão descritas apenas as informações para o desenvolvimento deste trabalho.



**Figura 1:** Esquema de representação da perna.



**Fonte:** Adaptado de Ferrarin e Pedotti (2000).

O equilíbrio dinâmico em torno da junção do joelho é representado pela seguinte equação:

$$M_i = M_g + M_s + M_d + M_a, \quad (2.1)$$

sendo:

$M_i$  a componente inercial;

$M_g$  a componente gravitacional;

$M_s$  o torque relacionado à rigidez da junção do joelho;

$M_d$  a componente de amortecimento;

$M_a$  o torque ativo do joelho (resultado da estimulação elétrica aplicada ao quadríceps).

Isso pode ser expresso pela seguinte equação diferencial não-linear de segunda-ordem

$$J\ddot{\theta}_v = -mgl \text{sen}(\theta_v) + M_s - B\dot{\theta} + M_a, \quad (2.2)$$

sendo:

$J$  o momento inercial do complexo de canela-pé;

$\theta$  o ângulo comum do joelho (ângulo entre a canela e a coxa no plano sagital);

$\dot{\theta}$  a velocidade angular comum do joelho;

$\theta_v$  ângulo entre a canela e o sentido vertical, no plano sagital;

$m$  a massa do complexo canela-pé;

$g$  a aceleração gravitacional;

$l$  a distância entre o joelho e o centro da massa do complexo canela-pé;

$B$  o coeficiente de atrito viscoso.

Com respeito à componente relacionada à rigidez, a seguinte expressão foi considerada:

$$M_s = -\lambda e^{-E\theta} (\theta - \varpi), \quad (2.3)$$

sendo:

$\lambda$  e  $E$  os coeficientes do termo exponencial;

$\varpi$  o ângulo elástico de repouso do joelho.

Em Gaino (2009), Ferrarin e Pedotti (2000) são apresentadas as medidas antropométricas, obtidas de maneira experimental, de um paciente paraplégico conforme a Tabela 1.

**Tabela 1:** Grandezas Antropométricas do Paciente.

$J$	0,362 [Kgm <sup>2</sup> ]
$m$	4,37 [Kg]
$l$	23,8 [cm]
$B$	0,27 [Nms/rad]
$\lambda$	41,208 [Nm/d]
$E$	2,024 [1/rad]
$\varpi$	2,918 [rad]
$\tau$	0,951 [s]
$G$	42500 [Nm/s]

**Fonte:** Ferrarin e Pedotti (2000).

Substituindo (2.3) em (2.2), e considerando  $\theta = \theta_v + \pi/2$ , obtém-se,

$$\ddot{\theta}_v = \frac{1}{J} \left[ -mgl \sin(\theta_v) - \lambda e^{-E\theta_v} e^{-\frac{E\pi}{2}} \left( \theta_v + \frac{\pi}{2} - \varpi \right) - B\dot{\theta}_v + M_a \right]. \quad (2.4)$$

Os valores de  $M_{a0}$  e  $P_0$  foram calculados no ponto de operação de interesse, ou seja,  $\theta_{v0} = 30^\circ$ . Para a obtenção de  $M_{a0}$ , utilizou-se (2.4), determinada no ponto de operação. Sabendo-se que, no ponto de operação, as derivadas  $\dot{\theta}_v$  e  $\ddot{\theta}_v$  são nulas, e isolando-se  $M_{a0}$  de (2.4), obtém-se:

$$M_{a0} = mg \operatorname{lsen}(\theta_{v0}) + \lambda e^{-E\theta_{v0}} e^{-\frac{E\pi}{2}} (\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \varpi) = 4,6068 \text{ [Nm]}. \quad (2.5)$$

Em Gaino (2009) é demonstrado que no ponto de operação, a largura dos pulsos  $P$  é igual a:

$$P_0 = \frac{M_{a0}}{G} = 1,0839 \times 10^{-4} \text{ [s]}.$$

De acordo com a teoria de estabilidade segundo Lyapunov, quando o ponto de equilíbrio de interesse do sistema não é a origem, é necessário efetuar uma troca de variáveis para transladar o novo ponto de equilíbrio para a origem (GAINO, 2009). Assim, (2.4) será:

$$J \Delta \ddot{\theta}_v = \left[ \begin{array}{c} -mg \operatorname{lsen}(\Delta\theta_v + \theta_{v0}) - \frac{1}{x_1} \lambda e^{-Ex_1} e^{-\frac{E\pi}{2}} \left( x_1 + \frac{\pi}{2} - \varpi \right) \\ \Delta\theta_v \end{array} \right] \Delta\theta_v - B \Delta \dot{\theta}_v + \Delta M_a \quad (2.6)$$

Definindo-se as variáveis de estado na forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Delta\theta_v = \theta_v - \theta_{v0}, \\ x_2 &= \dot{x}_1, \\ x_3 &= \Delta M_a = M_a - M_{a0}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

E substituindo-se (2.7) em (2.6), encontra-se,

$$J \dot{x}_2 = \left[ \begin{array}{c} -mg \operatorname{lsen}(x_1 + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E\left(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2}\right)} \left( x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \varpi \right) + M_{a0} \\ x_1 \end{array} \right] x_1 - B x_2 + x_3 \quad (2.8)$$

Em Gaino (2009) e Teixeira et al. (2006a, 2006b), é demonstrado todo o equacionamento para se obter a equação de estados não-linear (2.9), que representa a dinâmica do movimento da articulação do joelho ao estímulo elétrico aplicado no quadríceps. Assim, o sistema é representado na forma matricial, por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21}(x_1(t)) & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix} P_N. \quad (2.9)$$

A função  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  é uma não-linearidade do sistema representada por:

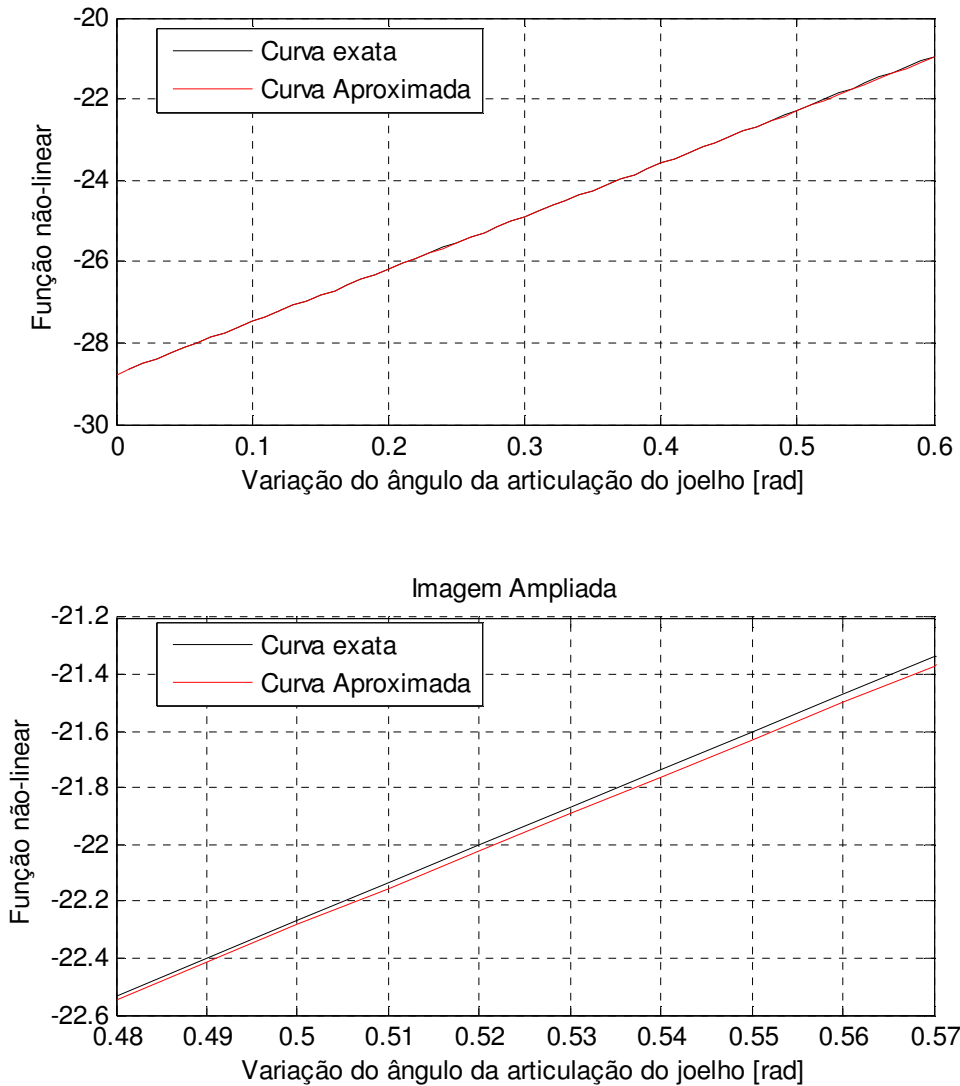
$$\tilde{f}_{21}(x_1(t)) = \frac{1}{Jx_1} \left[ -mg \operatorname{lsen}(x_1 + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} \left( x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \varpi \right) + M_{a0} \right], \quad (2.10)$$

sendo:

$$M_{a0} = mg \operatorname{lsen}(\theta_{v0}) + \lambda e^{-E(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} \left( \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \varpi \right). \quad (2.11)$$

Pode-se verificar, em (2.10), que existe um problema de indeterminação de  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  na simulação, quando for atribuído o valor zero para  $x_1$ , pois nesse caso, o numerador e o denominador tornam-se nulo. Assim, expandiu-se (2.10) por meio do *software* Matlab, em série de Taylor de sétima ordem, na expressão apresentada no Apêndice A, o que permitiu cancelar o termo  $x_1$  no denominador de  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ , resolvendo o problema. Para melhorar a precisão da curva, pode-se aumentar a ordem da série de Taylor. Na Figura 2 mostrou-se que a ordem utilizada para a série de Taylor representa satisfatoriamente a curva original no ponto de interesse.

**Figura 2:** Curvas da função  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  exata e aproximação por série de Taylor de sétima ordem, em torno do ponto de operação  $x_1 = \pi/6$ .



**Fonte:** o próprio autor

Na próxima seção será apresentada uma técnica de controle com modelos *fuzzy* T-S aplicado ao modelo matemático não-linear da posição da perna de um paciente paraplégico, utilizando o método de alocação de polos para se obter a matriz de ganho de realimentação de estado.

## 2.2 REGULADOR *FUZZY* TAKAGI-SUGENO COM ALOCAÇÃO DE POLOS

Nesta seção, é apresentada uma técnica de controle aplicada ao modelo matemático não-linear da perna de um paciente paraplégico para variar o ângulo do joelho. O sistema não-linear é descrito por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno e seus ganhos são obtidos com a técnica de alocação de polos. São apresentadas as condições necessárias e suficientes para uma alocação arbitrária de polos de malha fechada nas posições desejadas. Também é apresentado o método de representação de sistemas e reguladores *fuzzy* T-S. O projeto do regulador *fuzzy* foi construído através da Compensação Distribuída Paralela (CDP). Este método faz a combinação *fuzzy* das matrizes de ganho de retroação, obtidas por meio da fórmula de Ackermann, para então chegar a um regulador *fuzzy* que estabiliza o sistema globalmente. O projeto do regulador foi realizado para o ponto de operação de 30°, isto é, a trajetória da perna sai do estado de repouso e estabiliza-se em 30°. Para análise da estabilidade, utiliza-se a teoria de Lyapunov, que é caracterizada por desigualdades matriciais lineares (LMI - *Linear Matrix Inequalities*).

### 2.2.1 Alocação de Polos

Considerou-se que todas variáveis de estado são mensuráveis e que estão disponíveis para realimentação. Se o sistema,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.12)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.13)$$

sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes constantes de dimensões  $n \times n$ ,  $n \times 1$  e  $1 \times n$  respectivamente,  $D$  uma constante escalar,  $x \in \mathfrak{R}$  o vetor de estado ( $n$ -dimensional) do modelo,  $u \in \mathfrak{R}$  o sinal de controle e  $y \in \mathfrak{R}$  o sinal de saída do sistema (OGATA, 2010), for completamente controlável, então os polos do sistema em malha fechada poderão ser alocados em quaisquer posições desejadas por meio de uma realimentação de estados empregando uma matriz de ganho apropriada (OGATA, 2010). Essa técnica de projeto inicia-se com a determinação dos polos de malha fechada nos locais desejados. Escolhendo uma matriz de ganho apropriada de realimentação de estados, é possível forçar o sistema a ter polos de malha fechada nas posições desejadas, desde que o sistema original seja completamente

controlável. O sistema é dado pelas equações de estados (2.12) e (2.13). A lei de controle de realimentação é definida como,

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.14)$$

sendo  $K$  a matriz de realimentação de estados. Substituindo (2.14) em (2.12), é possível obter o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t). \quad (2.15)$$

Para que seja possível a alocação arbitrária de polos, o estado do sistema dado por (2.12) deve ser completamente controlável. A matriz de controlabilidade é definida como:

$$C_o = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad (2.16)$$

sendo  $n$  o número de linhas e colunas da matriz  $A$ .

Se o sistema (2.12) e (2.13) for controlável, o posto da matriz de controlabilidade será igual a  $n$ .

Considerando que o sistema seja de completamente controlável, pode-se então obter a matriz de ganho  $K$  pela fórmula de Ackermann. Esta fórmula retorna os ganhos necessários para que os autovalores em malha fechada se posicionem onde especificado.

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]^{-1}\phi(A) \quad (2.17)$$

sendo

$$\phi(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_0I \quad (2.18)$$

e  $\alpha$  os coeficientes do polinômio característico do sistema representado como

$$|sI - A + BK| = s^n + \alpha_1s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \quad (2.19)$$

### 2.2.2 Representação de Sistemas *Fuzzy* Takagi-Sugeno

A ideia básica dos modelos *Fuzzy* Takagi-Sugeno T-S consiste na descrição exata ou aproximada de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo (TAKAGI; SUGENO,

1985; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANIGUCHI et al., 2001;), podendo considerar o comportamento desse sistema em diferentes pontos do seu espaço de estado (TEIXEIRA; ŽAK, 1999).

