Universidade Estadual de Londrina

Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física
PROF. ANTONIO EDSON GONÇALVES
http: www.fisica.uel.br / e-mail: goncalve@uel.br

II Prova de MECANA - 9FIS030 - II Semestre de 2018- 16/10/2018

Problema 01. **[10]**

Partícula conforme. A ação de uma partícula com massa m submetida a um potencial que varia com o inverso do quadrado da distância à origem é

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\alpha}{x^2} \right) dt,$$

sendo α uma constante. Mostre que esta ação é invariante sob as transformações de Weyl

$$t \longrightarrow t' = \lambda t,$$
$$x \longrightarrow x'(t') = \sqrt{\lambda} x(t).$$

Considerando $\lambda = 1+\varepsilon$, com $\varepsilon \ll 1$,encontre as transformações infinitesimais e utilize o Teorema de Noether para encontrar a quantidade (carga) conservada, decorrente dessa simetria.

Sob esta transformação

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{dx}{dt}$$

e a ação segue invariante

$$I \longrightarrow \int \lambda dt \left(\frac{1}{2}m\frac{\dot{x}^2}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda x^2}\right) = I.$$

Para obter a carga conservada associada a esta simetria, utilizando o teorema de Noether, introduzimos a transformação infinitesimal com $\lambda = 1 + \varepsilon$, e $\varepsilon \ll 1$ de forma que

$$t' = (1 + \varepsilon)\, t.$$

Portanto $x'(t') = \sqrt{\lambda}x(t)$ pode ser aproximado como

$$x'((1 + \varepsilon)\, t) \approx \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) x(t) \Longrightarrow$$
$$x'(t) + \dot{x}\,(t)\,\varepsilon t \approx x(t) + \frac{\varepsilon}{2}x(t).$$

Destas aproximações obtemos

$$\delta x(t) = x'(t) - x(t) = -\varepsilon t\dot{x} + \frac{\varepsilon}{2}x.$$

Utilizando o teorema de Noether deduzido em sala:
Se a ação S for invariante sob as transformações

$$\delta T = \alpha\xi(q,\, \dot{q};\, t),$$
$$\delta Q\,(\alpha,\, T) = -\alpha\frac{dq}{dt}\xi(q,\, \dot{q};\, t) + \alpha\eta(q,\, \dot{q}; t),$$

então a quantidade

$$\left[L\,[q,\, \dot{q}] - \frac{\partial L\,[q,\, \dot{q}]}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right]\xi + \frac{\partial L\,[q,\, \dot{q}]}{\partial \dot{q}}\eta(q,\, \dot{q}; t),$$

onde L e a Lagrangiana do sistema, é conservada.

Continuano...

Comparando a variação infinitesimal nas coordenadas do modelo em consideração

$$\delta x(t) = x'(t) - x(t) = -\varepsilon t\dot{x} + \frac{\varepsilon}{2}x$$

com a variação infinitesimal

$$\delta Q\,(\alpha,\, T) = -\alpha\frac{dq}{dt}\xi(q,\, \dot{q};\, t) + \alpha\eta(q,\, \dot{q}; t),$$

encontramos

$$\xi = \frac{\varepsilon t}{\alpha},$$
$$\eta = \frac{\varepsilon x}{2\alpha},$$

que substituídas no T.N. fornecem a carga conservada

$$Q = -\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\alpha}{x^2}\right]\frac{\varepsilon t}{\alpha} + m\dot{x}\frac{\varepsilon x}{2\alpha} = Const.$$

Ou escrito na forma

$$Q = \frac{\varepsilon}{\alpha}\left[mx\dot{x} - \left(\frac{m\dot{x}^2 t}{2} + \frac{\alpha t}{x^2}\right)\right].$$

Problema 02. **[10]**

A Lagrangiana de uma partícula com massa m e carga e em um campo eletromagnético é

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\phi + \frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}.$$

Considerando o campo ϕ nulo e o campo externo como sendo um campo magnético uniforme na direção z com $\mathbf{A} = (\mathbf{B}\times\mathbf{r})/2$, mostre que a lagrangiana pode ser reescrita como

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{L}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc}\mathbf{B}.$$

Esta Lagrangiana é invariante sob translações e rotações infinitesimais; utilize o teorema de Noether para encontrar as correspondentes constantes de movimento.

