CRIANDO OPORTUNIDADES, DISSEMINANDO CONHECIMENTOS

32ª SEMANA DA MATEMÁTICA UEL

06 a 11 de Novembro de 2017

Anais da 32ª SEMAT

Universidade Estadual de Londrina

CCE CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

Departamento de Matemática

Londrina – PR

PARANÁ GOVERNO DO ESTADO

PARANÁ SECRETARIA DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

FUNDAÇÃO ARAUCÁRIA Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Paraná

proex pró-reitoria de extensão

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S471a Semana da Matemática (2017 : Londrina, PR)
Anais da 32ª Semana da Matemática [livro eletrônico] /organizadores: Paulo Antonio Liboni Filho, Ana Lucia da Silva. – Londrina : UEL, 2018.
1 Livro digital : il.

Tema central: Criando oportunidades, disseminando conhecimentos.
Inclui bibliografia.
Disponível em: http://www.uel.br/cce/mat/
ISBN 978-85-7846-524-7

1. Matemática – Congressos. 2. Matemática – Estudo e ensino – Congressos. 3. Matemática – Pesquisa – Congressos. I. Liboni Filho, Paulo Antonio. II. Silva, Ana Lucia da. III. Universidade Estadual de Londrina. IV.Título.

CDU 51

Bibliotecária: Solange Gara Portello – CRB-9/1520

APRESENTAÇÃO

Há 31 anos o Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) organiza a Semana da Matemática. Sua história se confunde com a história da graduação em Matemática, e da própria Instituição, fundada em 1970. Em todos os anos em que foi realizada, têm demonstrado sucesso e impacto positivo na vida de estudantes, pesquisadores, professores e da comunidade em geral.

A 32ª Semana da Matemática - UEL tem o tema – Criando Oportunidades, Disseminando Talentos, é um evento nacional, está integrada as atividades do Biênio da Matemática no Brasil e congrega cerca de 350 estudantes e profissionais da área - de alunos e professores da rede básica de ensino a pesquisadores que atuam em programas de pós-graduação de todas as grandes áreas da matemática. Nesta edição, em especial, a Semana recebe em torno de 150 participantes oriundos do IX Encontro Nacional de Grupos PET Matemática (ENAPETMAT), que se reúnem para socializar os saberes e experiências de cada grupo juntamente com seus tutores.

A Semana oferece minicursos, palestras plenárias, mesas redondas, exposições culturais, gincanas acadêmicas, sessões de pôsteres, minicursos, oficinas e outros tipos de atividades. O evento é pensado de maneira a consolidar, integrar e divulgar os projetos e programas mantidos pelo Departamento de Matemática/UEL, como: Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional (PGMAC), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência (PIBID) e Programa de Educação Tutorial (PET), Programa de Iniciação Científica da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (PIC-OBMEP/PR-01).

Assim, nesta 32a edição da Semana, que ocorre junto ao ENAPETMAT, dentro do Biênio da Matemática e cujo destaque é a divulgação da matemática, como parte da agenda positiva do ensino, pesquisa e inovação no país, o foco é articular o princípio da indissociabilidade das atividades de ensino, pesquisa e extensão no fazer acadêmico, criando um ambiente de disseminação científica, tecnológica e cultural, na qual, pesquisadores, professores, profissionais e estudantes se reúnem para debates, reflexões, análises de suas práticas possibilitando um efeito cíclico entre os saberes de cada um.

Para finalizar e com muita satisfação pelo sucesso alcançado, a comissão organizadora da 32º Semat expressa os mais sinceros agradecimentos a todos que prestigiaram o evento e colaboraram para sua realização e êxito, em especial agradecemos a presença inestimável dos matemáticos: Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva (IMPA-RJ), Prof. Dr. Carlos Gustavo T.A. Moreira (Gugu) – (IMPA-RJ), Prof. Dr. Flavio Ulhoa Coelho (USP/IME).

REALIZAÇÃO

**CRIANDO OPORTUNIDADES,
DISSEMINANDO CONHECIMENTOS**

32ª SEMANA DA UEL MATEMÁTICA

06 a 11 de Novembro de 2017

Universidade Estadual de Londrina

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS – UEL**

COMISSÃO ORGANIZADORA

Profa. Dra. Ana Lucia Silva (Coordenadora)
Profa. Dra. Angela Marta P. das Dores Savioli (UEL)
Prof. Ms. Luciano Rudnik (UNIFIL)
Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves (UEL)
Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho (UEL)
Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini (UEL)
Profa. Dra. Sandra Malta Barbosa (UEL)
Prof. Dr. Tiago Viana Flor de Santana (UEL)

COMISSÃO CIENTÍFICA

Profa. Dra. Luci Harue Fatori (UEL)
Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva (UEL)
Prof. Dr. Paulo Laerte Natti (UEL)
Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini (UEL)
Profa. Dra. Sandra Malta Barbosa (UEL)

FOMENTO

APOIO

Pessoal de Apoio

Administrativo
Paulo Rogério Corso

Agência de Radiojornalismo UEL Sonora
Matheus Zampieri

Criação e Diagramação dos Folders
Adriano Junior Gouveia Gonçalves
Profa. Dra. Ana Lucia da Silva

Desenvolvedora de WebSite
Profa. Dra. Sandra Malta Barbosa

Diretoria de Acompanhamento Administrativo
Profa. Ms. Lisiane Freitas de Freitas
Regina Mara
Samanta Vieira

Informática
Eduardo Pereira Campos

Secretaria Executiva da Semana da Matemática
Secretaria OBMEP/UEL
Coordenadora: Profa. Dra. Ana Lucia da Silva
Grupo PET Matemática
Tutora: Profa. Dra. Ângela Marta P. das Dores Savioli

MINI-CURSOS (Mi)

