



Centro de Tecnologia e Urbanismo  
Departamento de Engenharia Elétrica

**Yuri Mendes Mostagi**

# **Detecção Sub-Ótima em Sistemas MIMO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Londrina, PR  
2012



Yuri Mendes Mostagi

# Detecção Sub-Ótima em Sistemas MIMO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Eletrônicos  
Especialidade: Sistemas de Telecomunicações

Orientador:  
Prof. Dr. Taufik Abrão

## Ficha Catalográfica

Mostagi, Yuri Mendes

Detecção Sub-Ótima em Sistemas MIMO. Londrina, PR, 2012.  
49 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de  
Londrina, PR. Departamento de Engenharia Elétrica

1. Sistemas de Telecomunicações. 2. Sistemas de Múltiplo  
Acesso. 3. Detecção I. Universidade Estadual de Londrina. Departa-  
mento de Engenharia Elétrica. Departamento de Engenharia Elétrica  
. II. Detecção Sub-Ótima em Sistemas MIMO.

Yuri Mendes Mostagi

# Detecção Sub-Ótima em Sistemas MIMO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Eletrônicos  
Especialidade: Sistemas de Telecomunicações

## Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Taufik Abrão  
Universidade Estadual de Londrina  
Orientador

---

Prof. Dr. Fábio Renand Durand  
Depto. de Engenharia Elétrica  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Campo Mourão, PR

---

Prof. Dr. Paulo Rogério Scalassara  
Depto. de Engenharia Elétrica  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Cornélio Procópio, PR

17 de maio de 2012

Aos meus familiares, pelos quais tenho grande admiração. E em especial à minha namorada, Daniela, pela companhia em todos os momentos.

# Agradecimentos

Ao Professor Taufik Abrão, meu orientador, que me guiou ao longo deste trabalho.

Aos professores e colegas que de alguma forma colaboraram com a elaboração da presente dissertação.

À Daniela, por sua compreensão, apoio, e por estar ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis.

# Resumo

Em sistemas com múltiplas antenas no transmissor e receptor (MIMO - *Multiple-input Multiple-output*), ocorre a degradação do desempenho no processo de detecção convencional, o qual está baseado apenas no processamento do sinal em um único correlacionador; em seguida, o receptor convencional procede à comparação do sinal à saída do filtro casado com os possíveis símbolos da constelação, determinando assim, a informação transmitida estimada, uma vez que o detector convencional negligencia os demais sinais interferentes presentes no canal MIMO.

Esta degradação ocorre devido à combinação dos efeitos da interferência do sinal entre antenas e da possível correlação entre os sinais recebidos com desvanecimento, entre outros. Assim, o receptor convencional torna-se ineficiente em sistemas que demandem alta vazão (*throughput*) de dados, por exemplo em sistemas MIMO no modo ganho de multiplexação, associado ao atendimento de qualidade de serviço (QoS) mais restritiva.

A solução proposta para resolver este impasse é a utilização do detector de máxima verossimilhança (MLD), o qual utiliza informações de todas as antenas de forma a melhorar o processo de detecção. Porém, o detector ótimo é impraticável devido ao fato de sua complexidade aumentar exponencialmente em relação ao número de antenas e a ordem da constelação. Assim, o foco de interesse deste trabalho são os detectores sub-ótimos de busca guiada para sistemas MIMO baseados na função de máxima verossimilhança (ML).

Neste trabalho é realizada uma análise comparada do compromisso desempenho  $\times$  complexidade e da robustez face aos erros de estimativa nos coeficientes de canal de detectores de busca guiada promissores, incluindo o Detector Esférico (SD), o detector baseado na decomposição QR combinado ao algoritmo M (QRD-M) e o Detector de Busca Gulosa (*Greedy Search Detector* - GSD). Adicionalmente, neste trabalho é proposto um detector híbrido combinando-se as características promissoras do SD e do QRD-M sendo este submetido à mesma análise dos outros detectores.

Finalmente, este trabalho propõe de forma inovadora o uso da técnica de Redução Treliça (LR - *Lattice Reduction*) combinado aos detectores MIMO analisados. A técnica LR realiza uma transformação na matriz de canal, tornando-a mais próxima da ortogonalidade, o que permite a utilização de detectores menos complexos, como por exemplo o QRD-M com baixos valores de  $M$ , ou ainda proporciona a redução na complexidade final de detectores que exigem mais recursos de sistema, como o SD.

# Abstract

In multiple-input-multiple-output (MIMO) systems, there is a performance degradation using conventional detector (CD), based on the processed signal of only one correlator, that compares the received signal with the possible symbols, determining in this way, an estimated transmitted information, since the CD neglects the other interfering signals present in the MIMO channel.

This degradation occurs due to a combination of effects of interference of the signal among antennas and a possible correlation between the faded received signals, and other effects. In this way the CD becomes inefficient in systems that demands high data throughput, associated to a restrictive quality of service (QoS).

The proposed solution to this impasse is the use of a maximum likelihood detector (MLD), that utilizes the information of all antennas in a way to improve the individual detection of each one and, thus, combine in an efficient manner the signals of each antenna (spatial diversity), or utilize each antenna to transmit different symbols to increase the data throughput (multiplexation gain).

However, the optimal detector is impractical due to the fact that its complexity increases exponentially in relation to the number of antennas, therefore the focus of interest in this work are sub-optimal guided search detectors for MIMO systems based in the maximum likelihood function. Promising guided search detectors include the Sphere Detector (SD), the QR decomposition and M algorithm based detector (QRD-M) and the Greedy Search Detector (GSD).

In this work a comparative analysis of the trade-off performance  $\times$  complexity and channel errors estimation robustness for the promising SD, QRD-M and GSD MIMO detectors. Furthermore, in this work a hybrid MIMO detector combining the characteristics of the SD and QRD-M is also proposed, which is subjected to the same analysis of the other detectors.

Finally, in this work the Lattice Reduction (LR) technique was combined to MIMO detectors in an innovative way. Indeed, with the LR procedure, the MIMO channel matrix transformation results closer to the orthogonality condition, which allows the use of less complex detectors, such as QRD-M with lower values for the  $M$  parameter, or is able to reduce the MIMO detectors complexity that usually demand more system resources, as the SD MIMO detector.



# Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

Convenções e Lista de Símbolos

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Disseminações . . . . .	3
1.2	Organização dos Capítulos . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Modelo do Sistema</b>	<b>5</b>
2.1	Coefficientes do Canal com Erro na Estimativa . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Detectores de Busca Guiada para Sistemas MIMO</b>	<b>8</b>
3.1	Detector de Máxima Verossimilhança . . . . .	8
3.2	Redução Treliça . . . . .	9
3.2.1	Complexidade Computacional da Redução Treliça . . . . .	11
3.3	Detector MIMO Sub-ótimo por Decomposição QR . . . . .	11
3.3.1	O Algoritmo $M$ . . . . .	12
3.3.2	Complexidade Computacional do QRD-M . . . . .	13
3.4	Detector MIMO Sub-ótimo Esférico . . . . .	14
3.4.1	O Raio da Esfera . . . . .	17
3.4.2	Complexidade Computacional do Detector Esférico . . . . .	18
3.5	Detector MIMO Sub-ótimo <i>Greedy</i> . . . . .	19

3.5.1	Complexidade Computacional do Detector <i>Greedy</i> -MIMO .	21
<b>4</b>	<b>Detector MIMO de Busca Guiada Híbrido</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Análise de Desempenho, Complexidade e Robustez</b>	<b>26</b>
5.1	Análise de Desempenho e Complexidade dos Detectores Auxiliados por Redução Treliça . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>38</b>
	<b>Anexo A – Distribuição dos Erros nas Estimativas de Coeficientes     de Canal</b>	<b>40</b>
	<b>Anexo B – Matriz Pseudo-inversa</b>	<b>41</b>
	<b>Anexo C – Taxa de Erro de Bit e de Símbolo</b>	<b>43</b>
	<b>Referências</b>	<b>46</b>

# Lista de Figuras

2.1	Figura esquemática do sistema MIMO. . . . .	5
3.1	Exemplo de funcionamento do algoritmo $M$ . . . . .	13
3.2	Hiperesfera de busca do detector esférico. . . . .	15
3.3	Árvore de busca do Detector Esférico. . . . .	16
3.4	Árvore de busca do SD dotado de sistema de <i>pruning</i> . . . . .	19
3.5	Gráfico de fluxo do GSD. . . . .	20
3.6	Exemplo de funcionamento do estágio de redução de nós do GSD. . . . .	21
4.1	Diagrama em blocos do HGS . . . . .	25
5.1	Complexidade a partir do tempo computacional equivalente (SNR). . . . .	28
5.2	Complexidade a partir do tempo computacional equivalente (Antenas) . . . . .	28
5.3	BER para os detectores QRD-M, GSD, SD e MLD. . . . .	29
5.4	Desempenho para os detectores sub-ótimos de busca guiada - 4 antenas. . . . .	31
5.5	Desempenho para os detectores sub-ótimos de busca guiada - 8 antenas. . . . .	32
5.6	Desempenho para os detectores sub-ótimos de busca guiada - 12 antenas. . . . .	33
5.7	Desempenho detectores auxiliados por LR . . . . .	34
5.8	Complexidade equivalente detectores auxiliados por LR . . . . .	35
5.9	Desempenho do SD e LR-SD - 64-QAM . . . . .	36
5.10	Complexidade equivalente SD e LR-SD com $m = n = 2$ e 64-QAM . . . . .	36
5.11	Complexidade equivalente SD e LR-SD com $m = n = 4$ e 64-QAM . . . . .	37
A.1	Curvas de desempenho do detector MLD. . . . .	40

# Lista de Tabelas

4.1	Complexidade em termos de operações Somas Reais para o QRD-M-MIMO e SD-MIMO. . . . .	24
5.1	Operações Somas Reais. . . . .	27

# Lista de Abreviaturas e Siglas

<b>BER</b>	Bit Error Rate
<b>BPSK</b>	Binary Phase-Shift Keying
<b>GSD</b>	Greedy Search Detector
<b>GSD-MIMO</b>	Guided Search Detectors for Multiple-Input-Multiple-Output Systems
<b>HGS</b>	Hybrid Guided Search
<b>i.i.d</b>	Independente e Identicamente Distribuido
<b>LLL - <math>L^3</math></b>	Redução de Lenstra-Lenstra-Lovász
<b>LR</b>	Lattice Reduction
<b>MIMO</b>	Multiple-Input-Multiple-Output
<b>ML</b>	Maximum-likelihood
<b>MLD</b>	Maximum-likelihood Detector
<b>MLSD</b>	Maximum-likelihood Sequence Detector
<b>QAM</b>	Quadrature-Amplitude Modulation
<b>QPSK</b>	Quadrature Phase-Shift Keying
<b>QoS</b>	Quality of Service
<b>QR</b>	Decomposição QR
<b>QRD-M</b>	Detector baseado em detecção QR e algoritmo M
<b>SD</b>	Sphere Detector
<b>SER</b>	Symbol Error Rate
<b>SISO</b>	Single-Input-Single-Output
<b>SNR</b>	Signal-to-Noise-Ratio
<b>ORE</b>	Operações Reais Equivalentes

# Convenções e Lista de Símbolos

Na notação das fórmulas, as seguintes convenções foram utilizadas:

- letras maiúsculas caligráficas são conjuntos, exemplo:  $\mathcal{C}$ ;
- letras maiúsculas em negrito são matrizes, exemplo:  $\mathbf{H}, \mathbf{Q}$ ;
- letras minúsculas em negrito são vetores, exemplo:  $\mathbf{y}, \mathbf{s}$ ;
- $\Re\{\cdot\}$  Operador parte Real;
- $\Im\{\cdot\}$  Operador parte Imaginária;
- $\mathcal{R}(\cdot)$  Operador Espaço vetorial de uma matriz;
- $\{\cdot\}^T$  Operador Transposto de uma matriz;
- $\{\cdot\}^H$  Operador Conjugado Transposto de uma matriz;
- $\{\cdot\}^+$  Operador Pseudo-Inverso de uma matriz.

Os seguintes símbolos serão utilizados:

---

símbolo	descrição
$T_s$	Período de símbolo
$\mathcal{C}$	Ordem da modulação
$m$	Quantidade de antenas transmissoras
$n$	Quantidade de antenas receptoras
$\mathbf{s}$	Vetor de símbolos transmitidos
$\mathbf{y}$	Vetor de sinais recebidos
$\mathbf{H}$	Matriz dos coeficientes de canal
$\mathbf{v}$	Ruído aditivo branco
$\sigma^2$	Variância
$\mathbf{H}'$	Matriz dos coeficientes de canal com erro na estimativa
$\varepsilon_{\text{mod}}$	Representa o erro na estimativa do módulo do coeficiente de canal

*continua...*

---

símbolo	descrição
$\varepsilon_{\text{ph}}$	Representa o erro na estimativa da fase do coeficiente de canal
$\hat{\mathbf{s}}$	Vetor de símbolos transmitidos estimado
$\ \cdot\ ^2$	Distância Euclidiana
$\delta$	Parâmetro utilizado no algoritmo da redução LLL, determina a qualidade da solução
$\mathbf{T}$	Matriz uni-modular obtida através da redução LLL
$\mathbf{z}$	Vetor de símbolos transmitidos com base reduzida obtido através da redução LLL
$\tilde{\mathbf{H}}$	Matriz dos coeficientes de canal com base reduzida obtida através da redução LLL
$C_{\Sigma \text{ eq}}$	Complexidade em termos de somas reais equivalentes
$\mathbf{Q}$	Matriz ortogonal obtida através da decomposição QR
$\mathbf{R}$	Matriz triangular superior obtida através da decomposição QR
$\mathbf{P}$	Projeção ortogonal em $\mathcal{R}(\mathbf{H})$
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$\mathbf{x}$	Vetor utilizado para simplificar a expressão $\mathbf{Q}^H \mathbf{y}$ , sendo, então, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^H \mathbf{y}$
$M$	Parâmetro dos detectores QRD-M e HGS que determina a quantidade de soluções que o algoritmo deve escolher
$\mathcal{O}(\cdot)$	Ordem de complexidade
$d$	Parâmetro que representa o raio de busca do detector esférico
$\varsigma$	Variável utilizada para representar a dependência da complexidade do SD em relação às condições do canal ou nível de ruído
$\gamma$	Representa a relação sinal-ruído (SNR)
$\hat{\mathbf{s}}_B$	Estimativa de Babai
$\xi$	Representa o limiar no qual o HGS deverá trocar o sistema de detecção
$\varepsilon$	Erro na estimativa dos coeficientes de canal para módulo e fase
$D$	Ordem de diversidade
$P_e$	Probabilidade de erro de bit
$P_E$	Probabilidade de erro de símbolo
$b$	Número de bits em um símbolo de uma dada técnica de modulação

---

# 1 Introdução

Em sistemas com múltiplas antenas no transmissor e receptor (MIMO - *Multiple-input Multiple-output*), ocorre degradação do desempenho no processo de detecção convencional, o detector convencional consiste de um demodulador que correlaciona o sinal recebido com uma réplica sincronizada da forma de onda do sinal da antena de interesse e então separa o sinal de interesse dos demais sinais interferentes (oriundos de outras antenas). Baseado apenas no sinal vindo de um único correlacionador, o detector convencional negligencia a presença dos outros sinais interferentes presentes no canal MIMO ou, equivalentemente, assume que o ruído agregado mais a interferência em cada antena receptora são tratados como ruído Gaussiano branco.

Esta degradação ocorre devido à combinação dos efeitos da interferência do sinal entre antenas, da possível correlação entre os sinais recebidos com desvanecimento, entre outros. Assim, o receptor convencional torna-se ineficiente em sistemas que demandem alta vazão (*throughput*) de dados. O desempenho do detector convencional ou a capacidade do sistema serão degradados substancialmente quando a diversidade espacial proporcionada pelas múltiplas antenas não puder ser aproveitada eficientemente, devido à correlação dos desvanecimentos do canal MIMO. Para aumentar o *throughput* do sistema MIMO, deve-se combinar à diversidade espacial outros tipos de diversidade, tais como a temporal e a de frequência, além do aproveitamento das condições instantâneas de canal para alterar dinamicamente a ordem de modulação (modulação adaptativa).

A solução proposta na literatura para resolver este impasse é a utilização de detectores de máxima verossimilhança (MLD - *Maximum-Likelihood Detector*), os quais utilizam informações de todas as antenas de forma a melhorar a detecção individual em cada uma e assim combinar de forma eficiente os sinais de cada antena (diversidade espacial), ou utilizar cada antena para transmitir diferentes símbolos de modo a aumentar a vazão de dados (ganho por multiplexação), proporcionando assim vantagens sobre o sistema convencional. Porém o detector ótimo, que consiste de um receptor convencional seguido de um detector de



sequência de máxima verossimilhança (MLSD - *Maximum-Likelihood Sequence Detector*), é impraticável devido ao fato de sua complexidade aumentar exponencialmente em relação ao número de antenas (ou usuários). Por isso novos métodos vêm sendo propostos a fim de se contornar estas desvantagens. Existe na literatura uma série de propostas de detectores sub-ótimos multiusuários, baseados em estruturas lineares para canais de entrada e saída única (SISO *Single-input Single-output*) (VERDÚ, 1998) e lineares SISO (VERDÚ, 1998; JESZENSKY; ABRÃO, 2001), bem como para canais MIMO (VIKALO; HASSIBI, 2005; LARSSON, 2009).

O foco de interesse deste trabalho são os detectores sub-ótimos de busca guiada para sistemas MIMO baseados na função de máxima verossimilhança (GSD-MIMO - *guided search detectors for MIMO systems*). Alguns dos detectores de busca guiada que vem se destacando atualmente são o Detector Esférico (SD), o detector baseado em decomposição QR e algoritmo M (QRD-M) e o Detector de Busca Gulosa (GSD - *Greedy Search Detector*).

Será realizada um análise comparada do compromisso desempenho  $\times$  complexidade e robustez em face à erros de estimativa nos coeficientes de canal. O desempenho será analisado em relação à BER (*Bit Error Rate*)  $\times$  SNR (*Signal-to-Noise Ratio*), a complexidade computacional será caracterizada pelo número de operações reais necessárias. E também será proposto um detector híbrido baseado no SD e no QRD-M.

