

TÓPICOS MECÂNICA

ANTONIO EDSON GONÇALVES

5 de setembro de 2018

Antonio Edson Gonçalves

Depto de Física - Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Londrina

Cx. Posta 86100 -Londrina - Paraná

goncalve@uel.br

10.03.2011

Sumário

1	Prólogo para Mecânica Analítica	9
1.1	Formas Diferenciais	9
1.1.1	Introdução	9
1.1.2	O Espaço dos p-Vetores	11
1.1.3	Derivada Exterior	15
1.1.4	Simplicies Euclidianos e o Teorema de Stokes	19
1.2	Coordenadas generalizadas	22
1.3	Espaço de configurações	22
1.3.1	Deslocamento virtual	23
2	Tópicos Seleccionados de Cálculo Variacional e Equações de Lagrange	27
2.1	As Equações de Euler	30
2.1.1	Notação Variacional	32
2.2	O Princípio de Hamilton e as Equações de Lagrange.	38
2.2.1	Lagrangiana e equações de movimento de uma partícula livre.	39
2.2.2	Lagrangianas Equivalentes	48
2.2.3	Multiplicadores de Lagrange e vínculos holônomos	49
2.3	Invariância, Teorema de Noether e Cargas Conservadas	52
3	Equações de Movimento de Hamilton	57
3.1	Introdução	57
3.2	Transformações de Legendre	57
	Appendix	58
	Referências Bibliográficas	58
	Índice	60

Lista de Figuras

1.1.1 Exemplos de Simplexos	20
1.3.1 Trajetória física do pêndulo simples	25
1.3.2 Trajetória física do pêndulo esférico	25
2.0.1 Trajetórias Modificadas	28
2.0.2 Trajetória deformada ou variada	29

Lista de Tabelas

1.1.1 Dimensões do espaço $\Omega^p(\mathbb{R}^2)$	14
1.1.2 Dimensões do espaço $\Omega^p(\mathcal{E})$	14

Capítulo 1

Prólogo para Mecânica Analítica

1.1 Formas Diferenciais

Nesta seção apresenta-se formas diferenciais em um contexto pragmático: definição e como usar. Certamente que esta abordagem não é a mais apropriada, entretanto o objetivo é introduzir formas diferenciais num contexto introdutório para utilizá-la em mecânica analítica.

1.1.1 Introdução

O objetivo desta seção é discutir o que se entende por formas diferenciais. Num contexto informal mas intuitivo define-se formas diferenciais como as quantidades que ocorrem dentro de um integrando. Por exemplo a integral de linha

$$\int Adx + Bdy + Cdz$$

a qual fornece a uma-forma

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz;$$

a integral de superfície

$$\iint Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

a qual fornece uma duas-formas

$$\alpha = Pdydz + Qdzdx + Rdx dy;$$

a integral de volume

$$\iiint H dx dy dz$$

a qual fornece uma três-formas

$$H dx dy dz.$$

Existem maneiras muito formais e exatas para se definir formas exteriores, entretanto esta abordagem é suficiente para os propósitos aqui destinados. As expressões anteriores são exemplos de formas diferenciais definidas no espaço Euclidiano $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^3$.

Se trabalharmos em um espaço $n - d$ (n -dimensional), as quantidades dentro do sinal de uma integral em $r - d$ (integração em uma variedade r -dimensional) será uma r -forma em n -dimensões, portanto com n -variáveis.

Na expressão anterior da duas formas α nota-se a ausência de termos em $dz dy$, $dx dz$, $dy dx$, o que sugere simetria ou antissimetria. Adicionalmente a ausência de termos da forma $dx dx$, \dots fortemente sugere antissimetria.

É necessário que o cálculo com formas exteriores possua propriedades consistentes, uma dessas é a regra de mudança de variável em uma integral múltipla. As integrais serão sempre orientadas e por isso não se toma o valor absoluto do Jacobiano.

Considere

$$\iint A(x, y) dx dy$$

na qual efetua-se as transformações

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

Têm-se que

$$\iint A(x, y) dx dy = \iint A[x(u, v), y(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv,$$

a qual conduz à igualdade

$$dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv.$$

Fazendo $x = y$, o determinante ficará com linhas iguais e conseqüentemente será nulo. Também pela troca de x e y o determinante muda de sinal.

Isto motiva a adoção da seguinte regra

$$\begin{cases} dx dx = 0, \\ dx dy = -dy dx \end{cases}$$

para a multiplicação de diferenciais no contexto de formas diferenciais.

1.1.2 O Espaço dos p -Vetores

Notação:

$$\mathbb{R} \leftrightarrow \text{Corpo dos números reais}$$

$$\mathbb{L} \leftrightarrow n - \text{dimensional espaço vetorial em } \mathbb{R}.$$

Para cada $p = 0, 1, \dots, n$ constrói-se um novo espaço vetorial

$$\Lambda^p \mathbb{L},$$

sobre \mathbb{L} chamado de espaço dos p -vetores sobre \mathbb{L} .

Iniciamos com

$$\Lambda^0 \mathbb{L} = \mathbb{R}, \quad \Lambda^1 \mathbb{L} = \mathbb{L},$$

anteriormente definidos.

Na sequência considera-se $\Lambda^2 \mathbb{L}$ em alguns detalhes. Este espaço consiste de todas as somas

$$\sum a_i (\alpha_i \wedge \beta_i)$$

sujeitas somente às regras

$$\begin{cases} (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2) \wedge \beta - a_1 (\alpha_1 \wedge \beta) - a_2 (\alpha_2 \wedge \beta) = 0, \\ \alpha \wedge (a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2) - a_1 (\alpha \wedge \beta_1) - a_2 (\alpha \wedge \beta_2) = 0, \\ \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha = 0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Onde α, β , etc, são vetores in \mathbb{L} e a, b , etc são números reais em \mathbb{R} ; $\alpha \wedge \beta$ é denominado de produto exterior dos vetores α and β . Se α e β are dependentes, ou seja $\beta = a\alpha$, então

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge a\alpha = a\alpha \wedge \alpha = a \cdot 0 = 0,$$

utilizando as regras (1.1.1); note que da terceira das equações (1.1.1) temos $\alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha = 0$, para $\beta = a\alpha$ segue que $2a(\alpha \wedge \alpha) = 0 \implies \alpha = 0$.

Suponha que

$$\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^n$$

seja uma base do espaço vetorial \mathbb{L} . então

$$\alpha = \sum a_i \sigma^i, \quad \beta = \sum b_j \sigma^j$$

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i,j} a_i b_j \sigma^i \wedge \sigma^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) (\sigma^i \wedge \sigma^j),$$

com

$$\sigma^i \wedge \sigma^j = \begin{cases} 0, & i = j; \\ -\sigma^j \wedge \sigma^i, & i \neq j. \end{cases}$$

Um exemplo típico de um elemento do espaço vetorial $\Lambda^2 \mathbb{L}$ é uma combinação linear a linear desses produtos exteriores e conseqüentemente um 2-vetor ou 2-formas

$$\sigma^i \wedge \sigma^j, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

é uma base de $\Lambda^2 \mathbb{L}$. Conclui-se então que

$$\dim \Lambda^2 \mathbb{L} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}. \quad (1.1.2)$$

Estendendo este procedimento a p -formas definidas no espaço $\Lambda^p \mathbb{L}$ ($2 \leq p \leq n$), pela mesma ideia anterior, estão consistirão de todas somas formais (p -vetores)

$$\sum a (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)$$

sujeitas a regra de redução generalizada (1.1.1) em p -dimensões.

Se

$$\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^n$$

é uma base do espaço \mathbb{L} , então uma base de $\Lambda^p \mathbb{L}$ é construída da seguinte forma: para cada conjunto de índice

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}, \quad 1 \leq h_1 < h_2 < \cdots < h_p \leq n,$$

fixe

$$\sigma^H = \sigma^{h_1} \wedge \sigma^{h_2} \wedge \cdots \wedge \sigma^{h_p}.$$

A totalidade dos σ^H é uma base de $\Lambda^p \mathbb{L}$, e

$$\dim \Lambda^p L = \binom{n}{p},$$

é o número de subconjuntos com p elementos diferentes de um conjunto de n elementos diferentes. Considere o exemplo.

Exemplo 1.1.1. Fixe $n = 3$ e $p = 2$. Uma base de \mathbb{L} pode ser

$$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$$

e uma base de $\Lambda^2\mathbb{L}$ pode ser construída da forma: construa o conjunto B com $3!/2!(3-2)!$ elementos distintos

$$\sigma^i \wedge \sigma^j, \quad i \neq j, \quad \text{com } i, j = 1, 2, 3$$

de forma que

$$B = \{\sigma^1 \wedge \sigma^2, \sigma^1 \wedge \sigma^3, \sigma^2 \wedge \sigma^3\}$$

é uma base $\Lambda^2\mathbb{L}$. Um elemento característico deste espaço vetorial é

$$\alpha = \sum_H a_H \sigma^H = a_{12} \sigma^1 \wedge \sigma^2 + a_{13} \sigma^1 \wedge \sigma^3 + a_{23} \sigma^2 \wedge \sigma^3$$

em particular

$$\dim \Lambda^n \mathbb{L} = 1.$$

Uma linguagem outra notação, mais apropriada é

$$\Omega^p(\mathcal{M})$$

utilizada para representar o espaço de p -formas definida sobre uma variedade \mathcal{M} de dimensão n .

Alguns exemplos de produtos exterior de formas.

Exemplo 1.1.2. Seja $A = A_i dx^i$ e $B = B_j dx^j$ duas 1-formas. Os seus produtos exteriores fornecem

$$\begin{aligned} A \wedge B &= A_i B_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} A_i B_j dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2} A_i B_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} A_i B_j dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2} A_j B_i dx^j \wedge dx^i \\ &= \frac{1}{2} (A_i B_j - A_j B_i) dx^i \wedge dx^j, \end{aligned}$$

que é uma 2-formas.

\mathbb{R}^2	Forms	Dim	Base
0-forms	$f(x^1, x^2)$	1	$\{0\}$
1-forms	fdx^1, gdx^2	2	$\{dx^1, dx^2\}$
2-forms	$ffdx^1 \wedge dx^2$	1	$\{dx^1 \wedge dx^2\}$

Tabela 1.1.1: Dimensões do espaço $\Omega^p(\mathbb{R}^2)$

\mathbb{R}^3	Forms	Dim	Base
0-form	$f(x^1, x^2, x^3)$	1	$\{0\}$
1-form	fdx^1, gdx^2, hdx^3	3	$\{dx^1, dx^2, dx^3\}$
2-forms	$fdx^1 \wedge dx^2, gdx^2 \wedge dx^3, hdx^3 \wedge dx^1$	3	$\{dx^1 \wedge dx^2, dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1\}$
3-forms	$fdx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$	1	$\{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\}$

Tabela 1.1.2: Dimensões do espaço $\Omega^p(\mathcal{E})$

Exemplo 1.1.3. Seja $\alpha = x^2 dx - y^2 dy$ e $\beta = dx + dy - 2xydz$, então

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= (x^2 dx - y^2 dy) \wedge (dx + dy - 2xydz) \\
&= x^2 dx \wedge dx + x^2 dx \wedge dy - x^2 dx \wedge 2xydz \\
&\quad - y^2 dy \wedge dx - y^2 dy \wedge dy + y^2 dy \wedge 2xydz \\
&= 0 + (x^2 + y^2) dx \wedge dy + 2x^3 y dz \wedge dx + 0 - 2xy^3 dy \wedge dz \\
&= (x^2 + y^2) dx \wedge dy + 2x^3 y dz \wedge dx + 2xy^3 dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

O qual também é uma 2-formas.