O sistema *fuzzy* TS é descrito pelas regras *fuzzy* SE-ENTÃO, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema (MACHADO, 2003) A descrição local da planta dinâmica, para cada modelo linear, a ser controlada está disponível em termos dos modelos lineares locais, sendo representada por (GAINO, 2009):

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad (2.20)$$

$$y(t) = C_i x(t), \quad (2.21)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, r$ , ( $r$  é o número de modelos lineares),  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estado,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  o vetor de entrada,  $y(t) \in \mathfrak{R}^q$  o vetor de saída,  $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  e  $C_i \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ . A informação acima é então combinada com as regras SE-ENTÃO disponíveis, onde a  $i$ -ésima regra tem a forma:

Regra  $i$ : SE  $x_1(t)$  é  $M_1^i(t)$  E...E  $x_p(t)$  é  $M_p^i$

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (2.22)$$

Considerando o modelo *fuzzy* (2.22), tem-se que, por definição,  $M_j^i$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  é o conjunto *fuzzy*  $j$  da regra  $i$  e  $x_1(t), \dots, x_p(t)$  são as variáveis premissas. Seja  $\mu_j^i(x_j(t))$  e a função de pertinência do conjunto *fuzzy*  $M_j^i$

$$\varpi^i(x(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(x_j(t)), \quad x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_p(t)]^T \quad (2.23)$$

Como  $\mu_j^i(x_j(t)) \geq 0$  tem-se, para  $i = 1, 2, \dots, r$ ,

$$\varpi^i(x(t)) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r \varpi^i(x(t)) \geq 0 \quad (2.24)$$



Dessa forma, dado um par  $(x(t), u(t))$ , o sistema *fuzzy* resultante é tido como a média ponderada dos modelos locais, e é dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \varpi^i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r \varpi^i(x(t))}, \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)), \\
 &= \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i \right) x(t) + \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) B_i \right) u(t), \\
 &= A(\alpha) x(t) + B(\alpha) u(t),
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

sendo

$$\alpha_i(x(t)) = \frac{\varpi^i(x(t))}{\sum_{i=1}^r \varpi^i(x(t))}.$$

O sistema não forçado (Gaino, 2009),  $(U(t)=0)$  é definido como,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \varpi^i(x(t)) A_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \varpi^i(x(t))}, \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i x(t), \\
 &= A(\alpha) x(t).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

A saída para os casos, forçado e não forçado, é dada por,

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \varpi^i(x(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \varpi^i(x(t))}, \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) C_i x(t), \\
 &= C(\alpha) x(t).
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Para  $i = 1, 2, \dots, r$ ,

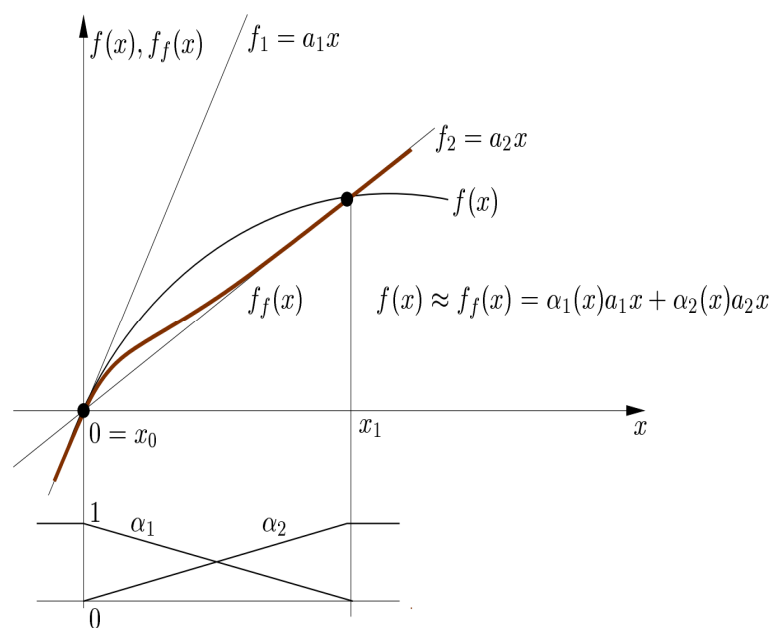
$$\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) = 1. \quad (2.28)$$

A Figura 3 apresenta uma ilustração do modelo T-S. Uma aproximação de uma função  $f(x) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  é feita com dois modelos locais lineares definidas pelas constantes  $a_1$  e  $a_2$  combinados com as funções de pertinência  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

A função não-linear  $f(x)$  descrita na Figura 3. Note que esta função pode ser aproximada, para  $x \approx x_0 = 0$ , por  $f_1(x) = a_1x$ , que é a reta tangente desta curva em  $x = 0$ .

Uma aproximação linear para esta função, para  $x \approx x_1$ , é  $f_2(x) = a_2x$ , observe que esta segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois  $f_2(x_0) = 0$  e  $f_2(x_1) \neq 0$ . Adotando-se  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  como modelos locais, e as funções  $\alpha_1(x)$  e  $\alpha_2(x)$  definidas na Figura 3 (observe que  $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$ ), um modelo *fuzzy* T-S para  $f(x)$  seria  $f_f(x) = \alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x)$ , como ilustrado na Figura 3.

**Figura 3:** Ilustração da aproximação obtida por modelos *fuzzy* T-S).



**Fonte:** Machado (2003).

Pode-se observar que, para  $x \approx x_0$ , então  $\alpha_1 \approx 1$ ,  $\alpha_2 \approx 0$  e  $f_f(x) \approx f_1(x)$  e, para  $x \approx x_1$ , então  $\alpha_2 \approx 1$ ,  $\alpha_1 \approx 0$  e  $f_f(x) \approx f_2(x)$ . Finalmente, verifique que  $f_f(x)$  proporciona uma aproximação da função  $f(x)$  muito melhor do que as funções  $f_1(x)$  (linearização em torno de um ponto de operação) ou  $f_2(x)$ , para  $x_0 \leq x \leq x_1$ . Se for considerado o número maior de modelos locais, a aproximação torna-se mais exata. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos *fuzzy* T-S, no tratamento de funções e/ou de sistemas não-lineares (MACHADO, 2003).

### 2.2.3 Reguladores com Modelos *Fuzzy* Takagi-Sugeno

No projeto de reguladores *fuzzy*, para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos *fuzzy* T-S, considera-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CDP), (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). A intenção é projetar um compensador para cada regra do modelo *fuzzy*. Para cada regra, é utilizada uma lei de controle baseada em controle linear. O regulador *fuzzy* projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo *fuzzy* nas partes premissas. Para o modelo *fuzzy* (2.22),  $i=1, 2, \dots, r$ , os reguladores *fuzzy* via CDP possuem a seguinte estrutura (GAINO, 2009):

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: \quad & \text{SE } x_1(t) \text{ é } M_1^i(t) \text{ E } \dots \text{ E } x_p(t) \text{ é } M_p^i(t) \\ & \text{ENTÃO } u(t) = -K_i x(t), \end{aligned} \quad (2.29)$$

sendo  $i=1, 2, \dots, r$ .

Portanto, de forma análoga à efetuada na obtenção de (2.25), o regulador *fuzzy* é dado por:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^r \bar{\omega}^i(x(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \bar{\omega}^i(x(t))}, \\ &= -\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) F_i x(t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

O objetivo do projeto do regulador *fuzzy* é determinar os ganhos de realimentação locais  $F_i$ , nas partes consequentes. Substituindo a equação (2.30) na equação (2.25), tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i x(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) B_i \left[ - \sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) F_j x(t) \right], \\ \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) B_i F_j x(t).\end{aligned}\tag{2.31}$$

O modelo global do sistema é obtido através da combinação *fuzzy* desses modelos lineares locais. A ideia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação linear. Então, de (2.31) e (2.28) tem-se que;

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) B_i F_j x(t), \\ \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) (A_i - B_i F_j) x(t).\end{aligned}\tag{2.32}$$

ou seja,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) (A_i - B_i F_j) x(t).\tag{2.33}$$

#### 2.2.4 Condições para a Estabilidade de Reguladores *Fuzzy*

Basicamente, um sistema é estável quando seu comportamento resiste a perturbações. Em outras palavras, quando existe estabilidade, a trajetória de um sistema permanece próxima a um ponto de equilíbrio, caso ela comece próximo desse ponto (MOZELLI, 2008).

**I. Estabilidade:** *O ponto de equilíbrio  $x_e$  é estável se  $\forall r > 0, \exists \varepsilon > 0$  tal que*

$$\|x(0) - x_e\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq r, \quad \forall t \geq 0.\tag{2.34}$$

*Do contrário o ponto de equilíbrio é instável.*

Segundo essa noção, estabilidade implica que, se as condições iniciais se encontram em uma bola de raio  $\varepsilon$ , centrada em  $x_e$ , então as trajetórias resultantes ficarão confinadas indefinidamente a uma esfera de raio  $r$ , centrada também em  $x_e$ . Nota-se que estabilidade como definida aqui é um conceito local.

**II. Atratividade:** O ponto de equilíbrio  $x_e$  é atrativo se  $\exists d > 0$  tal que

$$\|x(0) - x_e\| \leq d \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

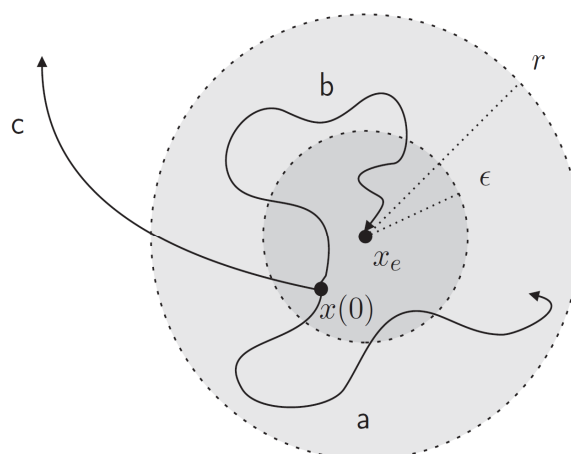
Um ponto é atrativo quando existe uma esfera de raio  $d$ , centrada em  $x_e$ , tal que trajetórias cujas condições iniciais partem dessa região convergem para o ponto de equilíbrio.

Note que atratividade não implica em estabilidade e vice-versa. O fato de uma trajetória convergir assintoticamente para o equilíbrio não garante que a mesma permaneceu sempre próxima ao equilíbrio. Por outro lado, um ponto de equilíbrio é considerado estável mesmo que a trajetória não convirja para ele. Todavia, um ponto de equilíbrio pode ser atrativo e estável.

**III. Estabilidade Assintótica:** O ponto de equilíbrio  $x_e$  é assintoticamente estável se é estável e atrativo.

Estabilidade assintótica implica que trajetórias que começam na vizinhança de um ponto de equilíbrio irão tender ao mesmo, porém mantendo-se próximas, à medida que o tempo tende ao infinito. A Figura 4 ilustra todos esses conceitos para o caso em que  $x \in \mathbb{R}^2$ .

**Figura 4** - Interpretação geométrica de estabilidade: a) estável; b) assintoticamente estável; c) instável.



Fonte: MOZELLI (2008)

**IV. Estabilidade Global:** Se a estabilidade assintótica vale para quaisquer estados iniciais, então diz-se que o ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável.

Um sistema é globalmente assintoticamente estável quando sua bacia de atração é todo o domínio de  $f$ . Garantir estabilidade assintótica global é um requisito importante ao se projetar um sistema de controle, principalmente quando ele pode partir de condições iniciais quaisquer.

Para modelos *fuzzy* T-S, define-se a equação característica do regulador de estado, e faz-se o estudo da estabilidade segundo Lyapunov. De (2.33), definindo

$$G_{ij} = A_i - B_i F_j, \quad (2.36)$$

tem-se que

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) G_{ij} x(t), \quad (2.37)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(x(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j} \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t), \quad (2.38)$$

sendo

$$\sum_{i < j} \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_{ij}.$$

Como exemplo, para  $r=3$ :

$$\sum_{i < j} a_{ij} = a_{12} + a_{13} + a_{23}. \quad (2.39)$$

**Lema 1** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema *fuzzy* contínuo descrito por (2.26) para  $u(t) = 0$  é assintoticamente estável, globalmente, se existe uma matriz simétrica definida positiva comum  $P$  tal que,

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad (2.40)$$

para  $i=1,2,\dots,r$ , isto é, para todos os subsistemas.

*Prova:* Seja a função de Lyapunov do tipo  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ . Dessa forma, sua derivada em relação ao tempo (que deve ser negativa definida) é dada por,

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0. \quad (2.41)$$

Substituindo-se (2.26) em (2.41), tem-se:

$$\dot{V}(x(t)) = \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i x(t) \right) < 0. \quad (2.42)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) x(t)^T A_i^T P x(t) \right)^T + \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) x(t)^T P A_i x(t) < 0, \quad (2.43)$$

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) (A_i^T P + P A_i) x(t) < 0, \quad \text{para } x \neq 0. \quad (2.44)$$

Assim,

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.45)$$

é uma condição suficiente para (2.42), pois  $\alpha_i(x(t)) \geq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, r$  e  $\alpha_1(x(t)) + \dots + \alpha_r(x(t)) = 1$ . Isso conclui a prova.

Aplicando-se o Lema 1 no sistema realimentado (2.38), para que seja projetado um regulador que estabilize o sistema, é necessário substituir (2.38) em (2.41) para obter:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \left[ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(x(t)) x(t)^T G_{ii}^T + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) x(t)^T \left( \frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) \right] P x(t) + \\ & x(t)^T P \left[ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(x(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Organizando os termos da equação, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(x(t)) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left[ \left( \frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right] \right\} x(t). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Assim verificando a equação (2.47), como  $\alpha_i(x(t)) \geq 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, r$  e  $\alpha_1(x(t)) + \dots + \alpha_r(x(t)) = 1$ , as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica

global do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (2.25), realimentado com a lei de controle (2.30):

1.  $P > 0, P = P^T$ ;
  2.  $G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, r$ ;
  3.  $\left( \frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0$  para  $i < j$ .
- (2.48)

### 2.3 RESULTADOS

Nesta seção, são apresentadas as aplicações do método da seção anterior para se obter os ganhos do controlador em malha fechada, análise da estabilidade segundo Lyapunov e as simulações do controlador. Nesta aplicação, o controlador deve posicionar a perna do paciente em um ângulo de  $30^\circ$  graus partindo do repouso.