O princípio de funcionamento do SD foi mostrado em (FINCKE; POHST, 1985); em (VIKALO; HASSIBI, 2002) foi proposto a utilização do algoritmo SD na detecção em sistemas MIMO; (AGRELL et al., 2002), (DAMEN; GAMAL; CAIRE, 2003) e (KAILATH; VIKALO; HASSIBI, 2005) exploraram de maneira mais profunda as características e potencialidades do detector SD. Enquanto que em (BARBERO, 2008) e (VIKALO; HASSIBI, 2005) foi analisada a complexidade do SD e formas de reduzi-la sem comprometer substancialmente seu desempenho.

O detector para canais MIMO baseado na decomposição QR (QRD-M) foi proposto inicialmente em (JONG; WILLINK, 2002); em seguida, modificações ao algoritmo original foram propostas em (YUE et al., 2003; CHIN, 2005; PENG et al., 2007; KIM; CHOI, 2008; JIAN; YI; SHI, 2009) a fim de se diminuir sua complexidade.

Em (ALRUSTAMANI; VOJCIC, 2000), o detector *greedy* foi empregado na detecção multiusuário em sistemas de múltiplo acesso. Em seguida, o GSD foi utilizado na detecção sob diversas configurações de canal (ALRUSTAMANI; VOJCIC, 2002) (ALRUSTAMANI; VOJCIC; STEFANOV, 2002). Em canais MIMO, o GSD

foi empregado no problema de detecção sub-ótima em (WU; KUNG, 2004). Finalmente, detecção com saídas *soft* em canais MIMO foi analisada em (SUN; CAVALLARO, 2009).

A Redução Treliça (LR - *Lattice Reduction*) é um conceito matemático utilizado para resolver diversos problemas envolvendo treliças de pontos. No caso do processamento de sinais, a constelação formada pelos símbolos de um sinal modulado pode ser visto como uma treliça; desta forma, com a LR busca-se melhores formas de se representar uma dada treliça (WÜBBEN et al., 2011). No universo da detecção de sinais em canal MIMO, a LR pode ser utilizada para melhorar o condicionamento da matriz do canal, permitindo-se assim que se use detectores mais simples, e conseqüentemente menos complexos computacionalmente, mantendo-se um desempenho aceitável. A LR teve sua utilização em sistemas MIMO proposta em (YAO; WORNELL, 2002). Em (NIU; LU, 2008), foi realizada uma análise comparada de desempenho e complexidade computacional entre dois detectores auxiliados por LR e outros detectores clássicos da literatura. Já em (GAN; LING; MOW, 2009) um método de redução de treliça complexo adequado para sistemas MIMO foi proposto. Em (LING; MOW; GAN, 2009) é explorado e proposto um método LR de reduzida complexidade. Por fim, em (LING, 2011) uma análise mais aprofundada é realizada.

## 1.1 Disseminações

### Disseminações Diretamente Relacionadas ao Tema

1. Mostagi, Y. M.; Abrão, T. Detectores Guiados para Sistemas MIMO: Abordagens Esférica, Decomposição QR e Greedy.

Apresentado no *XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*. Outubro de 2011.

Neste trabalho é realizada uma análise do compromisso desempenho  $\times$  complexidade de três promissores detectores quase ótimos (Detector Esférico, QRD-M e Detector de Busca Gulosa (GSD)) em sistema MIMO.

2. Mostagi, Y. M.; Abrão, T. Hybrid Guided Search Detector for MIMO Systems.

Apresentado no *International Microwave and Optoelectronics Conference*. Novembro de 2011.

Neste artigo é proposto um detector MIMO híbrido. A partir de limiares

de SNR, o detector híbrido chaveia seu modo de operação, implementando um detector do tipo SD ou o QRD-M para a detecção de um sinal.

3. Mostagi, Y. M.; Abrão, T. *Detectors de Busca Guiada para Sistemas MIMO Auxiliados por Redução Treliça*.

Submetido para a Revista IEEE Latin American. Este trabalho faz uma análise dos detectores SD, QRD-M e Greedy auxiliados por Redução Treliça.

4. Mostagi, Y. M.; Abrão, T. *Guided Search MIMO Detectors Aided by Lattice Reduction*.

Submetido para *XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*. Este trabalho faz uma análise dos detectores SD, QRD-M e Greedy auxiliados por Redução Treliça.

### **Disseminações Indiretamente Relacionadas ao Tema**

5. Jacob, J. L.; Mostagi, Y. M.; Abrão, T. Guided Local Search in High Performance Detectors for MIMO Systems. *COGNITIVE 2010 – The Second International Conference on Advanced Cognitive Technologies and Applications*, Agosto de 2010. p. 36-43.

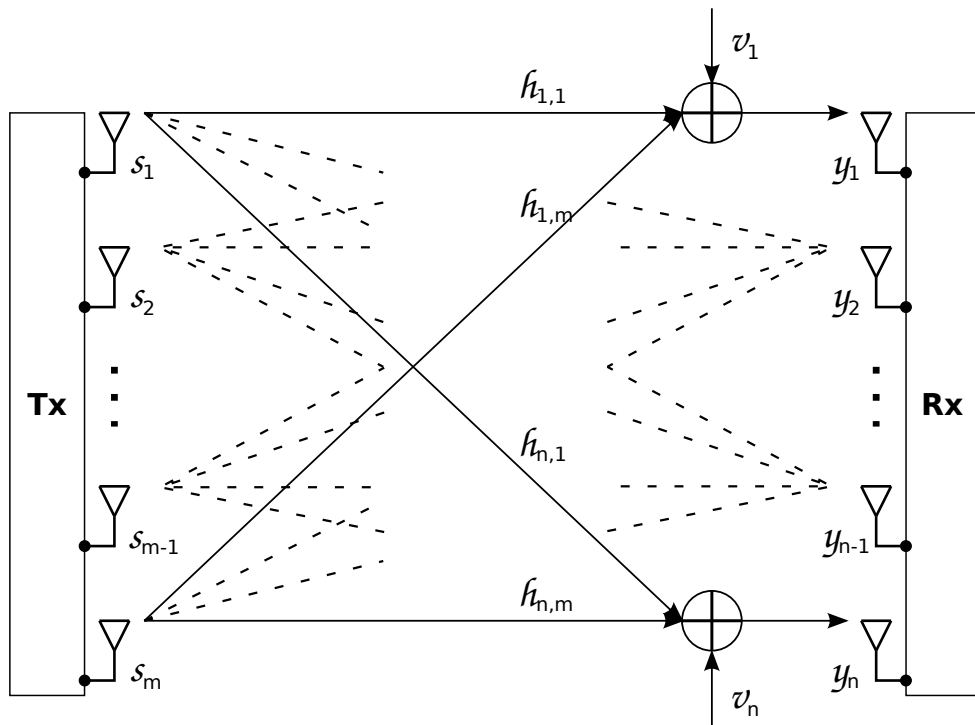
Neste artigo é realizada uma análise de topologias eficientes de detecção MIMO sem espalhamento em canais realistas em diversas configurações.

## **1.2 Organização dos Capítulos**

O Capítulo 2 apresenta e define o modelo do sistema, além de explicar como será adicionado o erro nas estimativas dos coeficientes de canal com o intuito de simular informações imperfeitas do estado do canal. O Capítulo 3 apresenta o detector ML e também faz uma revisão da teoria relativa à Redução Treliça e aos três detectores da literatura analisados. Já o Capítulo 4 explica o funcionamento do detector MIMO híbrido proposto neste trabalho. No Capítulo 5 é desenvolvida uma análise comparada de desempenho, complexidade e robustez envolvendo os três detectores MIMO estabelecidos na literatura, o detector MIMO híbrido proposto neste trabalho, bem como também uma análise de desempenho e complexidade dos detectores auxiliados pela Redução Treliça. Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as principais conclusões obtidas com o realização deste trabalho.

## 2 Modelo do Sistema

O canal MIMO linear é definido por um transmissor genérico que transmite simultaneamente (em um período de símbolo,  $T_s$ )  $m$  símbolos,  $s_1, \dots, s_m$ , de um alfabeto finito ou constelação  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ . No receptor, tem-se  $n$  sinais,  $y_1, \dots, y_n$ , um em cada antena receptora, recebidos como uma combinação linear dos  $m$  símbolos de entrada mais o ruído aditivo, o esquema genérico do sistema MIMO pode ser visto na figura 2.1. Assume-se que a quantidade de sinais recebidos nas  $n$  antenas



**Figura 2.1:** Figura esquemática do sistema MIMO com  $m$  antenas transmissoras e  $n$  antenas receptoras.

é maior ou igual à quantidade dos símbolos transmitidos nas  $m$  antenas, ou seja,  $n \geq m$ . Com isto, garante-se que as equações utilizadas no processo de detecção não serão subdeterminadas (JALDÉN, 2004). Convenientemente, o canal MIMO linear é descrito na forma matricial como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (2.1)$$

sendo  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  a matriz do canal e  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  o ruído aditivo. Os vetores  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^m$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  representam os símbolos transmitidos e os sinais recebidos, respectivamente (LARSSON, 2009). A equação (2.1) pode ser expandida para melhor compreensão do sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \dots & h_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n,1} & \dots & h_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Se  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{v}$  são matrizes e vetores de valores complexos, então podem ser convenientemente re-escritos como:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{H}\} & -\Im\{\mathbf{H}\} \\ \Im\{\mathbf{H}\} & \Re\{\mathbf{H}\} \end{bmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{s}\} \\ \Im\{\mathbf{s}\} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{y}\} \\ \Im\{\mathbf{y}\} \end{bmatrix} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{v}\} \\ \Im\{\mathbf{v}\} \end{bmatrix}$$

sendo  $\Re\{\cdot\}$  e  $\Im\{\cdot\}$  os operadores partes real e imaginária, respectivamente (HUNG; SANG, 2006).

Geralmente, na literatura, a matriz  $\mathbf{H}$  terá coeficientes perfeitamente conhecidos no receptor. Neste trabalho, porém, é analisado o impacto dos erros nas estimativas dos coeficientes sobre o desempenho do sistema, conforme descrito na próxima subseção. A matriz  $\mathbf{H}$  será constituída por amostras de valores complexos descritos por uma distribuição Rayleigh para o módulo e uniforme para a fase. Os símbolos transmitidos são modelados como variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d*) sobre o alfabeto da constelação  $\mathcal{C}$ . O ruído é modelado por uma distribuição Gaussiana complexa circularmente simétrica, de média zero e variância  $\sigma^2$ . O objetivo do receptor é estimar  $\mathbf{s}$  a partir de  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{H}$ .

## 2.1 Coeficientes do Canal com Erro na Estimativa

A matriz com os coeficientes de canal,  $\mathbf{H}$ , terá erros nas estimativas, sendo expressa por  $\mathbf{H}'$ ; seus elementos são definidos por

$$H'_{n,m} = \beta'_{n,m} e^{j\phi'_{n,m}}, \quad n = 1, \dots, N; \quad m = 1, \dots, M \quad (2.3)$$

Os erros nos coeficientes de canal serão modelados através de distribuições uniformes, para módulo,  $\varepsilon_{\text{mod}}$ , e para a fase,  $\varepsilon_{\text{ph}}$ . Assim,  $\beta'$ , e  $\phi'$  são expressos

como

$$\beta'_{n,m} \sim \mathcal{U} \left[ \beta_{n,m} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{\text{mod}}}{100} \right), \beta_{n,m} \left( 1 + \frac{\varepsilon_{\text{mod}}}{100} \right) \right] \quad (2.4)$$

$$\phi'_{n,m} \sim \mathcal{U} \left[ \phi_{n,m} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{\text{ph}}}{100} \right), \phi_{n,m} \left( 1 + \frac{\varepsilon_{\text{ph}}}{100} \right) \right] \quad (2.5)$$

Uma vez que neste trabalho será utilizado somente  $\varepsilon_{\text{mod}} = \varepsilon_{\text{ph}}$ , deste ponto em diante referir-nos-emos aos erros nas estimativas de canal, tanto para o módulo quanto para a fase apenas como  $\varepsilon$ .

Como explicitado anteriormente, neste trabalho, foi utilizada distribuição Uniforme para modelar o erro na estimativa dos coeficientes de canal. Na literatura, é comum que se modele os erros na estimativa dos coeficientes de canal também a partir de distribuições Gaussianas. No entanto, pode-se estabelecer uma equivalência relativa entre os dois modelos. Este assunto é discutido no anexo A.

## 3 Detectores de Busca Guiada para Sistemas MIMO

Neste capítulo é realizada uma revisão dos principais detectores de busca guiada aplicáveis a sistemas MIMO, bem como discute-se brevemente os conceitos de redução treliça (LR) e máxima verossimilhança (ML) aplicáveis a canais e à detecção MIMO, respectivamente.

### 3.1 Detector de Máxima Verossimilhança

O detector de máxima verossimilhança ou detector ótimo operacionaliza, a partir da equação (2.1), o teste de todas as possibilidades de símbolos transmitidos em cada antena, ou seja, aplica todos os possíveis valores de  $\mathbf{s}$  à uma função de minimização, estimando assim o símbolo transmitido, sendo o escolhido aquele que apresentar a menor distância Euclidiana em relação ao sinal recebido. Esta função de minimização é expressa a seguir

$$\hat{\mathbf{s}} = \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{C}^m} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 \quad (3.1)$$

sendo  $\hat{\mathbf{s}}$  o vetor de informação transmitido estimado,  $\mathbf{y}$  o vetor recebido,  $\mathbf{H}$  a matriz do canal,  $\mathbf{s}$  o vetor de informação candidato,  $\mathcal{C}$  a dimensão do espaço de sinais (tamanho da constelação) e  $\|\cdot\|^2$  é a distância Euclidiana.

A equação (3.1) pode ser melhor entendida a partir do exemplo numérico mostrado a seguir, neste exemplo é utilizado um canal MIMO com  $m = n = 2$  e modulação BPSK (*Binary Phase-Shift Keying*),  $\mathcal{C} = 2$ . Considerando que o vetor de informação  $\mathbf{s}$ , a matriz do canal  $\mathbf{H}$  e o vetor de ruído aditivo  $\mathbf{v}$  sejam, respectivamente:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0,38 + j0,22 & -1,59 - j0,30 \\ 1,29 - j0,92 & 0,60 + j0,24 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1,27 - j0,48 \\ 0,98 + j1,078 \end{bmatrix}$$

Assim, a partir da equação (2.1) é possível obter o vetor recebido  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3,25 + j0,05 \\ 1,67 - j0,08 \end{bmatrix}$$

Considerando, neste exemplo, que a matriz de canal seja perfeitamente conhecida no receptor, através da equação (3.1), o detector ML realiza o teste de todas as possibilidades de vetores-candidatos a fim de encontrar aquele que resulta na menor distância Euclidiana e então o escolhe como a solução do problema; numericamente, a distância Euclidiana para cada vetor-candidato resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3,98 & \mathbf{s}_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 17,52 \\ \mathbf{s}_3 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 34,79 & \mathbf{s}_4 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 20,37 \end{aligned}$$

Assim, o vetor de menor distância Euclidiana será selecionado como o vetor recebido estimado  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_1$ , sendo este, neste simples exemplo numérico, idêntico ao vetor transmitido  $\mathbf{s}$ .

A partir deste exemplo, torna-se evidente a complexidade apresentada pelo MLD. Neste caso, combinando-se modulação BPSK, e  $m = n = 2$  antenas, há quatro vetores-candidatos de dimensão 2. Em um sistema com  $m = n = 3$  antenas, a quantidade de vetores-candidatos de dimensão 3 saltaria para oito; para  $m = n = 4$  este número seria dezesseis, ou seja, este método resulta em complexidade exponencial em relação ao número de antenas e ao tamanho da constelação. Se o tamanho da constelação em cada componente de  $\mathbf{s}$  é  $\mathcal{C}$  (por exemplo, na modulação QPSK,  $\mathcal{C} = 4$ ) e existem  $m$  antenas transmissoras, o detector deve fazer uma busca sobre um conjunto de tamanho  $\mathcal{C}^m$ . Em modulações de elevada ordem (16-QAM ou maior), essa complexidade se torna proibitiva mesmo para um número mediano de antenas transmissoras (CHEN, 2004).

## 3.2 Redução Treliça

A Redução Treliça é um conceito matemático utilizado para resolver diversos problemas envolvendo treliças de pontos. No caso do processamento de sinais, a constelação formada pelos símbolos de um sinal modulado pode ser visto como uma treliça; desta forma, com o LR busca-se melhores formas de se representar uma dada treliça. No universo da detecção de sinais em canal MIMO, a LR pode ser utilizada para melhorar o condicionamento da matriz do canal, permitindo-se



assim que se use detectores mais simples, e conseqüentemente menos complexos computacionalmente, mantendo-se um desempenho aceitável.

Na fase de pré-deteção, ou seja, antes do processo de deteção ter início, realiza-se a redução treliça, a qual gera uma matriz unimodular que multiplicada por  $\mathbf{H}$  fornecerá como resultado uma matriz de coeficientes de canal modificada cujas colunas apresentam a condição de quase-ortogonalidade; isto se deve ao fato desta representar uma base de sinais de menor ordem em relação à matriz  $\mathbf{H}$  original (WÜBBEN et al., 2011).

Existem inúmeras definições de redução treliça, dependendo do critério de redução adotado. Algumas dessas técnicas incluem: a redução de Minkowski (MINKOWSKI, 1886, 1891, 1896), a redução de Hermite-Korkine-Zolotareff (HERMITE, 1850; KORKINE; ZOLOTAREFF, 1873), a redução de Gauss (GAUSS, 1889), a redução de Lenstra-Lenstra-Lovász (LENSTRA; LENSTRA; LOVÁSZ, 1982; NGUYEN; VALÉE, 2010), a redução de Seysen (SEYSEN, 1993) e a redução de Brun (BRUN, 1919, 1920).

A redução de Lenstra-Lenstra-Lovász (LLL ou  $L^3$ ), segundo (WÜBBEN et al., 2011), apresenta um bom compromisso entre a qualidade dos resultados e complexidade; por isso o algoritmo LLL foi escolhido para ser analisado aqui. O LLL utiliza-se da decomposição QR e de reflexões, translações e trocas de colunas da matriz que se deseja reduzir, de forma iterativa até que se obtenha uma base reduzida de interesse.