• M_1: *"Latex: Uma Introdução"*
Prof. Ms. Rodrigo Vinícius da Costa (UEL)
Prof. Ms Andrielber da Silva Oliveira (UEL)
Prof. Dr. Ulysses Sodré (UEL)

• M_2: *"Sequências de Fibonacci e Número de Ouro"*
Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo (UNIOESTE)

• M_3: *"Fractais: Quebrando os Limites Euclidianos e Fracionando Dimenções"*
Prof. Dra. Ana Lucia Silva (UEL)
Adriano Junior Gouveia Gonçalves (UEL)
Gustavo Sylvio de Paula Menani (UEL)
Isabela Yabe Martinez (UEL)
João Paulo da Silva (UEL)

MESAS REDONDAS (Mrij)

• MR_{ij}: *"A Avaliação na Formação do Professor de Matemática"*
Profa. Dra. Regina Luzia Cório de Buriasco (UEL/CCE)

• MR_{ij}: *"A Pós-Graduação em Matemática»*
Profa. Dra. Márcia Cristina da C. T. Cyrino (UEL/CCE)
Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva (UEL/CCE)

SESSÃO DE COMUNICAÇÃO ©

As sessões técnicas de comunicação têm como objetivo principal proporcionar aos estudantes a oportunidade de expor seus trabalhos de iniciação científica, bem como relatar suas experiências enquanto graduando.

SESSÕES DE PÔSTERES

A Sessão de Pôsteres é uma oportunidade para professores e alunos exporem seus trabalhos e pesquisas desenvolvidas a todos os participantes do evento. Os pôsteres ficarão expostos durante todo o evento sendo que haverá momentos em que os autores ficarão junto aos seus trabalhos para esclarecer possíveis dúvidas.

COMISSÃO ORGANIZADORA

Profa. Dra. Ana Lucia Silva (Coordenadora)
Profa. Dra. Angela Marta P. das Dores Savioli (UEL)
Prof. Ms. Luciano Rudnik (UNIFIL)
Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves (UEL)
Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho (UEL)
Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini (UEL)
Profa. Dra. Sandra Malta Barbosa (UEL)
Prof. Dr. Tiago Viana Flor de Santana (UEL)

COMISSÃO CIENTÍFICA

Profa. Dra. Luci Harue Fatori (UEL)
Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva (UEL)
Prof. Dr. Paulo Laerte Natti (UEL)
Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini (UEL)
Profa. Dra. Sandra Malta Barbosa (UEL)

REALIZAÇÃO

Universidade Estadual de Londrina — DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PATROCÍNIO

PARANÁ — FUNDAÇÃO ARAUCÁRIA — PARANÁ

APOIO

proex — SBM — PECEM — COPEL — ITAMARATY

CRIANDO OPORTUNIDADES, DISSEMINANDO CONHECIMENTOS

32ª SEMANA DA MATEMÁTICA

UEL

06 a 11 de Novembro de 2017

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS – UEL

Londrina – PR

APRESENTAÇÃO

A 32ª Semana da Matemática – **Criando Oportunidades, Disseminando Conhecimentos** – da Universidade Estadual de Londrina (UEL), é um evento nacional e está integrada as atividades do Biênio da Matemática no Brasil. A Semana atrai de alunos e professores da rede básica de ensino a pesquisadores que atuam em programas de pós-graduação de todas as grandes áreas da matemática. Nesta edição, o evento receberá estudantes do IX Encontro Nacional de Grupos PET Matemática (ENAPETMAT), e estudantes da Olimpíada Brasileira de Matemática no encontro regional do Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC-OBMEP-PR-01). A Semana oferecerá minicursos, palestras plenárias, mesas redondas, eventos culturais, sessões de pôsteres e outras atividades, que serão documentadas em anais. Pretende-se articular o princípio da indissociabilidade das atividades de ensino, pesquisa e extensão no fazer acadêmico, criando um ambiente de disseminação científica, tecnológica e cultural, na qual, pesquisadores, professores, profissionais e estudantes se reúnem para debates, reflexões, análises de suas práticas possibilitando um efeito cíclico entre os saberes de cada um.

INSCRIÇÕES

De 04 de Outubro a 11 de Novembro de 2017.
As inscrições deverão ser feitas pelo site do evento: http://www.uel.br/eventos/semat/

Após a inscrição, será emitido um boleto que deverá ser pago em qualquer agência bancária ou Casa Lotérica.

INFORMAÇÕES

Departamento de Matemática – CCE/UEL
Telefones (0XX43) 3371-4226 ou 3371-4236
E-mail: semat@uel.br

PROGRAMAÇÃO

Horário	Segunda (06/11/17)	Terça (07/11/17)	Quarta (08/11/17)	Quinta (09/11/17)	Sexta (10/11/17)	Sábado(11/11/17)
08:00 - 08:20		X21	X31	P41	Comunicação	OBMEP GETOM
08:20 - 08:50						
08:50 - 09:20	Entrega de material				P51	
09:30 - 10:00	Cadastramento					
10:00 - 10:30	Coffee-break Sessão de pôsteres	Coffee-break Sessão de pôsteres	Coffee-break Sessão de pôsteres	Coffee-break Sessão de pôsteres	Coffee-break Sessão de pôsteres	Coffee-break Sessão de pôsteres
10:30 - 11:00	P11	X22	X32	P42	P52	
11:00 - 12:00						
14:00 - 15:00	—	M1	M1	M3	M3	OBMEP GETOM
15:00 - 16:00						
16:00 - 17:00				—	—	
17:00 - 18:00						
19:00 - 19:30	Abertura oficial	M2	P33	Abertura ENAPET Evento cultural	X53	—
19:30 - 20:45	Evento cultural					
20:45 - 21:15	Conferência de abertura (P12)	Coffee-break Sessão de pôsteres	Coffee-break Sessão de pôsteres	P43	Coffee-break Sessão de pôsteres	
21:15 - 22:30	Coffee-break Sessão de pôsteres	M2	X34	Coffee-break Sessão de pôsteres	X54	