#### 2.3.1 Modelos Locais

Segundo Taniguchi et al. (2001), o número de modelos locais necessários para representar sistemas não-lineares com modelos *fuzzy* T-S é igual a  $2^s$ , sendo  $s$  o número de parâmetros não-lineares existentes no sistema. Desta forma, no modelo matemático da articulação do joelho do paciente paraplégico, como existe uma não-linearidade em (2.9), determinam-se dois modelos locais, ou seja, os vértices do politopo. Determinam-se assim os valores mínimo e máximo da função  $f_{21}(x(t))$ , considerando que  $x_1$  varia no intervalo  $0 < x_1 < \pi/6$ :

$$a_{211} = \min \{f_{21}(x(t))\} = -28.76 \quad (2.49)$$

$$a_{212} = \max \{f_{21}(x(t))\} = -21.94 \quad (2.50)$$

Definindo as funções de pertinência usadas para solução do sistema com dois modelos locais:



$$\tilde{f}_{21}(x_1(t)) = \sigma_{211}(x_1(t)) a_{211} + \sigma_{212}(x_1(t)) a_{212}, \quad (2.51)$$

sendo, por definição de combinação convexa,

$$\sigma_{211}(x_1(t)) + \sigma_{212}(x_1(t)) = 1, \quad (2.52)$$

$$\sigma_{211}(x_1(t)) \geq 0, \quad (2.53)$$

$$\sigma_{212}(x_1(t)) \geq 0. \quad (2.54)$$

Então, de (2.51), (2.52), (2.53) e (2.54) tem-se que:

$$\sigma_{211}(x_1(t)) = \frac{f_{21}(x_1(t)) - a_{212}}{a_{211} - a_{212}} e \quad (2.55)$$

$$\sigma_{212}(x_1(t)) = \frac{f_{21}(x_1(t)) - a_{211}}{a_{212} - a_{211}}. \quad (2.56)$$

Os modelos locais determinados, através dos valores mínimo e máximo da função  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ , são  $a_{211}$  e  $a_{212}$ . Assim os modelos locais obtidos são:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -21,94 & -0,75 & 2,76 \\ 0 & 0 & -1,05 \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -28,76 & -0,75 & 2,76 \\ 0 & 0 & -1,05 \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,46 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Compondo o modelo não-linear em modelos locais, para modelagem exata, conforme Taniguchi et al. (2001), encontra-se,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \sigma_{21i}(x_1(t)) (\mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t)). \quad (2.60)$$

### 2.3.2 Ganhos de Realimentação com Alocação de Polos Para o Caso do Paraplégico

Definidos os modelos locais, o próximo passo é calcular os ganhos de realimentação  $\hat{K}_1$  e  $\hat{K}_2$ , dos reguladores de cada modelo local no ponto de operação de  $30^\circ$ . Primeiro, é necessário analisar se cada modelo local é de estado completamente controlável. Assim, substituindo-se os dois modelos locais de (2.57), (2.58) e (2.59) em (2.16), obtêm-se as matrizes de controlabilidade  $Co_1$  e  $Co_2$ :

$$Co_1 = Co_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,234 \\ 0 & 1,234 & -2,218 \\ 0,446 & -0,469 & 0,494 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Como o posto de  $Co_1$  e  $Co_2$  é igual à dimensão de  $A_1$  e  $A_2$  em (2.57) e (2.58), o sistema é controlável (OGATA, 2010). Assim, deseja-se posicionar os polos de malha fechada em  $-2 \pm j$  e  $-20$ . Por meio do *software* Matlab, obtêm-se as matrizes de ganho  $\hat{K}_1$  e  $\hat{K}_2$  pela fórmula de Ackermann em (2.17).

$$\hat{K}_1 = 1 \times 10^{-3} \times [-2,84 \quad 0,395 \quad 0,497], \quad (2.62)$$

$$\hat{K}_2 = 1 \times 10^{-3} \times [-4,12 \quad 0,339 \quad 0,497]. \quad (2.63)$$

### 2.3.3 Análise da Estabilidade

Para verificar a estabilidade do sistema, segundo Lyapunov, é necessário obter a matriz característica do sistema realimentado, conforme obtido em (2.15), para  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $\hat{K}_1$  e  $\hat{K}_2$  de modo que satisfaçam as condições de (2.48), condições essas que garantem a estabilidade assintótica global do sistema. Assim, foi composto o conjunto de LMIs (2.64) conforme a segunda condição de (2.48):

$$\begin{aligned}
(A_1 - B_1 \hat{K}_1)^T P + P(A_1 - B_1 \hat{K}_1) &< 0, \\
(A_1 - B_1 \hat{K}_2)^T P + P(A_1 - B_1 \hat{K}_2) &< 0, \\
(A_2 - B_2 \hat{K}_1)^T P + P(A_2 - B_2 \hat{K}_1) &< 0, \\
(A_2 - B_2 \hat{K}_2)^T P + P(A_2 - B_2 \hat{K}_2) &< 0,
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Por meio do *software* MATLAB, com o “Toolbox LMI Control”, foi obtida a solução do conjunto de LMIs (2.64). Assim, a matriz comum  $P$  que satisfaz as condições conforme (2.48) e soluciona o problema é:

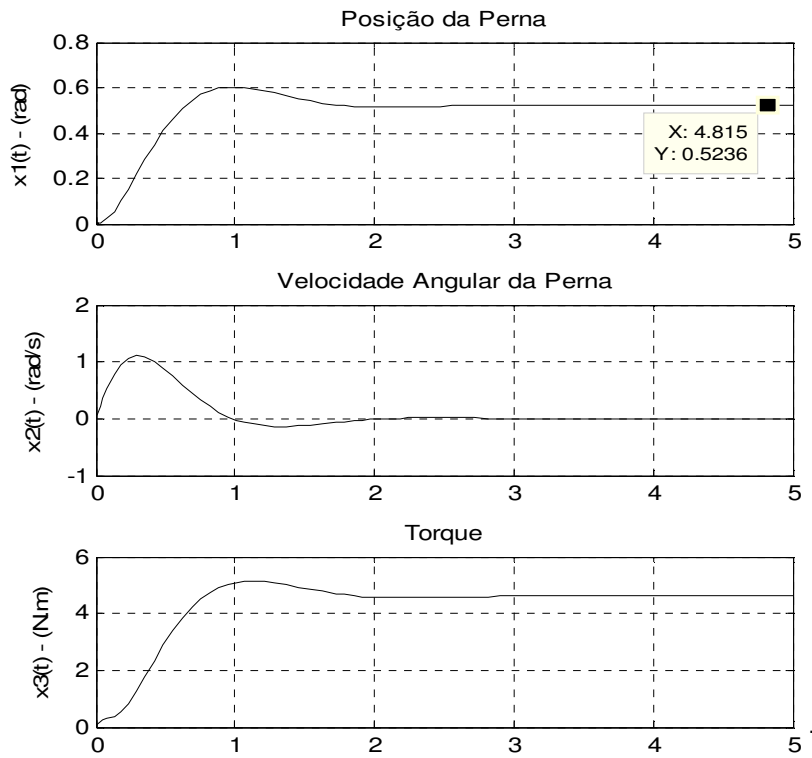
$$P = \begin{bmatrix} 32,9 & 4,45 & 0,196 \\ 4,45 & 7,66 & 0,97 \\ 0,196 & 0,97 & 0,158 \end{bmatrix}. \tag{2.65}$$

Então, o sistema controlado é assintoticamente estável.

A Figura 5 apresenta os resultados da simulação, realizada em ambiente Matlab, do sistema dado em (2.60), baseado na modelagem Takagi-Sugeno, com o regulador segundo o modelo de (2.30). Os ganhos de realimentação apresentados (2.62) e (2.63) foram obtidos pelo método de alocação de polos, tendo com condições iniciais  $\theta_v = 0$ ,  $\dot{\theta}_v = 0$  e  $Ma = 4,6 Nm$ .

Como pode ser observado, o ângulo  $\theta_v$  estabilizou-se em  $30^\circ$  (0,52 rad), em aproximadamente 2,5 segundos. Verifica-se também que a velocidade angular do joelho  $\dot{\theta}_v$ , aumenta até um determinado ponto e retorna ao valor zero, tempo de estabilização de  $\theta_v$ . Por fim observa-se o torque ativo do joelho  $Ma$  produzido pela estimulação elétrica, chegando a aproximadamente  $4,6 Nm$ .

**Figura 5** - Resposta do sistema controlado para condições iniciais  $(\theta_v, \dot{\theta}_v, M_a) = (0, 0, 0)$ , considerando somente a estabilidade.



Fonte: o próprio autor

## 2.4 MODELO LINEARIZADO DO MOVIMENTO DA ARTICULAÇÃO DO JOELHO DO PACIENTE PARAPLÉGICO

Para aplicar o controlador LQR no modelo matemático do movimento da articulação do joelho do paciente paraplégico, que é não-linear, foi necessário primeiramente linearizá-lo em torno do ponto de interesse,  $30^\circ$ . As variáveis de interesse são  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  e  $M_a$ , o que difere das consideradas para o modelo não-linear.

Definindo as variáveis de estado, na forma:

$$\begin{aligned}\theta_v &= x_1, \\ \dot{\theta}_v &= \dot{x}_1 = x_2 \\ M_a &= x_3,\end{aligned}\tag{2.66}$$

e substituindo (2.66) em (2.4), encontra-se

$$J\dot{x}_2 = \left[ -\frac{1}{x_1} mgl\sin(x_1) - \frac{1}{x_1} \lambda e^{-Ex_1} e^{-\frac{E\pi}{2}} \left( x_1 + \frac{\pi}{2} - \varpi \right) \right] x_1 - Bx_2 + x_3. \quad (2.67)$$

A função  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  é uma não linearidade do sistema e para o caso linear é definida como

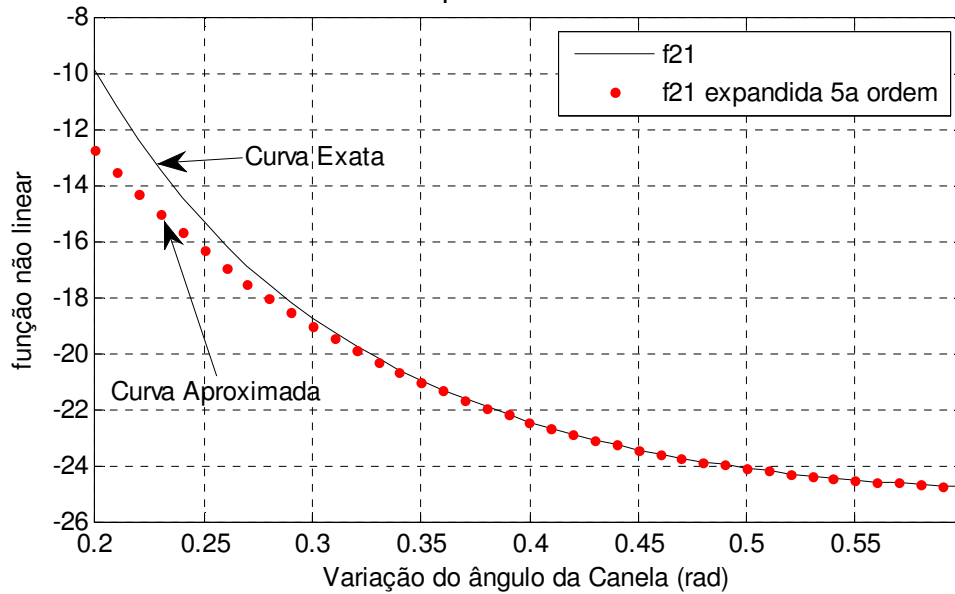
$$\tilde{f}_{21}(x_1(t)) = \frac{1}{Jx_1} \left[ -mgl\sin(x_1) - \lambda e^{-Ex_1} e^{-\frac{E\pi}{2}} \left( x_1 + \frac{\pi}{2} - \varpi \right) \right]. \quad (2.68)$$

Como no caso do modelo não linear da seção anterior, também pode-se verificar, em (2.68), que existe um problema de indeterminação de  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  na simulação, quando for atribuído o valor zero para  $x_1$ , pois nesse caso, o numerador e o denominador tornam-se nulos. Assim, expandiu-se (2.68) (GAINO, 2009; TEIXEIRA et al., 2006a, 2006b), por meio do *software* Matlab, em série de Taylor de quinta ordem, como apresentado no Apêndice B, o que permitiu cancelar o termo  $x_1$  no denominador de  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ , resolvendo o problema.

A Figura 6 mostra que a ordem utilizada para a série de Taylor representa satisfatoriamente a curva original no ponto de interesse.

O modelo linearizado é obtido, substituindo-se (2.69) em (2.9). Agora é possível aplicar a técnica do regulador linear quadrático (LQR) em malha fechada, para obter o controle do movimento da articulação do joelho do paciente paraplégico.

**Figura 6** - Curvas da função  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  exata e aproximação por série de Taylor de quinta ordem .



Fonte: o próprio autor.

Portanto, o valor de  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  obtido para o ponto de  $30^\circ$  (0,52 rad) é

$$\tilde{f}_{21}(x_1(t)) = -24,322. \quad (2.69)$$

## 2.5 APLICAÇÃO COM CONTROLADOR LQR

Nesta seção, é proposto o uso do regulador linear quadrático (LQR) (OGATA, 2010), em malha fechada, para variação angular da articulação do joelho de pacientes paraplégicos, por meio de estímulos elétricos no músculo quadríceps. O regulador trabalha com uma referência desejada para realizar movimentos na articulação do joelho, partindo do repouso e estabilizando-se no ponto desejado.

Como o modelo matemático constitui uma dinâmica não-linear (GAINO, 2009; TEIXEIRA et al., 2006), torna-se necessário linearizar o mesmo para que seja possível projetar o controlador linear LQR para um determinado ponto de operação, neste caso  $30^\circ$ .

### 2.5.1 Teoria do Regulador Linear Quadrático

A técnica de controle LQR representa uma solução de controle intermediária, entre as técnicas de controle mais simples (Proporcional Integral e Derivativo - PID) e as mais complexas (Preditivas), sob o ponto de vista de projeto e equacionamento (DELATORE, 2011).

O problema do regulador ótimo é encontrar o vetor  $u(t)$  que realize a transferência de um estado para uma região desejada no espaço de estados. O desempenho desejado pode ser formulado diretamente em termos de índices de desempenho no domínio do tempo. Os sistemas que são ajustados de modo a otimizar um índice de desempenho mínimo são frequentemente chamados de sistemas de controle ótimo (ROSA FILHO, 2011)

O sistema de controle considerado é definido em (2.12) e (2.13). A lei de controle de realimentação é definida como em (2.14).

Para se obter a otimalidade do controle LQR minimiza-se o índice de desempenho dado por:

$$\hat{I} = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt, \quad (2.70)$$

sendo  $\mathbf{Q}$  uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva) ou real simétrica e  $\mathbf{R}$  é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica.

As matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  determinam a importância relativa do erro e do consumo de energia. A matriz  $\mathbf{Q}$  representa a ponderação dos estados e  $\mathbf{R}$  é a matriz de ponderação das entradas. Se os elementos da matriz  $\mathbf{K}$  forem determinados de modo a minimizar o índice de desempenho, então  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t)$  é ótimo para qualquer estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  (OGATA, 2010).

Considerando-se uma matriz  $\mathbf{K}$  que torna o sistema (2.15) assintoticamente estável, e substituindo-se (2.14) em (2.70), o índice de desempenho é dado por,

$$\hat{I} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt, \quad (2.71)$$

$$\hat{I} = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt, \quad (2.72)$$

no qual a indicação de dependência em  $t$  de  $\mathbf{x}(t)$  foi suprimida por simplicidade da exposição que se segue.

Considere a existência de uma equação diferencial exata tal que:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \quad (2.73)$$

sendo  $\mathbf{P}$  uma matriz hermitiana definida positiva. Considerando (2.15), o lado direito de (2.73) é dado por:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ &= -\mathbf{x}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})] \end{aligned} \quad (2.74)$$

Substituindo (2.74) em (2.73), tem-se:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})] \mathbf{x} \quad (2.75)$$

Assim, de (2.74) e (2.75) obtém-se:

$$(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) = -[(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})] \quad (2.76)$$

Se o sistema (2.15) for assintoticamente estável, então existirá uma matriz  $\mathbf{P}$  definida positiva que satisfaz (2.76). Portanto, o índice de desempenho será dado por:

$$\hat{I} = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) - \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (2.77)$$

Como o sistema (2.15) é assintoticamente estável,  $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$  e, portanto,

$$\hat{I} = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (2.78)$$

Suponha agora que  $\mathbf{R}$  seja uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica, definida como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} \quad (2.79)$$

sendo  $\mathbf{T}$  uma matriz não-singular. Substituindo-se (2.79) em (2.76), tem-se:



$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + Q + K^T T^T TK = 0 \quad (2.80)$$

que pode ser reescrita como:

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.81)$$

Para minimizar  $\hat{I}$  em relação a  $K$ , deve-se minimizar a expressão:

$$x^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x \quad (2.82)$$

em relação a  $K$ . A solução ocorre quando a expressão acima é igual a zero, isto é,

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P \quad (2.83)$$

ou seja:

$$K = T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P \quad (2.84)$$

Portanto, a matriz ótima  $K$  é expressa por,

$$K = R^{-1} B^T P, \quad (2.85)$$

sendo  $P$  uma matriz simétrica definida positiva, ou seja,  $P = P^T > 0$ .

Assim, a lei de controle ótimo do problema de controle quadrático ótimo, quando o índice de desempenho dado por (2.70) é linear, é dada por:

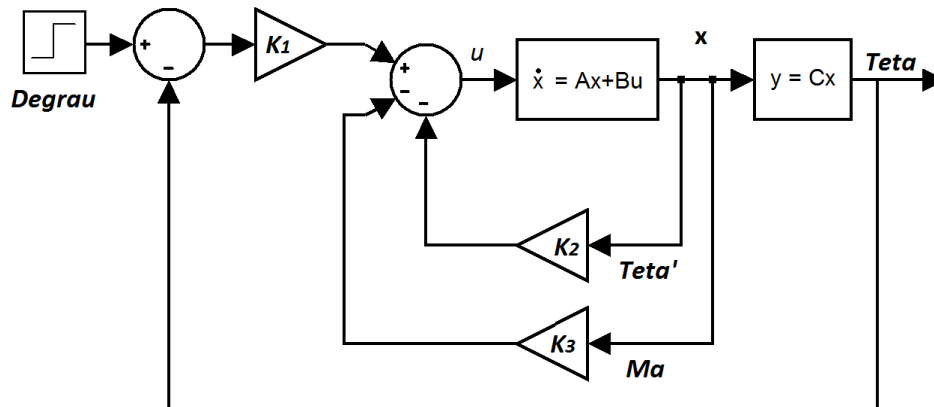
$$u(t) = -Kx(t) = R^{-1} B^T P x(t). \quad (2.86)$$

A matriz  $P$  deve satisfazer a equação matricial reduzida de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.87)$$

Será apresentado graficamente o resultado obtido a partir de diversas simulações utilizando o Simulink. Considerando a planta descrita em (2.12) e (2.13), a representação em diagrama de blocos do sistema em malha fechada, utilizando o regulador LQR, é ilustrada na Figura 7, na qual a entrada  $u(t)$  é o degrau e as variáveis de estado são representadas por  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $Ma$ .

**Figura 7 - Projeto do Regulador LQR.**



**Fonte:** o próprio autor.

A sistemática empregada para a seleção da matriz de ganho constituiu, inicialmente, de várias simulações em busca dos melhores valores de  $Q$ . Para se obter uma resposta rápida,  $q_{11}$  deve ser suficientemente grande, comparado a  $q_{22}$ ,  $q_{33}$  e  $R$ , sendo  $q_{11}$ ,  $q_{22}$ ,  $q_{33}$  elementos da diagonal principal de  $Q$  (OGATA, 2010). A configuração da matriz  $R$  foi a mesma em todas simulações.

A Figura 7 representa a arquitetura de controle LQR, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -24,32 & -0,746 & 2,762 \\ 0 & 0 & -1,05 \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,469 \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0]. \quad (2.90)$$

Adotou-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

$$R = 10^{-6}. \quad (2.92)$$

A matriz ótima  $\mathbf{K}=[K_1 \ K_2 \ K_3]$  foi obtida com o auxílio do software Matlab, que fornece a solução da equação de Riccati (2.87) para sistemas contínuos no tempo. A matriz de ganho  $\mathbf{K}$ , obtida a partir de  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  é:

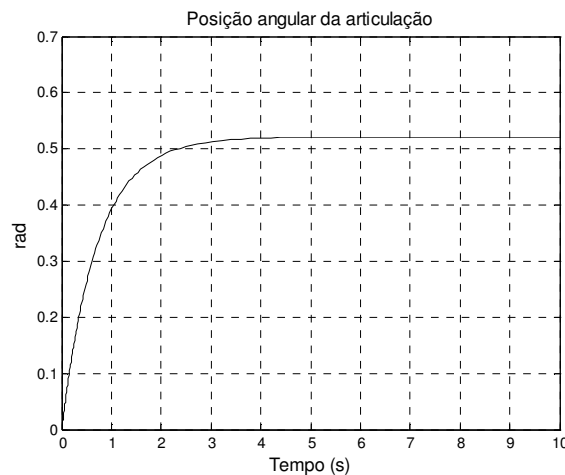
$$\mathbf{K}=[k_1 \ k_2 \ k_3]=[996,19 \ 707,21 \ 0,4329].$$

As Figura 8 a 2.10 mostram os resultados das simulações, realizadas em ambiente Matlab, do projeto do regulador, conforme a Figura 7, tendo como referência 0,52 rad ou 30°.

A Figura 8 representa o comportamento angular comum do joelho  $\theta_v$ , a Figura 9 representa a velocidade angular comum do joelho  $\dot{\theta}$  e a Figura 10 mostra o torque ativo do joelho produzido pela estimulação elétrica  $M_a$ .

Como pode ser observado na Figura 8, o ângulo  $\theta_v$  estabilizou-se em 30° (0,52 rad), atingindo a referência de entrada do degrau.

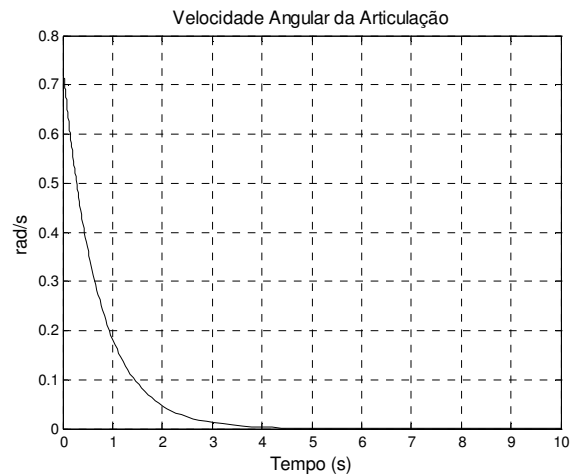
**Figura 8** - Representação da variável  $\theta_v$  tendo a referência igual a 0,52 rad.



Fonte: o próprio autor.

Na Figura 9, verifica-se que a velocidade angular do joelho  $\dot{\theta}$  inicia-se próximo de 0,7 rad/s e reduz-se indefinidamente, aproximando-se de zero em 4 segundos, aproximadamente.

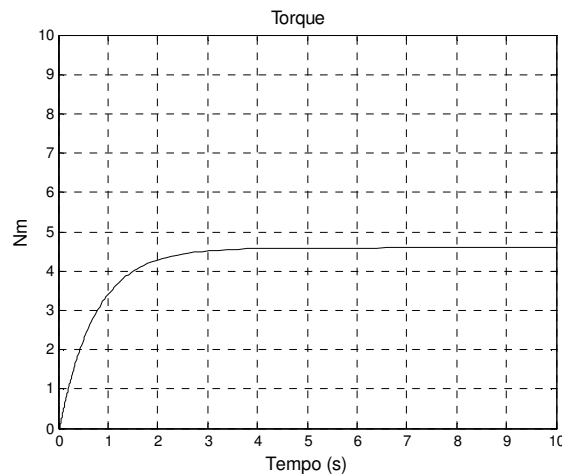
**Figura 9** - Representação da variável  $\dot{\theta}_v$ , tendo como referência o degrau igual a 0,52 rad.



**Fonte:** o próprio autor.

A Figura 10 apresenta o torque ativo do joelho  $M_a$  produzido pela estimulação elétrica, chegando a aproximadamente 4,6 Nm.

**Figura 10** - Representação da variável  $M_a$  tendo como referência o degrau igual a 0,52 rad.



**Fonte:** o próprio autor.

## 2.6 CONCLUSÃO PARCIAL DO CAPÍTULO

As simulações com Matlab mostraram a eficiência da técnica de controle com modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno em malha fechada, com alocação de polos nos modelos locais para determinação dos ganhos da matriz de

realimentação. Esse método possui vantagens sobre a técnica de controle LQR, apresentada na seção 2.5, pois como o modelo matemático da articulação do joelho é não linear, os modelos *fuzzy* T-S permitem projetar um compensador para cada regra do modelo *fuzzy*. Para cada regra, são utilizadas leis de controle baseadas em controle linear. O regulador *fuzzy* global resultante, que é em geral não-linear, é uma combinação *fuzzy* de cada regulador linear individual (GAINO, 2009).

Também, foi apresentada a teoria do regulador quadrático linear, de tempo contínuo com o objetivo de calcular a matriz de ganho  $K$  ótima de realimentação, de modo que a lei de controle de realimentação (2.14) minimize o índice de desempenho (2.70) sujeito à equação de estado (2.12). Assim, essa técnica de controle foi aplicada ao modelo matemático linearizado, do movimento da articulação do joelho do paciente paraplégico para variação angular da articulação.

As simulações em malha-fechada mostraram que os ganhos projetados conseguiram estabilizar o sistema. Neste caso o complexo canela-tornozelo parte do repouso e estabiliza-se no ponto de operação desejado, ou seja,  $30^\circ$ , mostrando que o LQR é uma possível alternativa de controle da posição do complexo canela-tornozelo de pacientes paraplégicos utilizando eletroestimulação aplicada ao músculo quadríceps.

No próximo capítulo, será apresentada a teoria dos elementos necessários para se projetar um controle paralelo distribuído com rastreamento do sinal, para um sistema não-linear. Também, será abordada a teoria dos mínimos quadrados recursivos, para identificação do sistema e dos modelos *fuzzy* T-S.

### 3 IDENTIFICAÇÃO FUZZY E RASTREAMENTO DO SINAL

Este capítulo apresenta a teoria dos elementos necessários para se projetar um controle paralelo distribuído com rastreamento do sinal, para um sistema não-linear. Será abordada a teoria dos mínimos quadrados recursivos, para identificação do sistema e dos modelos *fuzzy* T-S.

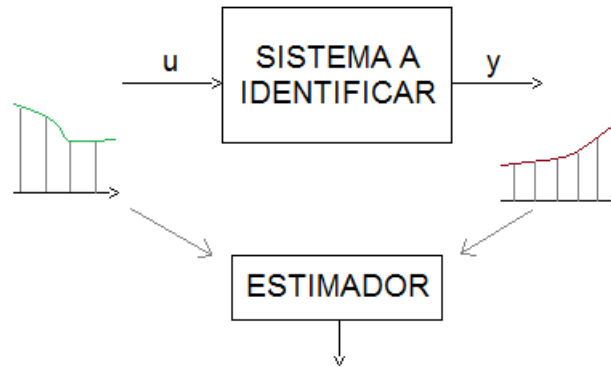
A motivação para o estudo de técnicas de identificação de sistemas surge do fato de que, frequentemente, não se conhecem as equações envolvidas no funcionamento de um determinado sistema ou elas são conhecidas, mas seria impraticável, devido a limitações de tempo e recursos, levantar tais equações e estimar seus respectivos parâmetros (AGUIRRE, 2007).

#### 3.1 MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVOS

Utilizam-se técnicas recursivas para estimar parâmetros de um determinado modelo à medida que os dados do processo são disponibilizados por um sistema de coleta após cada período de amostragem. Essa técnica também é útil na resolução de problemas numéricos cuja solução em batelada seria difícil (AGUIRRE, 2007). A Figura 11 ilustra de forma simplificada como as amostras de  $u$  e  $y$ , sendo  $u(t)$  a entrada e  $y(t)$  a saída do sistema, são coletados pelo estimador para se obter o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}$ .

Para pequenas amostras com os dados de entrada-saída do sistema, seria possível repetir várias vezes o cálculo por batelada, no entanto, à medida que esses dados aumentam também se eleva o esforço computacional para o cálculo da inversa das matrizes  $\Phi^T \Phi$ , o que não é necessário com o método recursivo para estimar o vetor de parâmetros  $\hat{\theta}$  (PASSINO; STEPHEN, 1998).

**Figura 11** - Ilustração de um sistema de identificação.



**Fonte:** o próprio autor.

Considere  $k$  um inteiro que representa o tempo discreto e um número inteiro  $i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , seja uma matriz  $N \times N$

$$P(k) = (\Phi^T \Phi)^{-1} = \left( \sum_{i=1}^k x^i (x^i)^T \right)^{-1}, \quad (3.1)$$

sendo  $\Phi^T = [x^1, x^2, \dots, x^k]$ .