O algoritmo LLL depende do parâmetro  $\delta$ , com  $\frac{1}{4} < \delta \leq 1$ . A escolha do parâmetro  $\delta$  afeta a qualidade da base reduzida e a complexidade computacional. Maiores valores de  $\delta$  resultam em bases melhores ao preço de uma maior complexidade computacional, uma escolha comum é  $\delta = \frac{3}{4}$  (WÜBBEN et al., 2011).

Assim, através do algoritmo LLL obtém-se a matriz unimodular <sup>1</sup>  $\mathbf{T}$ , com a qual é obtida a transformação do vetor de símbolos transmitidos,  $\mathbf{s}$ , bem como a transformação da matriz de coeficientes de canal,  $\mathbf{H}$  para uma base reduzida:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{s} \quad (3.2)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{HT} \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Uma matriz unimodular é formada apenas por valores inteiros e seu determinante será sempre igual a 1 ou -1.

Através da equação (3.2) e da equação (3.3) tem-se, então, a forma matricial do canal MIMO com a matriz de canal de base reduzida  $\tilde{\mathbf{H}}$ ; para melhor compreensão, tem-se:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{y} = (\mathbf{HT}) (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{s}) + \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{z} + \mathbf{v} \quad (3.4)$$

Assim, tendo esta nova forma matricial para descrever o canal, por conseguinte, partindo-se da equação (3.1) tem-se uma nova função de minimização para o detector MLD e para os outros detectores aqui analisados:

$$\hat{\mathbf{s}} = \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{C}^m} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 \Rightarrow \hat{\mathbf{z}} = \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{C}^m} \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{z}\|^2 \quad (3.5)$$

Assim, a partir da inspeção da equação (3.5), pode-se afirmar que todos os detectores MIMO aqui analisados podem se beneficiar da associação com a técnica de redução treliça. As vantagens e desvantagens desta associação serão apresentadas no Capítulo 5.

### 3.2.1 Complexidade Computacional da Redução Treliça

O método escolhido para realizar a Redução Treliça foi o de Lenstra-Lenstra-Lovász (LLL). O algoritmo proposto em (LENSTRA; LENSTRA; LOVÁSZ, 1982) utiliza-se da decomposição QR, além de algumas operações de reflexões, translações e trocas de colunas da matriz alvo. Assim, a complexidade da LR, em termos de somas reais equivalentes,  $C_{\Sigma \text{ eq}}$ , é dominada pela complexidade da decomposição QR, equação (3.6)

$$C_{\Sigma \text{ eq}} = \frac{2}{3}m^3 + 29m^2 + \frac{5}{3}m - 3 \quad (3.6)$$

## 3.3 Detector MIMO Sub-ótimo por Decomposição QR

Partindo da equação (3.1), aplica-se a decomposição **QR** (HORN; JOHNSON, 1985) (STEWART, 1998) à matriz do canal  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

sendo  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{Q}$  uma matriz ortogonal,  $\mathbf{R}$  uma matriz triangular superior e  $\mathbf{0}$  uma matriz de zeros, com dimensão  $(n - m) \times m$ . A matriz de

zeros será utilizada em sistemas em que a quantidade de antenas transmissoras é diferente da quantidade de antenas receptoras afim de que se possa realizar as multiplicações matriciais, como o sistema analisado neste trabalho utiliza-se de mesma quantidade de antenas transmissoras e receptoras a matriz de zeros é dispensável.

A decomposição **QR** de **H** é uma redução ortogonal para uma forma triangular superior (GOLUB; LOAN, 1996). Da relação  $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$  e da não singularidade de **R**, tem-se que as colunas de **Q** formam uma base ortonormal para  $\mathcal{R}(\mathbf{H})$ , sendo  $\mathcal{R}(\cdot)$  o operador espaço vetorial de uma matriz. Assim, a matriz  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$  é a projeção ortogonal em  $\mathcal{R}(\mathbf{H})$ .

Note que  $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , sendo  $\{\cdot\}^H$  o operador conjugado transposto e **I** a matriz identidade. Assim, pré-multiplicando a equação (3.1) por  $\mathbf{Q}^H$  resulta em uma estrutura em forma de árvore de profundidade  $m$  devido a propriedade triangular da matriz **R**.

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{Q}^H\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{s}\|^2 \quad (3.8)$$

Não é necessário que se multiplique  $\hat{\mathbf{s}}$  por  $\mathbf{Q}^H$  já que na equação (3.8) tem-se um cálculo de distância e o resultado desta não se modifica com a multiplicação dos termos que se encontram à direita da equação por  $\mathbf{Q}^H$  pois a proporção é mantida.

Para simplificar, seja  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^H\mathbf{y}$ . Assim, a nova função de minimização torna-se:

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{C}^m} \|\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{s}\|^2 \quad (3.9)$$

Após a aplicação da decomposição QR e da pré-multiplicação por  $\mathbf{Q}^H$ , o algoritmo  $M$  é aplicado para detectar os símbolos de maneira sequencial (CHIN, 2005).

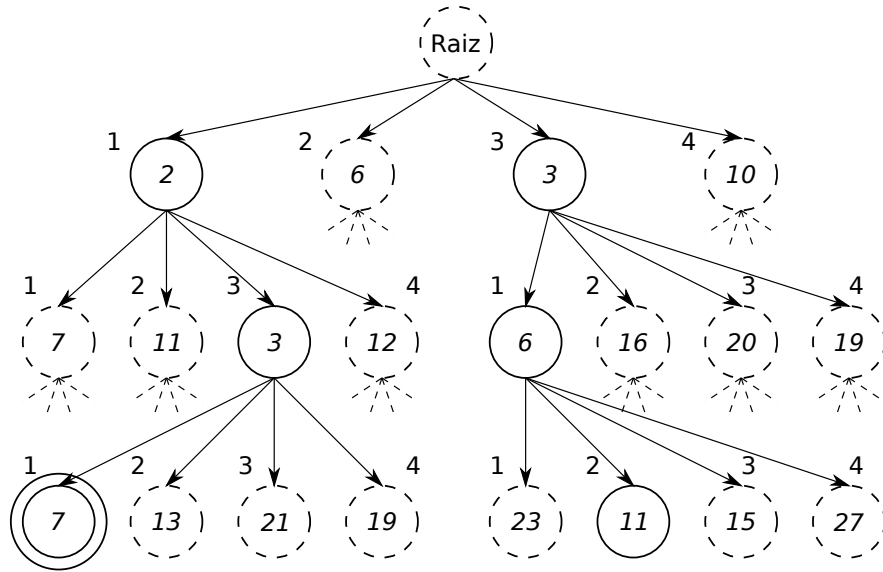
### 3.3.1 O Algoritmo $M$

A partir do último elemento de **s**,  $s_m$ , são calculadas as métricas para todos os possíveis valores de  $s_m$  tirados da constelação de tamanho  $\mathcal{C}$  usando

$$|x_m - r_{m,m}\hat{s}_m|^2, \quad (3.10)$$

sendo  $r_{m,m}$  o elemento  $(m, m)$  de **R**. Em seguida, as métricas destes nós são ordenadas e somente os  $M$  nós com as menores métricas são mantidos, o restante é descartado. Os nós sobreviventes são, então, estendidos em mais  $\mathcal{C}$  nós cada um,

resultando em  $M\mathcal{C}$  ramos, destes, somente os  $M$  ramos com menor métrica são mantidos e expandidos novamente em mais  $\mathcal{C}$  ramos cada, e assim sucessivamente, até que a última camada ( $m$ ) seja atingida. A figura 3.1 exemplifica o processo para um sistema com  $m = n = 3$ ,  $M = 2$  ramos e modulação quaternária, ou seja,  $\mathcal{C} = 4$ . Os números fora dos círculos indicam os símbolos da constelação (nós), aqueles dentro dos círculos referem-se às métricas acumuladas até o respectivo nó. Os círculos sólidos indicam os  $M$  nós escolhidos pelo algoritmo em cada nível, enquanto os tracejados representam os nós excluídos da busca. As linhas tracejadas indicam os ramos não expandidos. O círculo duplo indica a solução obtida.



**Figura 3.1:** Exemplo de funcionamento do algoritmo  $M$  em um sistema com  $m = n = 3$ ,  $M = 2$  e  $\mathcal{C} = 4$ .

As métricas dos ramos são calculadas utilizando a função de minimização modificada, equação (3.9). Para um comprimento da árvore  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , a métrica para cada ramo é:

$$|x_{m-i+1} - \mathbf{r}_{m-i+1} \bar{\mathbf{s}}_i|^2, \quad (3.11)$$

sendo  $x_i$  o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{r}_i$  a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{R}$  e  $\bar{\mathbf{s}}_i$  o vetor com os nós apropriados do ramo em particular. O pseudo-código para o algoritmo  $M$  é mostrado no Algoritmo 1.

### 3.3.2 Complexidade Computacional do QRD-M

O algoritmo  $M$ , e conseqüentemente o detector QRD-M, tem complexidade fixa independente das condições do canal, ou seja, esta independe da SNR no momento da detecção, isto se deve ao fato de que o algoritmo faz a seleção de um

**Algoritmo 1** Algoritmo  $M$ 

**Entrada** :  $\mathbf{R}$ ;  $\mathbf{x}$ ;  $M$ ; **simb**  $\leftarrow$  vetor com os símbolos da constelação

**Início** :

1.  $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{simb}$
2.  $d \leftarrow 0$
3.  $k \leftarrow 1$
4.  $m \leftarrow$  quantidade de linhas de  $\mathbf{R}$
5. enquanto  $k \leq m$
6.      $C \leftarrow$  comprimento de  $\mathbf{v}$
7.     para  $n = 1 : C$
8.          $d_n = \|\mathbf{x}_{(m-k+1)} - \mathbf{R}_{(m-k+1),(m-k+1):final} \mathbf{v}_{1:k,n}\|^2$
9.     fim para
10.     seleciona os  $M$  melhores
11.     expande  $\mathbf{v}$  em mais  $C$  ramos
12.      $k = k + 1$
13. fim enquanto

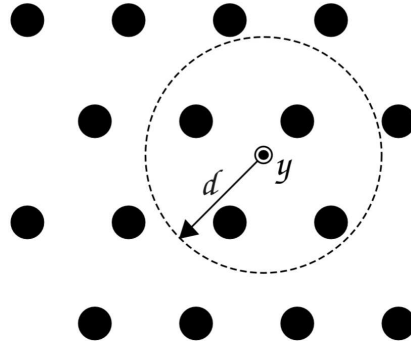
número fixo de ramos sobreviventes em cada estágio. Sua complexidade é definida pelo número total de métricas calculadas. Os parâmetros que determinam sua complexidade são o número de antenas transmissoras  $m$ , a quantidade de ramos selecionados para o próximo estágio,  $M$ , e a ordem da modulação,  $\mathcal{C}$ . Excluindo-se a complexidade da etapa da decomposição QR que será tratada posteriormente, (capítulo 6), pois é comum à todos os detectores aqui estudados, a quantidade de operações realizadas pelo algoritmo  $M$  será:

$$C_{\Sigma \text{ eq}} = [(m^2 + 7m)M + 6] \mathcal{C}, \quad (3.12)$$

ou seja, de ordem  $\mathcal{O}(m^2)$ . Este resultado foi obtido através do número de operações necessárias realizadas pelo algoritmo. Foram consideradas que as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, reais, sejam equivalentes, ou seja, todas as operações foram consideradas equivalentes à complexidade da operação soma real.

### 3.4 Detector MIMO Sub-ótimo Esférico

O detector esférico (SD), realiza uma busca sobre os pontos  $\mathbf{s} \in \mathcal{C}^m$  da malha que se encontram dentro de uma hipersfera de raio  $d$ , centrada no vetor recebido  $\mathbf{y}$  (BARBERO, 2008). Reduz-se assim o espaço de busca e conseqüentemente a complexidade computacional final. A ideia geral é esboçada na figura 3.2. O SD deve determinar quais pontos da constelação estão dentro da esfera de busca,



**Figura 3.2:** Hipersfera de busca do detector esférico. Sendo  $\mathbf{y}$  o vetor recebido, e  $d$  o raio da esfera de busca.

porém se para isso o detector tivesse que testar a distância de todos os pontos  $\mathbf{s}$  para determinar quais estão dentro da esfera de raio  $d$ , então ainda haveria uma busca exaustiva.

Embora seja difícil determinar os pontos da treliça dentro de uma esfera  $m$ -dimensional, é trivial fazê-lo no caso unidimensional  $m = 1$ . Assim, pode-se ir da dimensão  $k$  para a dimensão  $k + 1$ . Isso significa que todos os pontos na esfera de dimensão  $m$  e raio  $d$  podem ser determinados iterativamente ao se determinar todos os pontos contidos em esferas de dimensões menores  $(1, 2, \dots, m)$  e com o mesmo raio  $d$ . Conseqüentemente, o método de busca SD pode ser representado por uma árvore, como no caso do QRD-M, sendo que os ramos do  $k$ -ésimo nível da árvore corresponde aos pontos da treliça que se encontram dentro da esfera de raio  $d$  e dimensão  $k$  (KAILATH; VIKALO; HASSIBI, 2005). Um esboço de funcionamento da busca no SD para um sistema com  $m = n = 3$ , raio de busca  $d = 6$  e modulação binária pode ser visto na figura 3.3.

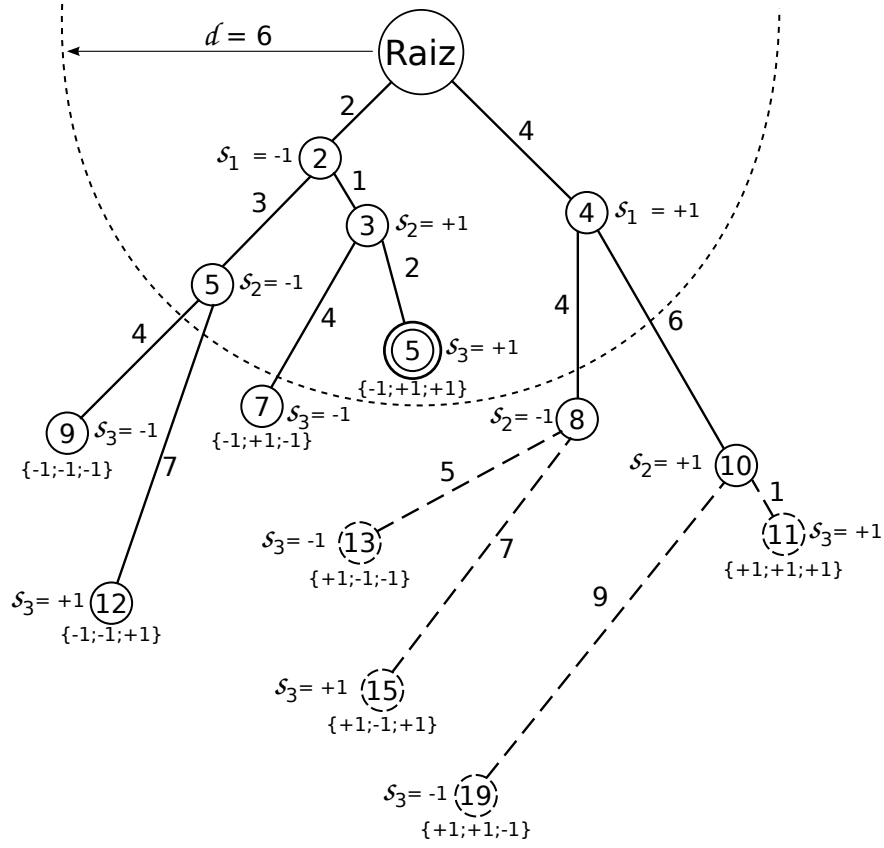
Formalizando o problema teremos que o ponto  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}$  estará dentro da esfera de raio  $d$  se, e somente se

$$d^2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}\|^2 \quad (3.13)$$

Deve-se então quebrar o problema principal em sub-problemas, ou seja, ao invés de tentar determinar os pontos da constelação que se encontram dentro da esfera de busca multidimensional, determinar os pontos dentro de múltiplas esferas unidimensionais, para isso aplica-se a decomposição QR à  $\mathbf{H}$  na equação (3.13) e faz-se a pré-multiplicação por  $\mathbf{Q}^H$  como na equação (3.9), obtendo-se a equação

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{s}}\|^2 \leq d^2 \quad (3.14)$$

assim, o núcleo do SD consiste de um método de enumeração, proposto em (FINCKE; POHST, 1985), que enumera os possíveis símbolos dentro do raio da



**Figura 3.3:** Árvore de busca do SD com  $d = 6$ . Os números ao lado de cada ramo indica seu comprimento; inscritos nos nós indicam métricas acumuladas; círculo duplo indica a solução ótima; ramos não visitados são pontilhados.

esfera. Este método de enumeração é baseado na observação condicional:

$$\text{Se : } \mathbf{p} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{s}}, \quad (3.15)$$

$$\text{Então: } \|\mathbf{p}_{l_k}\|^2 > d^2 \Rightarrow \|\mathbf{p}\|^2 > d^2$$

sendo  $\mathbf{p}_{l_k} \in \mathbb{C}^k$  o vetor composto pelos últimos  $k$  componentes de  $\mathbf{p}$ . Assim, a cada nova iteração o algoritmo executa uma busca de profundidade  $k$  na árvore de busca de  $m$  níveis: para  $k = 1$ ,  $\mathbf{p}_{l_k}$  será composto pela componente  $m$  de  $\mathbf{p}$ ; para  $k = 2$ ,  $\mathbf{p}_{l_k}$  será composto pelas componentes  $m$  e  $m - 1$  de  $p$ , e assim por diante. Ainda, graças à estrutura triangular superior de  $\mathbf{R}$ , o vetor  $\|\mathbf{p}_{l_k}\|$  dependerá apenas de  $\hat{\mathbf{s}}_{l_k}$ , onde  $\hat{\mathbf{s}}_{l_k} \in \mathbb{C}^k$  é o vetor composto pelos últimos  $k$  componentes de  $\hat{\mathbf{s}}$ . Portanto, estabelecendo-se que para algum vetor  $\hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}^m$  de índice  $k$ ,  $\|\mathbf{p}_{l_k}\|^2 > d^2$ , qualquer outro vetor  $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}^m$  para o qual  $\tilde{\mathbf{s}}_{l_k} = \hat{\mathbf{s}}_{l_k}$  poderá ser excluído da busca. O SD utiliza esta observação para enumerar de maneira eficiente todos os pontos na hiperesfera dada pela equação (3.14). Após esta enumeração o vetor de possíveis símbolos é salvo, e aqueles que apresentarem o menor valor de acordo com o critério da equação do MLD modificada, equação (3.9), será o escolhido como símbolo de saída do algoritmo. O pseudo-code para o detector SD-MIMO

é apresentado no Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2** Detector Esférico

---

**Entrada** :  $\mathbf{R}$ ;  $\mathbf{x}$ ; **simb**  $\leftarrow$  vetor com os símbolos da constelação

**Início** :

1.  $m \leftarrow$  Quantidade de linhas de  $\mathbf{R}$
  2.  $k \leftarrow m$
  3.  $C \leftarrow$  comprimento de **simb**
  4.  $d_t \leftarrow 0$ ;  $d = \infty$ ;  $\hat{d} = d$
  5. se  $k > 1$
  6.     para  $i = 1 : C$
  7.          $s'_k \leftarrow \text{simb}_i$
  8.          $t = \|x_k - r_{k,k:m} s'_{k:m}\| + d_t$
  9.         para  $t \leq \hat{d}$
  10.              $k = k - 1$ ;  $d_t = t$ ; vai para 5.
  11.         fim para
  12.     fim para
  13. se não
  14.     para  $i = 1 : C$
  15.          $s'_1 \leftarrow \text{simb}_i$
  16.          $t = \|x_1 - r_{1,:} s'\| + d_t$
  17.         se  $t \leq \hat{d}$
  18.             solução encontrada:  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}'$
  19.         fim se
  20.     fim para
  21. fim
- 

### 3.4.1 O Raio da Esfera

Para alcançar a maior eficiência possível com o SD, um parâmetro crítico deve ser ajustado, o raio da esfera de busca ( $d$ ), ou o raio inicial no caso de uma versão iterativa do algoritmo com raio de busca atualizável a cada iteração.