(X_{ij} – com i = 1, ..., 5 e j = 1, ..., 4)
X={P,C,MR}

PALESTRAS (P_{ij})

• P_{11}: *"De onde vem essa tal de álgebra?"*
Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (USP/IME)

• P_{12}: A definir.
Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva (IMPA)

• P_{33}: *"Mágica, Matemática e outros mistérios"*
Prof. Dr. Pedro Luiz A. Malagutti (UFScar/CCET)

• P_{4j}: *"Desafios da Morfologia Matemática para Imagens Coloridas"*
Prof. Dr. Marcos E. R. Valle Mesquita (UNICAMP)

• P_{51}: *"Quebra de simetrias"*
Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli (UEM/CCE)

• P_{52}: *"O Congresso Internacional de Matemáticos e a Medalha Fields"*
Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes (UEM/CCE)

• P_{ij}: *"Modelo Kumaraswamy Log-Logístico na análise de dados de tempo falha"*
Prof. Dr. Tiago Viana Flor de Santana (UEL/CCE)

• P_{ij}: *"Frações continuas e aproximações de números reais por números racionais"*
Prof. Dr. Carlos Gustavo T. A. Moreira - Gugu (IMPA)

• P_{ij}: *"Integrais Definidas: Erros, Mudanças e Acertos"*
Prof. Dr. Bruno Mendonça Rei dos Santos (UEL/CCE)

• P_{ij}: *"Por que a Matemática Empresarial é uma Profissão em Alta?"*
Prof. Dr. Paulo Laerte Natti (UEL)

• P_{ij}: *"Educação Financeira: Matemática e Cidadania"*
Profa. Dra. Regina Célia G. Pasquini (UEL)

PROGRAMAÇÃO

Horário	Segunda (06/11/17)	Terça (07/11/17)	Quarta (08/11/17)	Quinta (09/11/17)	Sexta (10/11/17)	Sábado(11/11/17)
08:15 - 09:00	—	Comunicação	Comunicação	Comunicação	Comunicação	OF_2
09:00 - 10:00	Entrega de Material Cadastramento	P_{21}	P_{31}	P_{41}	P_{51}	OF_3
10:00 - 10:30	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres
10:30 - 12:00	P_{11}	—	P_{32}	P_{42}	P_{52}	OF_4
14:00 - 16:00	OF_1	M_1	M_1	M_3	M_3	M_3
16:00 - 18:00	—			—	Comunicação ENAPETMAT	
19:00 - 19:45	Abertura Oficial Evento Cultural	M_2	Comunicação	Abertura ENAPETMAT Evento Cultural	Comunicação	—
19:45 - 20:45	Conferência de Abertura (P_{12})		P_{33}	MR_{41}	MR_{51}	
20:45 - 21:15	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	*Coffee-break* Sessão de Pôsteres	
21:15 - 22:30	P_{13}	M_2	P_{34}	—	—	

PALESTRAS

P_{11}: ***De Onde Vem Essa Tal de Álgebra?***
Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (USP/IME)

P_{12}: ***Conferência de Abertura: f(x) = x***
Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva (IMPA)

P_{13}: ***Frações Contínuas e Aproximações de Números Reais por Números Racionais***
Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira – Gugu (IMPA)

P_{21}: ***Integrais Definidas: erros, mudanças e acertos***
Prof. Dr. Bruno Mendonça Rei dos Santos (UEL/CCE)

P_{31}: ***Por que a Matemática Empresarial é uma Profissão em Alta?***
Prof. Dr. Paulo Laerte Natti (UEL/CCE)

P_{32}: ***Modelo Kumaraswamy Log-Logístico na Análise de Dados de Tempo Falha***
Prof. Dr. Tiago Viana Flor de Santana (UEL/CCE)

P_{33}: ***Mágica, Matemática e Outros Mistérios***
Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti (UFSCar/CCET)

P_{34}: ***Educação Financeira: matemática e cidadania***
Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini (UEL/CCE)

P_{41}: ***Mágicas com Fundamentação Matemática***
Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti (UFSCar/CCET)

P_{42}: ***Desafios da Morfologia Matemática para Imagens Coloridas***
Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita (UNICAMP/IMECC)

P_{51}: ***Quebra de Simetrias***
Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli (UEM/CCE)

P_{52}: ***O Congresso Internacional de Matemáticos e a Medalha Fields***
Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes (UEM/CCE)

OFICINAS

OF_1: ***Alguns Problemas Olímpicos Bacanas!***
Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira – Gugu (IMPA)

MINICURSOS

M_1: ***Latex: uma introdução***
Prof.Ms. Rodrigo Vinícius da Costa (UEL/CCE)
Prof.Ms. Andrielber da Silva Oliveira (UEL/CCE)
Prof. Dr. Ulysses Sodré (UEL/CCE)

M_2: ***Sequências de Fibonacci e Número de Ouro***
Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo Santos (UNIOESTE/TOLEDO)

M_3: ***Fractais: Quebrando os Limites Euclidianos e Fracionando Dimensões***
Profa. Dra. Ana Lucia da Silva (UEL/CCE)
Adriano Junior Gouveia Gonçalves (UEL/CCE)
Gustavo Sylvio de Paula Menani (UEL/CCE)
Isabela Yabe Martinez (UEL/CCE)
João Paulo da Silva (UEL/CCE)

