Universidade Estadual de Londrina

Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física
PROF. ANTONIO EDSON GONÇALVES
http: www.fisica.uel.br / e-mail: goncalve@uel.br

I Prova de MECANA - 9FIS030 - II Semestre de 2018- 13/09/2018

Problema 01. [10]

Encontre a geodésica em uma superfície plana $2-d$, em coordenadas polares. Mostre que este resultado segue diretamente da transformação da geodésica do plano de coordenadas cartesianas para polares.

Solução.

Utilizando o elemento de comprimento de arco

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

construimos o funcional

$$S = \int \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} dr.$$

Utilizando as equações de Euler e notando que a coordenada θ é cíclica, obtemos

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{r^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}} = C,$$

de onde, separa-se as variáveis para obter-se a integral

$$\begin{aligned} \theta = \int \frac{C dr}{r\sqrt{r^2 - C^2}} &= \operatorname{arcsec}\left(\left|\frac{r}{C}\right|\right) \Longrightarrow \\ r = C \sec\theta \Longrightarrow \\ C = r\cos\theta. \end{aligned}$$

que é a equação de uma reta em coordenadas polares.
Para verificar este resultado considere equação de uma reta em coordenadas cartesianas

$$y(x) = ax + b,$$

que transformada em coordenadas polares com

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha, \\ y &= r\text{sen}\alpha, \end{aligned}$$

teremos

$$r\text{sen}\alpha = ar\cos\alpha + b.$$

Escolha

$$\begin{aligned} a &= \cot\theta_0, \\ b &= r_0 \end{aligned}$$

para obter

$$\begin{aligned} r\text{sen}\alpha\text{sen}\theta_0 &= r\cos\theta_0\cos\alpha + b\text{sen}\theta_0 \Longrightarrow \\ r\cos(\alpha - \theta_0) &= r_0\text{sen}\theta_0 \Longrightarrow \\ r\cos\theta &= C. \end{aligned}$$

Problema 02. **[10]**

Equação de Lagrange na forma covariante. Para se obter as equações de Lagrange na forma covariante, para partículas, não campos, é necessário levar em conta que a quadrivelocidade possui módulo unitário, ou seja $u^\mu u_\mu = 1$. Isto pode ser feito de duas formas: utilizando-se vínculos através dos multiplicadores de Lagrange ou utilizando um parâmetro arbitrário, que não o tempo próprio. Vamos considerar este caso. Para isto a Lagrangiana será uma função da forma

$$L = L(x^\mu(\lambda),\, v^\mu(\lambda),\, \lambda),$$

onde

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda},$$

sendo λ o parâmetro arbitrário que não é o tempo próprio e v^μ não é quadrivelocidade. Note entretanto que elas estão relacionadas, ou seja, a quadrivelocidade u^μ esta relaciona a velocidade v^μ através de

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda} = u^\mu \frac{d\tau}{d\lambda}.$$

De onde segue as relações

$$v^\mu v_\mu = u^\mu \frac{d\tau}{d\lambda} u_\mu \frac{d\tau}{d\lambda} = u^\mu u_\mu \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2.$$

Dado que $u^\mu u_\mu = 1$,obtemos que

$$v^\mu v_\mu = \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 \Longrightarrow$$
$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \sqrt{v^\mu v_\mu}$$

O que permite que escrevamos

$$v^\mu = u^\mu \sqrt{v^\mu v_\mu}.$$

Nesta formulação a ação funcional é dada por

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(x^\mu(\lambda),\, v^\mu(\lambda),\, \lambda) d\lambda,$$

enquanto que as equações de Euler são

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Utilizando esta equação e o que for necessário nas definições anteriores, encontre a equação de movimento na forma covariante para a lagrangiana

$$L = mc\sqrt{v^\mu v_\mu} + \frac{e}{c}A_\mu v^\mu, A_\mu = A_\mu(x).$$

Para isto calcule as derivadas parciais da Lagrangiana, que figuram nas equações de Lagrange. Antes de fazer a derivada no parâmetro λ,faça a escolha de λ como sendo o tempo próprio τ,para em seguida fazer a derivada e obter a equação de movimento.

Solução.

Calculando cada termo separadamente, teremos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial v^{\alpha}} &= mc\frac{v_{\alpha}}{\sqrt{v^{\mu}v_{\mu}}} + \frac{e}{c}A_{\alpha}, \\
\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial v^{\alpha}}\right) &= \frac{d}{d\lambda}\left[mc\frac{v_{\alpha}}{\sqrt{v^{\mu}v_{\mu}}} + \frac{e}{c}A_{\alpha}\right], \\
\frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} &= \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)v^{\mu},
\end{aligned}
$$

Escolhendo o parâmetro λ como o tempo próprio teremos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^{\alpha}}\right) &= \frac{d}{d\tau}\left[mcu_{\alpha} + \frac{e}{c}A_{\alpha}\right], \\
\frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} &= \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)u^{\mu},
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
mc\frac{du_{\alpha}}{d\tau} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}u^{\mu} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)u^{\mu} = 0.
$$

Dado que

$$
\frac{e}{c}\left[\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\right]u^{\mu} = \frac{e}{c}F_{\mu\alpha}u^{\mu},
$$

obtemos a equação de Lorentz na forma covariante, também denominada de equação de MInkowski.

Problema 03. [10]

Uma partícula de carga e move-se num campo eletromagnético uniforme, isto é, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ são constantes. Mostre que o vetor $\boldsymbol{K} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} - e\boldsymbol{E}t$ é constante de movimento.

Solução:

Para verificar se K é constante de movimeto calculamos

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r} - e\boldsymbol{E}t\right)\\ &= m\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{B}\times\dot{\boldsymbol{r}} - e\boldsymbol{E} = 0,\end{aligned}$$

porque é a equação de movimento, ou seja

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} + e\boldsymbol{E}.$$

Problema 04. [10]

A ação para uma partícula livre é

$$S = \frac{m}{2}\frac{[x(t_f) - x(t_i)]^2}{(t_f - t_i)},$$

onde t_i, t_f são os tempos iniciais e finais, consequentemente $x(t_i)$, $x(t_f)$ posições iniciais e finais, respectivamente. Considere $t_i = 0$,$t_f = t$,$x(t_i) = x_0$ e $x(t_f) = x(t)$. Calcule $\partial S/\partial t$ e verifique se esta quantidade é constante de movimento.

Solução.

Utilizando os valores iniciais e finais sugeridos no enunciado teremos:

$$S = \frac{m}{2} \frac{[x(t) - x_0]^2}{t}.$$

Utilizando esta expressão calculamos

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m}{2} \frac{[x(t) - x_0]^2}{t^2}.$$

Já, a variação temporal desta expressão é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) &= -\frac{m}{2} \frac{2\,[x(t) - x_0]}{t^2} \dot{x} - \frac{m}{2} \frac{(-2)\,[x(t) - x_0]^2}{t^3} \\ &= -\frac{m}{t^3} \left\{ [x(t) - x_0]\, \dot{x}t - [x(t) - x_0]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando a equação de movimento

$$x(t) = x_0 + \dot{x}t \Longrightarrow \dot{x}t = [x(t) - x_0]$$

na equação anterior, encontramos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) = -\frac{m}{t^3} \left\{ [x(t) - x_0]^2 - [x(t) - x_0]^2 \right\} = 0.$$

Portanto

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) = constante,$$

é uma constan de movimento. Isto deve ser correto uma vez que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) = -E,$$

onde E é a energia total do sistema, no caso partícula livre.