Definir  $d$  de maneira cuidadosa é essencial, pois, caso este seja muito grande a busca ainda terá complexidade exponencial com o número de usuários, não apresentando vantagem sobre o detector ML. Por outro lado, caso o raio seja muito pequeno o algoritmo terá grande chance de não encontrar nenhum ponto dentro da esfera.

A definição mais simplista para  $d$  consiste em defini-lo como a metade da distância entre dois símbolos da constelação, ou seja, a distância entre um símbolo da constelação e o limite da região de decisão. Obviamente este método é mais adequado para constelações quadradas. Este método é discutido em (HUNG;



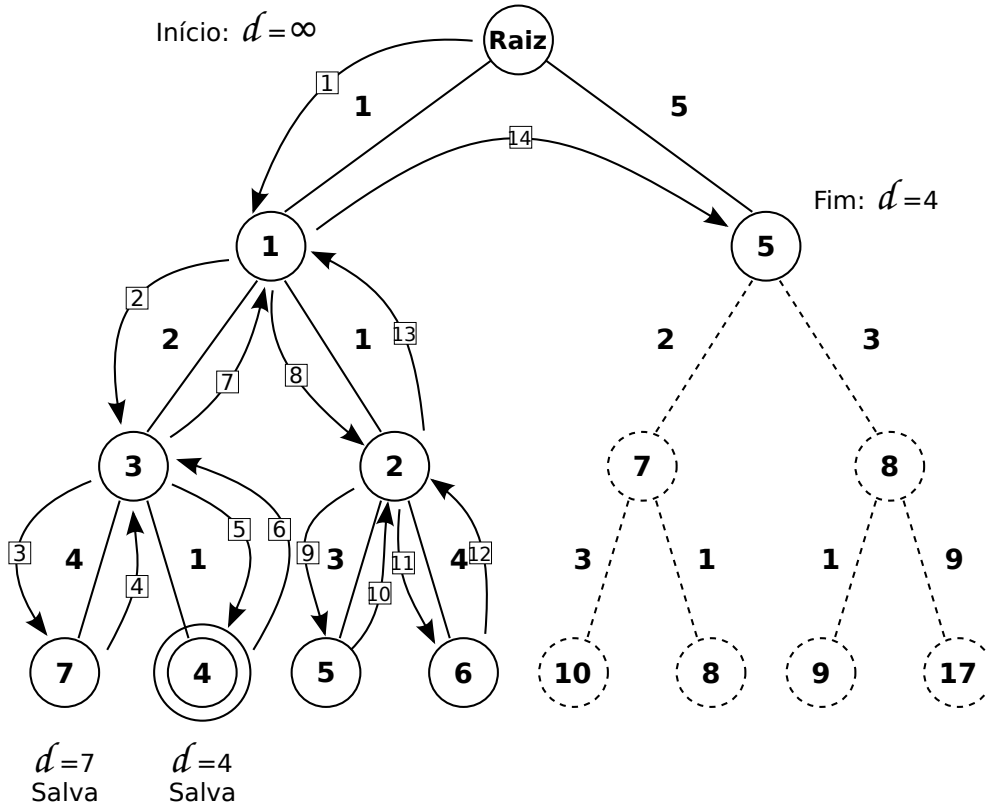
SANG, 2006). Já em (VIKALO; HASSIBI, 2005) é proposto que  $d$  seja definido pela distância entre a estimativa de Babai e o vetor recebido  $\mathbf{x}$ , ou seja,  $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_B\|$ , sendo  $\hat{\mathbf{s}}_B = \mathbf{H}^+\mathbf{x}$ , sendo  $\{.\}^+$  o operador pseudo-inversa de uma matriz, definida no anexo B.

O SD pode ser dotado de um sistema de poda (*pruning*), ou seja, quando o algoritmo chega até o nó final de um ramo da árvore de busca com uma métrica acumulada  $M$ , supõe-se que a solução da equação (3.9) deva estar dentro da esfera  $\|\mathbf{x} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{s}}\|^2 \leq M$ . Então, caso  $M < d$  pode-se fazer  $d = M$ , e continuar o algoritmo com um raio de busca menor. Com isso, a árvore de busca sofrerá sucessivas podas que diminuirão a quantidade de nós visitados em relação ao algoritmo original (LARSSON, 2009).

Neste sistema, o raio inicial é definido como  $d = \infty$ , e ele é atualizado todas as vezes que o algoritmo encontrar um nó final cuja distância Euclidiana acumulada em relação ao vetor recebido seja menor do que o raio de busca atual. Com isso, as tarefas críticas de decidir qual será o raio inicial, e definir uma função de atualização para o raio, são eliminadas. O sistema de *pruning* pode ser melhor visualizado através do exemplo da figura 3.4. Nesta figura o raio inicial é  $d = \infty$ . Os números ao lado de cada ramo indica seu comprimento; inscritos nos nós indicam métricas acumuladas; círculo duplo indica a solução ótima; ramos não visitados são pontilhados, e números nos quadrados das setas indicam a ordem em que o passo foi dado. Funciona como o SD original, porém, toda vez que encontrar um nó final com métrica acumulada  $M$ , caso  $M < d$ , irá fazer  $d = M$ , com isso diminuirá a quantidade de nós visitados.

### 3.4.2 Complexidade Computacional do Detector Esférico

A complexidade do SD é variável, estocástica e dependente das condições do canal e do nível de ruído (BARBERO, 2008), além da quantidade de antenas e da ordem de modulação. Dependendo da combinação destes fatores, a complexidade do SD pode ir de polinomial quadrática (melhor caso) até exponencial (JALDÉN; OTTERSTEN, 2005). Por isso, é bastante complexa a obtenção de uma expressão fechada para descrever a complexidade do SD. A expressão apresentada aqui é uma aproximação simplificadora, porém suficiente para uma análise comparada dos detectores quase-ML MIMO abordados neste trabalho. Assim, além dos parâmetros considerados anteriormente para o QRD-M,  $m$  (quantidade de antenas) e  $\mathcal{C}$  (ordem da constelação), na análise de complexidade do SD considerou-se o parâmetro  $\varsigma$ , o qual representa a dependência da complexi-



**Figura 3.4:** Árvore de busca do SD dotado de sistema de *pruning*.

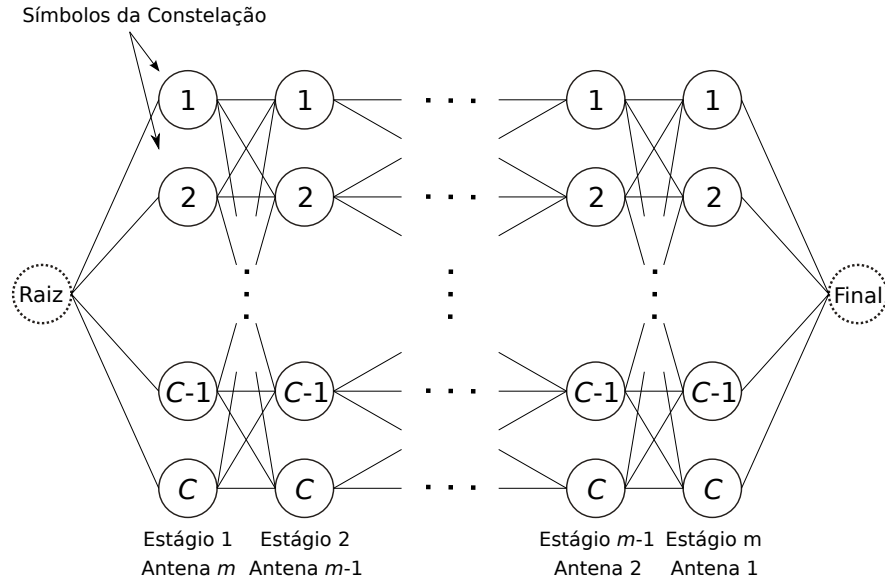
dade com as condições do canal (ou nível de ruído), sendo portanto inversamente proporcional à SNR,  $\varsigma \propto 1/\gamma$ . Excluindo-se a complexidade da decomposição QR, a função de operações realizadas pelo núcleo do SD será:

$$C_{\Sigma \text{ eq}} = (m^2 + 5m) C_{\varsigma}^m$$

Assim pode-se observar que em situações favoráveis a complexidade do SD pode ser de ordem de  $\mathcal{O}(m^2)$ . Por outro lado, em situação desfavorável, ou seja, com baixa SNR combinado com um sistema MIMO com elevada quantidade de antenas, ou ainda com modulação de alta ordem, esta complexidade se torna exponencial, o que é proibitivo em termos práticos.

### 3.5 Detector MIMO Sub-ótimo *Greedy*

Como ocorre aos outros dois algoritmos aqui apresentados, o detector de busca gulosa inicia o processo de detecção realizando a decomposição QR da matriz de canal ( $\mathbf{H}$ ), operando igualmente sobre a mesma função de otimização, equação (3.9). O GSD utiliza-se da característica triangular superior da matriz  $\mathbf{R}$  para calcular a distância Euclideana passo-a-passo, da antena  $m$  até a antena um, figura 3.5. Na figura 3.5, os nós representam os símbolos da modulação



**Figura 3.5:** Gráfico de fluxo do GSD para um sistema genérico de  $m$  antenas transmissoras e modulação com  $C$  símbolos.

utilizada. O método GSD é organizado em  $m$  estágios, cada estágio representa uma antena; em cada estágio existem  $C$  nós; cada nó está conectado a  $C$  nós do estágio anterior e a  $C$  nós do estágio posterior, com exceção do estágio 1, pois não possui um estágio anterior e assim é conectado ao nó raiz, bem como o estágio  $m$ , o qual não possui um estágio posterior e por isso é conectado ao nó final. Entre os nós tem-se a distância Euclidiana parcial, ou seja, a métrica dos nós anteriores somados à métrica do nó atual, até que ao final do estágio  $m$  tem-se a métrica total dos vetores candidatos.

Tendo como referência a equação (3.9), a distância Euclidiana do vetor recebido ao vetor candidato, por exemplo, em um sistema com  $m = n = 3$ , é dada por:

$$\Delta = \left\| \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \right\|^2, \quad (3.16)$$

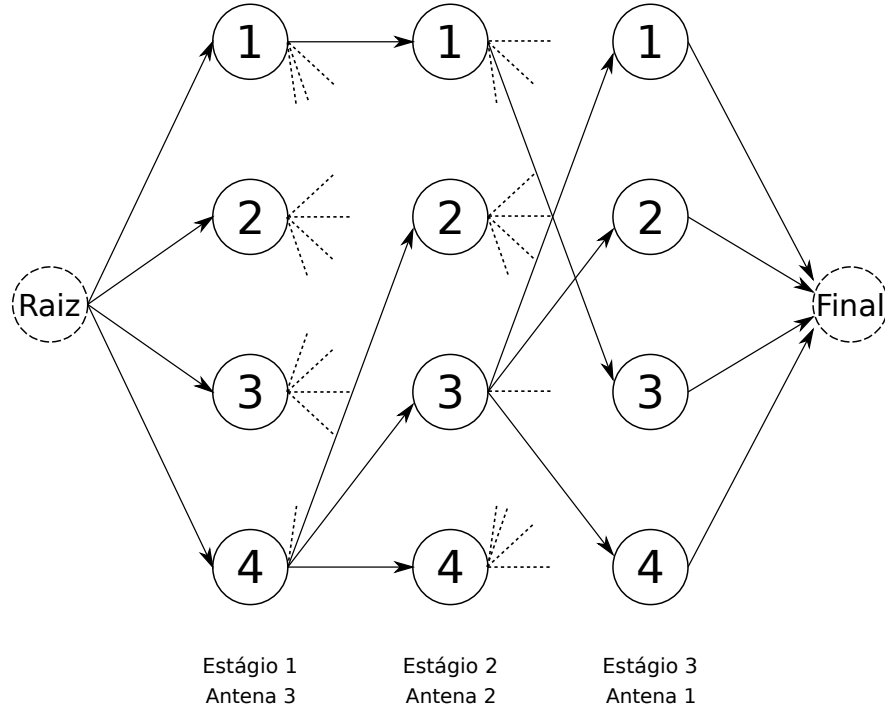
Para este caso ainda, as métricas parciais serão dadas por:

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \|x_3 - R_{33}s_3\|^2, \\ \delta_2 &= \|x_2 - (R_{22}s_2 + R_{23}s_3)\|^2, \\ \delta_1 &= \|x_1 - (R_{11}s_1 + R_{12}s_2 + R_{13}s_3)\|^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Duas etapas distintas são executadas no processo de detecção GSD:

- a) etapa de redução de nós e, em seguida,
- b) etapa de extensão de ramos (SUN; CAVALLARO, 2009).

Na primeira é feita uma redução da quantidade de nós através de uma busca em árvore análoga à realizada pelos algoritmos QRD e SD anteriormente apresentados. Esta busca reduz a quantidade de vetores candidatos, conforme ilustrado na figura 3.6, para o caso  $m = n = 3$ . A etapa seguinte consiste na extensão



**Figura 3.6:** Exemplo de funcionamento do estágio de redução de nós do GSD para um sistema com  $m = n = 3$  e modulação quaternária. Os traços pontilhados indicam os caminhos não expandidos.

dos ramos, ou seja, do último estágio até o primeiro o algoritmo realiza trocas do símbolo do estágio em questão pelos outros possíveis símbolos e, assim, é capaz de formar uma lista de vetores da qual selecionará aquele que melhor satisfaça à equação (3.9). O pseudo-code para o detector greedy-MIMO é descrito através do Algoritmo 3.

### 3.5.1 Complexidade Computacional do Detector *Greedy-MIMO*

Assim como o QRD-M, o GSD apresenta complexidade independente das condições do canal, ou seja, fixa em relação à SNR. A complexidade do GSD é dependente das variáveis quantidade de antenas transmissoras,  $m$ , e ordem da modulação,  $\mathcal{C}$ . A etapa da detecção QR, a exemplo dos outros detectores, não será considerada nesta parte do trabalho. Assim, o GSD apresenta ainda duas etapas: a) redução de nós; b) extensão de ramos.

A função de operações reais equivalente necessárias para implementar o GSD-

---

**Algoritmo 3** *Detector de Busca Gulosa*


---

**Entrada** :  $\mathbf{R}$ ;  $\mathbf{x}$ ; **simb**  $\leftarrow$  vetor com os símbolos da constelação

**Estágio 1** : Redução de nós

1.  $M \leftarrow$  comprimento de **simb**<sup>2</sup>
2.  $\mathbf{v} \leftarrow$  **simb**
3.  $d \leftarrow 0$
4.  $k \leftarrow 1$
5.  $m \leftarrow$  quantidade de linhas de  $\mathbf{R}$
6. enquanto  $k \leq m$
7.      $C \leftarrow$  comprimento de  $\mathbf{v}$
8.     para  $n = 1 : C$
9.          $\mathbf{d}_n = \|\mathbf{x}_{(m-k+1)} - \mathbf{R}_{(m-k+1),(m-k+1):final} \mathbf{v}_{1:k,n}\|^2$
10.     fim para
11.     seleciona os  $M$  melhores
12.     expande  $\mathbf{v}$  em mais  $C$  ramos
13.      $k = k + 1$
14. fim enquanto

**Estágio 2** : Extensão de ramos

15.  $k \leftarrow m$
  16. enquanto  $k \geq 1$
  17.     para  $i = 1$ : comprimento de  $\mathbf{v}$
  18.     para  $j = 1$ : comprimento de **simb**
  19.         se  $\mathbf{v}_{k,i} \neq \mathbf{simb}_j$
  20.              $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{:,i}$
  21.              $\mathbf{v}'_k = \mathbf{simb}_j$
  22.              $\mathbf{d}' = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{v}'\|^2$
  23.             se  $d' \leq \mathbf{d}_i$
  24.                  $\mathbf{v}_{:,i} = \mathbf{v}'$
  25.                  $\mathbf{d}_{:,i} = \mathbf{d}'$
  26.             fim se
  27.     fim se
  28.     fim para
  29.     fim para
  30.      $k = k - 1$
  31. fim enquanto
  32. seleciona o melhor vetor.
-

MIMO será a soma das funções de cada uma das etapas, obtendo-se a complexidade total (exceto a etapa decomposição QR) seguindo a mesma equivalência explicitada na sub-seção 3.3.2:

$$C_{\Sigma \text{ eq}} = (m^2 + 7m) \mathcal{C}^2 + (m^2 + 5m + 6) \mathcal{C} \quad (3.18)$$

## 4 Detector MIMO de Busca Guiada Híbrido

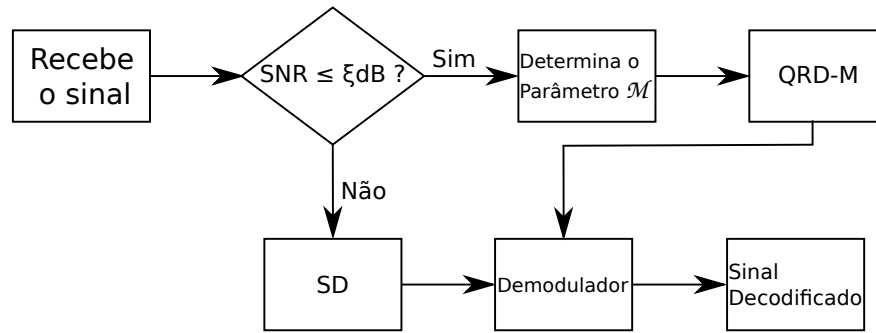
É amplamente difundido na literatura, (VIKALO; HASSIBI, 2005), o fato de que o SD apresenta desempenho ML e complexidade inferior a do MLD, porém sua complexidade é variável e fortemente dependente da SNR. Em situações de baixa SNR combinada a uma configuração MIMO com um número mediano (ou elevado) de antenas, ou ainda com uma ordem de modulação elevada, esta complexidade se torna proibitiva em termos práticos, conforme discutido na seção 3.4.2. Por sua vez, QRD-M apresenta desempenho próximo ao ML, porém com baixa complexidade, sendo esta independente da região de SNR de operação do sistema. No entanto, essa complexidade é maior que a do SD em situações de alta SNR, conforme pode-se concluir da análise conduzida nas seções 3.3.2 e 3.4.2. Para efeito de comparação, a tabela 4.1 reproduz as funções de complexidade para o detector MIMO QRD-M e SD. Assim, um dos objetivos deste trabalho é propor um detector híbrido utilizando-se do SD e do QRD-M de forma a manter o desempenho o mais próximo do ML com a complexidade o mais baixa possível.