MESAS REDONDAS

MR_{41}: ***A Pós-Graduação em Matemática***
Profa. Dra. Ana Lúcia da Silva (UEL/CCE)
Profa. Dra. Márcia Cristina da Costa Trindade Cyrino (UEL/CCE)
Prof. Dr. Márcio Antônio Jorge da Silva (UEL/CCE)
Mediador: Luiz Henrique Lemes (UEL/CCE)

MR_{51}: ***A Avaliação na Formação do Professor de Matemática***
Profa. Dra. Regina Luzia Cório de Buriasco (UEL/CCE)

SEGUNDA FEIRA (06/11/2017)

X_{ij}	Atividade / Conferencista	Título	Horário
--	**Entrega de Material Cadastramento**	--	9:00 – 10:00
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres	--	10:00 – 10:30
P_{11}	**Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho** (USP/IME)	*"De onde vem essa tal de álgebra?"*	10:30 – 12:00
	I n t e r v a l o		
OF_1	**Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira – Gugu** (IMPA)	*"Alguns Problemas Olímpicos Bacanas!"*	14:00 – 18:00
	I n t e r v a l o		
--	Abertura Oficial Evento Cultural	--	19:00 – 19:45
P_{12}	**Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva (IMPA)**	*"Conferência de Abertura"*	19:45 – 20:45
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres	--	20:45 – 21:15
P_{13}	**Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira – Gugu** (IMPA)	*"Frações Contínuas e Aproximações de Números Reais por Números Racionais"*	21:15 – 10:30

TERÇA FEIRA (07/11/2017)

X_{ij}	Atividade / Palestrante	Título	Horário
COMUNICAÇÃO	Responsável: **Profª. Dr. Sônia Ferreira Lopes Toffoli**		
	Henrique Gonçalves Menck Tiago Viana Flor Santana	**Estimação por Máxima Verossimilhança do Modelo KumaraswamyLo-Logístico**	8:15 – 8:30
	Cainan Kobo Oliveira Henrique Gonçalves Menck Pedro Yoshiaki Takito Eliandro Rodrigues Cirilo Paulo Laerte Natti	**Estágio em Matemática Empresarial: gestão de estoques**	8:30 – 8:45
	Ana Carolina Bardaçon Pedro Yoshiaki Takito Paulo Antônio Liboni Filho	**Axiomatização em $\mathbb{R}$**	8:45 – 9:00
P_{21}	**Prof. Dr. Bruno Mendonça Rei dos Santos** (UEL)	*"Integrais Definidas: erros, mudanças e acertos."*	9:00 – 10:00
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		10:00 – 10:30
--	--	--	10:30 – 12:00
Intervalo			
M_1	**Prof. Ms. Rodrigo Vinícius da Costa** (UEL) **Prof. Ms. Andrielber da Silva Oliveira** (UEL) **Prof. Dr. Ulysses Sodré**(UEL)	*"Latex: uma introdução."*	14:00 – 16:00 16:00 – 18:00
Intervalo			
M_2	**Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo Santos (UNIOESTE/TOLEDO)** **Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva (IMPA)**	*"Sequências de Fibonacci e Número de Ouro."*	19:00 – 19:45 19:45 – 20:45
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		20:45 – 21:15
M_2	**Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo Santos (UNIOESTE/TOLEDO)** **Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva (IMPA)**	*"Sequências de Fibonacci e Número de Ouro."*	21:15 – 22:30

QUARTA FEIRA (08/11/2017)

X_{ij}	Atividade / Palestrante	Título	Horário
COMUNICAÇÃO	Responsável: **Prof. Dr. José Henrique Rodriguez**		
	Nilton Lucas Luciano Serafim Túlio Oliveira de Carvalho	**Propriedades dos Triângulos Pitagóricos**	8:15 – 8:30
	Bruno Beloni Damas Maria Vitória Lazarin Ulysses Sodré	**Resolvendo Sistemas Lineares pelo Método de Condensação de Lewis Carrol**	8:30 – 8:45
	Eduardo Furihata Ana Márcia F. Tucci de Carvalho	**Diferentes Demonstrações da Existência de Infinitos Primos**	8:45 – 9:00
P_{31}	**Prof. Dr. Paulo Laerte Natti** (UEL)	*“Por que a Matemática Empresarial é uma Profissão em Alta?”*	9:00 – 10:00
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		10:00 – 10:30
P_{32}	**Prof. Dr. Tiago Viana Flor de Santana** (UEL/CCE)	*“Modelo Kumaraswamy Log-Logístico na Análise de Dados de Tempo Falha”*	10:30 – 12:00
Intervalo			
M_1	**Prof.Ms. Rodrigo Vinícius da Costa** (UEL/CCE) **Prof.Ms. Andrielber da Silva Oliveira** (UEL/CCE) **Prof. Dr. Ulysses Sodré**(UEL)	*“Latex: uma introdução.”*	14:00 – 16:00 16:00 – 18:00
Intervalo			
COMUNICAÇÃO	*Responsável:* ***Prof. Dr. Bruno Rodrigo Teixeira***		
	Joice Caroline Sander Pierobon Gomes Karina Alessandra Pessoa da Silva	**Lesssom Study na Formação de Professores**	19:00 – 19:45
	Júlia Rodriguez Oliveira Caio Luiz Escobar dos Santos Rafael Batista Gibellato Regina Luzia Cório de Buriasco	**Tipos de Instrumentos de Aprendizagem Escolar: um Inventário**	
	Natalia Maria da Silva Soares Magna Natalia Marin Pires	**PIDIB: uma experiência na docência com a utilização de jogos no ensino da Matemática**	
P_{33}	**Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti** (UFSCar/CCET)	*“Mágica, Matemática e Outros Mistérios”*	19:45–20:45
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		20:45 – 21:15
P_{34}	**Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini** (UEL)	*“Educação Financeira: matemática e cidadania”*	21:15 – 22:30

QUINTA FEIRA (09/11/2017)