Considerando que  $\hat{\theta}(k-1)$  denota o estimador de mínimos quadrados baseado sobre os dados de entrada e saída do sistema no instante  $k-1$  ( $P(k)$  é a matriz de covariância). Assume-se que  $\Phi^T \Phi$  é não-singular para todo  $k$ . Se  $P^{-1}(k) = \Phi^T \Phi = \sum_{i=1}^k x^i (x^i)^T$  então se pode obter o último termo da soma para chegar a

$$P^{-1}(k) = \sum_{i=1}^{k-1} x^i (x^i)^T + x^k (x^k)^T \quad (3.2)$$

e portanto

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + x^k (x^k)^T. \quad (3.3)$$

De

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y, \quad (3.4)$$

sendo  $Y$ , o vetor de saída das amostras coletadas do sistema, e de (3.4), que representa a equação para se calcular os valores estimados  $\hat{\theta}$  pelo método dos mínimos quadrados por batelada, é possível obter

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= \left( \sum_{i=1}^k x^i (x^i)^T \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^k x^i y^i \right) \\ &= P(k) \left( \sum_{i=1}^k x^i y^i \right) \\ &= P(k) \left( \sum_{i=1}^{k-1} x^i y^i + x^k y^k \right).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Portanto,

$$\hat{\theta}(k-1) = P(k-1) \sum_{i=1}^{k-1} x^i y^i \tag{3.6}$$

e assim

$$P^{-1}(k-1) \hat{\theta}(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} x^i y^i . \tag{3.7}$$

Agora, substituído (3.3) em (3.7) obtêm-se

$$\left( P^{-1}(k) - x^k (x^k)^T \right) \hat{\theta}(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} x^i y^i . \tag{3.8}$$

Com o resultado da equação (3.5), obtêm-se

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= P(k) \left( P^{-1}(k) - x^k (x^k)^T \right) \hat{\theta}(k-1) + P(k) x^k y^k \\ &= \hat{\theta}(k-1) - P(k) x^k (x^k)^T \hat{\theta}(k-1) + P(k) x^k y^k \\ &= \hat{\theta}(k-1) + P(k) x^k \left( y^k - (x^k)^T \hat{\theta}(k-1) \right).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Obtém-se assim, um método para se calcular o parâmetro estimado  $\hat{\theta}(k)$ , para cada instante  $k$  do parâmetro estimado  $\hat{\theta}(k-1)$ , a partir do último par de dados obtido  $x^k, y^k$ . Nota-se em (3.9) que  $y^k - (x^k)^T \hat{\theta}(k-1)$  é o erro na predição de  $y^k$  um passo a frente na estimativa de  $\hat{\theta}(k-1)$ .



Para atualizar  $\hat{\theta}$  em (3.9), é necessário conhecer  $P(k)$ , então pode-se usar

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + x^k (x^k)^T. \quad (3.10)$$

Nesse momento, seria necessário calcular a inversa da matriz a cada etapa, ou seja, a cada nova amostra de dados. No entanto, isso não é desejado para implementação em tempo real (PASSINO; STEPHEN, 1998). O lema da inversão de matriz diz que se  $A$ ,  $C$ , e  $(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}$  são matrizes quadradas não-singulares, então,  $A + BCD$  é invertível e ,

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \quad (3.11)$$

Esse fato será utilizado para que não haja a necessidade de se calcular a inversa de  $P^{-1}(k)$  que origina de (3.10) e pode ser usado em (3.9) para atualizar  $\hat{\theta}$ .

Nota-se que

$$\begin{aligned} P(k) &= (\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1} \\ &= (\Phi^T(k-1)\Phi(k-1) + x^k (x^k)^T)^{-1} \\ &= (P^{-1}(k-1) + x^k (x^k)^T)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Utilizando o lema da inversão de matrizes com  $A = P^{-1}(k-1)$ ,  $B = x^k$ ,  $C = I$ , e  $D = (x^k)^T$ , obter-se-á

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1)x^k \left( I + (x^k)^T P(k-1)x^k \right)^{-1} (x^k)^T P(k-1) \quad (3.13)$$

que, em conjunto com:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)x^k \left( y^k - (x^k)^T \hat{\theta}(k-1) \right), \quad (3.14)$$

derivado de (3.9), é chamado de algoritmo de mínimos quadrados recursivo.

É necessário iniciar o algoritmo RLS. E uma opção seria usar  $\hat{\theta}(0) = 0$  e  $P(0) = P_0$ , sendo  $P_0 = \alpha I$  com  $\alpha > 0$ .

Derivado do método RLS, também há o algoritmo dos mínimos quadrados recursivos ponderados, (WRLS - *weighted recursive least squares*) (PASSINO; STEPHEN, 1998), no qual a dedução para se obter  $P(k)$  é similar ao método RLS. Supondo que os parâmetros  $\theta$  do sistema variem lentamente, a melhor escolha seria

$$V(\theta, k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} (y^i - (x^i)^T \theta)^2, \quad (3.15)$$

com  $0 < \lambda \leq 1$ , sendo chamado de fator de esquecimento. Sua função é dar um peso maior aos dados mais recentes. Assim as equações para WRLS são :

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left( I - P(k-1)x^k \left( \lambda I + (x^k)^T P(k-1)x^k \right)^{-1} (x^k)^T \right) P(k-1) \quad (3.16)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)x^k \left( y^k - (x^k)^T \hat{\theta}(k-1) \right).$$

### 3.2 MODELO FUZZY MAMDANI

Um sistema *fuzzy* pode ser representado como

$$y = f(x | \theta) = \frac{\sum_{i=1}^R b_i \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} \quad (3.17)$$

sendo  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  e  $\mu_i(x) \geq 0$  a função pertinência (PASSINO; STEPHEN, 1998). Os valores  $b_i$ ,  $i=1, 2, \dots, R$  representam os centros das funções de pertinência de saída. Nota-se que

$$f(x | \theta) = \frac{b_1 \mu_1(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} + \frac{b_2 \mu_2(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} + \dots + \frac{b_R \mu_R(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)}, \quad (3.18)$$

e definindo

$$\xi_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)}, \quad (3.19)$$

chega-se a

$$f(x|\theta) = b_1\xi_1(x) + b_2\xi_2(x) + \dots + b_R\xi_R(x). \quad (3.20)$$

Sendo  $\xi_i(x) \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^R \xi_i(x) = 1$ . Como

$$\xi(x) = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_R]^T \quad (3.21)$$

e

$$\theta = [b_1, b_2, \dots, b_R]^T, \quad (3.22)$$

conclui-se que

$$y = f(x|\theta) = \theta^T \xi(x). \quad (3.23)$$

O método dos mínimos quadrados recursivos pode ser utilizado para treinar sistemas *fuzzy*, alterando-se  $x^i$  por  $\xi(x^i)$  em (3.16).

### 3.3 SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Um sistema *Fuzzy Takagi-Sugeno* (PASSINO; STEPHEN, 1998) pode ser representado como

$$y = \frac{\sum_{i=1}^R g_i(x) \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)}, \quad (3.24)$$

sendo:

$$g_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n \quad (3.25)$$

Assim, usando a mesma abordagem para sistemas *fuzzy Mamdani*, é possível verificar que

$$y = \frac{\sum_{i=1}^R a_{i,0} \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} + \frac{\sum_{i=1}^R a_{i,1} x_1 \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} + \dots + \frac{\sum_{i=1}^R a_{i,n} x_n \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)}. \quad (3.26)$$

A partir da definição de  $\xi_i(x)$  em (3.19) e reescrevendo  $\xi(x)$  e  $\theta$ , obter-se-á

$$\xi(x) = [\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_R(x), x_1 \xi_1(x), x_2 \xi_2(x), \dots, x_1 \xi_R(x), \dots, x_n \xi_1(x), x_n \xi_2(x), \dots, x_n \xi_R(x)]^T \quad (3.27)$$

e

$$\theta = [a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{R,0}, a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{R,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{R,n}]^T \quad (3.28)$$

portanto,

$$f(x|\theta) = \theta^T \xi(x) \quad (3.29)$$

representa um sistema *Fuzzy T-S*. Assim como em um sistema *fuzzy Mamdani*, é possível utilizar o método dos mínimos quadrados recursivos para treinar  $f(x|\theta)$ .

### 3.4 CONTROLE PARALELO DISTRIBUÍDO COM RASTREAMENTO

O problema do controle por rastreamento consiste em determinar a entrada da planta de modo que a saída desta rastreie um sinal de referência desejado. O controlador do tipo paralelo distribuído pode ser projetado para forçar a saída de um sistema não-linear modelado como um sistema T-S seguir um sinal de referência (LILLY, 2010).

Para um sistema não-linear, a estratégia de controle paralela distribuída com rastreamento consiste em aplicar esse procedimento de projeto a cada consequente do sistema *fuzzy T-S* (LILLY, 2010). Para o rastreamento, os consequentes da planta em um sistema *fuzzy* são assumidos na forma:

$$y(k+1) = \alpha(q^{-1})y(k) + \beta(q^{-1})u(k), \quad (3.30)$$

que representa equação de diferenças segundo as entradas e saídas, sendo

$$\alpha(q^{-1}) = a_1 + a_2 q^{-1} + \dots + a_n q^{-(n-1)} \quad (3.31)$$

e

$$\beta(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}. \quad (3.32)$$

Em (3.30),  $k$  é um inteiro que representa o tempo discreto,  $u(k)$  a entrada do sistema no tempo  $k$  e  $y(k)$  a saída do sistema no tempo  $k$ . Os termos

$a_i$  com  $i=1,2,\dots,n$  e  $b_j$  com  $j=0,1,\dots,m$  são constantes, e  $q^{-1}$  o operador de atraso definido como

$$q^{-1}y(k) = y(k-1). \quad (3.33)$$

Como exemplo, considere o sistema discreto linear e invariante no tempo, com uma entrada e uma saída,

$$y(k+1) = 1,5y(k) - 0,4y(k-1) + u(k) + 0,6u(k-1). \quad (3.34)$$

É necessário obter o controle  $u(k)$  que forneça a saída no tempo  $k+1$  para o sinal de referência  $r(k) = 0,1\text{sen}(0,1\pi k)$ . Esse sistema pode ser escrito como em (3.30). Assim, a lei de controle

$$\beta(q^{-1})u(k) = r(k+1) - \alpha(q^{-1})y(k) \quad (3.35)$$

fornece o controlador por rastreamento um-passo-à-frente

$$u(k) = -0,6u(k-1) - 1,5y(k) + 0,4y(k-1) + 0,1\text{sen}(0,1\pi k). \quad (3.36)$$

Um sistema *fuzzy* com  $R$  regras tem, para cada regra, a forma

$$R_i: \text{ Se } y(k) \text{ é } P_1^k \text{ e } y(k-1) \text{ é } P_2^L \text{ e } \dots \text{ e } y(k-n+1) \text{ é } P_1^k, \text{ então} \quad (3.37)$$

$$y^i(k+1) = \alpha_i(q^{-1})y(k) + \beta_i(q^{-1})u(k),$$

onde

$$\alpha_i(q^{-1}) = a_{i,1} + a_{i,2}q^{-1} + \dots + a_{i,n}q^{-(n-1)}, \quad (3.38)$$

$$\beta_i(q^{-1}) = b_{i,0} + b_{i,1}q^{-1} + \dots + b_{i,m}q^{-m} = b_{i,0} + \beta'_i(q^{-1}). \quad (3.39)$$

O controlador paralelo distribuído com rastreamento do tipo um-passo-à-frente para esse sistema é um outro sistema *fuzzy* com  $R$  regras na forma:

$$R_i: \text{ Se } y(k) \text{ é } P_1^k \text{ e } y(k-1) \text{ é } P_2^L \text{ e } \dots \text{ e } y(k-n+1) \text{ é } P_1^k, \text{ então} \quad (3.40)$$

$$u^i(k) = \frac{1}{b_{i,0}} \left[ -\beta'_i(q^{-1})u(k) + r(k+1) - \alpha_i(q^{-1})y(k) \right],$$

resultando na lei de controle

$$u(k) = \sum_{i=1}^R u^i(k) \xi_i(k), \quad (3.41)$$

onde  $\xi_i(k), i=1, \dots, R$  são as funções base com regras *fuzzy* definidas em (3.19), sendo  $\mu_i(k)$  a função de pertinência *fuzzy*.

### 3.5 IDENTIFICAÇÃO E PROJETO DO CONTROLADOR

Nesta seção, será apresentada a metodologia necessária para se obter a identificação do sistema e o projeto do controlador. Para se chegar aos resultados, foram realizadas as seguintes etapas, com base na teoria apresentada nos capítulos e seções anteriores:

- I. Coleta dos dados de entrada e saída do modelo que representam as equações dinâmicas do paraplégico;
- II. Identificação dos parâmetros dos termos consequentes do modelo, pelo método dos mínimos quadrados recursivos com mapeamento *fuzzy* Takagi-Sugeno;
- III. Projeto do Controlador Paralelo Distribuído com Rastreamento.

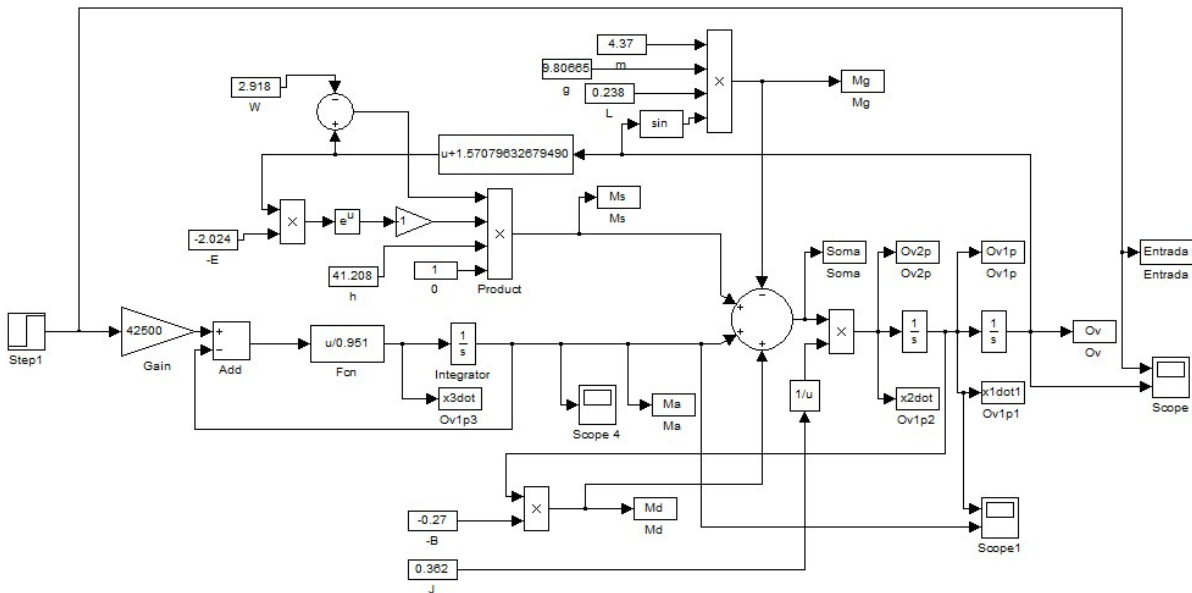
#### 3.5.1 Coleta dos Dados

Inicialmente, foi aplicado um sinal do tipo degrau, com amplitude igual a  $P_0 = 1,0839 \times 10^{-4} [s]$ , para excitar o sistema, que representa as equações dinâmicas do modelo da articulação do joelho do paciente paraplégico, conforme apresentado na Figura 12. Assim, foi possível obter um vetor com a resposta ao sinal de entrada. Os valores foram coletados com amostras a cada 10 milissegundos em um intervalo de 30 segundos, obtendo-se assim 3000 amostras.