**Tabela 4.1:** Complexidade em termos de operações Somas Reais para os detectores QRD-M-MIMO e SD-MIMO.

QRD-M	$[(m^2 + 7m)M + 6]C$
SD	$(m^2 + 5m)C\zeta^m$

Com o intuito de aproveitar as melhores características de cada, é proposta uma topologia de detecção que combina os dois algoritmos e troca o modo de detecção baseado no nível de SNR. Assim, quando a  $SNR \leq \xi$  dB, o detector aqui proposto, operando no modo seleção, executa o algoritmo QRD-M. No entanto, caso a SNR média apresente-se acima do limite  $\xi$ , o algoritmo do SD é colocado em operação. A figura 4.1 esboça o diagrama em blocos para o detector MIMO híbrido SD-QRD-M aqui proposto.

Através de resultados de simulações não exaustivos, o limite  $\xi = 12$  dB foi adotado para as condições de operação de sistema com modulação QPSK, com o aumento da ordem de modulação o valor de  $\xi$  também aumentará, e de canal sem



**Figura 4.1:** Diagrama em blocos do detector proposto.

linha de visada (NLOS, Rayleigh plano), conforme descrito na próxima seção. Ressalte-se que investigações adicionais (futuras) deverão ser realizadas tendo em vista determinar o valor de SNR de limiar em função das condições de sistema, i.e., quando a configuração no número de antenas transmissoras e/ou receptoras é alterada, ou ainda quando o sistema opera no modo ganho de diversidade (todas as antenas transmitem a mesma informação). Por fim, pode-se questionar se este limiar sofrerá alterações caso os coeficientes de canal nas diversas antenas sejam parcialmente correlacionados.

Devido à utilização do QRD-M pelo algoritmo híbrido proposto na região de baixa SNR, deve-se determinar o parâmetro  $M$  em função das diversas configurações de antenas ( $m = n = 4, 8$  e  $12$ ) utilizadas. Este parâmetro será definido de maneira que o desempenho seja sempre o mais próximo possível do ML. Uma análise não exaustiva dos resultados das simulações indicou os seguintes valores “ótimos”:  $M = 4$  para  $m = n = 4$ ;  $M = 10$  para  $m = n = 8$  e  $M = 24$  para  $m = n = 12$ .

Tendo em vista que tanto o SD quanto o QRD-M são detectores que atuam através de busca guiada, denominou-se o detector proposto como detector híbrido de busca guiada para sistemas MIMO (HGS-MIMO *Hybrid Guided Search MIMO Detector*). Resultados numéricos de simulação são apresentados e analisados no capítulo 6.



## 5 Análise de Desempenho, Complexidade e Robustez

Nesta seção desenvolve-se uma análise de complexidade, de desempenho e de robustez aos erros de estimativas dos coeficientes de canal de forma comparada para os diversos detectores MIMO descritos nas seções anteriores.

Para uma visão geral, a tabela 5.1 apresenta complexidade computacional resultante para os detectores analisados neste trabalho. Uma vez que a decomposição QR é uma etapa comum aos três detectores MIMO (QRD-M, GSD e SD), a complexidade da decomposição QR é destacada na primeira da tabela 5.1, enquanto que a complexidade para a realização do procedimento LR encontra-se na segunda linha. Uma vez que o algoritmo utilizado na redução treliça também utiliza da decomposição QR, pode-se notar que sua complexidade é muito próxima da complexidade da decomposição em si. Assim, a complexidade final dos detectores auxiliados por LR será a soma da complexidade do detector em questão à complexidade da decomposição QR e à complexidade da redução treliça.

A complexidade da decomposição QR, da ordem  $\mathcal{O}(m^3)$  (VIKALO; HASSIBI, 2005), é dominante na determinação da complexidade das funções de busca centrais dos algoritmos QRD-M e GSD, as quais apresentam complexidade da ordem de  $\mathcal{O}(m^2)$  e  $\mathcal{O}(m^2\mathcal{C}^2)$ , respectivamente. Assim, o QRD-M apresenta complexidade fixa em relação à SNR, dependendo apenas do tamanho de  $M$ , quantidade de antenas transmissoras,  $m$ , e ordem da modulação,  $\mathcal{C}$ . Obviamente quanto maior o  $M$ , mais ramos serão expandidos, maior a complexidade e melhor é a qualidade da solução encontrada pelo algoritmo. Por sua vez, o GSD também apresenta complexidade fixa em relação à SNR, sendo dependente apenas da quantidade de antenas transmissoras e da ordem da modulação.

Conforme discutido anteriormente na sub-seção 3.4.2, a complexidade do SD é variável, estocástica e dependente das condições do canal e do nível de ruído, além da quantidade de antenas e da ordem de modulação. Dependendo da combinação destes fatores, a complexidade do SD pode ir, em seu melhor caso, de polinomial

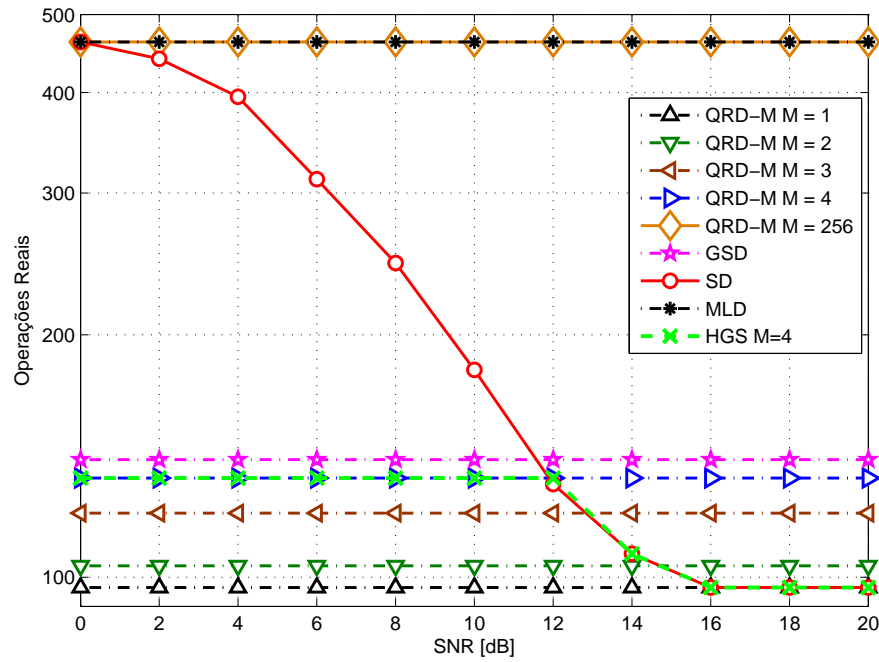
**Tabela 5.1:** Operações Somas Reais: etapa de decomposição QR (comum a todos os detectores), LR (quando aplicado) e complexidade das demais etapas dos detectores MIMO.

Etapa Detecção	$C_{\Sigma_{eq}}$ [ $\Sigma$ reais]
QR	$\frac{2}{3}m^3 + m^2 + \frac{1}{3}m - 2$
LR	$\frac{2}{3}m^3 + 29m^2 + \frac{5}{3}m - 3$
QRD-M	$[(m^2 + 7m)M + 6]C$
GSD	$(m^2 + 7m)C^2 + (m^2 + 5m + 6)C$
SD	$(m^2 + 5m)C\varsigma^m$
HGS - $\xi \leq 12dB$	$[(m^2 + 7m)M + 6]C$
HGS - $\xi > 12dB$	$(m^2 + 5m)C\varsigma^m$

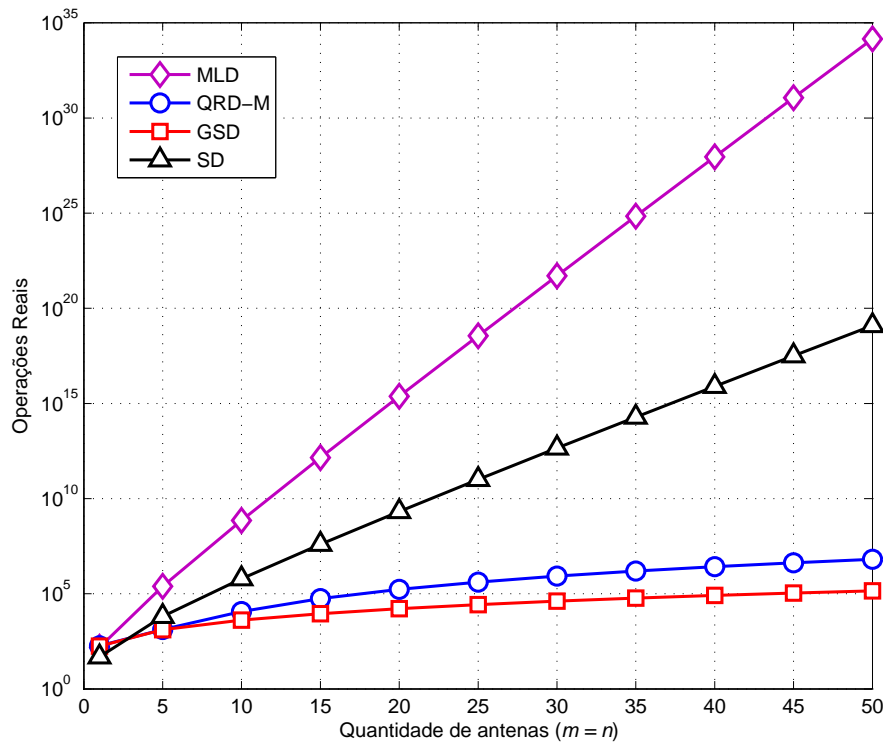
quadrática ( $\mathcal{O}(m^2)$ ) até exponencial, quando sua complexidade se equipara à do MLD. A função de operações necessárias do SD depende, além da quantidade de antenas transmissoras,  $m$ , e da ordem de modulação,  $C$ , do parâmetro que representa a sua dependência às condições do canal,  $\varsigma$ , sendo este inversamente proporcional à SNR,  $\varsigma \propto 1/\gamma$ .

O HGS, por ser um híbrido entre o QRD-M e o SD, apresenta complexidade fixa até o limite de  $\xi$  e após isso, sua complexidade passa a variar em relação à SNR, assim sua complexidade manteve o melhor compromisso entre os detectores estudados.

Complementarmente, os tempos computacionais para as implementações em MatLab dos detectores foram obtidos; em seguida, foram convertidos em números de operações reais dividindo-se tais tempos pelo tempo médio para se realizar uma operação soma real. Os resultados comparados, em termos de número de operações reais equivalente, em função da SNR, são mostrados na figura 5.1, esta simulação foi realizada em sistema com  $m = n = 4$ , modulação QPSK e canal sujeito a desvanecimento Rayleigh plano descorrelacionado. Já a figura 5.2 apresenta comparação do número de operações reais equivalente em função da quantidade de antenas, utiliza-se as mesmas configurações da simulação que resultou na figura 5.1 porém, agora, pelo fato da análise ser em função da quantidade de antenas a SNR foi fixada em 10dB. Para que os algoritmos tenham sua complexidade comparada em condições de igualdade é necessário definir um valor de  $M$  para o detector QRD-M, de modo que este apresente desempenho próximo ao ML, assim o resultado desta análise para um sistema com  $m = n = 4$  e modulação QPSK pode ser observada na figura 5.3, fica evidente no gráfico que, para este sistema, o valor mínimo de  $M$  para que o detector apresente desempenho ML é  $M = 4$ , para  $M = 1, 2$  e  $3$  o desempenho ficou aquém do desejado, apesar de, nesta configuração, sua complexidade ficar muito abaixo da complexidade dos



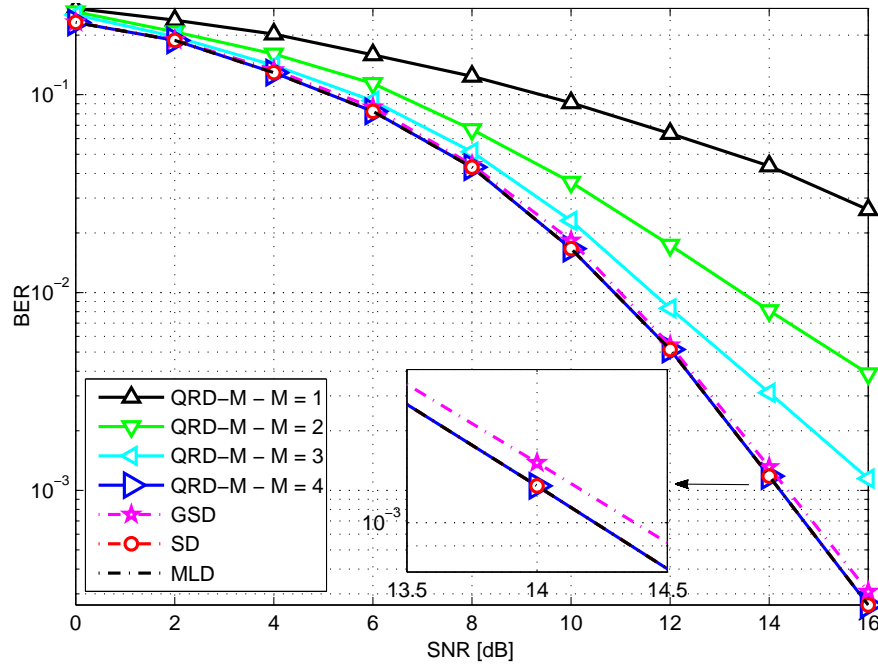
**Figura 5.1:** Complexidade a partir do tempo computacional equivalente, em relação da SNR. Sistema com  $m = n = 4$  e modulação QPSK.



**Figura 5.2:** Complexidade a partir do tempo computacional equivalente, em relação a quantidade de antenas. SNR = 10dB e modulação QPSK.

outros detectores. Esta análise foi estendida também para os casos  $m = n = 8$  e  $m = n = 12$ , pois estas configurações serão utilizadas mais a frente na análise de robustez, para estas configurações os valores de  $M$  ficaram então  $M = 10$  e  $M = 24$  respectivamente.

A partir da figura 5.1 pode-se observar que a quantidade de operações reais



**Figura 5.3:** BER para os detectores QRD-M, GSD, SD e MLD em sistema com  $m = n = 4$  e modulação QPSK.

realizadas pelo SD equipara-se a do MLD em baixa SNR e diminui à medida que as condições do canal melhoram, ou seja, a complexidade diminui quando a SNR aumenta, tornando-se, a partir de 12dB, menos complexo do que o QRD-M com  $M = 4$ , equiparando-se a partir de 16 dB, em termos de complexidade, ao QRD-M com  $M = 1$  cujo desempenho é muito inferior ao do SD nesta condição. No outro extremo, quando  $M = 256$ , o detector QRD-M, para o sistema utilizado, expande todos os vetores possíveis e executa assim uma busca exaustiva igual ao do MLD, atingido portanto a mesma complexidade do MLD.

Fica evidente, também, na figura 5.1 a vantagem, em relação a complexidade, do HGS sobre os outros detectores, pois sua complexidade segue a do QRD-M e do SD nas regiões de SNR em que apresentam menor custo computacional.

Para uma análise preliminar de desempenho e robustez foi utilizado a mesma configuração de sistema MIMO já citado anteriormente para o caso da complexidade,  $m = n = 4$ , modulação QPSK e canal sujeito ao desvanecimento Rayleigh plano decorrelacionado, porém agora, utiliza-se também  $m = n = 8$  e 12. As matrizes de coeficientes de canal foram geradas com estimativa perfeita e com erros percentuais nas estimativas dos coeficientes (módulo e fase) de  $\varepsilon \in [5, 10, 15, 20]\%$ , com distribuição uniforme. Nestas condições, a análise de robustez a erros na estimativa dos coeficientes de canal pôde ser realizada comparando-se a degradação de desempenho.