X_{ij}	Atividade / Palestrante	Título	Horário
COMUNICAÇÃO	Responsável: **Prof. Dr. Tiago Viana Flor Santana**		
	Carlos Roberto Takaessu Júnior Eduardo Furihata Luiza Camile Rosa da Silva Ana Marcia F. Tucci de Carvalho	**Algumas Possibilidades para Explorar Tópicos de Álgebra na Educação Básica**	8:15 – 8:30
	Luiza Camile Rosa da Silva Ana Marcia F. Tucci de Carvalho	**Alguns Apontamentos sobre a Quadratura do Círculo**	8:30 – 8:45
	João Luiz Rodrigues Paixão Mara Caroline Torres dos Santos Neyva Maria Lopes Romeiro	**Suporte Matemático para uma Avaliação de Processos que Resultam em Reclamatórias Trabalhistas**	8:45 – 9:00
P_{41}	**Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti** (UFSCar/CCET)	*"Mágicas com Fundamentação Matemática"*	9:00 – 10:00
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		10:00 – 10:30
P_{42}	**Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita** (UNICAMP/IMECC)	*"Desafios da Morfologia Matemática para Imagens Coloridas"*	10:30 – 12:00
	I n t e r v a l o		
M_3	**P. Dra. Ana Lucia da Silva** (UEL) **Adriano J. G. Gonçalves** (UEL) **Gustavo S. de P. Menani** (UEL) **Isabela Yabe Martinez** (UEL) **João Paulo Silva** (UEL)	*"Fractais: Quebrando os Limites Euclidianos e Fracionando Dimensões."*	14:00 – 16:00
--	--	--	16:00 – 18:00
	I n t e r v a l o		
--	Abertura ENAPETMAT Evento Cultural	--	19:00 – 19:45
MR_{41}	**P. Dra. Ana Lúcia da Silva** (UEL) **Prof. Dra. Márcia Cristina da C. Trindade Cyrino** (UEL/CCE) **P. Dr. Márcio A. J. da Silva** (UEL) **Mediador: Luiz H. Lemes** (UEL)	*"A Pós-Graduação em Matemática"*	19:45 – 20:45
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		20:45 – 22:30

SEXTA FEIRA (10/11/2017)

X_{ij}	Atividade / Palestrante	Título	Horário
COMUNICAÇÃO	Responsável: **Prof. Dr. Arthur Henrique Caixeta**		
	Carlos Roberto Takaessu Junior Ana Márcia F. Tucci de Carvalho	**A Trissecção do Ângulo**	8:15 – 8:30
	Laryssa Ribeiro Calcagnoto Mara Caroline Torres Santos Tiago Viana Flor Santana	**Aplicações do Software $\mathbb{R}$ no Campo da Matemática**	8:30 –8:45
	Eduardo H. Cicero Lima Matheus Favareto de Morais Ulysses Sodré	**Determinantes pelo Método de Condensação de Charles Dodgson (Lewis Carroll)**	8:45 – 9:00
P_{51}	**Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli** (UEM/CCE)	*"Quebra de Simetrias"*	9:00 – 10:00
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		10:00 – 10:30
P_{52}	**Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes** (UEM/CCE)	*"O Congresso Internacional de Matemáticos e a Medalha Fields"*	10:30 – 12:00
	I n t e r v a l o		
M_3	**P. Dra. Ana Lucia da Silva** (UEL) **Adriano J. G. Gonçalves** (UEL) **Gustavo S. de P. Menani** (UEL) **Isabela Yabe Martinez** (UEL) **João Paulo Silva** (UEL)	*"Fractais: Quebrando os Limites Euclidianos e Fracionando Dimensões"*	14:00 – 16:00
	Comunicação – ENAPETMAT	--	16:00 – 18:00
	I n t e r v a l o		
COMUNICAÇÃO	*Responsável: **Prof. Dr. Edilaine Regina dos Santos***		
	Rafael Machado da Silva Karina Alessandra Pessoa da Silva	**Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica: um olhar para a literatura**	19:00 – 19:45
	Regina Célia Guapo Pasquini Alisson Henrique dos Santos	**Educação Financeira: contribuições da matemática para a cidadania**	
	Marli Guimarães da Silva	**Tratamento da informação na Educação Infantil: uma experiência**	
MR_{51}	**Prof. Dra. Regina Luzia Cório de Buriasco** (UE)	*"A Avaliação na Formação do Professor de Matemática"*	19:45–20:45
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		20:45 – 22:30

SÁBADO (11/11/2017)

X_{ij}	Atividade / Palestrante	Título	Horário
OF_2	Prof. Dr. Regina C. G. Pasquini (UEL) Prof. Dr. Ana Lucia da Silva (UEL)	Análise das questões da segunda Fase da OBMEP/2017	8:15 – 9:00
OF_3	Prof. Dr. Regina C. G. Pasquini (UEL) Prof. Ms. Alan Machado Piso (SEED/Londrina) Alisson H. dos Santos (PROFMAT-UEL)	"Educação Financeira, Matemática: Orçamento e Planejamento".	9:00 – 10:00
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		10:00 – 10:30
OF_4	Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol UEM	*"Uma oficina de probabilidade"*	10:30 – 12:00
I n t e r v a l o			
M_3	**Prof. Dra. Ana Lucia Da Silva** (UEL) **Adriano Junior Gouveia Gonçalves** (UEL) **Gustavo Sylvio de Paula Menani** (UEL) **Isabela Yabe Martinez** (UEL) **João Paulo Silva** (UEL)	*"Fractais: Brincando e Aprendendo"*	14:00 – 15:30
--	*Coffee-break* - Sessão de Pôsteres		15:30 – 16:00
M_3	*Continuação* - M_3	*Continuação* - M_3	16:00 – 17:30
Encerramento			17:30 – 18:00
T h e E n d…			

