Exemplo 02.
Problema 7.17 - Nivaldo Lemos.

Movimento de um projétil - plano (x, y)

$$S_0 = \int_a^b \sqrt{2[E-U(q)]}\,dl \; ; \quad dl = \sqrt{dq_i dq_i} \; , \quad U(q) = U(y) = mgy$$

$$\therefore S_0 = \int_a^b \sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{dx^2+dy^2} = \int_a^b \sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{x'^2+1}\,dy$$

$$\therefore S_0 = \int_0^0 \sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{1+x'^2}\,dy \; ; \quad x' \equiv \frac{dx}{dy}$$

Equação de E.L.

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = \sqrt{2(E-mg)}\,\frac{1}{\sqrt{\;\;}}\,x' \;\therefore\; \frac{\sqrt{2(E-mgy)}}{\sqrt{1+x'}}\,x' = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(E-mgy)\,x'^2 = C^2(1+x') \Rightarrow x'^2\left[2(E-mgy)-C^2\right] = C^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{C}{\sqrt{2(E-mgy)-C^2}} \Rightarrow x = C\int \frac{dy}{\sqrt{2E-C^2-2mgy}}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{b+az}} = \frac{2}{a}\sqrt{b+az}\; ; \quad b \equiv 2E - C^2, \quad a \equiv -2mg$$

$$\therefore x = C\,\frac{2}{-2mg}\sqrt{2E-C^2-2mgy} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{C^2}{mg}\right)\left(2E-C^2-2mgy\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mg}{C^2}\right)x^2 - 2E + C^2 = -2mgy \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2C^2}x^2 + \frac{E}{mg} - \frac{C^2}{2mg}} \Leftrightarrow \boxed{y = Ax^2 + C}$$

parábola

Prove que a transformação

$$L' = L(q,\dot q,t) + \frac{df}{dt}(q,t),$$

é canônica e encontre a função geradora.

Sob esta transformação as Eqs. E.L. são invariantes.

$$L' = L + \frac{\partial f}{\partial q}\dot q + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

$$q' = q \; ;$$

$$p_i' = \frac{\partial L'}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \Rightarrow p_i' = p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

Temos a transformação

$$\begin{cases} Q_i = q_i, \\ P_i = p_i + \dfrac{\partial f}{\partial q_i} = p_i + \dfrac{\partial f}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Parênteses de Poisson invariantes e se

$$\{Q_i, P_j\}_{(q,p)} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_j}{\partial q_k}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \; \cancel{\delta_{ij}} =$$

$$= \left\{q_i, p_j + \frac{\partial f}{\partial q}\right\} = \{q_i, p_j\} + \left\{q_i, \frac{\partial f}{\partial q}\right\}.$$

$$\left\{q_i, \frac{\partial f(q,t)}{\partial q}\right\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\overbrace{\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q}(q,t)}^{=0} - \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial f(q,t)}{\partial q}\overbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}^{=0} = 0$$

$$\therefore \{Q_i, P_j\} = \{q_i, p_j\} = \delta_{ij},$$

é invariante.

Dado que a transformação é próxima à identidade, buscamos

$$F = F_2(q, P, t); \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

Para a transformação:

$$q_i = Q_i \Rightarrow \quad q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \Rightarrow \quad F_2 = q_i P_i + g$$

$$p_i = P_i - \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \Rightarrow \quad \int \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i = \int P_i \, dq_i - \int \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_2 = P_i q_i - f(q,t)}$$

Problema

Dada a função geradora de transformações canônicas infinitesimais

$$G = x p_y - y p_x,$$

calcule, utilizando os parênteses de ~~po~~ Poisson, as variações δx e δp_x.

1º $\quad \delta x = \alpha \{x, G\} = \alpha \{x, x p_y - y p_x\} = + \alpha \overset{=0}{\{x, x p_y\}} - \alpha \{x, y p_x\} = -\alpha y.$

2º $\quad \delta p_x = \alpha \{p_x, G\} = \alpha \{p_x, x p_y - y p_x\} = -\alpha p_y$

b) Calcule $\{L_x, L_y\}$:

$$\{L_x, L_y\} = \{y p_z - z p_y, z p_x - x p_z\} = \{y p_z, z p_x\} - \{y p_z, x p_z\}$$

$$- \{z p_y, z p_x\} + \{z p_y, x p_z\}$$

$$= - y p_x - 0 - 0 + x p_y = x p_y - y p_x = L_z.$$

Problema.

O movimento de uma partícula com massa m submetida a uma aceleração constante em 1-d é descrito por

$$x = x_0 + \frac{p_0}{m} t + \frac{1}{2} a t^2; \tag{1}$$

$$p = p_0 + mat. \tag{2}$$

Verifique (utilizando P.P) se a transformação das antigas variáveis (x, p) para as novas variáveis (x_0, p_0) é canônica. Se sim, encontre a função geradora do tipo 1: $F_1(x, x_0, t)$.