Nos sistemas MIMO, o incremento do número de antenas objetiva aumentar a

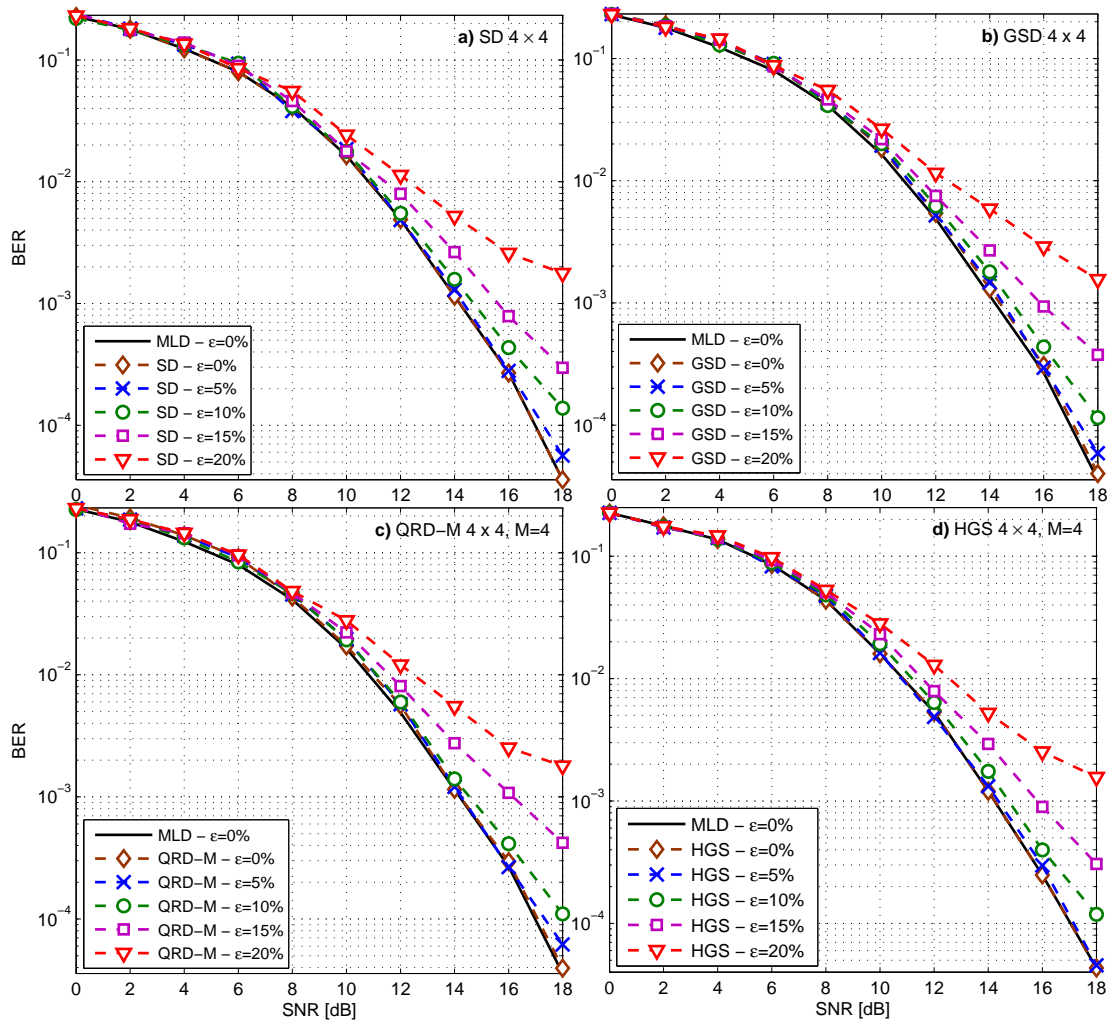
diversidade espacial ou de multiplexação, conforme a região de SNR e a topologia de transmissão adotados. Essa ordem de diversidade ( $D$ ) é expressa, geralmente, pela inclinação da reta tangente à curva de desempenho BER na região de alta SNR ( $\gamma \rightarrow \infty$ ):

$$D = - \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\Delta \log \text{BER}}{\Delta \log \gamma} \quad (5.1)$$

Nesta seção é abordado apenas o ganho por multiplexação, ou seja, cada antena transmite um símbolo diferente, ao contrário do ganho por diversidade em que todas as antenas transmitem o mesmo símbolo.

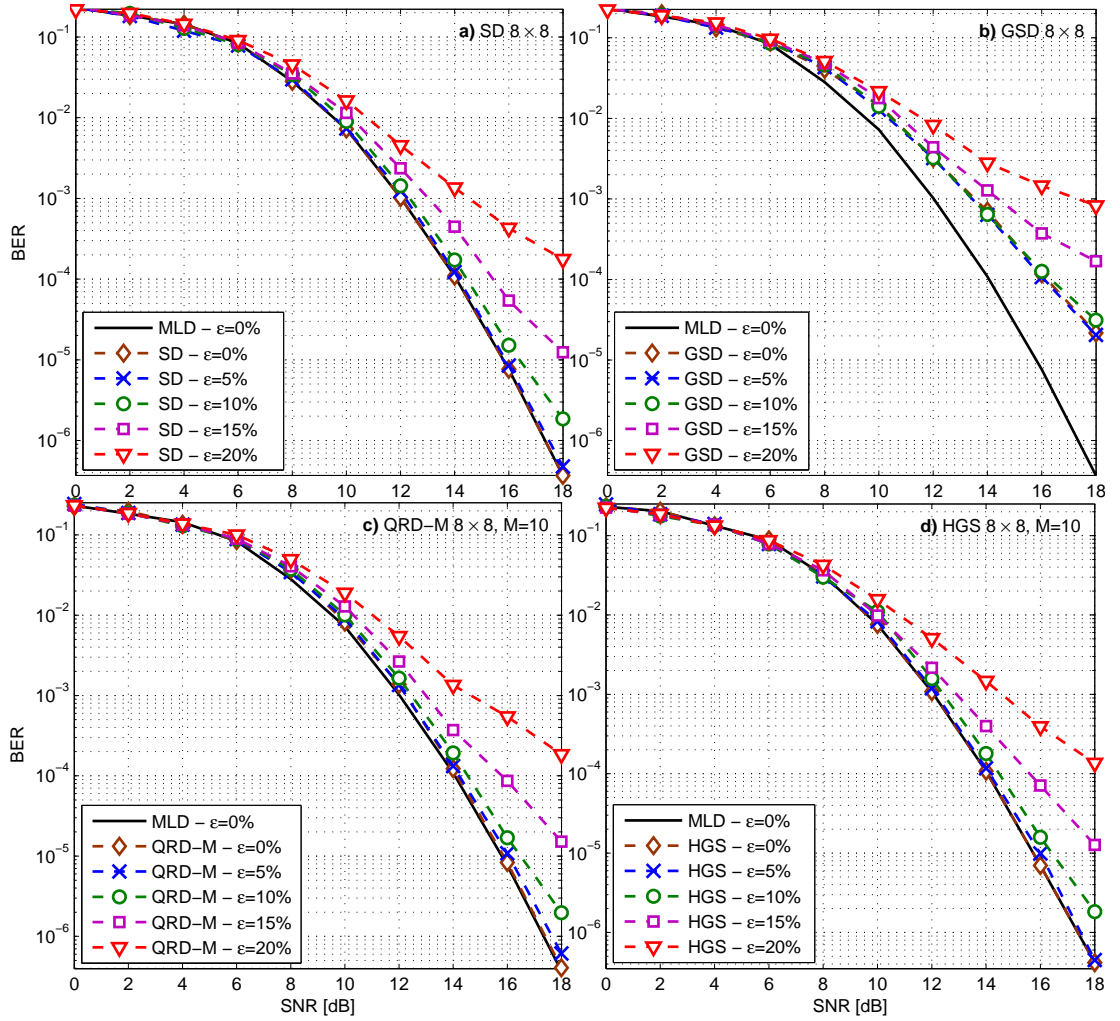
Na figura 5.4, pode-se observar o desempenho dos detectores para um sistema com  $m = n = 4$ , na figura 5.5 para  $m = n = 8$  e na figura 5.6 para  $m = n = 12$ , estes gráficos evidenciam a degradação de desempenho  $\times$  SNR dos detectores analisados em relação ao MLD com o aumento do erro percentual nas estimativas dos coeficientes de canal. Como pode ser observado nessas figuras, o SD apresentou desempenho ML nas três configurações de antenas utilizadas com estimativa perfeita dos coeficientes de canal, resultando em degradação do desempenho irrelevante para  $\varepsilon = 5\%$ . No entanto, a partir de  $\varepsilon = 10\%$ , a perda de desempenho se torna cada vez mais evidente, porém o SD ainda demonstra uma boa resistência nas três configurações de antenas ( $n = m = 4, 8$  e  $12$ ). Para  $\varepsilon = 15\%$  e  $20\%$ , a degradação do desempenho foi considerável para os todos os detectores MIMO sub-ótimos, nas três configurações de antenas.

Observe-se que o GSD apresentou desempenho ML apenas para a configuração de antenas com  $m = n = 4$ , situação em que houve muito pouca degradação do desempenho para  $\varepsilon = 5\%$  e ainda uma certa robustez para erros na estimativas do canal de  $\varepsilon \leq 10\%$ . No entanto, o GSD resultou em desempenho aquém do desejado para as configurações  $n = m = 8$  e  $12$  antenas. Para  $m = n = 4$ , o QRD-M com um  $M = 4$  apresentou desempenho próximo ao ML com estimativas perfeitas dos coeficientes do canal. Similarmente ao detector SD, o QRD-M resultou em desprezível degradação de desempenho para  $\varepsilon \leq 5\%$  e pouca degradação com  $\varepsilon = 10\%$ . Para erros nas estimativas  $\varepsilon > 10\%$ , a perda de desempenho se torna evidente e compatível com aquela atingida pelo SD. Note-se que no QRD-M, à medida que o número de antenas cresce, faz-se necessário incrementar o número de nós  $M$  para se atingir desempenhos próximos ao ML. No sistema com  $m = n = 8$ , o QRD-M com  $M = 4$  não conseguiu atingir o desempenho esperado. Assim, o valor do parâmetro  $M$  teve que ser aumentado ( $M = 10$ ) para que fosse alcançado o desempenho do MLD. Nestas condições o detector apresentou as mesmas características de robustez obtidas no sistema com menos antenas. Assim, para  $m = n = 12$  o menor valor do parâmetro  $M$  capaz



**Figura 5.4:** Desempenho para os detectores sub-ótimos de busca guiada.  $m = n = 4$ , modulação QPSK e erros no  $\varepsilon \in [0; 20]\%$ : a) SD; b) GSD; c) QRD-4; d) HGS.

de manter o desempenho demonstrado pelo MLD resultou em  $M = 24$ , mantendo assim, mais uma vez, sua robustez. Como pode ser observado, o HGS apresentou desempenho próximo ao ML nas três configurações de antenas utilizadas com estimativa perfeita dos coeficientes de canal, resultando em uma degradação do desempenho irrelevante para  $\varepsilon = 5\%$ . No entanto, a partir de  $\varepsilon = 10\%$ , degradação de desempenho se torna cada vez mais evidente, porém o HGS ainda demonstra uma boa resistência nas três configurações de antenas ( $n = m = 4, 8$  e  $12$ ). Para  $\varepsilon = 15\%$  e  $20\%$ , a degradação no desempenho foi considerável nas três configurações de antenas como para os outros detectores.



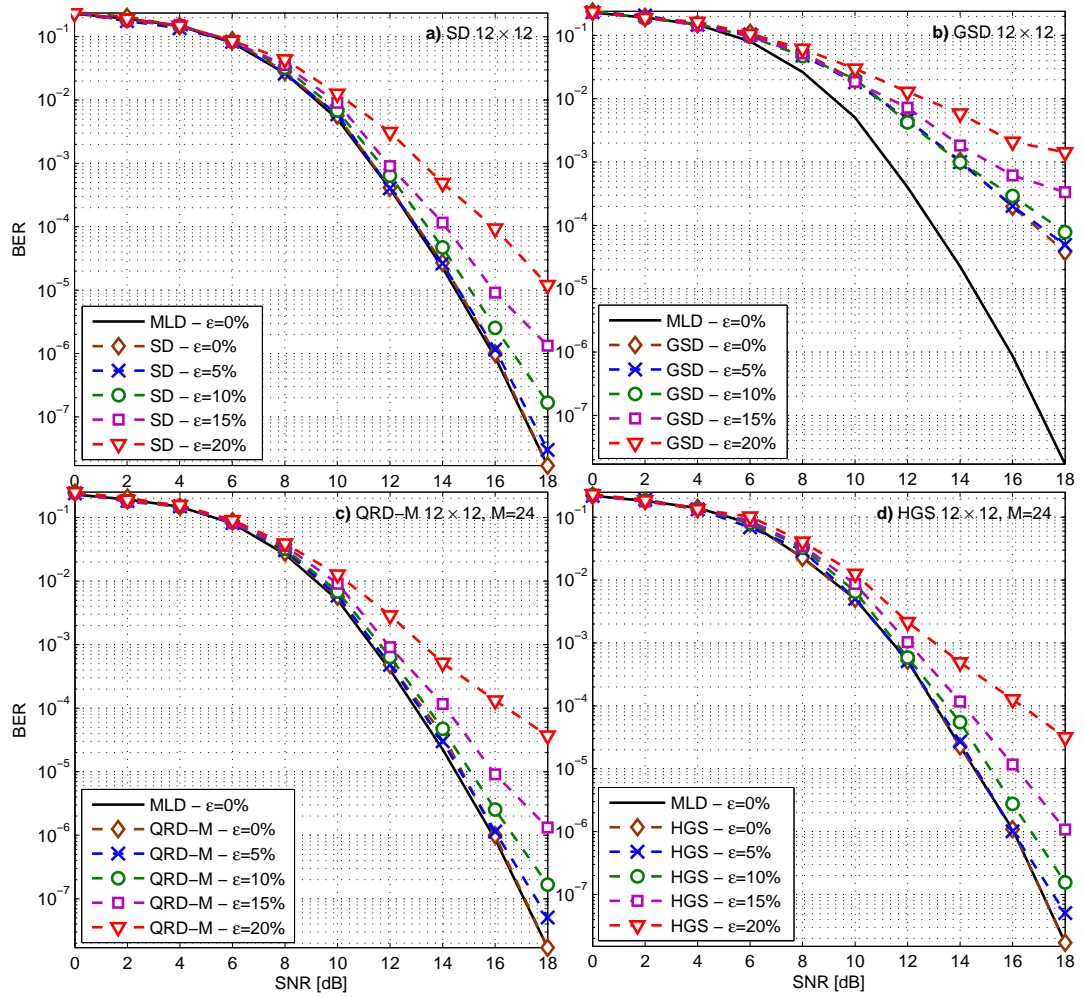
**Figura 5.5:** Desempenho para os detectores sub-ótimos de busca guiada.  $m = n = 8$ , modulação QPSK e erros no  $\epsilon \in [0; 20]\%$ : a) SD; b) GSD; c) QRD-4; d) HGS.

## 5.1 Análise de Desempenho e Complexidade dos Detectores Auxiliados por Redução Treliça

Considerando um sistema MIMO com  $m = n = 4$ , modulação de alta ordem 16-QAM e sistema de comunicação sujeito ao desvanecimento Rayleigh plano, simulações Monte-Carlo foram realizadas tendo em vista comparar o desempenho e a complexidade dos três algoritmos com e sem o auxílio do LR.

Na figura 5.7 são apresentadas as curvas de taxa de erro de símbolo (SER) em relação ao incremento da SNR. Observe-se a tendência de desempenho SER é sempre inferior ao desempenho BER ( $P_e$ ) (PROAKIS, 2000). Os limitantes superior e inferior de desempenho BER ( $P_e$ ) em relação à SER ( $P_E$ ) podem ser estabelecidos através da relação:

$$\frac{P_E}{b} \leq P_e \leq \frac{C}{2(C-1)} P_E \quad (5.2)$$



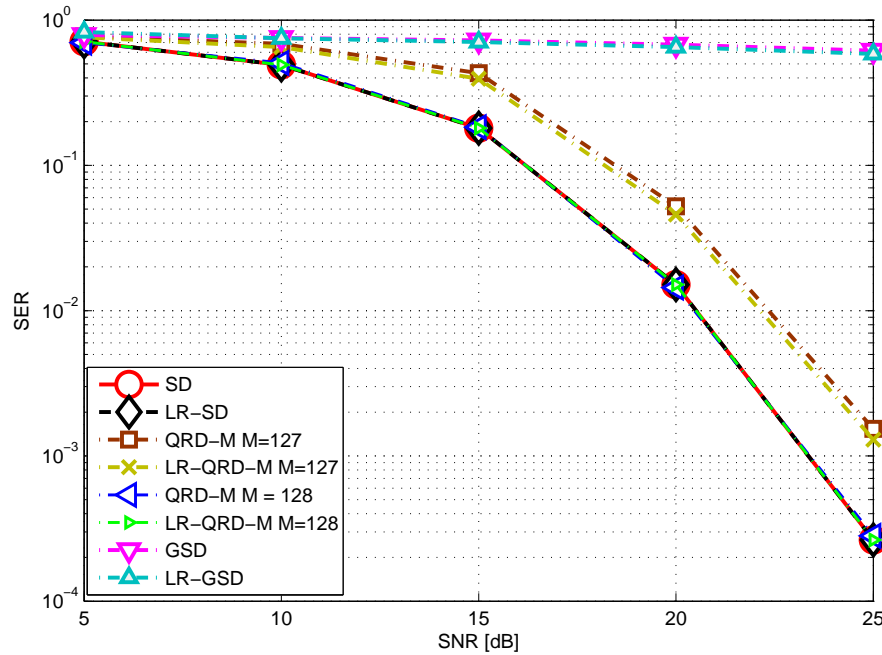
**Figura 5.6:** Desempenho para os detectores sub-ótimos de busca guiada.  $m = n = 12$ , modulação QPSK e erros no  $\varepsilon \in [0; 20]\%$ : a) SD; b) GSD; c) QRD-4; d) HGS.

sendo  $\mathcal{C} = 2^b$  a ordem da constelação e  $b$  a quantidade de bits em cada símbolo da constelação. Para maiores detalhes, veja o anexo C.

Diferentemente dos resultados de desempenho apresentados anteriormente, nos quais a modulação de baixa ordem QPSK foi adotada, no contexto de modulação de alta ordem, o detector GSD apresentou desempenho muito abaixo do aceitável, mesmo na versão auxiliada pelo LR a melhoria no desempenho foi praticamente nula. Já o detector QRD-M apresentou desempenho ML para  $M = 128$ , como pode ser visualizado ainda na figura 5.7. No entanto, adotando-se  $M = 127$ , o desempenho QRD-M apresentou-se insuficiente, mesmo com o auxílio da redução LR, houve apenas uma marginal melhoria de desempenho. O SD manteve o desempenho ML, como esperado. Assim, na versão auxiliada por LR, o maior ganho esperado na estrutura LR-SD é relativo à sua redução de complexidade de implementação.