#### 3.5.2 Identificação dos Parâmetros

Foi considerado o algoritmo WRLS descrito em (3.16) para identificação dos parâmetros dos termos consequentes do modelo, com base nos dados mapeados segundo o sistema *fuzzy* T-S, como apresentado em (3.24), e tendo como entrada os dados coletados.

**Figura 12** - Equações dinâmicas do modelo da articulação do joelho do paciente paraplégico representadas no *software* Simulink.



Fonte: Gaino (2009).

Substituindo-se  $x_k$  por  $\xi(x_k)$  em (3.16) ter-se-á,

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left( I - P(k-1)\xi(x_k) \left( \lambda I + (\xi(x_k))^T P(k-1)\xi(x_k) \right)^{-1} (\xi(x_k))^T \right) P(k-1) \quad (3.42)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\xi(x_k) \left( y^k - (\xi(x_k))^T \hat{\theta}(k-1) \right).$$

As funções de pertinência podem assumir várias formas, como a triangular, trapezoidal, gaussiana ou qualquer outro formato, como pode ser visto no Apêndice C. Para esse projeto, foi utilizada a do tipo gaussiana representada por:

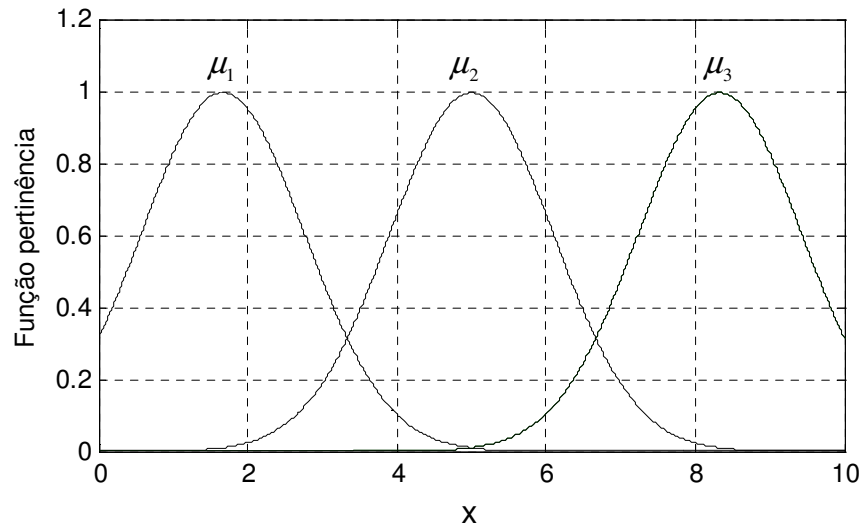
$$\mu_i(u) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{u_j - c_j^i}{\sigma_j^i} \right)^2 \right]. \quad (3.43)$$

Assim,

$$\xi_i(x) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_j - c_j^i}{\sigma_j^i}\right)^2\right]}{\sum_{i=1}^R \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_j - c_j^i}{\sigma_j^i}\right)^2\right]}, \quad (3.44)$$

sendo  $R$  o número de regras,  $i=1,2,\dots,R$ ,  $n$  o número de entradas,  $j=1,2,\dots,n$ ,  $\sigma$  a largura da função e  $c$  o centro da função de pertinência. A Figura 13 mostra um exemplo de um conjunto de funções de pertinência do tipo gaussiana.

**Figura 13** - Exemplo de um função de pertinência do tipo gaussiana.



Fonte: o próprio autor.

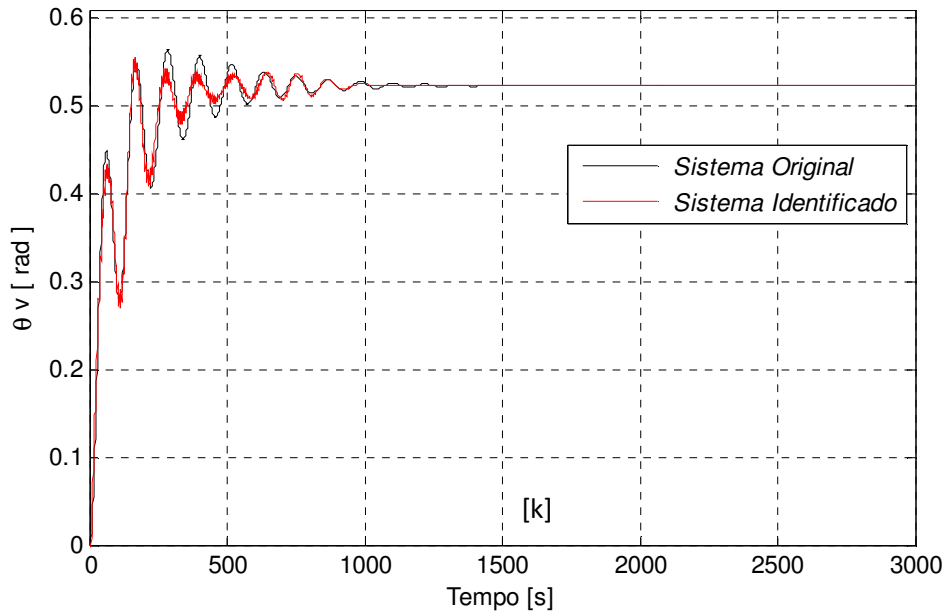
Para calcular o vetor de parâmetros do sistema *fuzzy*, foram considerados: fator de esquecimento  $\lambda = 1$ , número de regras  $R = 28$ ,  $\alpha = 100$  (para iniciar  $P(0) = \alpha I$ ), número de iterações  $N_{RLS} = 3000$ , largura da função de pertinência  $\sigma = 0.4$ ,  $\hat{\theta}(0) = 0$ . Como  $\lambda = 1$ , (3.16) resume-se a (3.13) e (3.14), assim, o método WRLS torna-se o método RLS.

Para o treinamento dos pares de dados coletados  $(x^i, y^i)$ , o número de iterações de (3.16) foi igual a  $N_{RLS} = 3000$ . Após essas etapas foram obtidos os parâmetros dos termos consequentes  $\hat{\theta}$ , apresentados no Apêndice D.



A Figura 14 apresenta o resultado da identificação do sistema (2.9) com o método RLS e a Figura 15 apresenta os valores de  $\hat{\theta}$ , conforme Apêndice D, que são os consequentes resultantes do algoritmo RLS que caracterizam a o sistema da Figura 12.

**Figura 14 - Identificação *Fuzzy* utilizando RLS.**



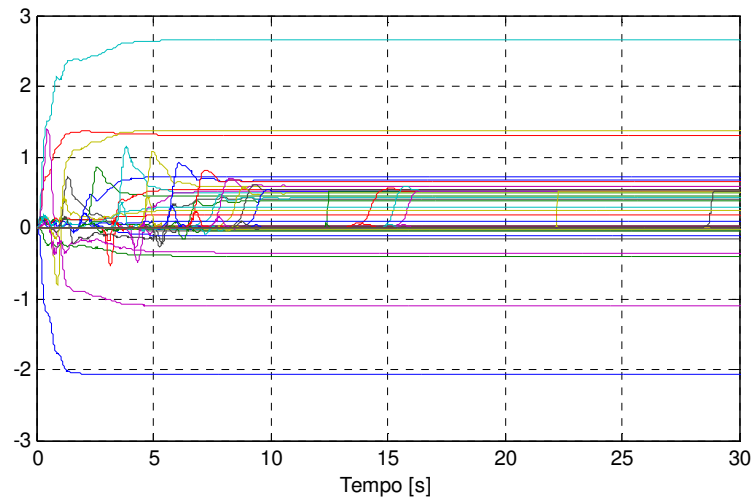
**Fonte:** o próprio autor.

### 3.5.3 Projeto do Controlador Paralelo Distribuído com Rastreamento.

Agora, serão utilizados os parâmetros dos termos consequentes obtidos na subseção 3.5.2, para o projeto do controlador. Esses parâmetros, como constam no Apêndice D, serão utilizados para representar o sistema *fuzzy* T-S na forma de (3.37).

O controlador paralelo distribuído com rastreamento do tipo um-passo-à-frente é um outro sistema *fuzzy* com  $R$  regras na forma de (3.40), resultando assim, na lei de controle (3.41). O termo  $\xi_i(x)$  tem o formato conforme apresentado em (3.44). Os valores iniciais, com  $k=0$ , foram definidos como:  $y(k) = y(k-1) = u(k) = u(k-1) = 0$ .

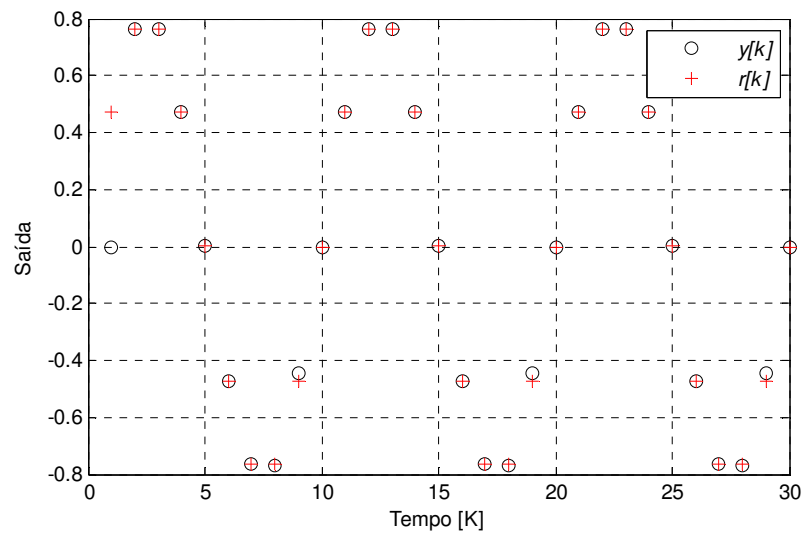
**Figura 15** - Parâmetros dos termos consequentes do modelo.



**Fonte:** o próprio autor.

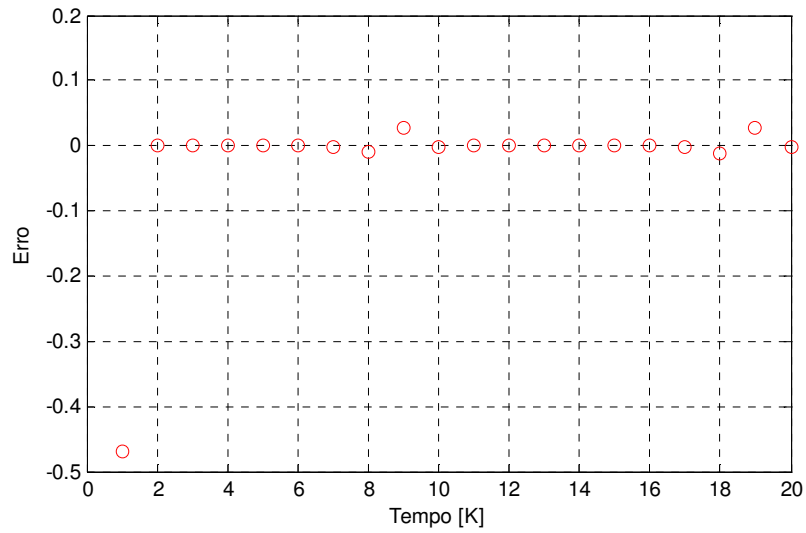
As Figuras 16 e 17 mostram o desempenho e o erro do controlador, tendo como referência  $r(k) = 0,5 \sin(0,2\pi k)$ .

**Figura 16** - Performance do controlador com a referência igual a  $r(k) = 0,5 \sin(0,2\pi k)$ .



**Fonte:** o próprio autor.

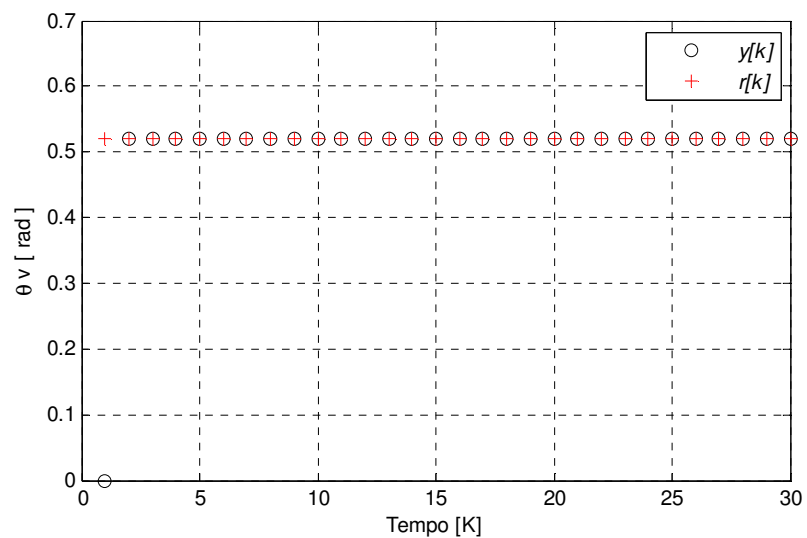
**Figura 17** - Erro do controlador para a referência  $r(k)=0,5 \sin(0,2\pi k)$ .



Fonte: o próprio autor.