CRIAÇÃO DA LOGO

Autores

Pedro H. Takemura Feitosa da Silva (Discente/Matemática/UEL)
Caio Takemura Feitosa da Silva (Público Externo)

SUMÁRIO

RESUMOS

RESUMOS EXPANDIDOS

TRABALHOS COMPLETOS

Aplicações do software R no campo da matemática

Laryssa Ribeiro Calcagnoto[1], **Mara Caroline Torres Santos**[2]
[1,2]Universidade estadual de Londrina, Departamento de matemática, UEL
[1]laryssacalcagnoto@gmail.com, [2]mara_torres14@hotmail.com
Tiago Viana Flor Santana[3]
[3]Universidade Estadual de Londrina, Departamento de estatística, UEL
[3]tiagodesantana@uel.br

Resumo

O R é um ambiente de programação e gráfico, gratuito e de código aberto, desenvolvido inicialmente para resolver problemas estatísticos [2]. O R é mantido por uma comunidade de programadores e pesquisadores voluntários ao redor do mundo que incrementam funcionalidades através de pacotes que podem ser baixador e instalados posteriormente na página do programa (https://cran.r-project.org/mirrors.html). Esses pacotes trazem muitas funcionalidades extras inclusive no campo da matemática. Neste trabalho apresenta-se algumas das funcionalidades do software livre R voltadas para aplicações matemáticas. Desde funções básicas como soma e produto $(+, \cdot)$, funções especiais como as funções trigonométrica, logarítmicas, betas, gamas, passando pelas operações vetoriais e matriciais, calculo de autovalores e autovetores até o cálculo diferencial e integral. Destaca-se ainda a possibilidade de leitura de dados externo e as potencialidades gráficas do software R, que permite a construção e personalização de gráfico em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Por fim, procedimentos de programação será abortados.

Palavras-chaves: Software R, Operações matriciais e vetoriais, Cálculo diferencial e integral

Referências

[1] VENABLES, W. N; SMITH, D. M. *An Introduction to R: Notes on R: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics*, 2016

[2] R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL https://www.R-project.org/. 2017.

[3] GUIDORIZZI, H.: Um Curso de Cálculo (4 volumes). LTC, 2001.

[4] LEITHOLD, L.: O Cálculo com Geometria Analítica (2 volumes). Harbra, 1994.

[5] LIPSCHUTZ, S. Álgebra Linear. 3ª ed. Makron Books, São Paulo, SP, 1973.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA: CONTRIBUIÇÕES DA MATEMÁTICA PARA A CIDADANIA

Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina
rcgpasq@uel.br

Alisson Henrique dos Santos
Universidade Estadual de Londrina
alisson_hs612@hotmail.com

Resumo

Este trabalho apresentará os resultados parciais obtidos no projeto de extensão sob o título "Educação Financeira: Matemática, Economia e Cidadania". Com vistas à educação financeira dos brasileiros em geral, em 2010, o governo federal cria, por meio de um Decreto Federal, a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF). Nesse contexto, o projeto de extensão universitária, desenvolvido na Universidade Estadual de Londrina vem com o objetivo de levar estudos e pesquisas sobre Educação Financeira, realizados pelo grupo que atua no projeto, às comunidades carentes da região de Londrina. O objetivo deste trabalho é mostrar o modo como a Matemática pode contribuir para cumprir com esse propósito, procurando oportunizar aos cidadãos, formação e informação que possam torná-los conscientes sobre o seu próprio consumo e mostrando como a Matemática é uma ciência capaz de contribuir para esse trabalho. O projeto desenvolve uma ação interdisciplinar com o envolvimento de docentes e discentes dos departamentos de Matemática, Ciências Econômicas, Serviço Social e de Educação da UEL, articulando a extensão ao ensino e à pesquisa viabilizando a relação transformadora entre Universidade e a Sociedade. Uma das vertentes procura desenvolver nos consumidores o cuidado devido com suas práticas de consumo, oportunizar a reflexão sobre uma melhor tomada de decisões perante suas compras e a conscientização do cuidado com os produtos ofertados pelas instituições financeiras, um dos grandes colaboradores para o endividamento da população nos dias atuais. O projeto busca contribuir para a melhora desse panorama através de ações como: palestras, cursos de formação, oficinas, teatro e elaboração de material pedagógico para o público alvo que é composto de cidadãos pertencentes às classes sociais mais baixas, ou de regiões que possuem baixo IDH de Londrina, Paraná. É um projeto pertencente ao Programa Universidade Sem Fronteiras da SETI, Secretaria de Ciência e Tecnologia do Estado do Paraná e possui financiamento externo deste órgão.

Referências

OECD (Rússia). Secretary-general of the OECD. **Advancing National Strategies for Financial Education.** 2013. Disponível em: <http://www.oecd.org/finance/financial-education/G20_OECD_NSFinancialEducation.pdf>. Acesso em: 07 jun. 2017.