Conforme explicitado anteriormente, a complexidade dos detectores auxilia-



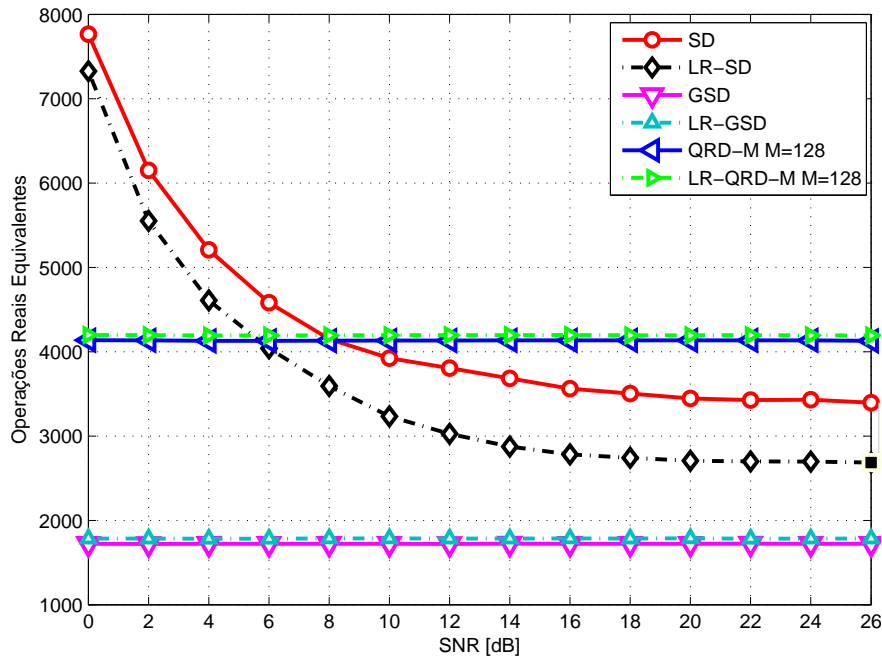


**Figura 5.7:** SER para os detectores QRD-M, GSD e SD em sistema com  $m = n = 4$  e modulação 16-QAM.

dos pelo LR é dada pela complexidade do LR e da decomposição QR somada à complexidade de cada detector, conforme indicada na tabela 5.1. Assim, devido às características do SD, explicitadas na seção anterior, mesmo que se some a complexidade do LR à do SD, o que aparentemente elevaria a complexidade final, na prática isto não acontece, pois devido à redução treliça, a matriz de canal reduzida é mais próxima da ortogonalidade, fazendo com que sejam necessárias menos expansões de ramos para que o algoritmo encontre a solução ML, ou mesmo muito próxima à ML. Isso pode ser observado na figura 5.8, na qual é indicada, de forma complementar à tabela 5.1, as operações equivalentes obtidas através dos tempos computacionais para as implementações em MatLab dos três detectores. Tais tempos computacionais foram convertidos em números de operações reais equivalentes, dividindo-se tais tempos pelo tempo médio necessário à realização de uma operação soma real.

Nas curvas de complexidade em termos de “Operações Reais Equivalentes” (ORE) da figura 5.8, pode-se observar a vantagem do LR-SD sobre o SD; por exemplo, para SNR= 26 dB, o LR-SD realizou aproximadamente 20% menos operações. Em níveis de SNR um pouco mais baixos, essa proporção é mantida, enquanto que para a região de baixa SNR, a diferença é um pouco menor, mas o LR-SD sempre apresenta vantagem em termos de redução computacional.

Para os demais detectores, há uma complexidade constante em relação à SNR, conforme explicitado anteriormente; portanto, com a aplicação do LR suas

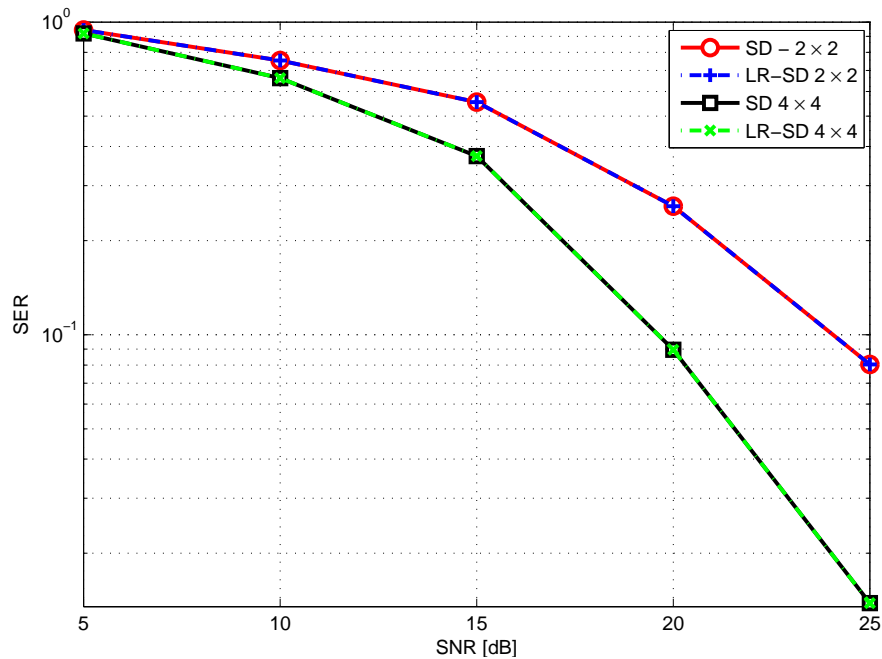


**Figura 5.8:** Complexidade a partir do tempo computacional equivalente, em relação à SNR. Sistema com  $m = n = 4$  e modulação 16-QAM.

complexidades apresentaram-se ligeiramente maior; isso é devido ao acréscimo de operações causado pelo LR, o qual não é compensado pela quantidade de ramos expandidos, pois nestes detectores a quantidade de ramos expandidos é fixa. No caso do QRD-M esperava-se, entretanto, que com o auxílio do LR fosse possível utilizar um valor de  $M$  menor para diminuir a complexidade ao mesmo tempo que este mantivesse desempenho ML. Assim, pode-se conjecturar que um sistema operando sob uma ordem de modulação elevada e/ou quantidade de antenas, o resultado em termos de redução de complexidade ou melhoria de desempenho, quando auxiliado por LR, seria mais satisfatório. Mesmo assim, em situações de baixa SNR, sua complexidade ainda é menor do que a do SD e do LR-SD, podendo ser uma opção para um sistema que opere nesta faixa.

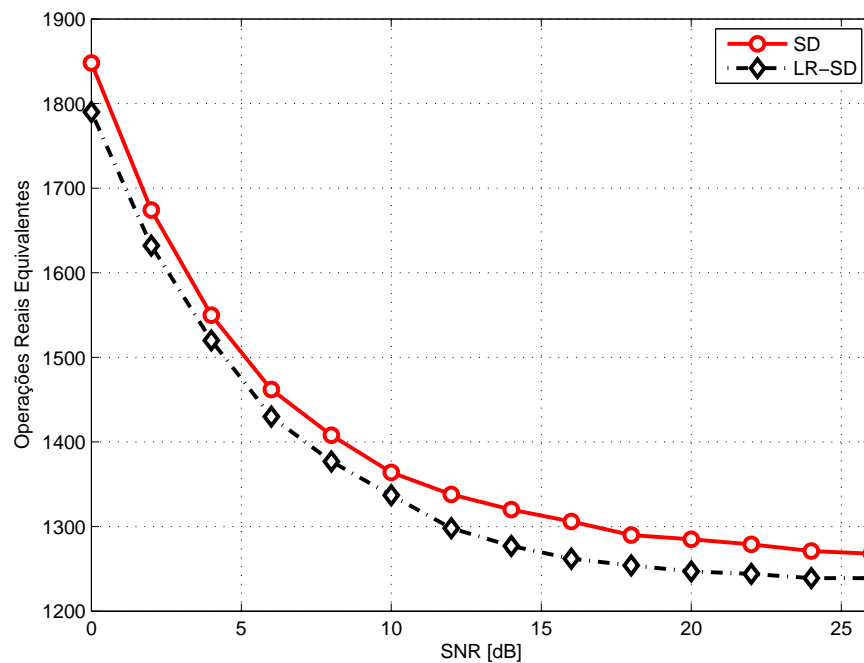
Adicionalmente, simulações foram realizadas com o SD e LR-SD em sistema de elevada ordem de modulação, i.e. 64-QAM, e  $m = n = 2$  e  $m = n = 4$ . A figura 5.9, apresenta o desempenho dos dois detectores e, por razões expostas anteriormente, estes são iguais, pois o LR-SD assim como o SD apresentam desempenho próximo ao ML. Na figura 5.10 apresenta-se o número ORE para o caso em que  $m = n = 2$ . Neste caso, a diferença de complexidade foi em média de  $\approx 3\%$  de operações a menos para o LR-SD.

Já na figura 5.11, em um sistema com  $m = n = 4$ , a diferença na quantidade de operações reais equivalentes chegou a  $\approx 37\%$  menos operações para o LR-SD em relação ao SD.



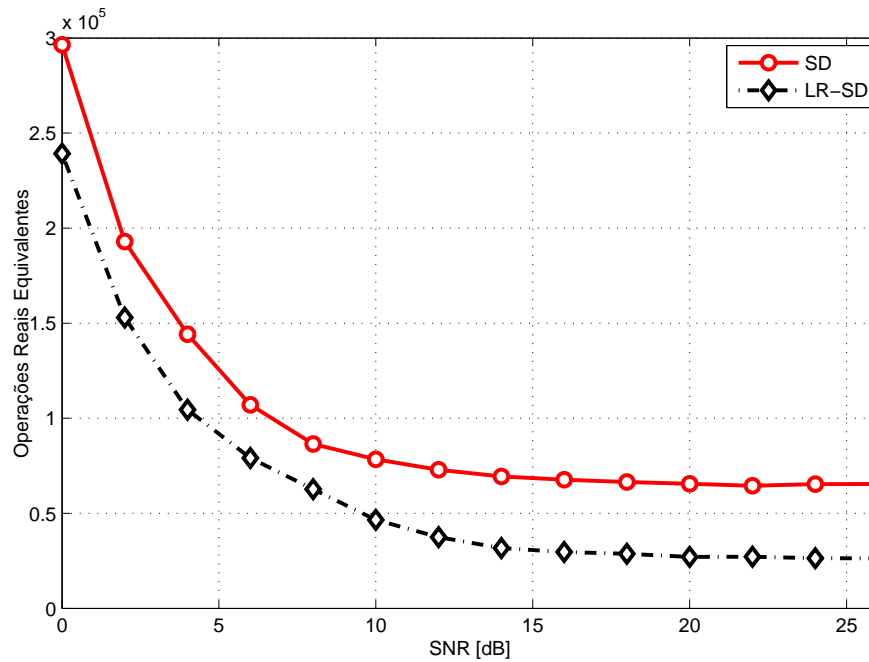
**Figura 5.9:** Desempenho do SD e LR-SD em sistema com  $m = n = 2$  e  $m = n = 4$  e modulação 64-QAM.

Similarmente ao sistema com modulação 16-QAM, o LR-SD com modulação 64-QAM resultou na menor complexidade entre os detectores MIMO analisados. Novamente, sua complexidade em termos de ORE foi menor do que a do SD.



**Figura 5.10:** Complexidade a partir do tempo computacional equivalente para o SD e LR-SD, em relação à SNR. Sistema com  $m = n = 2$  e modulação 64-QAM.

Resultados numéricos de simulação obtidos para uma ampla faixa de SNR de operação de sistema indicaram que entre os detectores MIMO analisados, o SD-MIMO mantém-se como a melhor opção em termos do compromisso desempenho-



**Figura 5.11:** Complexidade a partir do tempo computacional equivalente para o SD e LR-SD, em relação à SNR. Sistema com  $m = n = 4$  e modulação 64-QAM.

complexidade. Adicionalmente, com o auxílio da técnica de redução treliça, a complexidade do detector SD-MIMO é reduzida substancialmente, tornando ainda mais atrativo sua utilização em sistemas de comunicação práticos.

Por fim, os resultados de simulação também apontam para uma crescente vantagem na redução de complexidade (mantido o desempenho) das versões dos detectores auxiliados por LR em relação aos detectores de busca guiada MIMO não auxiliados por LR quando houver um incremento na ordem de modulação combinado ao aumento do número de antenas.

## 6 Conclusões

Com o intuito de encontrar alternativas para a complexidade exponencial inerente ao detector MLD, três detectores sub-ótimos adequados para sistemas MIMO foram analisados. Os algoritmos QRD-M, GSD e SD para detecção em canais MIMO foram comparados em termos de desempenho  $\text{BER} \times \text{SNR}$ , bem como complexidade computacional, caracterizado pelo número de operações reais necessárias e robustez à erros na estimativa dos coeficientes de canal em sistema MIMO com número de antenas crescente e erros entre 0% e 20% nas estimativas dos coeficientes de canal e modulação QPSK.

Os três detectores apresentaram degradação desprezível no desempenho para  $\varepsilon \leq 5\%$  em todas as configurações de antenas e grande resistência a erros de estimativa na faixa  $0 \leq \varepsilon \leq 10\%$ .

O SD apresentou desempenho ML em todas as configurações de antenas, enquanto o GSD apresentou desempenho próximo ao ML apenas para a configuração com  $m = n = 4$  e desempenho inferior ao do MLD nas demais configurações. O QRD-M foi capaz de apresentar desempenho próximo ao ML em todas as configurações, porém com um incremento no parâmetro  $M$ . A complexidade do QRD-M cresce linearmente com  $M$ .

Por apresentar desempenho análogo ao do SD e complexidade inferior, o QRD-M apresenta-se como a melhor alternativa em situações de baixa SNR, enquanto que o SD mantém sua vocação ML para a região de alta SNR devido à sua complexidade computacional variável, a qual em certas condições de operação do sistema e de canal pode se tornar exponencial.

Tendo isto em vista, neste trabalho foi proposto a utilização de um detector híbrido (HGS) que de acordo com a SNR decide o método de detecção a ser utilizar, neste caso, o do QRD-M ou SD. O HGS apresentou desempenho ML em todas as configurações de antenas e grande robustez aos erros na estimativa dos coeficientes de canal, ou seja, degradação desprezível de desempenho para  $\varepsilon \leq 5\%$  e grande resistência a erros de estimativa na faixa  $0 \leq \varepsilon \leq 10\%$ . A

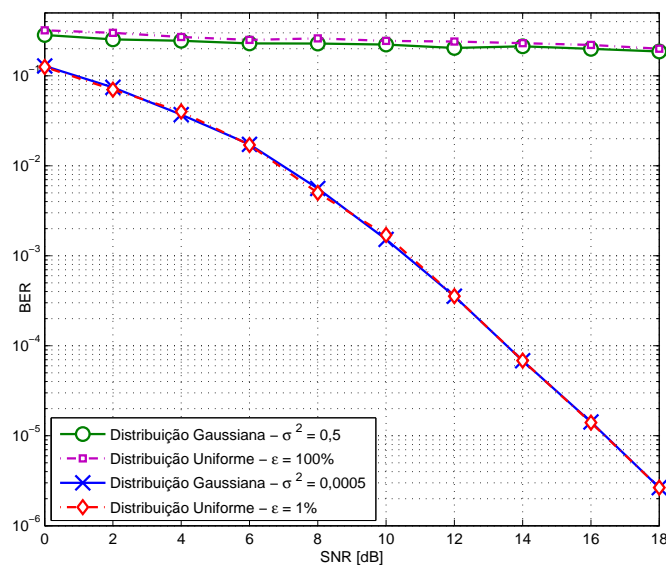
maior vantagem deste sistema é a complexidade que permanece baixa, pois, o algoritmo aproveita as características do QRD-M em baixa SNR ( $\leq 12dB$ ) e as características do SD em alta SNR mantendo assim um complexidade sempre igual ou inferior a do QRD-M ou SD utilizados de maneira solitária.

Em sistemas com elevada ordem de modulação (neste trabalho, 16-QAM ou 64-QAM), estes detectores MIMO de busca guiada foram analisados e seus respectivos desempenhos ( $SER \times SNR$ ) e complexidades computacionais (número de operações reais equivalentes foram comparados com suas respectivas versões auxiliadas pela Redução Treliça. Os detectores SD e o LR-SD foram ainda analisados em sistema com modulação 64-QAM com 2 e 4 antenas transmissoras e receptoras. O melhor compromisso desempenho-complexidade foi atingido pelo detector esférico auxiliado pela redução treliça (LR-SD), o qual manteve o desempenho ML, porém com complexidade menor àquelas relativas ao SD, QRD-M ou ao LR-QRD-M. O GSD apresentou fraquíssimo desempenho, mostrando-se como um detector não adequado para o sistemas MIMO com elevada ordem de modulação. Por sua vez, o QRD-M apresentou-se adequado apenas para situações de baixa SNR, onde sua complexidade ainda é menor do que a do SD e a do LR-SD.

Finalmente, a análise dos detectores SD e LR-SD em sistemas com elevada ordem de modulação (64-QAM) nos permite concluir que quanto maior a ordem de modulação e quantidade de antenas, maior será a diferença na complexidade dos detectores, tendo sido obtido um custo computacional para o LR-SD de cerca de  $\approx 63\%$ , em termos de operações reais equivalentes, em relação ao detector SD.

## Anexo A – Distribuição dos Erros nas Estimativas de Coeficientes de Canal

Neste trabalho, foi utilizada distribuição Uniforme para modelar o erro na estimativa dos coeficientes de canal. Na literatura, é comum que se modele os erros na estimativa dos coeficientes de canal a partir de distribuições Gaussianas também. Afim de tornar os resultados, aqui obtidos, mais amplos, ou seja, equivalente nos dois modos de modelagem de erros na estimativa dos coeficientes de canal, pode-se estabelecer uma equivalência relativa entre os dois modelos. Assim, conforme observado na figura A.1, pôde-se estabelecer esta equivalência relativa para os erros dos coeficientes de canal modelados via distribuição Uniforme e Gaussiana. Para os resultados da figura A.1 utilizou-se o detector MLD em sistema com  $m = n = 4$  antenas; erros nas estimativas de canal com distribuição Uniforme com  $\varepsilon = 1\%$  e  $\varepsilon = 100\%$  versus erros nas estimativas com distribuição Gaussiana com variância  $\sigma^2 = 0,0005$  e  $\sigma^2 = 0,5$ . Para uma abordagem analítica desta questão pode-se consultar (PAPOULIS, 1991).