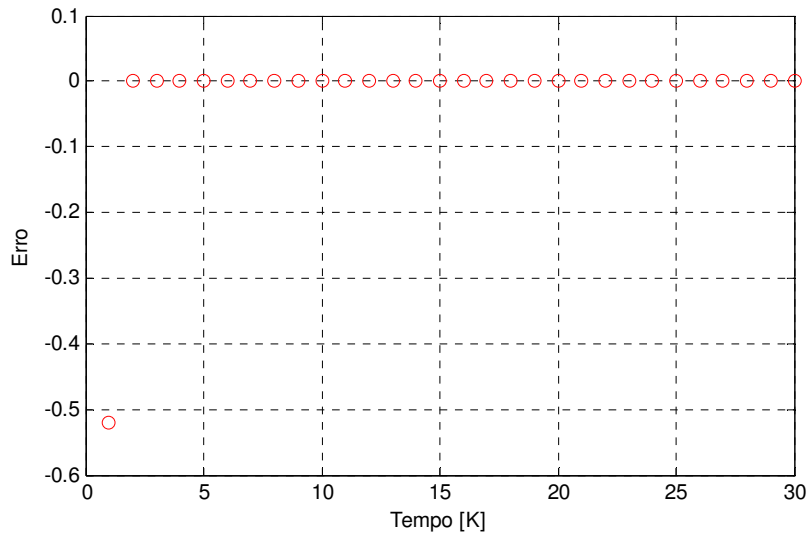
Os resultados quando a referência foi constante igual a 0,52 rad estão na Figura 18 e na Figura 19.

**Figura 18** - Performance do controlador com a referência igual a  $r = 0,52$  rad.



Fonte: o próprio autor.

**Figura 19** - Erro do controlador quando a referência foi igual a 0,52 rad.



Fonte: o próprio autor.

### 3.6 IDENTIFICAÇÃO OBTIDA EM EXPERIMENTOS REALIZADOS EM PESSOAS HÍGIDAS E PARAPLÉGICOS DO SEXO MASCULINO

Nesta seção, serão apresentados os resultados da identificação do modelo não linear do movimento do complexo canela-pé, utilizando o modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno, e do seu controle. Foi identificada a posição angular da perna por meio de uma estimulação elétrica. Os dados de entrada e saída foram obtidos em pesquisas realizadas em pessoas hígdas, por Kozan (2012), e em pacientes paraplégicos, por Sanches (2013), com autorização do comitê da Unesp Presidente Prudente, Plataforma Brasil, sob o número CAAE 00977212.1.10015402.

As informações da identificação *fuzzy* forneceram parâmetros para implementação do controle paralelo distribuído com rastreamento, utilizando como referência um ângulo de 45°.

Foi proposto um algoritmo para a identificação do modelo do movimento do complexo canela-pé, um sistema não linear, utilizando o modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno, aplicando o método de identificação dos mínimos quadrados de forma recursivo. O controle paralelo distribuído com rastreamento, foi realizado aplicando os parâmetros da identificação *fuzzy* Takagi-Sugeno. A referência utilizada para o controle foi a posição angular da perna.

O controlador paralelo distribuído com rastreamento utilizou-se dos parâmetros gerados na identificação do sistema, pelo modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno, para implementar sua lei de controle. O controlador atuou determinando a entrada do sistema a fim de que a saída rastreasse um valor de referência já pré-determinado (LILLY, 2010).

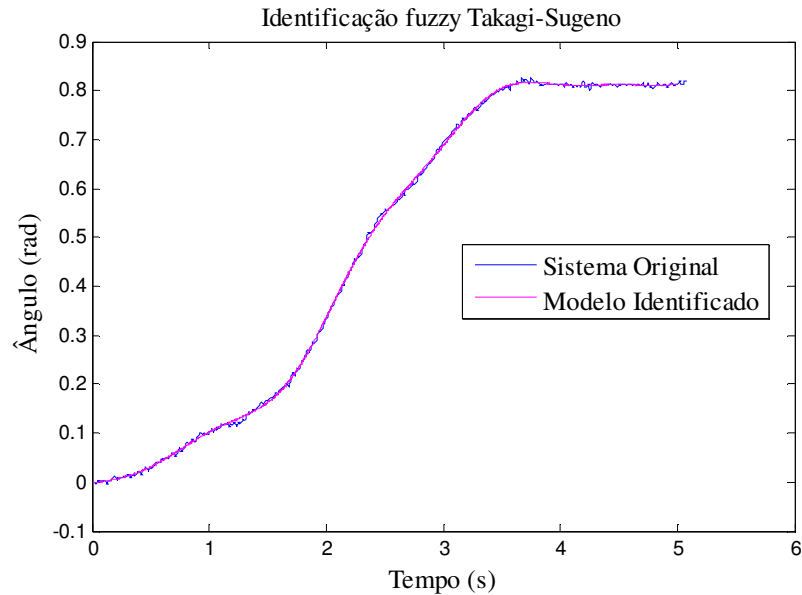
A identificação foi feita em ambiente MATLAB®, utilizando informações de entrada e saída obtidas em pesquisas realizadas em pessoas híidas e pacientes paraplégicos, (Tabela 2). Os resultados foram obtidos fazendo-se a identificação do modelo do movimento da perna do paciente híido com os dados gerados pela pesquisa de Kozan (2012) e Sanches (2013), para um ângulo de 45° (0,78 rad) e taxa de amostragem de 20 kHz. Estes resultados são mostrados na Figura 20.

A Tabela 2 apresenta as características dos indivíduos híidos envolvidos na pesquisa. A identificação do modelo utilizando *fuzzy* Takagi-Sugeno, mostrada na Figura 20, obteve excelente resposta, quando comparado à saída original e o modelo identificado. Foram utilizadas 13 regras para que a melhor resposta fosse obtida.

**Tabela 2** - Informações dos voluntários da pesquisa.

<b>Voluntário</b>	<b>Sexo</b>	<b>Idade (anos)</b>	<b>Massa Corporal (kg)</b>	<b>Altura (m)</b>	<b>Prática de atividade Física</b>
1	M	27	78	1,78	Todos os dias
2	M	21	76	1,74	Sedentário
3	M	33	65	1,75	2 vezes por dia

Fonte: KOZAN (2012).

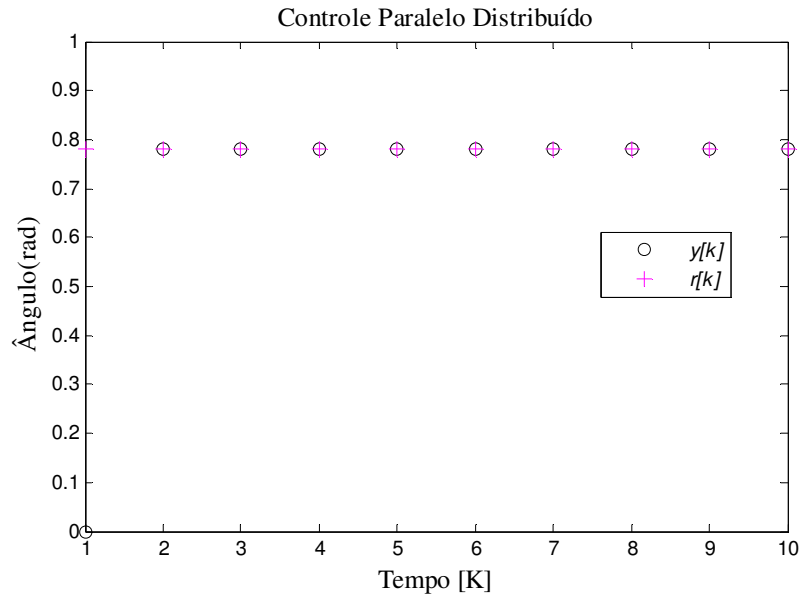
**Figura 20** - Identificação *fuzzy* Takagi-Sugeno com 13 regras.

Aplicando os parâmetros do vetor  $\hat{\theta}$ , gerados pela identificação, têm-se as regras para o controlador, da forma de:

1. Se  $y(k)$  é  $A^1$  então  $y_1(k+1) = -0.048848 y(k) - 0.011777 u(k)$
2. Se  $y(k)$  é  $A^2$  então  $y_2(k+1) = 0.240196 y(k) + 0.029898 u(k)$
3. Se  $y(k)$  é  $A^3$  então  $y_3(k+1) = -0.827256 y(k) - 0.049645 u(k)$
4. Se  $y(k)$  é  $A^4$  então  $y_4(k+1) = 2.017755 y(k) + 0.069073 u(k)$
5. Se  $y(k)$  é  $A^5$  então  $y_5(k+1) = -2.562674 y(k) - 0.087537 u(k)$
6. Se  $y(k)$  é  $A^6$  então  $y_6(k+1) = 3.004859 y(k) + 0.104824 u(k)$
7. Se  $y(k)$  é  $A^7$  então  $y_7(k+1) = -0.752296 y(k) - 0.120807 u(k)$
8. Se  $y(k)$  é  $A^8$  então  $y_8(k+1) = 0.620898 y(k) + 0.135218 u(k)$
9. Se  $y(k)$  é  $A^9$  então  $y_9(k+1) = 2.452405 y(k) - 0.147257 u(k)$
10. Se  $y(k)$  é  $A^{10}$  então  $y_{10}(k+1) = -1.573505 y(k) + 0.154747 u(k)$
11. Se  $y(k)$  é  $A^{11}$  então  $y_{11}(k+1) = 3.361654 y(k) - 0.152481 u(k)$
12. Se  $y(k)$  é  $A^{12}$  então  $y_{12}(k+1) = -1.379092 y(k) + 0.130149 u(k)$
13. Se  $y(k)$  é  $A^{13}$  então  $y_{13}(k+1) = 2.053167 y(k) - 0.075065 u(k)$ ,

sendo  $y(k)$  a saída no instante  $k$ ,  $y_n(k+1)$  a saída um passo à frente e  $u(k)$  a entrada do sistema no instante  $k$ .

Definido o sinal de referência como sendo a posição angular da perna, e fixando-o em  $45^\circ$  (0,78 rad), o controlador obteve excelente resposta, mostrada na Figura 21 e na Figura 22.

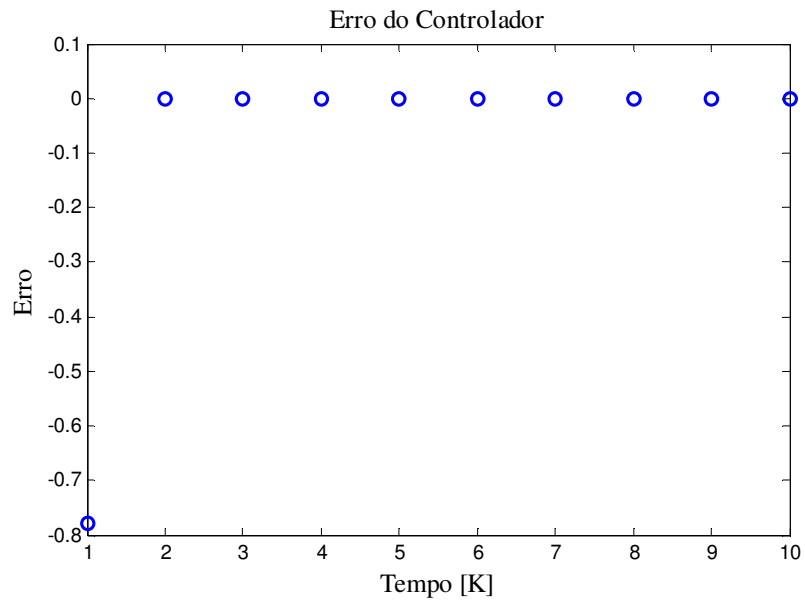
**Figura 21** - Controlador paralelo distribuído com rastreamento.

Fonte: o próprio autor.

### 3.7 CONCLUSÃO PARCIAL DO CAPÍTULO

Neste capítulo, foi apresentada a teoria dos elementos necessários para se projetar um controlador paralelo distribuído com rastreamento do sinal para um sistema não-linear e, também, a teoria dos mínimos quadrados recursivos para identificação do sistema e dos modelos *fuzzy* T-S.

A vantagem da metodologia de projeto apresentada nesse capítulo, com relação às técnicas de projeto demonstradas anteriormente, provém do fato em que há situações nas quais o equacionamento de fenômenos físicos envolvidos no funcionamento de um determinado sistema nem sempre está disponível ou é inviável de se obter. Assim, o uso das técnicas de identificação se torna viável pois não é necessário um conhecimento *a priori* da planta. Aliado a isso, o controlador do tipo paralelo distribuído pode ser projetado para forçar a saída de um sistema não-linear modelado como um sistema T-S para seguir um sinal de referência.

**Figura 22** - Erro do controle paralelo distribuído com rastreamento.

Fonte: o próprio autor.



## 4 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o método de identificação dos mínimos quadrados recursivos (*RLS - Recursive Least Square*) para a identificação do modelo matemático, proposto por Ferrarin e Pedotti (2000), que relaciona de maneira empírica a largura do pulso aplicado com o torque gerado em torno da articulação do joelho do paciente paraplégico. A metodologia de projeto com identificação *Fuzzy* e rastreamento de sinal, tem como diferencial, em relação as demais técnicas demonstradas, o fato em que há situações nas quais o equacionamento de fenômenos físicos envolvidos no funcionamento de um determinado sistema nem sempre está disponível ou é inviável de se obter. Assim, o uso das técnicas de identificação se tornam viáveis pois não é necessário um conhecimento a priori da planta. Aliado a isso, o controlador do tipo paralelo distribuído modelado como um sistema T-S, que conjugam a capacidade de processar informação de natureza incerta ou qualitativa com a capacidade de aproximação universal o que não é possível obter com um regulador linear como o LQR.

Também foram apresentadas outras duas técnicas de projeto aplicadas ao modelo matemático que representa a dinâmica do movimento da articulação da perna do paciente paraplégico. O primeiro modelo de projeto consistiu em um regulador linear quadrático (LQR - *Linear Quadratic Regulator*) em malha fechada. Como o LQR é linear, foi necessário linearizar o modelo do sistema em um determinado ponto de interesse, possibilitando assim, aplicar tal técnica de controle e realizar simulações que demonstraram a eficiência do controlador. Já no segundo, o principal objetivo foi utilizar modelos *fuzzy* T-S para obter o controle da posição da perna e calcular a matriz dos ganhos de realimentação do sistema, utilizando o método de alocação de polos. Utilizou-se a teoria Lyapunov para análise da estabilidade da planta com os ganhos de realimentação. O projeto do regulador *fuzzy* foi construído através da Compensação Distribuída Paralela - CDP (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). Este método faz a combinação *fuzzy* das matrizes de ganho de retroação, obtidas por meio da fórmula de Ackermann, para então chegar a um regulador *fuzzy* que estabiliza o sistema globalmente (TEIXEIRA; ŽAK 1999). O

projeto do regulador foi realizado para o ponto de operação de  $30^\circ$ , isto é, a trajetória da perna sai do estado de repouso e estabiliza-se em  $30^\circ$ .