Estimação por máxima verossimilhança do modelo Kumaraswamy Log-Logístico

Henrique Gonçalves Menck
Universidade Estadual de Londrina, Departamento de matemática, UEL
hmenck@hotmail.com
Tiago Viana Flor Santana
Universidade Estadual de Londrina, Departamento de estatística, UEL
tiagodesantana@uel.br

Resumo

A distribuição Kumaraswamy Log-Logística (KumLL) foi proposta por Santana et al. (2012) como alternativa a distribuição log-logística para ajustar-se a dados positivos com assimetria a direita. Dados positivos assimétricos são muito frequentes em estudos de sobrevivência na área clínica. O modelo KumLL apresenta melhor ajuste comparado ao modelo log-logístico pois, possui dois parâmetros de forma adicionais resultando em maior flexibilidade e na capacidade de ajustar-se a dados que apresentam função de taxa de falha monótonas e não monótonas, característica muito importante em análise de sobrevivência. O modelo proposto possui quatro parâmetros (α, γ, a, b), sendo três parâmetros de forma (γ, a, b) e um parâmetro de escala (α). Em aplicações reais com dados amostrais faz-se necessário a estimação dos parâmetros do modelo admitido. Existem vários métodos de estimação de parâmetros sendo que o método por máxima verossimilhança é o mais comumente empregado. Entretanto, para obtenção das estimativas dos parâmetros por máxima verossimilhança, faz-se necessário o uso de procedimentos iterativos. Nesse trabalho o método de iterativo de Newton Raphson será utilizado para a estimação dos parâmetros do modelo KumLL via máxima verossimilhança. Para tanto, faz-se necessário a construção do vetor escore e da matriz gradiente do modelo. Por fim, uma rotina para estimação dos parâmetros do modelo KumLL, pelo método de Newton Raphson, será implementada no software R.

Palavras-chaves: Modelo Kumaraswamy Log-logística, Newton Raphson, Máxima Verossimilhança.

Referências

HENNINGSEN, A., TOOMET, O. maxLik: A package for maximum likelihood estimation in R. Computational Statistics 26(3), 443-458. 2011,

BOLFARINE, H., SANDOVAL, M. C. Introdução à Inferência Estatística, SBM, 2010.

COLOSIMO, E. A.: Análise de sobrevivência aplicada - São Paulo:Edgard Blücher, 2006

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL https://www.R-project.org/. 2017.

SANTANA, T. V. F., ORTEGA, E. M. N., CORDEIRO , G. M. SILVA, G. O. The kumarasway log-logistic distribution. Statistical Theory and Applications, v. 11, n 3, 265-291, 2012.

Estudo do absenteísmo em uma grande empresa local

Laryssa Ribeiro Calcagnoto[1]
Daniel Santana Silva Junior[2]
Universidade estadual de Londrina[1,2]
laryssacalcagnoto@gmail.com[1]
danielsanjr@hotmail.com[2]
Ulysses Sodré[3]
Universidade estadual de Londrina[3]
ulysses@uel.br[3]

Resumo

O absenteísmo é a prática ou costume de um colaborador se ausentar, qualquer que seja o motivo, de um local de trabalho. Este trabalho está analisando o absenteísmo de uma grande empresa local, para determinar as causas deste fenômeno e possibilitar minimizar as consequências. As ferramentas computacionais utilizadas para construir uma função que envolva todas as variáveis são: Gretl, Software R, Excel, Script R e Excel.

A metodologia para a criação da função que descreve o fenômeno envolvendo 16 variáveis, utiliza o método dos mínimos quadrados não lineares com uma amostra de 91 (noventa e um) funcionários, afim de garantir a precisão de pelo menos 95%. Subjacente esta a utilização do método de Levenberg-Marquard. O ajuste da função aos dados obtidos na empresa esta atualmente na ordem de $99,65\%$. Finalizado a parte de ajuste, cria-se uma nova variável que representa o índice de absenteísmo. Dessa forma revela-se os funcionários que causam prejuízo à empresa. Este trabalho foi realizado como parte das atividades acadêmicas do curso de matemática empresarial e está em sua fase final de execução.

Referências

[1] CALAIS, Sandra Leal; ZANELATO, Luciana Silva; 2011. Manejo de estresse e outros fatores em diferentes populações adultas. Disponível em: <http://books.scielo.org/id/sb6rs/pdf/valle-9788579831195-12.pdf>. Acessado em: 16/06/2016 às 9:25min.

[2] PENATTI, Izidro; QUELHAS, Oswaldo; ZAGO, José Sebastião; 2006. Absenteísmo: As consequências na gestão de pessoas. Disponível em: <http://www.aedb.br/seget/arquivos/artigos06/898_Seget_Izidro%20Penatti.pdf>. Acessado em: 16/06/2016 às 9:00min.

[3] Calculadora amostral. Disponível em: <http://comentto.com/blog/calculadora-amostral/>. Acessado em: 15/03/2017 às 14:00min.

JOGO PARA ENSINAR EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Higor Henrique Paulo Theodoro
Universidade Estadual de Londrina
higorr.paulo@gmail.com

Israel Emanuá de Matos
Universidade Estadual de Londrina
3m.manuamat@gmail.com

Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina

Resumo

Passamos por um período de grandes mudanças no cenário econômico do nosso país, parte da população está em situação de desemprego, causando grandes mudanças na vida financeira dos brasileiros, impactando na estrutura familiar, que se rearranja de novas formas a fim de adaptar-se ao novo cotidiano que surge. Dadas às circunstâncias, para o desenvolvimento das ações do projeto Educação Financeira: Matemática, Economia e Cidadania, desenvolvido pela Universidade Estadual de Londrina, elaboramos um jogo para a realização de oficinas para estudantes de oitavo ao nono ano do Ensino Fundamental da Educação Básica. As oficinas estão sendo desenvolvidas de forma lúdica, trabalhando noções de educação financeira. O foco do jogo é desenvolver o pensamento do estudante para realizar orçamentos e planejar-se em longo prazo. Visto que a educação financeira é um tema abordado em vários países, no Brasil a ENEF (Estratégia Nacional de Educação Financeira) buscou entender e adaptar para o contexto nacional o conceito definido pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico). Com base nisto o projeto tem como objetivo geral promover ações de formação e conscientização sobre educação financeira às comunidades pertencentes às regiões de baixo IDH. E como objetivo específico, contribuir com a oferta de matérias que subsidiem o tratamento do tema educação financeira para a Educação Básica. A escolha de adotar jogos para o ensino é reforçada por Friedmann (1996) ao afirmar que "[...] é necessário dar atenção especial ao jogo, pois as crianças têm o prazer de realizar tarefas através da ludicidade". O conteúdo abordado no jogo é matemática básica, juros simples, porcentagem e operações com números inteiros e valores monetários. Com este trabalho, pretendemos fomentar a abordagem da Educação Financeira na Educação Básica.