Solução

Vimos que

$$\{A(q,p), B(q,p)\}_{(q,p)} = \{\bar{A}(Q,P), \bar{B}(Q,P)\}_{(Q,P)} \{Q, P\}_{(q,p)}$$

Se

$$\{Q, P\}_{(q,p)} = 1,$$

a transformação é canônica.

Dado que $(Q, P) = (x_0, p_0)$, devemos calcular

$$\{x_0, p_0\}_{(x,p)}.$$

Para isso usamos as eqns (1,2): para expressarmos $x_0 = x_0(x,p)$, $p_0 = p_0(x,p)$:

$$x_0 = x - \frac{p_0}{m} t - \frac{1}{2} a t^2 = x - \frac{1}{m}(p - mat)^t - \frac{1}{2} a t^2 =$$

$$= x - \frac{pt}{m} + a t^2 - \frac{1}{2} a t^2 = x - \frac{pt}{m} + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = x - (pt)/m + \frac{1}{2} a t^2 & (3) \\ p_0 = p - mat. & (4) \end{cases}$$

7.1 – Colken

$$\{x_0, p_0\}_{(q,p)} = \frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial p} - \frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial x_0}{\partial p} = 1\cdot 1 - 0\cdot(-1/m) = 1;$$

Portanto a transformação é canônica.

Função geradora do tipo 1: $F_1(q, Q, t)$

$$F_1(q,Q,t) \longrightarrow \begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i}, \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i}. \end{cases}$$

Devido a que $(Q, P) = (x_0, p_0)$; $(q, p) = (x, p)$, temos:

$$F_1(x, x_0, t) \Longrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x, x_0, t), & (1) \\ p_0 = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_0}(x, x_0, t). & (2) \end{cases}$$

Destas equações é claro que $p = p(x, x_0)$; $p_0 = p_0(x, x_0)$, por isso usamos a eqn(3-63) para expressarmos $p = p(x, x_0)$:

$$\begin{cases} p = \dfrac{m(x-x_0)}{t} + \cancel{\boxed{\text{[illegible]}}} + \dfrac{mat}{2}, \\ p_0 = p - mat = \dfrac{m(x-x_0)}{t} - \dfrac{mat}{2}, \end{cases}$$

que junto com as eqn(1) e eqn(2), fornecem

$$\begin{cases} \dfrac{m(x-x_0)}{t} + \cancel{\boxed{\text{[illegible]}}}\, \dfrac{mat}{2} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}, \\ \dfrac{m(x-x_0)}{t} - \dfrac{mat}{2} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_0}, \end{cases}$$

que integradas fornecem

$$\cancel{F_1(x, x_0, t) = m\left(\frac{x^2}{2} - x_0 x\right) + (1 - t/2)\, maxt + f_1(x_0, t).}$$

$$\cancel{F_1(x, x_0, t) = m\left(\frac{x_0^2}{2} - x x_0\right) + \frac{ma x_0 t}{2} + f_2(x, t),}$$

~~Combinando estas equações encontramos~~

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, x_0, t) &= \frac{m}{t}\left(\frac{x^2}{2} - x x_0\right) + \frac{matx}{2} + f_1(x_0, t), \\ F_1(x, x_0, t) &= -\frac{m}{t}\left(x x_0 - \frac{x_0^2}{2}\right) + \frac{matx_0}{2} + f_2(x, t). \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2t}\left(x^2 + x_0^2 - 2x x_0\right) + \frac{mat}{2}(x - x_0) + f_1(x_0, t) - f_2(x, t) = 0$$

$$\Rightarrow f_2(x,t) - f_1(x_0, t) = \frac{m}{2t}(x - x_0)^2 + \frac{mat}{2}(x - x_0)$$

Do conjunto de equações (1) acima, fica evidente que

$$f_1(x_0, t) = \frac{matx_0}{2} + f'(t),$$

$$f_2(x, t) = \frac{matx}{2} + g(t),$$

portanto

$$F_1(x, x_0, t) = \frac{m}{2t}(x - x_0)^2 + \frac{mat}{2}(x + x_0) + f(t).$$

<u>De outra forma</u>. Da equivalência dos integrandos sob variação

$$S \equiv S' \Rightarrow p_i dq_i - H dt = P_i dQ_i - K + dF \Rightarrow dF_1 = p_i dq_i - P_i dQ_i - \underbrace{(H-K)}_{=0 \text{ neste caso.}} dt$$

$$\therefore dF_1 = p\,dq - p_0\,dq_0 = p\,dx - p_0\,dx_0 = \left[\frac{m}{t}(x-x_0) + \frac{mat}{2}\right]dx - \left[\frac{m}{t}(x-x_0) - \frac{mat}{2}\right]dx_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dF_1 = d\left[\frac{m}{2t}(x-x_0)^2 + \frac{mat}{2}(x+x_0)\right].$$