#### 4.1 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

- Implementações dos modelos estudados;
- Projeto de um controlador adaptativo por modelo de referência.

## REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**. 3. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2007.

BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in systems and control theory**. New York: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

COVACIC, M. R. et al. LMI-Based Algorithm for Strictly Positive Real Systems with Static Output Feedback. **Systems & Control Letters** (Print), v. 61, p. 521-527, 2012.

CRAGO, P. E.; MORTIMER, T.; PECHAM, P. H. Closed-Loop control of force during electrical stimulation of muscle. **IEEE Transactions on rehabilitation Engineering**, San Diego, v. 27, n. 6, p. 306–312, 1980.

DELATORE, F. **Controle multivariável em redes de trocadores de calor com bypasses**. 2011. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.

FERRARIN, M.; PEDOTTI, A., The relationship between electrical stimulus and joint torque: a dynamic model. **IEEE Transactions on rehabilitation engineering**, San Diego, v. 8, n. 3, p. 342–352, 2000.

GAINO, R. **Controle de movimentos de pacientes paraplégicos utilizando modelos fuzzy T-S**. 2009. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

GAINO, R. et al. Controle não-linear fuzzy Takagi-Sugeno do movimento de paraplégicos utilizando acelerômetros. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA (CBEB), 21., 2008, Salvador. **Anais...** Salvador: Grupo GT5, 2008. p. 1254-1257.

GAINO, R. et al. Projeto de controladores digitais utilizando microcontroladores e o software isis proteus. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 18., 2010, Bonito **Anais...** Campo Grande, 2010. p. 4752-4756.

GAINO, R. et al. Realimentação derivativa e modelo fuzzy Takagi-Sugeno para controle da articulação do joelho de pacientes paraplégicos com o uso de acelerômetros. **Revista Brasileira de Engenharia Biomédica**, v. 27, n. 2, p. 67-78, 2011.

IQBAL, K.; MUGHAL, A. Active control vs. passive stiffness in posture and movement coordination. **IEEE International conference on systems, man and cybernetics**, Montréal, Canada. P. 3367-3372, 2007.

KOZAN, R. F. **Controle da posição da perna de pessoas hípidas utilizando um controlador PID**. 2012. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

LILLY, J. H. **Fuzzy control and identification**. New Jersey: Jonh Wiley & Sons, 2010.

MACHADO, E. R. M. D. **Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

MATJACIC, Z.; Bajd, T. Arm-free paraplegic standing - part I: Control model synthesis and simulation. **IEEE transactions on rehabilitation engineering**, v. 6, n. 2, p. 125-138, 1998.

MOZELLI, L. A. **Controle fuzzy para sistemas Takagi-Sugeno: condições aprimoradas e aplicações**. 2008. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

OLIVEIRA, T. C. et al. Regulador fuzzy Takagi-Sugeno do movimento da articulação do joelho de pacientes paraplégicos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA (CBEB), 23., 2012, Porto de Galinhas. **Anais...** 2012. Porto de Galinhas

PASSINO, K. M; YURKOVICH, S. **Fuzzy control**. Menlo Park, CA: Prentice-Hall, 1998.

PETERSON, D. K.; CHIZECK, H. J. Linear quadratic control of a loaded agonist-antagonist muscle Pair. **IEEE transactions on biomedical engineering**, v. 34, n. 10, p. 790–796, 1987

ROSA FILHO, J. E. A. **Contribuições de controle ótimo**. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação), Universidade Estadual de Londrina.

SANCHES, M. A. A. **Sistema eletrônico para geração e avaliação de movimentos em paraplégicos**. 2013. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

TAKAGI, T.; Sugeno, M., Fuzzy identification of systems and applications to modeling and control. **IEEE Transaction systems, man and cybernetics**, New York, v. 15, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, O. H., Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. **IEEE transactions on fuzzy systems**, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998

TANIGUCHI, T. et al. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems. **IEEE transactions on fuzzy systems**, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.

TEIXEIRA, M. C. M. et al. Projeto de um controlador fuzzy Takagi-Sugeno para variar o ângulo da articulação do joelho. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 16., 2006, Salvador. **Anais...** Salvador, 2006. p. 2287–2292.

TEIXEIRA, M. C. M. et al., Design of a fuzzy Takagi-Sugeno controller to vary the joint knee angle of paraplegic patients. **Lectures notes in Computer Science Springer**. Berlin/Heidelberg, v. 4234, n. 3, p. 118-126, 2006.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H., Stabilizing controller design for uncertain non-linear systems using fuzzy models. **IEEE transactions on fuzzy systems**, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A

Série de Taylor de Sétima Ordem para  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  - Caso Não - Linear

Expansão de (2.10) por meio do *software* Matlab, em série de Taylor de sétima ordem

$$\begin{aligned}
 & 1/J*(-m*g*I*cos(xx)-LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))+LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E*(xx+1/2*pi-w)) \\
 & +1/J*(1/2*m*g*I*sin(xx)+LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E-1/2*LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E^2*(xx+1/2*pi-w)*x1 \\
 & +1/J*(-1/2*LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E^2+1/6*LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E^3*(xx+1/2*pi-w)+1/6*m*g*I*cos(xx))*x1^2 \\
 & +1/J*(-1/24*m*g*I*sin(xx)+1/6*LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E^3-1/24*LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E^4*(xx+1/2*pi-w)*x1^3 \\
 & +1/J*(-1/120*m*g*I*cos(xx)-1/24*LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E^4+1/120*LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E^5*(xx+1/2*pi-w)*x1^4 \\
 & +1/J*(1/720*m*g*I*sin(xx)+1/120*LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E^5-1/720*LL*exp(-E*(xx+1/2*pi))*E^6*(xx+1/2*pi-w)*x1^5
 \end{aligned}$$

## APÊNDICE B

### Série de Taylor de Quinta Ordem para $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ - Caso Linearizado

Expansão de (2.68) por meio do *software* Matlab, em série de Taylor de quinta ordem

```

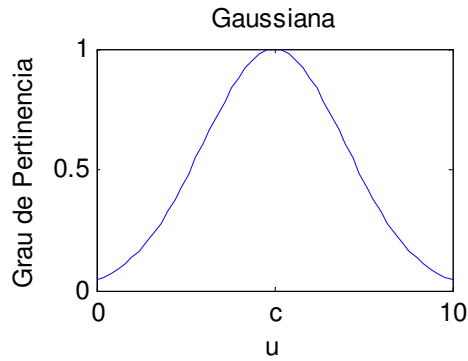
2000/1047/J.*(-m*g*1*sin(1047/2000)-Lambda*exp(-1047/2000*E)*exp(-
1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w))+(2000/1047/J*(-m*g*1*cos(1047/2000)...
-Lambda*exp(-1047/2000*E)*exp(-1/2*E*pi)+Lambda*exp(-1047/2000*E)*E*exp(-
1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w))-4000000/1096209/J*(-m*g*1*sin(1047/2000)...
-Lambda*exp(-1047/2000*E)*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w)))*(x1-
1047/2000)+(-4000000/1096209/J*(-m*g*1*cos(1047/2000)-Lambda*exp(-
1047/2000*E)...
*exp(-1/2*E*pi)+Lambda*exp(-1047/2000*E)*E*exp(-
1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w))+2000/1047/J*(Lambda*exp(-
1047/2000*E)*E*exp(-1/2*E*pi)-1/2*Lambda...
*exp(-1047/2000*E)*E^2*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-
w)+1/2*m*g*1*sin(1047/2000))+8000000000/1147730823/J*(-
m*g*1*sin(1047/2000)-Lambda...
*exp(-1047/2000*E)*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w)))*(x1-
1047/2000).^2+(-4000000/1096209/J*(Lambda*exp(-1047/2000*E)*E*exp(-
1/2*E*pi)-1/2*Lambda...
*exp(-1047/2000*E)*E^2*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-
w)+1/2*m*g*1*sin(1047/2000))+8000000000/1147730823/J*(-
m*g*1*cos(1047/2000)-Lambda*exp(-1047/2000*E)...
*exp(-1/2*E*pi)+Lambda*exp(-1047/2000*E)*E*exp(-
1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w))+2000/1047/J*(-1/2*Lambda*exp(-
1047/2000*E)*E^2*exp(-1/2*E*pi)+1/6*Lambda...
*exp(-1047/2000*E)*E^3*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-
w)+1/6*m*g*1*cos(1047/2000))-16000000000000/1201674171681/J*(-
m*g*1*sin(1047/2000)-Lambda...
*exp(-1047/2000*E)*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w)))*(x1-
1047/2000).^3+(32000000000000000/1258152857750007/J*(-m*g*1*sin(1047/2000)-
Lambda*exp(-1047/2000*E)...
*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w))-4000000/1096209/J*(-1/2*Lambda*exp(-
1047/2000*E)*E^2*exp(-1/2*E*pi)+1/6*Lambda*exp(-1047/2000*E)*E^3*exp(-
1/2*E*pi)...
*(1047/2000+1/2*pi-w)+1/6*m*g*1*cos(1047/2000))+2000/1047/J*(-
1/24*m*g*1*sin(1047/2000)+1/6*Lambda*exp(-1047/2000*E)*E^3*exp(-1/2*E*pi)-
1/24*Lambda...
*exp(-1047/2000*E)*E^4*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-
w))+8000000000/1147730823/J*(Lambda*exp(-1047/2000*E)*E*exp(-1/2*E*pi)-
1/2*Lambda*exp(-1047/2000*E)...
*E^2*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w)+1/2*m*g*1*sin(1047/2000))-
16000000000000/1201674171681/J*(-m*g*1*cos(1047/2000)-Lambda*exp(-
1047/2000*E)*exp(-1/2*E*pi)...
+Lambda*exp(-1047/2000*E)*E*exp(-1/2*E*pi)*(1047/2000+1/2*pi-w)))*(x1-
1047/2000).^4

```

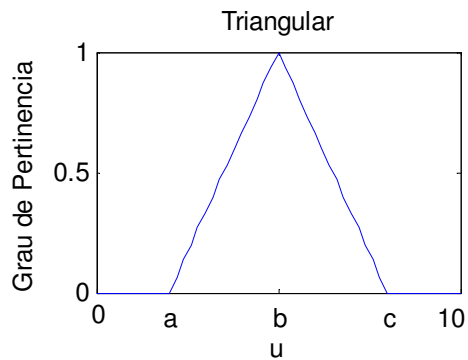


## APÊNDICE C

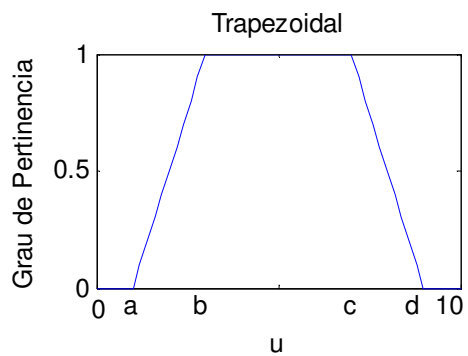
### Formas de Funções de Pertinência



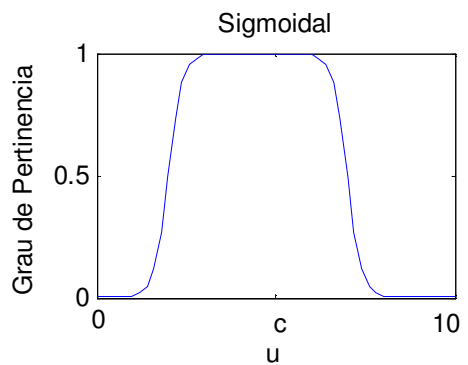
$$\mu(u) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-c}{\sigma}\right)^2\right]$$



$$\mu(u) = \max\left[\min\left(\frac{u-a}{b-a}, \frac{c-u}{c-b}\right), 0\right]$$



$$\mu(u) = \max\left[\min\left(\frac{u-a}{b-a}, \frac{d-u}{d-c}, 1\right), 0\right]$$



$$\mu(u) = \frac{1}{1 + \exp[-a(u-c)]}$$

sendo  $a, b, c$  e  $d \in \mathfrak{R}$ .

## APÊNDICE D

Parâmetros dos Consequentes do Modelo da Articulação do Paciente  
Paraplégico

**Tabela 3:** Parâmetros dos Consequentes do Modelo da Articulação do Paciente  
Paraplégico

Tempo (k-1)	Tempo (k)
-2,06E+00	-2,06E+00
-3,95E-01	-3,95E-01
1,31E+00	1,31E+00
2,65E+00	2,65E+00
-1,10E+00	-1,10E+00
1,38E+00	1,38E+00
-4,25E-02	-4,25E-02
7,27E-01	7,27E-01
4,40E-01	4,40E-01
5,47E-01	5,47E-01
4,88E-01	4,88E-01
5,20E-01	5,20E-01
5,77E-01	5,77E-01
4,16E-01	4,16E-01
6,64E-01	6,64E-01
3,73E-01	3,73E-01
6,58E-01	6,58E-01
4,18E-01	4,18E-01
5,91E-01	5,91E-01
4,89E-01	4,89E-01
5,33E-01	5,33E-01
5,23E-01	5,23E-01
5,23E-01	5,23E-01
5,23E-01	5,23E-01
5,23E-01	5,23E-01
5,23E-01	5,23E-01
5,23E-01	5,23E-01
5,23E-01	5,23E-01
5,23E-01	5,23E-01
-1,12E-01	-1,12E-01
3,00E-02	3,00E-02

*Continua...*

Tempo (k-1)	Tempo (k)
1,76E-01	1,76E-01
2,96E-01	2,96E-01
-1,63E-01	-1,63E-01
9,22E-02	9,22E-02

-3,43E-02	-3,43E-02
1,88E-02	1,88E-02
-2,60E-02	-2,60E-02
2,45E-02	2,45E-02
-1,93E-02	-1,93E-02
1,40E-02	1,40E-02
-9,24E-03	-9,24E-03
5,93E-03	5,93E-03
-3,42E-03	-3,42E-03
1,98E-03	1,98E-03
-9,37E-04	-9,37E-04
4,89E-04	4,89E-04
-9,26E-05	-9,26E-05
2,34E-05	2,34E-05
4,38E-06	4,38E-06
3,76E-05	3,76E-05
3,75E-05	3,75E-05
4,63E-07	4,63E-07
1,10E-06	1,11E-06
7,69E-06	7,53E-06

**Fonte:** o próprio autor