Exemplo 1.1.4. Seja $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, portanto

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy &= (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta) \wedge (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta) \\
&= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr \\
&= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) r dr \wedge d\theta \\
&= r dr \wedge d\theta,
\end{aligned}$$

que é o elemento diferencial de superfície em coordenadas polares.

Exemplo 1.1.5. Considere o espaço Euclidiano $2 - d$, $\mathcal{M} = \mathcal{E}$. Neste espaço pode-se definir 0-forma, 1-forma, 2-formas. Explicitamente

Exemplo 1.1.6. Considere o espaço Euclidiano $3 - d$, $\mathcal{M} = \mathcal{E}$. Neste espaço pode-se definir 0-forma, 1-forma, 2-formas e 3-formas. Explicitamente

1.1.3 Derivada Exterior

Nesta subseção introduz-se um operador diferencial o qual generaliza o operadores: gradiente, divergente e rotacional. Uma outra notação é utilizada para representar o espaço das m -formas, ou seja

$$\Lambda^m \mathbb{L} \longrightarrow \Omega_p^m(\mathcal{M}),$$

representando o espaço das m -formas no ponto p da variedade diferenciável $n - d$, \mathcal{M} .

Representando por $\Omega_{(p)}^m(\mathcal{M}^n)$ o espaço das m -formas em $p \in \mathcal{M}$. Este espaço vetorial tem dimensões

$$\dim \Omega_{(p)}^m(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!} & \text{if } m \leq n, \\ 0 & \text{if } m > n. \end{cases}$$

Identifica-se $\Omega_{(p)}^0(\mathcal{M})$ como o espaço das funções de classe C^∞ em $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. A união de todos os $\Omega_{(p)}^m(\mathcal{M})$ com \mathbf{p} assumindo valores através de todos os pontos da variedade \mathcal{M} gera o que os matemáticos denominam de fibrados ou ainda fibrados tangente de m -formas que será representado como $\Omega^m(\mathcal{M})$.

Uma seção α do fibrado $\Omega^m(\mathcal{M})$

$$\Omega^m(\mathcal{M}) = \cup_p \Omega_p^m(\mathcal{M})$$

é denominada de is **m-forma**, podendo ser escrita como

$$\alpha = A_{i_1, \dots, i_m}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}.$$

Definição 1.1.7. Seja α uma m -forma como anteriormente definida. A derivada exterior de α é uma $(m + 1)$ -forma $d\alpha$ dada por

$$\begin{aligned} d\alpha &= dA_{i_1, \dots, i_m}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} \\ &= \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_m}(x)}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

No caso particular em que α é uma 0-forma, isto é uma função, tem-se que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Proposição 1.1.8. \square

a) $d : \Omega^m \longrightarrow \Omega^{m+1}$

b) $d^2 = d \circ d = 0$

c) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \quad \forall \alpha \in \Omega^p \text{ e } \forall \beta \in \Omega^q$

Demonstração. a) é imediata

b) Considere a equação

$$d\alpha = \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_m}(x)}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m},$$

que novamente derivada fornece

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_m}^2(x)}{\partial x^j \partial x^{i_0}} dx^j \wedge dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_m}^2(x)}{\partial x^j \partial x^{i_0}} dx^j \wedge dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_m}^2(x)}{\partial x^{i_0} \partial x^j} dx^{i_0} \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{i_1, \dots, i_m}^2(x)}{\partial x^j \partial x^{i_0}} - \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_m}^2(x)}{\partial x^{i_0} \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por que as derivadas parciais comutam.

c) Por definição

$$\alpha \wedge \beta = A_{i_1 \dots i_p} B_{j_1 \dots j_q} (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}).$$

Calculando a derivada exterior desta expressão obtêm-se que □

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \left(\frac{\partial A_{i_1, \dots, i_p}(x)}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} B_{j_1 \dots j_q} + A_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial B_{j_1, \dots, j_q}(x)}{\partial x^{j_0}} dx^{j_0} \right) \\ &\quad \times (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}) \\ &= \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_p}(x)}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge B_{j_1 \dots j_q} (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}) \\ &\quad + A_{i_1 \dots i_p} (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) (-)^p \wedge \frac{\partial B_{j_1, \dots, j_q}(x)}{\partial x^{j_0}} dx^{j_0} \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}) \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-)^p \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

O fator $(-)^p$ aparece devido ao número de permutações entre $d\beta$ e $p-1$ formas do tipo dx^i .

Exemplo 1.1.9. Seja $\alpha = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Então,

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial P(x, y)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x^i} dx^i \wedge dy \\ &= \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Considere o exemplo interessante que está relacionado ao teorema de Green em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 1.1.10. Seja $\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy$, e considere a possibilidade que $d\alpha = 0$. Pelo exemplo anterior

$$d\alpha = \left[\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right] dx \wedge dy.$$

A condição $d\alpha = 0$ será satisfeita se

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0$$

ou se

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}.$$

Esta equação pode ser integrada fornecendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx &= \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \implies \\ N(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}; \\ f &\equiv \int M(x, y) dx \end{aligned}$$

Utilizando esta equação, obtêm-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \implies \\ M(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}, \end{aligned}$$

que substituída de volta na expressão de $d\alpha$ fornece

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dx \wedge dy \\ &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \\ &= d(df). \end{aligned}$$

O resultado final é

$$\boxed{\alpha = df, \quad d\alpha = 0}$$

ou, em outras palavras α é uma diferencial exata.

Definição 1.1.11. Uma forma diferencial α é denominada fechada se satisfaz

$$\boxed{d\alpha = 0}. \quad (1.1.4)$$

Uma forma diferencial α é denominada exata se existir um forma diferencial ω tal que

$$\boxed{\alpha = d\omega}.$$

Dado que $d \circ d = 0$ é imediato que uma forma exata é fechada. O inverso nem sempre é verdadeiro. Para que uma forma fechada seja exata é necessário que a variedade em que ela está definida seja contratível. Somente a título informativo:

Lema 1.1.12. *Lema de Poincaré: em uma espaço contratível (tal como \mathbb{R}^n), se uma diferencial é fechada, então ela será exata.*

Exemplo 1.1.13. Considere que uma dada 1-forma diferencial α não seja exata, mas que pode ser transformada em uma forma exata se existir uma função não nula λ que multiplicando α a torne exata, ou seja, considere que

$$\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy, \quad (1.1.5)$$

não é exata, ou seja $d\alpha \neq 0$, porém $\exists \lambda \mid \lambda\alpha = \tilde{\alpha}$ e que $d\tilde{\alpha} = 0$. Esta equação impões a condição

$$\begin{aligned} d\tilde{\alpha} &= d[\lambda M(x, y)dx + \lambda N(x, y)dy] \\ \lambda &= \lambda(x, y), \end{aligned}$$

em um espaço $2 - d$, condição está facilmente generalizada para qualquer dimensão. Efetuando a derivada exterior, a equação anterior se escreve

$$d\tilde{\alpha} = d[\lambda M(x, y)dx] + d[\lambda N(x, y)dy] = \frac{\partial}{\partial y} [\lambda M(x, y)] dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x} [\lambda N(x, y)] dx \wedge dy,$$

que pode ser ainda reescrita como

$$\begin{aligned} d\tilde{\alpha} &= [-\lambda_y M(x, y) - \lambda M_y(x, y) + \lambda_x N(x, y) + \lambda N_x(x, y)] dx \wedge dy \\ &= \{\lambda_x N(x, y) - \lambda_y M(x, y) + \lambda [N_x(x, y) - M_y(x, y)]\} dx \wedge dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que estamos admitindo a existência da função $\lambda(x, y)$ conhecida como fator integrante. A condição $d\tilde{\alpha} = 0$ fornece uma equação diferencial parcial de primeira ordem, cuja solução é o fator integrante λ :

$$\lambda_x N(x, y) - \lambda_y M(x, y) = -\lambda [N_x(x, y) - M_y(x, y)]. \quad (1.1.6)$$

1.1.4 Simplicies Euclidianos e o Teorema de Stokes

Informalmente, "simplicies" são elementos fundamentais de uma dada triangulação de variedades, ou seja tendo-se uma variedade genérica pode-se desenhar diversos triângulos, segundo determinadas regras que não serão aqui discutidas, de forma a cobrir toda variedade. Ao conjunto de todas as diferentes forma de se desenhar triângulos para cobrir essa variedade "arbitrária" dá-se o nome de complexo de simpliciais. Para uma introdução sobre o assunto vejam o site [Introdução a Topologia](#). com objetivo de informar, mas pecando pela completeza ilustra-se algumas definições e conceitos.

Definição 1.1.14. Simplicial é o nome dado aos blocos fundamentais formadores de simpliciais.

Os exemplos seguintes são mais esclarecedores:

0-simplicial é um vértice.

1-simplicial é um seguimento de reta fechado.

2-simplicial é um triangulo orientado.

3-simplicial é um tetraedro orientado.

As figuras seguintes são esclarecedoras

Definição 1.1.15. Um simplexo s é construído com "uma soma" de vários simpliciais, ou seja pontos, triângulos, tetraedros, polígonos, etc.