Considerando que

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A},$$

segue desta eqaução, para o campo $\mathbf{B}$ constante, que

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2}.$$

Utilizando esta equação encotra-se diretamente que

$$\begin{aligned}\frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} &= \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2}\right) = \frac{e}{2mc}\mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \\ &= \frac{e}{2mc}\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}\end{aligned}$$

O teorema de Noether afirma que sob simetrias ξ e η, a quantidade

$$\left[L\left[q, \dot{q}\right] - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right]\xi + \frac{\partial L\left[q, \dot{q}\right]}{\partial \dot{q}}\eta\left(q, \dot{q}\right)$$

é conservada. Sob translação

$$\eta = \varepsilon,$$

para cada dimensão, portanto

$$p_i = mv_i + \frac{e}{2c}B\left(x\delta_{yi} - y\delta_{xi}\right)$$

é constante de movimento sob translação.
Uma rotação infinitesimal ao redor do eixo z (quebra de simetria imposta pelo campo externo B_{0z}) pode ser representada por

$$\delta x^i = \varepsilon^{ij3}x^j\delta\theta.$$

portanto

$$\eta^i = \varepsilon^{ij3}x^j\delta\theta,$$

Neste caso a quantidade conservada é

$$\begin{aligned}p^i\eta^i &= \left[mv_i + \frac{e}{2c}B\left(x\delta_{yi} - y\delta_{xi}\right)\right]\varepsilon^{ij3}x^j\delta\theta \Longrightarrow \\ \Longrightarrow p^i\eta^i &= \left[mv_1 + \frac{e}{2c}B\left(x\delta_{y1} - y\delta_{x1}\right)\right]\varepsilon^{1j3}x^j\delta\theta \\ &= \left[mv_2 + \frac{e}{2c}B\left(x\delta_{y2} - y\delta_{x2}\right)\right]\varepsilon^{2j3}x^j\delta\theta \\ &= \left\{\left[mv_1 - \frac{e}{2c}By\right]y - \left[mv_2 + \frac{e}{2c}Bx\right]x\right\}\delta\theta \\ &= m\left(yv_x - xv_y\right) - \frac{eB}{2c}\left(x^2 + y^2\right).\end{aligned}$$

Problema 03. **[10]**

As equações de Hamilton para uma partícula com massa m e carga q em um campo eletromagnético externo são

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right), \\
\dot{\mathbf{p}} &= \frac{e}{mc}\left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\right] - e\boldsymbol{\nabla}\phi.
\end{aligned}$$

Mostre que elas são equivalentes a

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right).$$

Note primeiramente que

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}} &= \frac{e}{mc}\left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\right] - e\boldsymbol{\nabla}\phi \\
&= \frac{e}{mc}\left[m\dot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} + m\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}\right] - e\boldsymbol{\nabla}\phi
\end{aligned}$$

portanto derivando a primeira equação

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{m}\left(\dot{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left\{\frac{e}{c}\left[\dot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}\right] - e\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} - \frac{e\partial\mathbf{A}}{c\partial t}\right\} \\
&= \frac{e}{mc}\mathbf{v}\times\mathbf{B} + e\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) \implies \\
m\ddot{\mathbf{r}} &= e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)
\end{aligned}$$

Problema 04. **[10]**

Vimos que Lagrangianas que diferem pela derivada total de uma função que depende das coordenadas e do tempo são equivalentes, ou seja fornecem as mesmas equação de movimento. Seja portanto

$$L' = L + \frac{dF(q(t),t)}{dt}.$$

Encontre os momentos generalizados p_i' da Lagrangiana L' e a Hamiltoniana H'. Qual a forma das equações de movimento de Hamilton resultantes da Hamiltoniana H'.

Primeiramente calculamos

$$\frac{dF(q(t),t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

e segue que

$$\begin{aligned} p_i' &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial F}{\partial q} \\ &= p_i + \frac{\partial F}{\partial q^i} \end{aligned}$$

A nova Hamiltoniana será

$$\begin{aligned} H' &= p_i'\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) - \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= H(q,p,t) - \frac{\partial F(q,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Note que devido a $H' = H(q,p')$ podemos escrever que

$$H'(q,p') = H(q,p' - \frac{\partial F(q,t)}{\partial q},t) - \frac{\partial F(q,t)}{\partial t}.$$

As equações de movimento são:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H'}{\partial p'} = \frac{H(q,p' - \frac{\partial F(q,t)}{\partial q},t)}{\partial p'} \\ &= \frac{H(q,p,t)}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial p'} = \frac{H(q,p,t)}{\partial p}. \end{aligned}$$

Permanecendo portanto inalterada.
A outra equação de movimento é mais sútil:

$$\dot{p'}_i = -\frac{H(q,p' - \frac{\partial F(q,t)}{\partial q},t)}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t}.$$

Continuando...

Notando que

$$
\begin{aligned}
\dot{p}'_i = \frac{d}{dt}\left(p + \frac{\partial F}{\partial q}\right) &= \dot{p} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) \\
&= \dot{p}_i + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t},
\end{aligned}
$$

e que

$$
\begin{aligned}
\frac{H(q, p' - \frac{\partial F(q,t)}{\partial q}, t)}{\partial q_i} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} \\
\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} &= -\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}
\end{aligned}
$$

Sunstituindo as equações anteriores na equação de movimento, encontramos

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_i + \cancelto{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}}\dot{q}_j + \cancelto{2}{\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t}} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \cancelto{\dot{q}}{\frac{\partial H}{\partial p_j}}\cancelto{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}} + \cancelto{2}{\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t}} \implies \\
\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}
\end{aligned}
$$