**Figura A.1:** Curvas de desempenho do detector MLD em sistema com  $m = n = 4$  antenas. Equivalência entre os modelos Uniforme e Gaussiano para os erros de estimativas dos coeficientes de canal.

## Anexo B – Matriz Pseudo-inversa

A Matriz Pseudo-inversa de Moore-Penrose, mais conhecida simplesmente por matriz pseudo-inversa, é a matriz  $\mathbf{A}_{n \times m}^+$  de uma dada matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$ , que satisfaz os seguintes critérios (PENROSE, 1955):

- $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$
- $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^H = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$
- $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^H = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

sendo  $\{.\}^H$  o operador Hermitiano, ou conjugado transposto.

Para uma matriz  $\mathbf{A}$  qualquer, existe apenas uma matriz  $\mathbf{A}^+$  que satisfaz os quatro critérios da definição (GOLUB; LOAN, 1996).

Uma das maneiras de se calcular  $\mathbf{A}^+$  é através da decomposição em valores singulares (*Singular Values Decomposition* - SVD), definida pelo teorema a seguir (LAY, 1999):

**Teorema 1** *Seja  $\mathbf{A}_{m \times n}$  uma matriz de posto<sup>1</sup>  $r$ . Então existe uma matriz  $\mathbf{\Sigma}_{m \times n}$  como em (B.1), onde os elementos diagonais de  $\mathbf{D}$  são os  $r$  primeiros valores singulares<sup>2</sup> de  $\mathbf{A}$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$ , e existem, uma matriz ortogonal  $\mathbf{U}_{m \times m}$  e uma matriz ortogonal  $\mathbf{V}_{n \times n}$  tais que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

---

<sup>1</sup>O posto de uma matriz  $\mathbf{A}$  é a dimensão do espaço das colunas de  $\mathbf{A}$ .

<sup>2</sup>Os valores singulares de uma matriz  $\mathbf{A}$  são as raízes quadradas dos autovalores de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ , denotados por  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , e estão dispostos em ordem decrescente, isto é,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , sendo  $\lambda_i$  o  $i$ -ésimo autovalor de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ .



$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

sendo  $\mathbf{D}$  uma matriz diagonal  $r \times r$  para algum  $r$  não excedendo o menor valor entre  $m$  e  $n$ , se  $r$  for igual a  $m$  ou  $n$  ou ambos, algumas ou todas as matrizes nulas não aparecem, e  $\{\cdot\}^T$  é o operador matriz transposta.

Qualquer fatoração  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ , com  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  ortogonais,  $\Sigma$  como em (B.1) e elementos diagonais positivos em  $\mathbf{D}$ , é chamada uma SVD de  $\mathbf{A}$ . As matrizes  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  não estão unicamente determinadas por  $\mathbf{A}$ , mas os elementos diagonais de  $\Sigma$  são necessariamente os valores singulares de  $\mathbf{A}$ . Em tal decomposição, as colunas de  $\mathbf{U}$  são chamadas de valores singulares à esquerda de  $\mathbf{A}$ , e as colunas de  $\mathbf{V}$  são chamadas de vetores singulares à direita de  $\mathbf{A}$ .

Assim, com  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$  teremos que sua pseudo-inversa será:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T\mathbf{U}^T \quad (\text{B.2})$$

sendo  $\{\cdot\}^{-1}$  o operador matriz inversa.

Quando  $\Sigma$  contém linhas ou colunas nulas, é possível obter uma decomposição mais compacta de  $\mathbf{A}$ . Usando a notação estabelecida anteriormente, seja  $r$  o posto de  $\mathbf{A}$ , as matrizes  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são particionadas em submatrizes com  $r$  colunas em seu primeiro bloco:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r & \mathbf{U}_{m-r} \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r & \mathbf{V}_{m-r} \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \mathbf{V}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Nesse caso,  $\mathbf{U}_r$  é  $m \times r$  e  $\mathbf{V}_r$  é  $n \times r$ , a multiplicação de matrizes em bloco mostra, então, que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r & \mathbf{U}_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r^T \\ \mathbf{V}_{m-r}^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_r\mathbf{D}\mathbf{V}_r^T \quad (\text{B.4})$$

Essa fatoração de  $A$  é conhecida como uma decomposição em valores singulares reduzida. Como os elementos diagonais em  $\mathbf{D}$  não são nulos obtém-se, então, o caso particular em que (LAY, 1999):

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_r\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}_r^T \quad (\text{B.5})$$

## Anexo C – Taxa de Erro de Bit e de Símbolo

Neste Anexo, discute-se a tendência de desempenho quando são comparados a taxa de erro de bit (BER) com a taxa de erro de símbolo (SER).

Em qualquer sistema de comunicação digital a figura de mérito é comumente expressa em termos do cálculo de desempenho (probabilidade de erro) relativo ao número total de quadros (*frames*) transmitidos, ou ainda em relação ao número total de símbolos ou mesmo bits. A probabilidade destes conjuntos de informação transmitidos conter erros na recepção será muito maior quando computado a taxa de erros de *frame* (FER), seguido da taxa de erro de símbolos (SER) e por fim de bits (BER) (PROAKIS, 2000):

$$FER \geq SER \geq BER \quad (C.1)$$

Adicionalmente, em relação à ordem de modulação adotadas, tem-se que para a mesma SNR, a taxa de erro cresce à medida que a ordem de modulação é incrementada, por exemplo de QPSK ( $\mathcal{C} = 4$ ) para 64-QAM ( $\mathcal{C} = 64$ ).

A relação exata entre as probabilidade de erro de bit, símbolo e quadro não é simples. No entanto, é possível estabelecer limitantes superior e inferior entre a SER e a BER. Assim, a seguir discutiremos a relação entre a BER e SER. Os limitantes superior e inferior (*upper and lower bound*), os quais permitem relacionar a BER ( $P_e$ ) e SER ( $P_E$ ) podem ser estabelecidos como:

$$\frac{P_E}{b} \leq P_e \leq \frac{\mathcal{C}}{2(\mathcal{C} - 1)} P_E \quad (C.2)$$

onde  $\mathcal{C} = 2^b$  é a ordem da modulação e  $b$  é a quantidade de bits de informação em um símbolo.

Assumindo-se o caso de símbolos equiprováveis<sup>1</sup>:

$$\begin{array}{rcccl}
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \tilde{\mathbf{s}}_0 \\
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & \tilde{\mathbf{s}}_1 \\
 i - \text{ésima linha} \rightarrow & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \iff & \tilde{\mathbf{s}}_2 \\
 & \vdots & & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & & \tilde{\mathbf{s}}_{\mathcal{C}-2} \\
 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & & \tilde{\mathbf{s}}_{\mathcal{C}-1}
 \end{array}$$

Observa-se que há mapeamento um-para-um entre  $\mathcal{C} = 2^b$  símbolos em todas as  $2^{b-1}$  possíveis  $b$ -úplas binárias, supondo que todas as  $b$ -úplas de "zeros" (1a. linha) corresponde ao símbolo correto e o receptor comete um erro e escolhe a  $i$ -ésima linha ( $i$ -ésimo símbolo), com  $i \neq 0$ . Uma vez que há  $2^{b-1}$  "zeros" e "uns" em cada coluna (metade são "zeros" e a outra metade são constituídos por "uns") e um zero corresponde a um bit correto, a probabilidade de uma posição de bit particular estar errada é:

$$P_b = \frac{2^{b-1}}{2^b - 1} P_c = \frac{\mathcal{C}}{2(\mathcal{C} - 1)} P_c \quad (\text{C.3})$$

Para o limitante inferior, quando se tem um mapeamento adequado, ou seja, símbolos próximos diferem apenas de um bit (mapeamento Gray, por exemplo) e alta SNR é razoável admitir que todo erro de símbolo equivale ao erro de apenas 1 bit. Assim é razoável admitir nestas condições de operação que a  $P_e \approx \frac{P_E}{b}$ , conforme previsto na equação (C.2) para o limitante inferior.

Dito de outra forma, quando o sistema está operando em condições normais, a  $P_e$  normalmente está abaixo de  $10^{-3}$  (alta SNR); quando ocorre erro de símbolo, na maioria das vezes o símbolo vizinho mais próximo do correto é selecionado, isso no caso do mapeamento Gray, resultando em uma BER próxima ao limitante inferior, pois há apenas um bit distinto entre símbolos vizinhos.

Assim, por exemplo, em um sistema com  $\mathcal{C} = 128 = 2^7$  símbolos, genericamente resulta os seguintes limitantes para a taxa de erro de bit:

$$0,143P_E \leq P_e \leq 0,504P_E \quad (\text{C.4})$$

Portanto, sob condições normais de operação de qualquer sistema de comunicação digital, i.e.,  $P_e < 10^{-3}$ , a BER na equação (C.4) estará próxima do limitante

<sup>1</sup>Todos os símbolos ocorrem com mesma probabilidade na fonte (máxima entropia), a determinação do limitante superior pode ser obtida a partir da relação entre probabilidade de bit e de símbolo,  $P_b$  e  $P_E$

inferior, podendo-se afirmar que:

$$P_e \approx 0,143P_E, \text{ para } \mathcal{C} = 128; \text{ codificação Gray e } P_e < 10^{-3} \quad (\text{C.5})$$

Por sua vez, na região de baixa SNR, pode-se concluir a partir da equação (C.2), que a SER pode se aproximar de um. Por exemplo, para as ordem de modulação utilizadas neste trabalho (QPSK, 16-QAM e 64-QAM), resultam:

$$\text{QPSK } (\mathcal{C} = 4) : \quad 1,5P_e \leq P_E \leq 2P_e \quad (\text{C.6})$$

$$16 - \text{QAM } (\mathcal{C} = 16) : \quad 1,8762P_e \leq P_E \leq 4P_e \quad (\text{C.7})$$

$$64 - \text{QAM } (\mathcal{C} = 64) : \quad 1.9724P_e \leq P_E \leq 6P_e \quad (\text{C.8})$$

# Referências

- AGRELL, E.; ERIKSSON, T.; VARDY, A.; ZEGGER, K. Closest point search in lattices. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 48(8), p. 2201–2214, 2002.
- ALRUSTAMANI, A.; VOJCIC, B. Greedy multiuser detection over single-path fading channel. In: *IEEE Sixth International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*. Parsippany, USA: IEEE, 2000. v. 2, p. 708–712.
- ALRUSTAMANI, A.; VOJCIC, B. A new approach to greedy multiuser detection. *IEEE Transactions on Communications*, v. 50, n. 8, p. 1326–1336, 2002.
- ALRUSTAMANI, A.; VOJCIC, B. R.; STEFANOV, A. Greedy detection. *Journal of VLSI Signal Processing*, v. 30, p. 179–195, 2002.
- BARBERO, L. G. Fixing the complexity of the sphere decoder for mimo detecton. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, v. 7, p. 2131–2142, 2008.
- BRUN, V. En generalisation av kjedebrøken i. *Skr. Vidensk. Selsk. Kristiana, Mat. Nat. Klasse*, v. 6, p. 1–29, 1919.
- BRUN, V. En generalisation av kiedebrøken ii. *Skr. Vidensk. Selsk. Kristiana, Mat. Nat. Klasse*, v. 6, p. 1–24, 1920.
- CHEN, S. *The Sphere Decoder Algorithm Applied to Space-Time Block Codes*. Dissertação (Mestrado) — Royal Institute of Technology, 2004.
- CHIN, W. Qrd based tree search data detection for mimo communication systems. In: *61st Vehicular Technology Conference*. Stockholm, Sweden: IEEE, 2005. v. 3, p. 1624–1627.
- DAMEN, M. O.; GAMAL, H. E.; CAIRE, G. On maximum-likelihood detection and the search for the closest lattice point. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 49(10), p. 2389–2401, 2003.
- FINCKE, U.; POHST, M. Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis. *Mathematics of Computation*, v. 44, p. 463–471, 1985.
- GAN, Y. H.; LING, C.; MOW, W. H. Complex lattice reduction algorithm for low-complexity full-diversity mimo detection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 57, n. 7, p. 2701–2710, 2009.
- GAUSS, C. F. *Untersuchungen über höhere Arithmetik (Disquisitones Arithmeticae)*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1889.

- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. 3. ed. Baltimore, Maryland, USA: The Johns Hopkins University Press, 1996.
- HERMITE, C. Extraits de lettres de m. ch. hermite á m. jacob sur diférents objects de la théorie des nombres. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 1850, n. 40, p. 279–290, 1850.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1985.
- HUNG, C.-Y.; SANG, T.-H. A sphere decoding algorithm for mimo channels. In: *6th International Symposium on Signal Processing and Information Technology*. Vancouver, Canada: IEEE, 2006. n/d, p. pp.502–506.
- JALDÉN, J. *Maximum Likelihood Detection for the Linear MIMO Channel*. Tese (Doutorado) — Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden, 2004.
- JALDÉN, J.; OTTERSTEN, B. On the complexity of sphere decoding in digital communications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 53, p. 1474 – 1484, 2005.
- JESZENSKY, P. J.; ABRÃO, T. Detectores multiusuário para ds-cdma - lineares fixos. *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, v. 16, p. 122 – 137, 2001.
- JIAN, H.; YI, Y.; SHI, Y. A simplified soft-output qrd-m mimo detector. In: *5th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing*. Beijing, China: IEEE, 2009. p. 1 – 4.
- JONG, Y. de; WILLINK, T. Iterative tree search detection for mimo wireless systems. In: *56th Vehicular Technology Conference*. Vancouver, Canada: IEEE, 2002. v. 2, p. 1041–1045.
- KAILATH, T.; VIKALO, H.; HASSIBI, B. Mimo receive algorithms. In: *Space-Time Wireless Systems: From Array Processing to MIMO Communications*. New York, USA: Cambridge University Press, 2005.
- KIM, B.; CHOI, K. A very low complexity qrd-m algorithm based on limited tree search for mimo systems. In: *67th Vehicular Technology Conference*. Marina Bay, Singapore: IEEE, 2008. p. 1246–1250. ISSN 1550-2252.
- KORKINE, A.; ZOLOTAREFF, G. Sur les formes quadratiques. *Mathematische Annalen*, v. 6, n. 3, p. 366–389, 1873.
- LARSSON, E. G. Mimo detection methods: How they work. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 3, p. 91–95, 2009.
- LAY, D. C. *Álgebra Linear e Suas Aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro: Addison Wesley Longman, 1999.
- LENSTRA, A. K.; LENSTRA, H. W.; LOVÁSZ, L. Factoring polinomials with rational coefficients. *Mathematische Annalen*, v. 261, n. 4, p. 515–534, 1982.
- LING, C. On the proximity factors of lattice reduction-aided decoding. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 59, n. 6, p. 2795–2808, 2011.

- LING, C.; MOW, W. H.; GAN, L. Dual-lattice ordering and partial lattice reduction for sic-based mimo detection. *Selected Topics in Signal Processing, IEEE Journal of*, v. 3, n. 6, p. 975–985, 2009.
- MINKOWSKI, H. Ueber positive quadratische formen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 1886, n. 99, p. 1–9, 1886.
- MINKOWSKI, H. Ueber die positiven quadratischen formen und über kettenbruchähnliche algorithmen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 1891, n. 107, p. 278–297, 1891.
- MINKOWSKI, H. *Geometrie der Zohlen*. Leipzig, Germany: Teubner Verlag, 1896.
- NGUYEN, P.; VALÉE, B. *The LLL Algorithm: Survey and Applications*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2010.
- NIU, J.; LU, I.-T. A comparison of two lattice-reduction-based receivers for mimo systems. In: *Sarnoff Symposium*. Princeton, New Jersey: IEEE, 2008. p. 1–6.
- PAPOULIS, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 3. ed. New York: Mcgraw-Hill College, 1991.
- PENG, W.; MA, S.; NG, T. S.; WANG, J. Z. Adaptive qrd-m detection with variable number of surviving paths for mimo systems. In: *International Symposium on Communications and Information Technologies*. Sydney, Australia: IEEE, 2007. p. 403–408.
- PENROSE, R. A. A generalized inverse for matrices. In: *Proceedings of the 51th Cambridge Philosophical Society*. -: Cambridge Philosophical Society, 1955. p. 406 – 413.
- PROAKIS, J. *Digital Communications*. 4. ed. -: McGraw-Hill, 2000.
- SEYSEN, M. Simultaneous reduction of a lattice basis and its reciprocal basis. *Combinatorica*, v. 13, n. 3, p. 363–376, 1993.
- STEWART, G. W. *Matrix Algorithms - Volume 1: Basic Decompositons*. Philadelphia, PA: SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- SUN, Y.; CAVALLARO, J. R. High throughput vlsi architecture for soft-output mimo detection based on a greedy graph algorithm. *ACM Great Lakes Symposium on VLSI*, n/d, p. 445–450, 2009.
- VERDÚ, S. *Multiuser Detection*. New York, USA: Cambridge University Press, 1998.
- VIKALO, H.; HASSIBI, B. Maximum-likelihood sequence detection of multiple antenna systems over dispersive channels via sphere decoding. *EURASIP - Journal on Applied Signal Processing*, v. 5, p. 525–531, 2002.
- VIKALO, H.; HASSIBI, B. On the sphere decoding algorithm i. expected complexity. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 53, p. 2806–2818, 2005.

WU, Y.; KUNG, S.-Y. Signal detection for mimo-isi channels: An iterative greedy improvement approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 52, n. 3, p. 703–720, 2004.

WÜBBEN, D.; SEETHALER, D.; JALDÉN, J.; MATZ, G. Lattice reduction. *Signal Processing Magazine, IEEE*, v. 28, n. 3, p. 70–91, 2011.

YAO, H.; WORNELL, G. Lattice-reduction-aided detectors for mimo communication systems. In: *Global Telecommunications Conference*. Taipei, Taiwan: IEEE, 2002. v. 1, p. 424–428.

YUE, J.; KIM, K. J.; GIBSON, J.; ILTIS, R. Channel estimation and data detection for mimo-ofdm systems. In: *Global Telecommunications Conference*. San Francisco, California: IEEE, 2003. v. 2, p. 581–585.