Definição 1.1.16. O bordo ∂s de um simplexo s é uma soma formal com coeficientes inteiros de simpliciais com uma dimensão inferior,

$$\partial(P_0, \dots, P_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n).$$

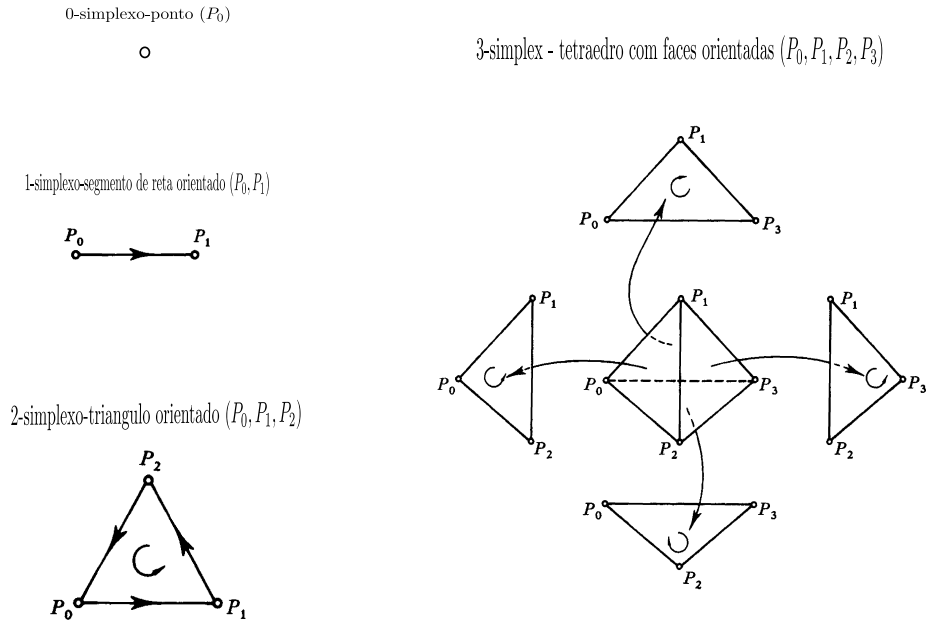


Figura 1.1.1: Exemplos de Simplexos

Exemplo 1.1.17. O bordo de 1-simplex é

$$\partial(P_0, P_1) = P_0 - P_1,$$

enquanto que os bordos de um 2-simplex e 3-simplex são, respectivamente

$$\begin{aligned} \partial(P_0, P_1, P_2) &= (P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1), \\ \partial(P_0, P_1, P_2, P_3) &= (P_1, P_2, P_3) - (P_0, P_2, P_3) + (P_0, P_1, P_3) - (P_0, P_1, P_2) \end{aligned}$$

Uma outra quantidade é necessária para a triangulação de espaços, esta quantidade é denominada de cadeia de simplexos, sendo definida como:

Definição 1.1.18. Uma n -cadeia de complexo de simpliciais, \mathbf{c} , de uma variedade \mathcal{M} , é a soma formal

$$\mathbf{c} = \sum_i a_i \sigma_i^n,$$

com coeficientes constantes a_i e n -simplexos σ_i^n .

Com a ajuda destes simplexos estabelece-se o teorema de Stokes.

Teorema 1.1.19. *Seja ω uma p -forma assumindo valores na variedade \mathcal{M} e \mathbf{c} uma $(p + 1)$ cadeia. Neste contexto o Teorema de Stokes é formulado como*

$$\int_{\partial \mathbf{c}} \omega = \int_{\mathbf{c}} d\omega$$

Uma maneira prática de se entender o que esta expressão significa é com aplicações e exemplos! Certamente os mais simples.

Exemplo 1.1.20. Considere que $\omega = \omega_i dx^i$, $i = 1, 2, 3$ é uma 1-forma em $3 - d$ e que \mathbf{c} é uma cadeia de simplexos do círculo,

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2,$$

e que

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &\iff \text{área do círculo} = \pi r^2 \\ \partial \mathbf{c} &= 2\pi r, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int_{2\pi r} (\omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3) &= \int_{\pi r^2} \left[\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \right], \end{aligned}$$

que em uma linguagem vetorial pode ser escrita como

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} dS,$$

bastante familiar.

Exemplo 1.1.21. Considere que $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, $i = 1, 2, 3$ e $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ é uma 2-forma em $3 - d$ e que \mathbf{c} é uma cadeia de simplexos de uma esfera, segue que $d\omega = \left(\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \omega_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &\iff \text{volume da esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \partial \mathbf{c} &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int_{4\pi r^2} (\omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \omega_{31} dx^3 \wedge dx^1) &= \\ &= \int_{\pi r^2} \left(\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \omega_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial x^2} \right) \\ &\quad \times dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \end{aligned}$$

que na notação vetorial

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

é o conhecido teorema da divergência, com $A_i = \varepsilon_{ijk} \omega_{jk}$.

1.2 Coordenadas generalizadas

1.3 Espaço de configurações

A configuração instantânea de um sistema é descrita pelos valores das n -coordenadas generalizadas q_i , $i = 1, \dots, n$, e corresponde a um ponto particular no hiperespaço cartesiano onde os q formam os n -eixos de coordenadas. Este espaço $n - d$ é conhecido como espaço de configurações.

Com o passar do tempo, o estado do sistema muda e o ponto representativo do sistema no espaço de configurações descreve uma curva denominada de *caminho do movimento do sistema*. O movimento do sistema como utilizado na frase anterior, refere-se ao movimento do ponto representativo do sistema ao longo da trajetória no espaço de configuração. O tempo pode ser considerado formalmente como um parâmetro da curva; cada ponto sobre a curva pode estar associado a um ou mais tempo (por exemplo no movimento periódico em que a curva é uma circunferência). *O espaço de configuração não têm necessariamente conexão com espaço físico* $3 - d$ justamente como coordenadas generalizadas não são necessariamente posição. A curva de movimento no espaço de configuração não tem semelhança com o caminho no espaço do sistema físico, ou partícula. *Cada ponto no espaço de configuração representa uma configuração do sistema em um dado instante de tempo.*

Sendo mais objetivos, considere que Q representa o conjunto de todas as configurações possíveis do sistema consistente com as condições de vínculos. O conjunto Q é de fato uma variedade diferenciável. Seja q_0 um ponto $\in Q$. Para clarificação conceitual e também para fazer uma correspondência com a física, trabalha-se em um mapa local que contenha q_0 e sua vizinhança, ou seja trabalha-se em $T_{q_0}(Q)$, no espaço tangente à variedade Q no ponto q_0 .

Suponha que q_0 represente uma configuração do sistema no tempo t_0 . Em um tempo posterior t o sistema estará na posição $q(t)$ determinada pelas equações dinâmicas (Equações de movimento) e a quantidade

$$q(t) - q(t_0) = \Delta q,$$

representará o deslocamento do sistema após o tempo $t - t_0$.

Ao invés de olhar os pontos do espaço de configurações, considera-se uma curva nesse espaço, a qual em $s = s_0$ está no ponto q_0 ,

$$\gamma(s_0) = q_0$$

e calcula-se o deslocamento,

$$\gamma(s) - \gamma(s_0) = \gamma(s) - q_0, \quad (1.3.1)$$

que deve resultar se o movimento no espaço de configurações se der ao longo da curva $\gamma(s)$, . que não é a trajetória física do sistema. Denomina-se o deslocamento dado pela Eq.(1.3.1) de deslocamento virtual, ao longo da curva γ após um intervalo $s - s_0$. Este deslocamento é denominado de virtual por ser o deslocamento que ocorre no espaço de configuração ao longo da curva γ de nossa escolha ou seja uma curva virtual no espaço de configurações, no sentido de não ser a curva da trajetória do sistema no espaço físico.

1.3.1 Deslocamento virtual

Na física, *infinitesimal*, significa essencialmente primeira aproximação numa expansão em termos de um dado parâmetro característico do sistema sob consideração.

Deslocamento virtual é a distância infinitesimal entre dois pontos vizinhos no espaço de configurações do sistema.

No espaço de configurações elege-se naturalmente o parâmetro s o qual permite que se meça distâncias infinitesimais ao longo de uma dada curva γ nesse espaço. Portanto quando se discute um deslocamento infinitesimal, o que se tem em mente é considerar o comportamento da curva $\gamma(s)$ na vizinhança do ponto s_0 ou seja calcular o valor de $\gamma(s + s_0)$ quando o parâmetro $s \in B_\varepsilon(s_0)$, ou seja quando s pertence a vizinhança de s_0 . Isto pode ser feito, para distâncias infinitesimais, com a expansão em séries de Taylor

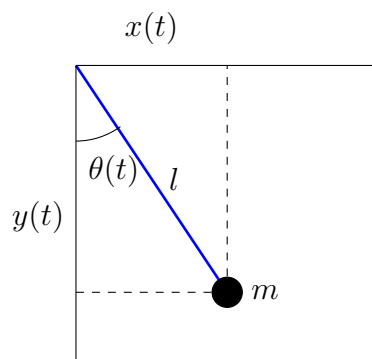
$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \left. \frac{d\gamma(s)}{ds} \right|_{s=s_0} (s - s_0) + O[(s - s_0)^2],$$

portanto

$$\gamma(s) - q_0 = \left. \frac{d\gamma(s)}{ds} \right|_{s=s_0} (s - s_0) + O[(s - s_0)^2],$$

donde se vê que a intensidade do deslocamento é determinada pelo coeficiente de $s - s_0$ ou seja pela velocidade $d\gamma(s)ds$, da curva em s_0 . Es outra palavras deslocamento virtuais infinitesimais são determinados pelo vetor velocidade da curva selecionada nos espaço de configurações. Sabe-se de geometria das superfícies que vetores velocidades de uma curva são tangentes à curva e pertencem ao espaço tangente à curva no ponto onde se calcula a derivada.

Exemplo 1.3.1. O pêndulo simples.



As coordenadas cartesianas do bulbo estão relacionadas com a variável angular θ da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= l \sin(\theta(t)), \\ y(t) &= l \cos(\theta(t)). \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

não são independente, uma vez que satisfazem a condição de vínculo holônomo

$$x^2 + y^2 = l^2. \quad (1.3.3)$$

A solução da equação de movimento, 2ª lei de Newton, para o pêndulo simples

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0,$$

temo como solução

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t),$$

portanto assumindo valores

$$\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0], \quad (1.3.4)$$

sendo θ_0 a amplitude “angular” de oscilação. A Eq.(1.3.4) é um segmento de reta representando o espaço de configuração deste sistema enquanto que o grafo da curva, Eq. (1.3.5), parametrizada com t ,

$$\alpha(t) = (l \sin(\theta(t)), l \cos(\theta(t))), \quad (1.3.5)$$

representa a trajetória física do bulbo no espaço Euclidiano, esquematizada na figura Fig. (1.3.1)

