Universidade Estadual de Londrina

Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física
PROF. ANTONIO EDSON GONÇALVES
http: www.fisica.uel.br / e-mail: goncalve@uel.br

IV Prova de MECANA - 9FIS030 - II Semestre de 2018- 13/12/2018

Problema 01. **[10]**

Considere a Hamiltoniana $1-d$, que pode representar o modelo de um átomo com um elétron interagindo com um campo escalar externo

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - eEq,$$

sendo E um campo constante. Encontre um conjunto de transformações canônicas (prove que são canônicas) que permitam que se escreva a nova Hamiltoniana como

$$K(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}AQ^2 - B,$$

onde A e B são funções de m, ω, e, E.

Soluçao:

Completanto o quadrado na Hamiltonianan

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(q - \frac{eE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{(eE)^2}{2m\omega^2}$$

e fazendo asa transformações

$$Q = q - \frac{eE}{m\omega^2},$$
$$P = p,$$

haja vista que o termos adicionado à antiga coordenada é constante, teremos

$$K(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}AQ^2 - B$$
$$A \equiv m\omega^2,$$
$$B \equiv \left(\frac{eE}{m\omega^2}\right)^2.$$

Que a transformação é canônica é imediato:

$$\begin{aligned}\{Q,P\}_{(p,q)} &= \{Q,P\}_{(Q,P)}\{Q,P\}_{(q,p)}\\ &= \mathbb{I}\left\{q-\frac{eE}{m\omega^2},p\right\}_{(q,p)} = \mathbb{I},\end{aligned}$$

portanto é canônica. Também pode ser verificado através do cálculo matriz simplética M.

A função geradora mais apropriada (mais fácil) é a do tipo F_2 por conta que se $E=0$ a transformação é identidade:

$$F_2(q,P) = qP - \frac{eE}{m\omega^2}P$$

Problema 02. **[10]**

As transformações

$$\begin{aligned}Q &= q\cos\theta - \frac{p}{a}\mathrm{sen}\theta,\\ P &= aq\mathrm{sen}\theta + p\cos\theta,\end{aligned}$$

onde $a \equiv (m\omega)$, são canônicas. Encontre a função geradora $F_2(q,P)$. Considerando que as coordenadas q, p são as coordenadas canônicas do modelo

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2,$$

encontre $K(Q,P)$,para as novas variáveis canônicas (Q,P) assumindo que o parâmetro θ seja uma função explicita do tempo, ou seja

$$\frac{\partial\theta(t)}{\partial t} \neq 0.$$

Mostre que podemos escolher θ de forma que $K(Q,P)=0$.

A função geradora do tipo $F_2(q,P)$ satisfaz

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P},\\ p &= \frac{\partial F_2}{\partial q}.\end{aligned}$$

Portanto

$$F_2(q,P) = \int Q\left(q,P\right) dP + f\left(q\right),$$
$$F_2(q,P) = \int p\left(q,P\right) dq + g\left(P\right).$$

Das equação que relacionam as novas e antigas coordenadas encontramos

$$\begin{aligned}
Q &= q\cos\theta - \frac{1}{a}\text{sen}\theta\left(\frac{P}{\cos\theta} - aq\tan\theta\right) \\
&= q\left(\cos\theta + \text{sen}\theta\tan\theta\right) - \frac{P}{a}\tan\theta \\
&= \frac{q}{\cos\theta} - \frac{P}{a}\tan\theta \\
p &= \frac{P}{\cos\theta} - aq\tan\theta.
\end{aligned}$$

Utilizando estas equações calculamos

$$\begin{aligned}
F_2\left(q,P\right) &= \int\left\{\frac{q}{\cos\theta} - \frac{P}{a}\tan\theta\right\} dP + f\left(q\right) \\
&= \frac{qP}{\cos\theta} - \frac{P^2}{2a}\tan\theta + f(q), \\
F_2\left(q,P\right) &= \int\left\{\frac{P}{\cos\theta} - aq\tan\theta\right\} dq + g\left(P\right) \\
&= \frac{qP}{\cos\theta} - \frac{aq^2}{2}\tan\theta + +g\left(P\right),
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$F_2\left(q,P\right) = \frac{qP}{\cos\theta} - \frac{1}{2}\left(aq^2 + \frac{P^2}{a}\right)\tan\theta.$$

Para calcularmos a nova Hamiltoniana precisamos de

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{a}\text{sen}\theta \\ a\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{1}{a}\text{sen}\theta \\ -a\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
K(Q,P) &= \frac{1}{2m}\left(P\cos\theta - aQ\text{sen}\theta\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\left(Q\cos\theta + \frac{P}{a}\text{sen}\theta\right)^2 + \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial t} \\
&= \frac{P^2}{2m}\left(\cos^2\theta + m^2\omega^2\frac{1}{a^2}\text{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{m}\left(m^2\omega^2\frac{1}{a}QP\cos\theta\text{sen}\theta - aQP\cos\theta\text{sen}\theta\right) \\
&= +\frac{Q^2}{2m}\left(a^2\text{sen}^2\theta + m^2\omega^2\cos^2\theta\right) + \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial t} \\
&= \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}Q^2 + \left[\left.\frac{\partial F_2(q,P)}{\partial t}\right|_{(q,P)}\right]_{q=q(Q,P)}.
\end{aligned}
$$

Calculando a derivada parcial da função geradora

$$
\left.\frac{\partial F_2(q,P)}{\partial t}\right|_{(q,P)} = \frac{qP}{\cos^2\theta}\text{sen}\theta\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{2}\left(aq^2 + \frac{P^2}{a}\right)\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}.
$$

substituindo $q$em função de Q e P teremos

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial F_2(q,P)}{\partial t}\right|_{(q,P)} &= \left(Q\cos\theta + \frac{P}{a}\text{sen}\theta\right)P\sec^2\theta\text{sen}\theta\frac{d\theta}{dt} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[a\left(Q\cos\theta + \frac{P}{a}\text{sen}\theta\right)^2 + \frac{P^2}{a}\right]\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} \\
&= \left\{\left(Q\cos\theta + \frac{P}{a}\text{sen}\theta\right)P\text{sen}\theta - \frac{1}{2}\left[a\left(Q\cos\theta + \frac{P}{a}\text{sen}\theta\right)^2 + \frac{P^2}{a}\right]\right\} \\
&\quad \times \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} \\
&= -\left(\frac{P^2}{2m\omega} + \frac{1}{2}m\omega Q^2\right)\dot{\theta} = -H(QP)\frac{\dot{\theta}}{\omega}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
K(Q,P) = H(Q,P) - H(QP)\frac{\dot{\theta}}{\omega} = H\left(Q, P\left(1 - \frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)\right)
$$

que para a escolha $\dot{\theta} = \omega \Longrightarrow K(Q,P) = 0$,ou equivalentemente $\theta(t) = \omega t$.

Problema 03. **-[10]**

Mostre que a equação de Hamilton-Jacob

$$
\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,
$$

para uma partícula livre unidimensional é separável na forma de produto, isto é, admite solução da forma $S(q,t) = W(q)T(t)$. Usando esta técnica de separação de variáveis, obtenha uma integral completa e, a partir dela, a solução geral para a equação de movimento para $q(t)$.

Problema 04. **[10]**

Resolva a equação de movimento de uma partícula livre $1 - d$ pelo método de Hamilton-Jacob.