Exemplo 1.3.2. O pêndulo esférico

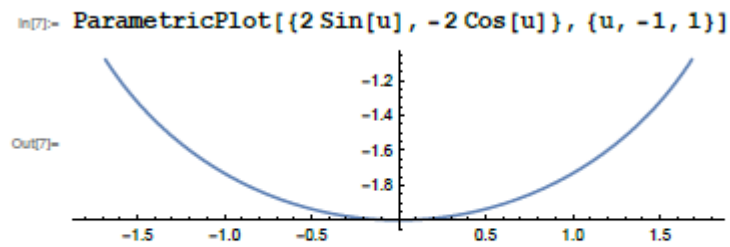


Figura 1.3.1: Trajetória física do pêndulo simples

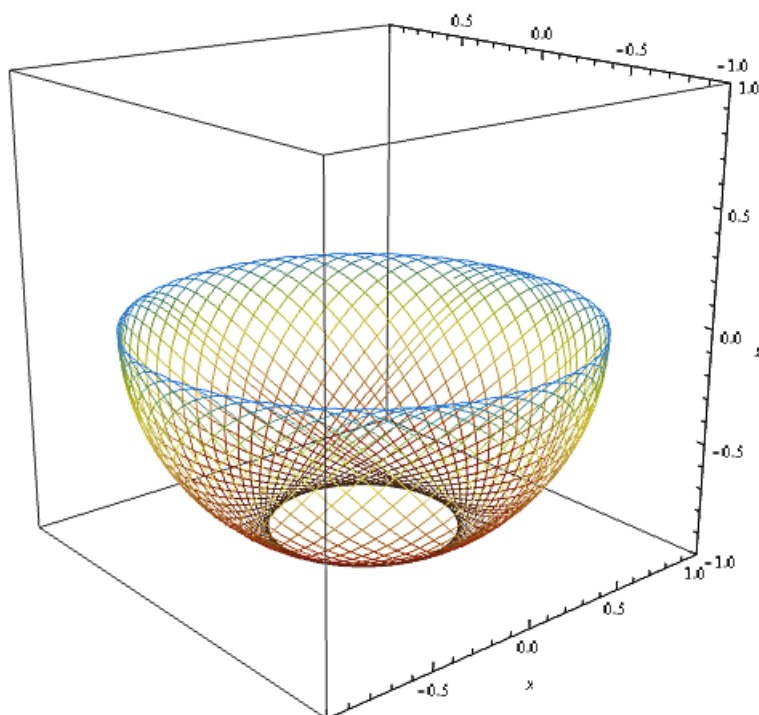


Figura 1.3.2: Trajetória física do pêndulo esférico

Nesta figura está esquematizada a trajetória física descrita pelo bulbo do pêndulo esférico, para uma dada condição inicial. a figura é o gráfico paramétrico da curva em $3 - d$

$$\alpha(t) = (r_0 \text{sen}(\theta(t)) \cos(\varphi(t)), r_0 \text{sen}(\theta(t)) \text{sen}(\varphi(t)), r_0 \cos(\theta(t))),$$

onde θ e φ são soluções da equação de movimento para o pêndulo esférico

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \dot{\varphi}^2 \text{sen}\theta \cos\theta - \frac{g}{l} \text{sen}\theta, \\ \ddot{\varphi} &= -2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cot\theta,\end{aligned}$$

que não possuem solução analítica. O espaço de configuração é o espaço cartesiano $2 - d$ cujos eixos coordenados são as variáveis θ e φ . Uma representação esquemática do espaço físico, de configuração e de fase, do pêndulo esférico e apresentada na figura a seguir.

Exemplo 1.3.3. Considere um pêndulo esférico que num dado tempo t_0 , partindo da longitude 0, descreve uma trajetória circular ao longo do equador no espaço físico e que após um tempo t_1 retorna a longitude 0 mas não na linha do equador. Considere que na sequência ou seja $t > t_1$ a trajetória é circular, mas faz um certo ângulo com o equador e que após um intervalo de tempo $2t_1$ o pêndulo retorna a longitude 0. O tempo que separa esses dois pontos ao longo da trajetória do movimento é $2t_1$.

Considere a projeção dessa trajetória física no espaço de configurações, digamos plano xy . Nesse espaço os pontos representativos do sistema estarão sob uma curva circular e outra elíptica concêntricas e contínuas. Nesse espaço a distância entre o ponto inicial s_0 correspondente à t_0 e o ponto s correspondente a $2t_1$ é infinitesimal. FIGURA.

Capítulo 2

Tópicos Seleccionados de Cálculo Variacional e Equações de Lagrange

Posicionamento do problema

Por simplicidade e a título de compreensão consideramos inicialmente o problema unidimensional. O problema básico do cálculo da variações é determinar a função $y(x)$ tal que a integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y(x), y'(x); x] dx \quad (2.0.1)$$

seja um extremo ou estacionária. J é denominado de funcional que é uma função real cujo domínio é o espaço das funções. Na Eq. (2.0.1)

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx},$$

o ponto e vírgula destaca a variável independente x . O funcional J depende da função y e dos limites de integração x_1 e x_2 . Estes limites podem ser fixos ou variáveis, por enquanto vamos considerá-los fixos. A ideia é testar várias funções no integrando até que uma dada função fornece um valor estacionário para o funcional J . Como em física quase tudo é feito na aproximação linear consideraremos pequenas variações ou mudanças na função $y(x)$ para estudarmos como o valor do funcional J é afetado.

Note que o funcional J é um número, ou seja para funções reais $J \in \mathbb{R}$, portanto para diferentes funções y , $J \in U \subset \mathbb{R}$. Um dos pontos do conjunto U corresponderão ao valor estacionário de J .

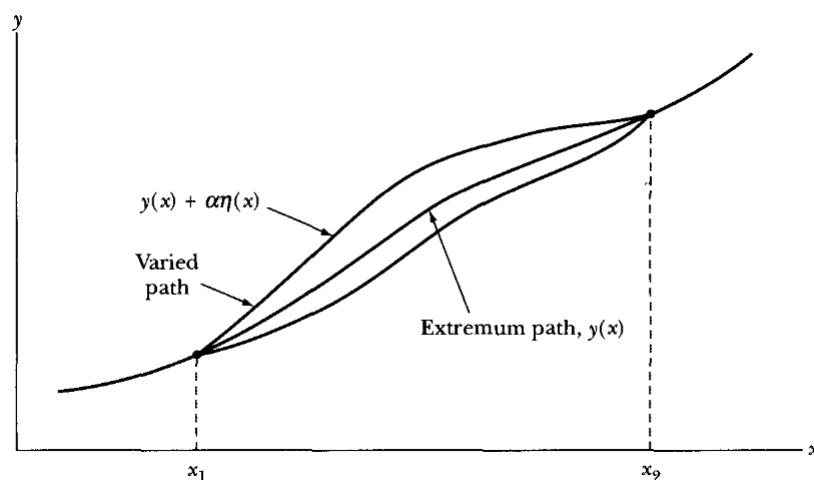


Figura 2.0.1: Trajetórias Modificadas

Dado que a tarefa de se encontrar diferentes funções para encontrar qual atribui um valor estacionário ao funcional J não é nada trivial, utiliza-se o seguinte procedimento muito prático: ao invés de se propor diferentes y considere que y é a função solução de nosso problema e que esta função é a que fornece um valor estacionário ao J . Neste caso o que precisamos mostrar é que qualquer modificação na função y acarretará em um aumento no valor de J , e dado que estamos interessados em pequenas variações introduzimos um parâmetro α que controlará a deformação \bar{y} na função y ou seja o parâmetro α possibilita que modifiquemos a função y pela introdução de uma função arbitrária $\eta(x)$, sem a necessidade de se ficar via tentativa modificando explicitamente y pela adição ou introdução de novas funções.

Enfim, a função modificada é

$$\bar{y} = y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x), \quad (2.0.2)$$

a qual via variação do parâmetro α fornece uma infinidade de funções modificadas na vizinhança da função $y(x)$. Impõe-se que as trajetórias variadas coincidam com a original nos extremos de integração, ou seja

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (2.0.3)$$

Neste contexto o funcional J será uma função do parâmetro α

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha); x] dx. \quad (2.0.4)$$

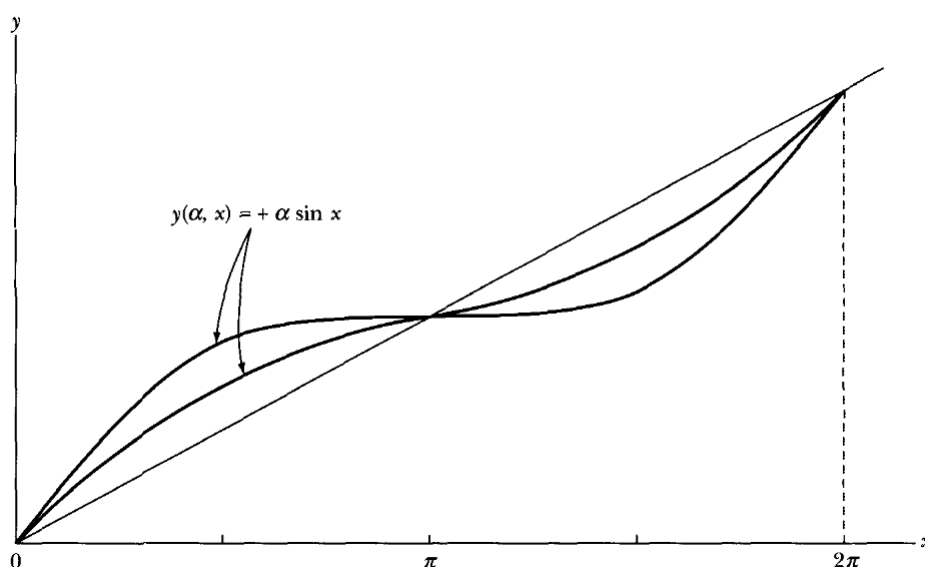


Figura 2.0.2: Trajetória deformada ou variada

Como o objetivo é encontrar valores estacionários para o funcional J , podemos expandir a expressão anterior em série de Taylor e considerar a contribuição de termos lineares:

$$\int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha); x] dx = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x); x] dx + J'\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2),$$

sendo que na aproximação linear

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha); x] dx - \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x); x] dx = 0, \quad (2.0.5)$$

é estacionário ou extremo.

Exemplo 2.0.1. Considere a função $f = (dy/dx)^2$, onde $y(x) = x$, uma reta. Para construir trajetórias vizinhas à reta adicionamos a função $\eta(x) = \text{sen}x$. A proposta é calcular o funcional $J(\alpha)$ entre os limites $x_1 = 0$ e $x_2 = 2\pi$, para isto construímos as trajetórias ou curvas variadas, veja a Fig. (2.0.2)

$$\begin{aligned} y(x, \alpha) &= y(x) + \alpha\eta(x) \\ &= x + \alpha\text{sen}x. \end{aligned}$$

Note que a curva variada coincide com a curva original nos extremos de integração

$$\begin{aligned}y(0, \alpha) &= 0 + \alpha \operatorname{sen} 0 = 0, \\y(2\pi, \alpha) &= 2\pi + \alpha \operatorname{sen} 2\pi = 2\pi.\end{aligned}$$

A função modificada $f(x, \alpha)$ é

$$f = [1 + \alpha \cos x]^2,$$

enquanto que o funcional J é

$$\begin{aligned}J(\alpha) &= \int_0^{2\pi} [1 + \alpha \cos x]^2 dx \\&= \int_0^{2\pi} [1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x] dx \\&= 2\pi + \alpha^2 \pi.\end{aligned}$$

Segue desta equação que o valor estacionário de J é

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 2\pi\alpha = 0 \implies \alpha = 0.$$

Como esperado, já que $J(\alpha)$ é sempre maior que $J(0)$ para α positivo ou negativo.

2.1 As Equações de Euler

Para obter as famosas equações de Euler, pode-se considerar a expansão em série de Taylor da Eq. (2.0.5) ou equivalentemente derivar o funcional com relação ao parâmetro α e impor a condição de extremo, ou seja

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] dx.$$

Considerando que

$$\frac{dy(x, \alpha)}{d\alpha} = \eta(x), \tag{2.1.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha} \frac{dy(x, \alpha)}{dx} &= \frac{d}{d\alpha} [y'(x) + \alpha \eta'(x)] \\&= \eta'(x).\end{aligned}$$

Note que segue desta duas equações que

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{dy(x, \alpha)}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{dy(x, \alpha)}{d\alpha} = \eta'(x). \quad (2.1.2)$$

ou seja as derivadas comutam. Substituindo as Eq. (2.1.1, 2.1.2) na expressão da derivada do funcional, obtêm-se que

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) + \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) \right] dx.$$

Uma integração por partes possibilita escrever o primeiro termo em função de η e colocá-lo em evidência:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx,$$

tendo em conta a Eq. (2.0.3). A variação de J fica

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \right] \eta(x) dx.$$

A condição que o funcional seja estacionário, Eq. (2.0.5) impõe

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0 &= \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \right] \eta(x) dx \\ \implies \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \right] \eta(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema Fundamental do Cálculo das Variações:

Lema 2.1.1. *Se $M(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$ é uma função contínua tal que $\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0$, qualquer que seja a função contínua $\eta(x)$, com $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, então $M(x) \equiv 0$ em $[x_1, x_2]$.*

Para uma demonstração deste Lema veja a Ref. ([6]). Utilizando este lema na variação do funcional, obtêm-se que

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0}. \quad (2.1.3)$$

Esta equação é denominada de Equação de Euler. A sua solução fornece a função y e conseqüentemente a função f que fornece ao funcional J um valor estacionário.

2.1.1 Notação Variacional

Para definirmos com clareza a notação variacional, considere a expansão em série de Taylor das trajetórias variadas

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \eta(x)\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2),$$

que em primeira aproximação e tendo em conta a forma funcional de $y(x, \alpha)$ pode ser reescrita como

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \left. \frac{dy(x, \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2y(x, \alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \alpha^2 + \dots,$$

entretanto

$$y(x, \alpha) - y(x, 0) \equiv \delta y = \alpha\eta(x),$$

também

$$\frac{dy(x, \alpha)}{d\alpha} = \eta(x).$$

Comparando as equações

$$\left. \begin{array}{l} \delta y = \alpha\eta(x) \\ \frac{dy(x, \alpha)}{d\alpha} = \eta(x) \end{array} \right\} \implies \delta y = \frac{dy(x, \alpha)}{d\alpha} \alpha. \quad (2.1.4)$$

Esta notação pode ser estendida as outras variações

$$\delta J \equiv \delta \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha); x] dx,$$

com

$$\delta \equiv \alpha \frac{d}{d\alpha}. \quad (2.1.5)$$

Existe um número muito grande de exemplos de aplicações das equações de Euler para se encontrar a função y que extremiza um dado funcional, alguns são problemas famosos como o da braquistócrona que consiste em encontrar a curva que fornece o menor tempo de percurso de uma partícula em queda livre que desliza sem atrito. Certamente que a reta vertical é a solução, entretanto a ideia do problema encontrar a curva solução tal que o ponto final não está sobre a reta vertical em que se encontra o ponto inicial. Discussões detalhadas desse e outros problemas podem ser encontradas em diversos livros textos, em particular nas referências Ref.([6],[3]). Iremos aqui selecionar outros exemplos.

Exemplo 2.1.2. A distância mais curta entre dois pontos no plano xy . O elemento de comprimento de arco no plano é

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Considerando $y = y(x)$ escrevemos

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

de onde o comprimento total da curva é calculado integrando-se esta expressão

$$I = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

A ideia é considerar o comprimento da curva como um funcional e o integrando

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

a função $f[y, y', x]$ a qual queremos determinar de forma que I seja estacionária. Como vimos, o caminho é resolvermos a equação de Euler, Eq. (2.1.3), com

$$f = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Temos portanto que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Claramente

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

portanto

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y'} = c,$$

onde c é uma constante. Derivando a função f encontra-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c &\implies \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \\ \implies y'^2 (1 - c^2) = c^2, \end{aligned}$$

que pode ser integrada imediatamente, fornecendo

$$y(x) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}x + b = ax + b.$$

Na expressão anterior definiu-se

$$a \equiv \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Note que a solução, muito conhecida de todos, é a equação de uma reta! Questão interessante: o que significa ou faz sentido a escolha para o valor da constante $c = 1$?

Note que a função f é dado por

$$f = \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+a^2},$$

que é uma constante. Isto é estranho ou não?

Exemplo 2.1.3. Geodésicas Ref. ([2],[1]). Geodésica é o nome dado a curva que fornece a distância mais curta entre dois pontos em uma dada superfície Riemanniana ou pseudo Riemanniana. O elemento de comprimento de arco em uma superfície Riemanniana é função da métrica Riemanniana

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

onde n é a dimensão do espaço em consideração. As funções g_{ij} são chamadas de elementos da matriz métrica ou também tensor métrico. Esta matriz é simétrica ¹

$$g_{ij}(x) = g_{ji}(x).$$

Escolhendo um parâmetro qualquer, por exemplo λ , pode-se escrever $x^i = x^i(\lambda)$ e portanto

$$ds^2 = g_{ij}(x) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} d\lambda d\lambda. \quad (2.1.6)$$

Como no exemplo de uma curva no plano, o comprimento de uma curva em um superfície de Riemann é

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} ds = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij}(x) x'^i x'^j} d\lambda.$$

¹De fato não é necessário impor que o tensor métrico seja simétrico, já que a contribuição antissimétrica é anulado no produto com $dx^i dx^j$

O procedimento é o mesmo que o utilizado na obtenção da equação da reta, sendo que agora a função f é

$$f = \sqrt{g_{ij}(x)x^i x^j},$$

a qual deve ser utilizada na equação de Euler para determinarmos a solução $x^i(\lambda)$:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial x^{k'}} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0.$$

Diferentemente da reta no espaço Euclidiano $2-d$, nesta equação $\partial f / \partial x^i \neq 0$, o que dificulta mas não inviabiliza o cálculo da EDP para a geodésica. Calculando

$$\begin{aligned} \partial f / \partial x^k &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{ij}(x)x^i x^j}} \left[\frac{\partial g_{pq}(x)}{\partial x^k} \right] x^{p'} x^{q'}, \\ \frac{\partial f}{\partial x^{k'}} &= \frac{1}{2} \frac{g_{pq}(x)}{\sqrt{g_{ij}(x)x^i x^j}} [\delta_k^p x'^q + \delta_k^q x'^p] \\ &= \frac{g_{kq}(x)x'^q}{\sqrt{g_{ij}(x)x^i x^j}}. \end{aligned}$$

O cálculo da derivada com relação ao parâmetro λ fornece

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial x^{k'}} \right) &= -\frac{1}{2} \frac{g_{kq}(x)x'^q}{(g_{ij}(x)x^i x^j)^{3/2}} \left[\frac{\partial g_{lm}(x)}{\partial x^n} x^{n'} x'^l x'^m + g_{lm}(x) [x^{l''} x'^m + x'^l x^{m''}] \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g_{ij}(x)x^i x^j}} \left\{ \frac{\partial g_{pq}(x)}{\partial x^k} x^{k'} x'^q + g_{kq}(x)x''^q \right\} \end{aligned}$$

Este cálculo é ingrato! Para contornarmos esta dificuldade faremos o seguinte: uma escolha apropriada do parâmetro da curva. Vamos admitir que λ é o parâmetro natural, ou seja $d\lambda = ds$, que em se tratando do espaço de Minkowski pode ser o tempo próprio $d\tau$ no referencial próprio. Com esta escolha teremos

$$ds^2 = g_{ij}(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} ds ds \implies g_{ij}(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1.$$

Com esta escolha, que além de conveniente para os cálculos é apropriada no contexto físico, as equações anteriores se reduzem à

$$\begin{aligned} \partial f / \partial x^k &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{ij}(x)x^i x^j}} \left[\frac{\partial g_{pq}(x)}{\partial x^k} \right] x^{p'} x^{q'} \longrightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{pq}(x)}{\partial x^k} \right] x^{p'} x^{q'}, \\ \frac{\partial f}{\partial x^{k'}} &= \frac{g_{kq}(x)x'^q}{\sqrt{g_{ij}(x)x^i x^j}} \longrightarrow g_{kq}(x)x'^q, \end{aligned}$$

enquanto que

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x^{k'}} \right) = \frac{\partial g_{kq}(x)}{\partial x^l} x'^l x'^q + g_{kq}(x) x''^q,$$

e portanto as equações de Euler fornecem

$$\frac{\partial g_{kq}(x)}{\partial x^l} x'^l x'^q + g_{kq}(x) x''^q - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{pq}(x)}{\partial x^k} \right] x'^p x'^q = 0. \quad (2.1.7)$$

Utilizando o tensor métrico para baixar o índice do tensor contravariante

$$g_{kq}(x) x''^q = x''_k,$$

e tendo em conta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{kq}(x)}{\partial x^l} x'^l x'^q &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kq}(x)}{\partial x^l} x'^l x'^q + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kq}(x)}{\partial x^l} x'^l x'^q \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kq}(x)}{\partial x^l} x'^l x'^q + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}(x)}{\partial x^q} x'^q x'^l \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^q} \right) x'^l x'^q. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Substituindo a Eq. (2.1.8) na Eq. (2.1.7), obtêm-se que

$$g_{kq} x''^q + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{lq}(x)}{\partial x^k} \right) x'^l x'^q = 0.$$

Utilizando a propriedade

$$g^{km} g_{lm} = \delta_l^k, \quad (2.1.9)$$

já que g^{km} são os elementos da matriz métrica inversa, multiplicamos toda a equação por g^{ki} obtendo

$$x''^i + \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{lq}(x)}{\partial x^k} \right) x'^l x'^q = 0.$$

Introduzimos uma notação mais compacta

$$\boxed{\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{lq}^i \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^q}{dx} = 0.} \quad (2.1.10)$$

Esta é a famosa equação de uma curva especial chamada de geodésica. Esta equação é válida para qualquer superfície Riemanniana; para resolvê-la basta conhecer a métrica. Nem sempre esta é a forma ou o caminho mais fácil de se encontrar a geodésica em uma dada superfície. Nesta equação ao símbolo Γ_{lq}^i é denominado de conexão afim ou símbolos de Christoffel. Uma propriedade importante é que, neste caso, os símbolos são simétricos nos índices inferiores

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i.$$

Exemplo 2.1.4. O cálculo da geodésica na esfera utilizando a Eq.(2.1.10) e as Eqs. de Euler, Eq. (2.1.3).

Certamente nossa escolha de coordenadas é a clássica, ou seja $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$. A métrica na superfície da esfera é

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2,$$

de onde pode-se ler a matriz métrica

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}.$$

As conexões não nulas são

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\cos \theta \text{sen} \theta, \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \cot \theta. \end{aligned}$$

A equações para a geodésica são:

Componente $x^1 = \theta$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 &= 0 \implies \\ \frac{d^2 \theta}{ds^2} - \cos \theta \text{sen} \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Componente $x^2 = \phi$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} + \Gamma_{\theta\phi}^{\theta} \frac{d\phi}{ds} \frac{d\theta}{ds} &= 0 \implies \\ \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} &= 0. \end{aligned}$$

É necessário resolver estas duas equações:

$$\boxed{\frac{d^2 \theta}{ds^2} - \cos \theta \text{sen} \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0,} \quad (2.1.11)$$

$$\boxed{\frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0,} \quad (2.1.12)$$

com a condição auxiliar

$$r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 1. \quad (2.1.13)$$

Neste caso, este não é o melhor caminho para se calcular a geodésica em uma superfície esférica, é mais simples identificar a função f e utilizar as equações de Euler.

2.2 O Princípio de Hamilton e as Equações de Lagrange.

A extensão do funcional J para n dimensões é imediata. Faremos esta extensão para sistemas físicos (observe que não necessariamente mecânicos), já que nosso interesse é a formulação Lagrangiana de sistemas físicos. Tudo é muito simples, o funcional J passa a ser chamado de ação S e a função f recebe o nome de Lagrangiana. Simplicidade a parte fazemos as correspondências

$$\begin{aligned} J &\longrightarrow S \\ f[y', t; x] &\longrightarrow L(q, \dot{q}, t), \end{aligned}$$

enfim, estas correspondências resultam da formulação do problema no espaço de configurações em termos de graus de liberdades ou coordenadas independentes, para isto faz-se a identificação das variáveis y com as coordenadas generalizadas q , y' com as velocidades generalizadas \dot{q} e a variável independente x com o tempo t .

A ação integral é dada por

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t), \quad (2.2.1)$$

onde $L(q, \dot{q}, t)$ é função de Lagrange ou Lagrangiana dada por

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V,$$

sendo T a energia cinética das partículas constituintes do sistema e V a energia potencial. Esta identificação segue da definição de Lagrangiana quando da dedução das equações de Lagrange do princípio de D'Lembert. Podemos agora enunciar o

Princípio de Hamilton. Dado um sistema mecânico holônomo descrito pela Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, seu movimento do instante t_0 ao instante t_1 é tal que a ação

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)$$

é estacionária para a trajetória real, mantidos fixos os extremos de integração.

A energia cinética em termos das coordenadas generalizadas é dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2,$$

onde

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t},$$

portanto

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\sum_{jk} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right],$$

e

$$V = V(q).$$

A variação ou imposição que a ação seja estacionária fornece as equações de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.} \quad (2.2.2)$$

Vale observar que a Lagrangiana L tem dimensão de energia e a ação S tem dimensão de momento angular, ou seja

$$[L] = \frac{ML^2}{T^2},$$

$$[S] = \frac{ML^2}{T}.$$

Aplicações das equações de Lagrange são discutidas nas subseções e exemplos seguintes.

2.2.1 Lagrangiana e equações de movimento de uma partícula livre.

Vamos obter a Lagrangiana de uma partícula livre em $3 - d$ com relação a um referencial inercial [4],[5]. Com relação a um referencial inercial o espaço é homogêneo e isotrópico, ou seja não há ponto preferencial para se escolher a origem do sistema de coordenadas e nem direção privilegiada, e de fato o espaço e o tempo devem ser homogêneos e o espaço $3 - d$ isotrópico. Sabe-se que em um sistema inercial, uma partícula em repouso permanecerá em repouso. Estas propriedades impõe imediatamente condições na forma da Lagrangiana de uma partícula livre. A homogeneidade do espaço e do tempo impõe que a Lagrangiana não pode depender de \mathbf{r} e nem de t , portanto somente da velocidade \mathbf{v} da partícula. Veja que isto não impede a adição de uma constante à função Lagrangiana. Já a isotropia do espaço é sinônimo de não direção privilegiada, portanto se a Lagrangiana depender da velocidade,

poderá ser somente em módulo, ou seja v . Dado que a Lagrangiana é dada por

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V(q),$$

para a partícula livre fica claro que

$$L = \frac{1}{2}mv^2.$$

É apropriado escrevermos a velocidade em termos de coordenadas curvilineares, ou seja

$$d\mathbf{s} = h_1 d\xi_1 \mathbf{e}_1 + h_2 d\xi_2 \mathbf{e}_2 + h_3 d\xi_3 \mathbf{e}_3,$$

de onde segue que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = h_1 \dot{\xi}_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \dot{\xi}_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \dot{\xi}_3 \mathbf{e}_3,$$

sendo que a energia cinética ou Lagrangiana de uma partícula livre em coordenadas curvilineares é

$$L = \frac{1}{2}m \left[\left(h_1 \dot{\xi}_1 \right)^2 + \left(h_2 \dot{\xi}_2 \right)^2 + \left(h_3 \dot{\xi}_3 \right)^2 \right], \quad (2.2.3)$$

onde

$$h_i = h_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

As equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

com as coordenadas generalizadas $q_i = \xi_i$, são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0,$$

Calculando

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{m}{2} \sum_{j=1}^3 \left(h_j \dot{\xi}_j \right)^2 \\ &= m \sum_{j=1}^3 \left(h_j \dot{\xi}_j \right) \left(\frac{\partial h_j}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_j \right) \\ &= m \sum_{j=1}^3 \left(h_j \dot{\xi}_j^2 \right) \frac{\partial h_j}{\partial \xi_i} \end{aligned}$$

2.2. O PRINCÍPIO DE HAMILTON E AS EQUAÇÕES DE LAGRANGE. 41

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} &= m \sum_{j=1}^3 \left(h_j^2 \dot{\xi}_j \right) \left(\frac{\partial \dot{\xi}_j}{\partial \xi_i} \right) \\ &= m \sum_{j=1}^3 \left(h_j^2 \dot{\xi}_j \right) (\delta_j^i) \\ &= m h_i^2 \dot{\xi}_i.\end{aligned}$$

Segue que as equações de movimento de uma partícula livre em coordenadas curvilineares são

$$\frac{d}{dt} \left(m h_i^2 \dot{\xi}_i \right) - m \sum_{j=1}^3 \left(h_j \dot{\xi}_j^2 \right) \frac{\partial h_j}{\partial \xi_i} = 0.$$

Se calcularmos a derivada temporal dos coeficientes de Lamè

$$\frac{d}{dt} h_i^2 = 2 h_i \frac{d h_i}{dt},$$

obteremos as equações de movimento na forma

$$2 h_i \frac{d h_i}{dt} \frac{d \xi_i}{dt} + h_i^2 \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} - \sum_{j=1}^3 h_j \left(\frac{d \xi_j}{dt} \right)^2 \frac{\partial h_j}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.4)$$

Note que não há soma nos índices i .

Exemplo 2.2.1. Lagrangiana, equações de movimento e ação para uma partícula livre em $3 - d$ Cartesiano.

Em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}h_i &= 1, \quad i = 1, 2, 3, \\ (\xi^i) &= (x, y, z),\end{aligned}$$

sendo que se obtêm das Eq. (2.2.3, 2.2.4)

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

sendo as equações de movimentos dadas por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (m\dot{x}) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (m\dot{y}) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (m\dot{z}) &= 0,\end{aligned}$$

que são exatamente as equações para a conservação das componentes do momento \mathbf{p} de uma partícula livre. Estas equações podem ser escritas em uma forma compacta como

$$\frac{dp_i}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde

$$p_i = m\dot{x}_i.$$

Suponha seja necessário calcularmos a ação de uma partícula livre, ou seja fazer explicitamente o cálculo

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L dt,$$

onde L é a Lagrangiana de uma partícula livre, portanto torna-se necessário calcular

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt,$$

que por simplicidade e sem perda de generalidade consideramos o cálculo unidimensional

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt = \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} \dot{x}^2 dt.$$

Dado que a partícula é livre a sua equação de movimento tem como solução

$$x(t) = x_{t_i} + v_{x_{t_i}} t,$$

de onde sugue que

$$\frac{dx}{dt} = v_{x_{t_i}},$$

que substituída na ação fornece

$$S = \frac{m}{2} v_{x_{t_i}}^2 (t_f - t_i).$$

A velocidade inicial $v_{x_{t_i}}$ pode ser calculada em termo da posição e intervalo de tempo transcorrido, utilizando a função $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t_f) - x(t_i) &= \cancel{x_{t_i}} - \cancel{x_{t_i}} + v_{x_{t_i}} (t_f - t_i) \implies \\ v_{x_{t_i}} &= \frac{x(t_f) - x(t_i)}{(t_f - t_i)}. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão da ação obtemos

$$S = \frac{m}{2} \frac{[x(t_f) - x(t_i)]^2}{(t_f - t_i)}.$$

Exemplo 2.2.2. A ação para um oscilador harmônico simples, cuja Lagrangiana dada por

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2),$$

é

$$S = \frac{m\omega}{2\text{sen}(\omega T)} [(x_1^2 + x_2^2) \cos(\omega T) - 2x_1 x_2],$$

onde $T = t_2 - t_1$, e t_1 e t_2 são os tempos iniciais e finais nos extremos de integração da ação.

Exemplo 2.2.3. Lagrangiana de uma partícula relativística livre - Geometria pseudo-Riemanniana plana - espaço de Minkowski.

A Lagrangiana de uma partícula não relativística livre, ou seja

$$L = \frac{m}{2} \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt},$$

a qual é um invariante sob transformações do Grupo de Galileu, ou seja um escalar de Galileu. Esta Lagrangiana depende do quadrado da velocidade, que por sua vez é obtido do elemento de comprimento de arco. Vimos que o elemento de comprimento de arco em um espaço Riemanniano é dado por

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.2.5)$$

entretanto na expressão acima, nem tudo foi dito sobre as propriedades do tensor métrico (g_{ij}). Como definido anteriormente a métrica Eq. (2.2.5) é positiva definida, ou seja a forma quadrática $g_{ij} dx^i dx^j$ é positiva definida, entretanto relaxando esta condição, portanto admitido que

$$g_{ij} dx^i dx^j \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0, \end{cases}$$

teremos uma métrica pseudo-riemmaniana.

Um caso de particular interesse é a métrica de Minkowski, que decorre de ser a velocidade da luz constante e igual a c em qualquer referencial. A equação de uma frente de onda eletromagnética esférica pode ser escrita como

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \text{invariante.}$$

Sem entrar em detalhes, segue desta expressão a definição do elemento de comprimento de arco no espaço de Minkowski

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.2.6)$$

sendo

$$ds^2 \begin{cases} < 0, & \text{intervalo tipo espaço,} \\ = 0, & \text{intervalo tipo luz,} \\ > 0, & \text{intervalo tipo tempo.} \end{cases}$$

Suponha que decidimos por generalizar a expressão $L = \frac{m}{2} \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt}$ para uma variedade arbitrária, neste caso escreveríamos

$$F = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \cdot \frac{dx^j}{d\lambda},$$

ou algo semelhante. Uma dificuldade surge, esperamos que esta grandeza represente a energia de uma partícula livre, portanto é necessário que escolhamos o parâmetro λ com significado físico, neste caso o tempo próprio. Ok, podemos escolher o parâmetro λ como sendo o parâmetro natural da curva, ou seja, s já que no referencial próprio $s = cd\tau$, sendo τ o tempo próprio. Isto é bom mas leva a uma dificuldade; note que com esta escolha teremos

$$L = \frac{m}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \frac{m}{2},$$

já que

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Um possível caminho para se escrever uma Lagrangiana para uma partícula relativística livre é encontrar uma ação invariante de Lorentz (grupo de Lorentz), que forneça as equações de movimento corretas e que no limite não relativístico forneça a energia cinética de uma partícula livre. Esta ação pode ser da forma

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} ds, \quad (2.2.7)$$

onde ds^2 é o comprimento de arco no espaço de Minkowski,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

de onde

$$ds = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} c dt,$$

onde

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

O limite não relativístico da ação Eq.(2.2.7) determina o valor da constante

$$\alpha = mc^2,$$

levando portanto a

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt = -mc \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^\mu dx_\mu}. \quad (2.2.8)$$

As equações de movimento, que seguem das Equações de Euler, são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = 0.$$

Exemplo 2.2.4. O elemento de comprimento de arco ds^2 é uma quantidade invariante ou seja, esta grandeza é a mesma em qualquer referencial. De particular interesse é a utilização desta invariância no contexto da Física, por exemplo o quadrado do elemento de comprimento de arco é o mesmo em qualquer referencial inercial, que são aqueles em que são válidas as leis de Newton. Este conceito foi estendido para todas as leis da física e não somente as da mecânica. No contexto de referenciais inerciais relacionados por transformações de Lorentz, a invariância do comprimento de arco

$$ds^2 = ds'^2, \quad (2.2.9)$$

pode ser utilizada para definirmos o tempo próprio de uma partícula. Para isto considere que com relação a um dado referencial inercial observa-se o movimento arbitrário de uma partícula. Em cada momento de tempo este movimento pode ser considerado uniforme, assim em cada momento de tempo podemos associar à partícula um referencial inercial rigidamente ligado a ela. Após transcorrido um intervalo de tempo infinitesimal dt medido no referencial de repouso, a partícula se desloca de $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, também medido pelo observador em repouso. Considerando que a partícula está rigidamente ligada a origem de seu referencial próprio, $dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0$. A invariância do elemento de comprimento de arco, Eq. (2.2.9) fornece

$$c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 d\tau^2,$$

onde τ é o tempo próprio da partícula. Nesta forma a invariância do comprimento de arco permite relacionarmos o tempo próprio da partícula que se desloca com rapidez (arbitrária) v com o tempo medido por um observador em repouso em um referencial inercial, fornecendo

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt.$$

para o intervalo de tempo próprio $\Delta\tau$ calculado ao longo da trajetória da partícula no espaço de Minkowski. O valor máximo dessa integral é obtido para uma partícula em repouso ou se deslocando com velocidade constante, fornecendo nestes casos a curva que fornece um máximo para o funcional. Note que quanto maior a velocidade, menor o valor do funcional, portanto o mínimo de $\Delta\tau$ é obtido para o valor limite da rapidez $v = c$, enquanto que o máximo $v = 0$.

Exemplo 2.2.5. A Lagrangiana de uma partícula em um campo eletromagnético externo é

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\phi + e\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A},$$

como anteriormente deduzido. As equações de Lagrange em coordenadas cartesianas, fornecem

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x^i} &= -e\frac{\partial\phi}{\partial x^i} + e\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x^i}, \\ \frac{\partial L}{\partial v^i} &= mv_i + \frac{e}{c}A_i,\end{aligned}$$

portanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow m\frac{dv_i}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^j}v_j + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + e\frac{\partial\phi}{\partial x^i} - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x^i} = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^j}v_j - e\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x^i} &= \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^j}v_j - e\frac{v_j}{c} \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \implies \\ \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^j}v_j - e\frac{v_j}{c} \cdot \frac{\partial A_j}{\partial x^i} &= e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right)\frac{v_j}{c},\end{aligned}$$

Definindo

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i},$$

obtemos a equação de movimento na forma

$$m\frac{dv_i}{dt} = -e\frac{\partial\phi}{\partial x^i} - eF_{ij}\frac{v_j}{c},$$

ou equivalentemente

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Exemplo 2.2.6. A ação de Polyakov é definida como

$$S = -c \int d\tau \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{e} + em^2 \right), \quad (2.2.10)$$

onde considera-se $e(\tau)$ outro grau de liberdade além de x . Das equações de Lagrange para as coordenadas generalizadas

$$(q_1, q_2) = (x, e),$$

obtêm-se as equações de movimento

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}}{e} \right) &= 0, \\ \frac{\dot{x}^2}{e^2} - m^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

A segunda equação fornece

$$e = \frac{\sqrt{\dot{x}^2}}{m}.$$

Esta equação fixa o valor da variável dinâmica e , que de fato não é independente mas sim vinculada. Algumas características gerais desta ação que a tornam uma melhor escolha que a ação dada pela Eq.(2.2.8) é a ausência de uma raiz quadrada, o que geralmente leva a teorias não locais, e a existência de um limite para partículas com massa nula. Note que substituindo a expressão do campo e na ação de Polyakov obtêm-se

$$\begin{aligned} S &= -c \int_{t_1}^{t_2} d\tau \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{\frac{\sqrt{\dot{x}^2}}{m}} + \frac{\sqrt{\dot{x}^2}}{m} m^2 \right) \\ &= -mc \int_{t_1}^{t_2} d\tau \sqrt{\dot{x}^2} \\ &= -mc \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^\mu dx_\mu}, \end{aligned}$$

que coincide com a ação dada na Eq. (2.2.8). Ou seja as duas ações são equivalentes, e portanto fornecem as mesmas equações de movimento. Outro aspecto interessante é que para a escolha do parâmetro τ como sendo o parâmetro natural teremos

$$\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = 1,$$

portanto

$$e = \frac{1}{m} \quad (2.2.12)$$

É interessante procurar saber de onde ou o que motiva escrever esta ação.

Após o aparecimento da Teoria de Cordas, vários modelos, ações, para partículas relativísticas, em particular a ação Eq. (2.2.10), foram considerados, com o objetivo de se compreender o processo de quantização para posterior utilização em teorias de cordas devido às dificuldades inerentes do modelo.

2.2.2 Lagrangianas Equivalentes

Uma propriedade muito importante no formalismo lagrangiano é que as lagrangianas que diferem da derivada total no tempo de uma função das coordenadas generalizadas e do tempo, fornecem as mesmas equações de movimento. Explicitamente

Afirmção 2.2.7. Dado L e

$$L' = L + \frac{dF(q, t)}{dt},$$

e exigindo que a função F se anula nos extremos de integração

$$F(q(t_1), t_1) = F(q(t_2), t_2) = 0,$$

as equações de movimento obtidas de L e L' serão as mesmas.

Demonstração. O cálculo da ação S' devido a Lagrangiana L é

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L' dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q, t)}{dt} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + \cancel{F(q(t_2), t_2)} - \cancel{F(q(t_1), t_1)} \\ &= S, \end{aligned}$$

portanto $S = S'$ de onde segue que as equações de Lagrange e portanto as equações de movimento são as mesmas. \square

Exemplo 2.2.8. Transformações de gauge. Considere a Lagrangiana de uma partícula com massa m , carga e em um campo eletromagnético externo, representado pelos campos $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $\phi(\mathbf{r}, t)$,

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\phi + e\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A}.$$

2.2. O PRINCÍPIO DE HAMILTON E AS EQUAÇÕES DE LAGRANGE. 49

Como a Lagrangiana se transforma quando os campos são submetidos a transformação de gauge

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda,$$

Exemplo 2.2.9. Construa a Lagrangiana para um pêndulo simples com massa m cujo ponto de suporte:

1. move-se uniformemente em um círculo vertical com raio a com frequência constante γ ,
2. oscila horizontalmente no plano de movimento do pêndulo de acordo com a lei $x = a \cos \gamma t$,

nas quais a derivada total de um termos que depende das coordenadas e do tempo deve ser omitido.

2.2.3 Multiplicadores de Lagrange e vínculos holônomos

Considere a Lagrangiana

$$S = -c \int d\tau \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{e} + em^2 \right)$$

Já sabemos que esta ação possui somente uma variável independente devido que as variáveis e e x estão relacionadas via Eq. (2.2.11), porém podemos proceder como se a ação dependesse de duas variáveis independentes, ou seja

$$(q_1, q_2) = (x, e).$$

Neste caso a ação é um funcional da forma

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(x, e, \dot{x}, \dot{e}, t) dt. \end{aligned}$$

As trajetórias variadas são

$$\begin{aligned} q_1(t, \alpha) &= q_1(t) + \alpha \eta_1(t), \\ q_2(t, \alpha) &= q_2(t) + \alpha \eta_2(t). \end{aligned}$$

A variação da ação é da forma

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_1} \right] \eta_1(t) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_2} \right] \eta_2(t) dt.\end{aligned}$$

Note entretanto que as variáveis x e e não são independentes consequentemente cada um dos integrandos não são independentes e portanto não são nulos. Considere a situação mais simples em que as equações de vínculos sejam relações geométricas entre as coordenadas e não entre coordenadas e velocidades ou seja considere que os vínculos sejam holônomos

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n, t) = 0,$$

que para duas variáveis como estamos considerando torna-se

$$f(q_1, q_2, t) = 0. \quad (2.2.13)$$

O diferencial desta expressão fornece

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \delta q_2 = 0 \implies$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial q_1} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \eta_2 &= 0 \implies \\ \eta_2 &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_2}} \eta_1.\end{aligned}$$

Substituindo na expressão da ação variada obtém-se que

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_1} \right] \eta_1(t) dt \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_2} \right] \frac{\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_2}} \eta_1 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_1} \right] - \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_2} \right] \frac{\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_2}} \right\} \eta_1 dt.\end{aligned}$$

Nesta forma o integrando depende somente de um parâmetro, η_1 , e a imposição que a ação seja estacionária pode agora ser obtida da utilização do

2.2. O PRINCÍPIO DE HAMILTON E AS EQUAÇÕES DE LAGRANGE. 51

Teorema Fundamental do Cálculo das Variações, portanto

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_1} \right] - \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_2} \right] \frac{\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_2}} = 0 \implies \\ & \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_1} \right] \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial q_1}} - \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_2} \right] \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial q_2}} = 0 \implies \end{aligned}$$

ou na forma

$$\left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_1} \right] \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^{-1} = \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_2} \right] \left(\frac{\partial f}{\partial q_2} \right)^{-1}.$$

O lado esquerdo dessa equação é uma função de L , f , q_1 e t enquanto que o lado direito é função de L , f , q_2 e t . Isto significa que os dois membros devem ser iguais a uma função que não depende de q_1 e q_2 e no máximo do tempo porque q_1 e q_2 são funções do tempo que escolhemos como $\lambda(t)$. Desta forma obteremos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} - \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0, \quad (2.2.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} - \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial q_2} = 0. \quad (2.2.15)$$

O problema torna-se determinado: temos três variáveis incógnitas e três equações, duas de movimento Eqs. (2.2.14, 2.2.15) e uma de vínculo Eq. (2.2.13). Estas expressões sugerem que pode-se considerar a variação da seguinte ação

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} [L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) + \lambda f(q_1, q_2)] dt,$$

já que

$$\delta S' = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} \right\} \eta_i dt,$$

resultando nas mesmas equações anteriores. De fato o procedimento utilizado na variação da ação S' é simplesmente o procedimento usual utilizado em problemas variacionais isoperimétricos.

2.3 Invariância, Teorema de Noether e Cargas Conservadas

Na obtenção das equações de Lagrange de um princípio variacional, considerou-se trajetórias variadas

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x),$$

considerando-se que as trajetórias variadas coincidam com a original nos extremos de integração:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

O interesse em considerar a variação da ação com extremos fixos é que este procedimento fornece diretamente as equações de Lagrange. Entretanto existem vários problemas físicos de interesse para os quais essa condição pode ser relaxada, por exemplo o problema de se encontrar qual a curva que fornece a menor distância para uma partícula em queda livre cuja coordenada inicial é fixa x_1 mas a posição final pode estar em qualquer pontos $y < 0$ de uma linha vertical. Pode-se em princípio considerar as variações mais gerais além daquelas em que os extremos de integração não são fixos, por exemplo

$$q(\alpha, t) = q(t) + \alpha\eta(q, \dot{q}; t), \quad (2.3.1)$$

com $\eta(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \neq 0$ e $\eta(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2) \neq 0$.

O objetivo de considerar tais classes de transformações é que rotações e translações no espaço em todos os pontos, inclusive nos extremos, estarão representadas por estas transformações as quais são de grande utilidade no estudo das simetrias da ação. Neste sentido pode-se também levar em conta translações no tempo, entretanto para isto deve-se considerar uma transformação independente

$$t \longrightarrow \bar{t} = t + \alpha. \quad (2.3.2)$$

Por analogia com a generalização da variação Eq.(2.3.1) considera-se uma variação mais geral, da forma

$$T = t + \alpha\xi(q, \dot{q}; t), \quad (2.3.3)$$

consequentemente

$$\begin{aligned} q(\alpha, t) \longrightarrow Q(\alpha, T) &= q(T - \alpha\xi(q, \dot{q}; t)) + \alpha\eta(q, \dot{q}; t). \\ &= q(T) - \alpha \frac{dq}{dt} \xi(q, \dot{q}; t) + \alpha\eta(q, \dot{q}; t) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

2.3. INVARIÂNCIA, TEOREMA DE NOETHER E CARGAS CONSERVADAS 53

Na função η foi mantida a variável t porque esta já está multiplicada pelo parâmetro α . Calcula-se então, sob que condições a ação será estacionária, para isto é necessário variarmos a ação modificada

$$\mathcal{S} = \int_{T_1}^{T_2} L [Q, \dot{Q}; T] dT,$$

onde

$$\dot{Q} = \frac{dQ(T)}{dT}.$$

Note que a derivada temporal é com relação a variável em pauta,

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt},$$

portanto, com a variável independente da função que pode ser a modificada ou não.

A variação da ação em primeira ordem no parâmetro α fornece

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \delta \int_{T_1}^{T_2} L [Q, \dot{Q}; T] dT \\ &= \delta T_2 L [Q, \dot{Q}; T] \Big|_{T_2} - \delta T_1 L [Q, \dot{Q}; T] \Big|_{T_1} \\ &+ \int_{T_1}^{T_2} \delta L [Q, \dot{Q}; T] dT. \end{aligned}$$

A variação do integrando em primeira ordem em α é

$$\int_{T_1}^{T_2} \delta L [Q, \dot{Q}; T] dT = \int_{T_1}^{T_2} \left\{ \frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial \dot{Q}} \delta \dot{Q} + \frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial T} \delta T \right\} dT.$$

Da Eq. (2.3.1) obtêm-se que

$$\delta Q = \alpha \left[\eta(q, \dot{q}; t) - \frac{dq}{dt} \xi(q, \dot{q}; t) \right],$$

e que

$$\delta \dot{Q} = \frac{d}{dT} \delta Q.$$

Integrando por partes o segundo termo, têm-se que

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial \dot{Q}} \delta \dot{Q} dT = \frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial \dot{Q}} \delta Q \Big|_{T_1}^{T_2} - \int_{T_1}^{T_2} \frac{d}{dT} \left(\frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial \dot{Q}} \right) \delta Q dT.$$

a variação $\delta T = \alpha\xi$, com isto a variação da ação pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \delta \int_{T_1}^{T_2} L [Q, \dot{Q}; T] dT \\ &= \alpha\xi_2 L [Q, \dot{Q}; T] \Big|_{T_2} - \alpha\xi_1 L [Q, \dot{Q}; T] \Big|_{T_1} \\ &\quad + \int_{T_1}^{T_2} \left\{ \frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial Q} \delta Q - \frac{d}{dT} \left(\frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial \dot{Q}} \right) \delta Q + \frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial T} \alpha\xi \right\} dT \\ &\quad + \frac{\partial L [Q, \dot{Q}; T]}{\partial \dot{Q}} \delta Q \Big|_{T_1}^{T_2}.\end{aligned}$$

Devido a que todos os termos são proporcionais a α as derivadas parciais podem ser calculadas em $\alpha = 0$ para que somente termos lineares em α sejam considerados, portanto

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \delta \int_{T_1}^{T_2} L [Q, \dot{Q}; T] dT \\ &= \alpha\xi_2 L [q, \dot{q}; t] \Big|_{t_2} - \alpha\xi_1 L [q, \dot{q}; t] \Big|_{t_1} \\ &\quad + \int_{T_1}^{T_2} \left\{ \frac{\partial L [q, \dot{q}; t]}{\partial q} \delta Q - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L [q, \dot{q}; t]}{\partial \dot{q}} \right) \delta Q + \frac{\partial L [q, \dot{q}; t]}{\partial t} \alpha\xi \right\} dt \\ &\quad + \frac{\partial L [q, \dot{q}; T]}{\partial \dot{q}} \delta Q \Big|_{t_1}^{t_2}.\end{aligned}$$

Em particular se a lagrangiana não depender explicitamente do tempo, a expressão não possuirá a derivada explícita no tempo. a variação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \delta \int_{T_1}^{T_2} L [Q, \dot{Q}] dT \\ &\quad + \int_{T_1}^{T_2} \left\{ \left[\frac{\partial L [q, \dot{q}]}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L [q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \right) \right] \left[\eta(q, \dot{q}; t) - \frac{\partial q}{\partial t} \xi(q, \dot{q}; t) \right] \right\} \alpha dt \\ &\quad + \alpha \left\{ \left[L [q, \dot{q}] - \frac{\partial L [q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right] \xi + \frac{\partial L [q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \eta(q, \dot{q}; t) \right\} \Big|_{t_1}^{t_2}.\end{aligned}\tag{2.3.5}$$

Esta expressão representa a variação da ação quando as trajetórias variadas e o tempo dependem de funções η e ξ bastante gerais, portanto esta expressão generaliza a expressão Eq. (2.2.1) com a condição que a ação seja estacionária levando às equações de Lagrange. Isto significa que na variação dada pela Eq.

2.3. INVARIÂNCIA, TEOREMA DE NOETHER E CARGAS CONSERVADAS 55

(2.3.5) deve seguir as equações de Lagrange e algo mais. Considere então que as trajetórias $q(t)$ satisfaçam às equações de Lagrange, ou seja são soluções das equações de Lagrange, neste caso

$$\frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \right) = 0,$$

e a variação Eq. (2.3.5) reduz-se a

$$\delta S = \alpha \left\{ \left[L[q, \dot{q}] - \frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right] \xi + \frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \eta(q, \dot{q}; t) \right\} \Big|_{t_1}^{t_2},$$

que deve ser invariante, portanto

$$\left\{ \left[L[q, \dot{q}] - \frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right] \xi + \frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \eta(q, \dot{q}; t) \right\} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

ou equivalentemente

$$\left[L[q, \dot{q}] - \frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right] \xi + \frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \eta(q, \dot{q}; t) = \text{Constante}.$$

Teorema 2.3.1. *Se a ação S for invariante sob as transformações Eqs. (2.3.3, 2.3.4) então a quantidade*

$$\left[L[q, \dot{q}] - \frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right] \xi + \frac{\partial L[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}} \eta(q, \dot{q}; t),$$

onde L é a lagrangiana do sistema, é constante de movimento .

Este teorema é devido a física Emmy Noether. São nas aplicações em teoria quântica dos campos e partículas elementares é que fica evidente toda a utilidade e importância deste teorema.

Capítulo 3

Equações de Movimento de Hamilton

3.1 Introdução

Este texto é uma adaptação informal da referência com material coletado de várias outras referências.

3.2 Transformações de Legendre

Referências Bibliográficas

- [1] S. P. Novikov (auth.) B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko. *Modern Geometry, Methods and Applications: Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*, volume Part 1 of *Graduate Texts in Mathematics 93*. Springer New York, 2nd ed edition, 1984. ISBN 0387976639,9780387976631,3540976639.
- [2] Sean Carroll. *Space Time and Geometry An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [3] John Safko Herbert Goldstein, Charles Poole. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3^a edition, 2000.
- [4] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 1981.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 1987.
- [6] Nivaldo Lemos. *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, 2007.

Índice Remissivo

bordo, 19

cadeia de simplexos, 20
conexão afim, 36
contravariante, 36

de Christoffel, 36
Deslocamento virtual, 23
deslocamento virtual., 23

Emmy Noether, 55
Equação de Euler, 31
espaço de configurações, 22
exterior produ, 11

fator integrante, 19
fechada, 18
fibrados, 15
formas diferenciais, 9

geodésica, 36

infinitesimal, 23

m-forma, 15
métrica de Minkowski, 43
matriz métrica, 34

pseudo-Riemanniana, 43

space of p- vectors, 11

tempo próprio, 45
tensor métrico, 34