Referências

MONTAGNA, Adelma Pistun. **Expressões de gênero no desenho infantil.** 2001. 120 fls. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2001.

FRIEDMANN, Adriana. **Brincar: crescer e aprender:** o resgate do jogo infantil. São Paulo: Moderna, 1996.

Modelagem de Cartas de Manutenção: Preventiva e Corretiva

Livia Caroliny Abreu Silva
Universidade Estadual de Londrina
caroliny.livia@gmail.com
Andrielber Oliveira
Universidade Estadual de Londrina
andrielber@gmail.com

Resumo

O objetivo deste trabalho é aprimorar as cartas de manutenção de uma empresa de transporte. A partir desses dados pretende-se identificar os principais defeitos que levam o veículo à oficina. Inicialmente, analisamos os dados fornecidos por uma empresa com o intuito de encontrarmos variáveis que não estavam presentes na carta de manutenção atual, mas que são de extrema importância para o nosso futuro banco de dados. Após observarmos os dados, decidimos separa-los em tabelas de serviços, execução diária e controle de veículo, afim de selecionar as variáveis que diferenciam os veículos, os percursos e os defeitos recorrentes. Com a montagem das tabelas, conseguimos observar que os dados oferecidos inicalmente pela empresa não seriam suficientes, pois o histórico dos veículos estava incompleto e as informações dadas não eram suficientes para estabelecermos um banco de dados útil. Na sequência, entraremos em contato com a empresa para solicitar o histórico de todos os veículos mais antigos da frota de cada modelo disponível, assim reagruparemos novamente as informações para conseguirmos traçar inicialmente um histórico de cada modelo, e descobrirmos as peculiaridades de cada um. Além disso, vamos solicitar o preenchimento diário de algumas tabelas para termos um controle interno de quais são as variáveis que atuam diretamente no percurso, e que afetam o veículo.

Referências

PMI - Project Management Institute. PMBOK Guide - um guia para o cojunto de conhecimentos em Gerenciamento de Projetos; versão oficial em português. 4 ed. Philadelphia: PMI, 2008.

Vargas, R. Manual prático do plano de projeto: utilizando o PMBOK guide: aprenda a construir um plano de projeto passo a passo através de exemplos. 4 ed. Rio de Janeiro: Brasport, 2009.

Resolvendo Sistemas Lineares pelo Método de Condensação de Lewis Carroll

Bruno Beloni Damas
Universidade Estadual de Londrina
bruno@grupobeloni.com.br

Maria Vitória Lazarin
Universidade Estadual de Londrina
Isol4tedsystem1@gmail.com

Ulysses Sodré
Universidade Estadual de Londrina
ulysses@uel.br

Resumo

Este trabalho visa apresentar um método de resolução de sistemas lineares com várias variáveis pelo método de condensação de Charles Dodgson (Lewis Carroll) em conjunto com a Regra de Cramer, de uma forma não convencional e mais simples. Este mesmo método foi criado há aproximadamente 150 anos, mas só começou a ser utilizado pela comunidade matemática por volta de 10 anos atrás.

Este trabalho é dirigido a alunos e professores de ensino médio e de cursos de graduação da área de ciências exatas.

Referências

[1] A modern condensation method to compute the determinant of nxn matrices, Adroan Rice and Eve Torrence

[2] Ali A. M. Ahmed S. R. T. M University K. L. Bondar Sep 2, 2016 doi.org Solving Large Linear Systems

[3] Okoh Ufuoma

[4] Lewis Carroll (Charles Dodgson). Lewis Carroll's Condensation Method for Evaluating Determinants

[5] Randolph-Macon College. www.maa.org/mathhorizons pág. 13-15, nov 2006

Suporte matemático para uma avaliação de processos que resultam em reclamatórias trabalhistas

João Luís Rodrigues Paixão
Mara Caroline Torres Santos
Universidade Estadual de Londrina
joao_rodriguespaixao@hotmail.com
mara_torres14@hotmail.com
Neyva Maria Lopes Romeiro
Universidade Estadual de Londrina
nromeiro@uel.com

Resumo

Em um primeiro momento foi realizado uma listagem, junto à uma empresa de transporte público paranaense, sobre alguns temas problemáticos nos quais poderiam ser avaliados utiliando a modelagem matemática e consequentemente, melhores interpretados podendo assim surgir soluções que solucionasse ou que pelo menos mininizassem tais problemas. Assim, o tema, reclamatórias trabalhistas, foi escolhido para o estágio obrigatório. Definido o tema, surgiram várias questões, entre elas como utilizar a matemática em um tema envolvendo processos judiciais.
Em contato com a advogada da empresa, que forneceu arquivos repletos de informações, com dados de funcionários ativos e desligados sem justa causa, que entraram com processos contra a empresa, o estágio foi limitado a apenas os processos envolvendo motoristas e cobradores. Desta forma a modelagem matemática foi utilizada para transformar arquivos de dados em planilhas, gerando tabelas e gráficos,de tal forma a mapear as possíveis questões que levaram os funcionários (motoristas e cobradores) a entrar com processos contra a empresa. Para interpretar a modelagem utilizada, depois de aferido as principais reclamações que motivam o funcionário a processar a empresa, onde analisou-se processos de alguns funcionários.Desta forma, verificou-se que a principal causa das reclamações encontram-se relacionadas com as escalas. Assim, foram construídos gráficos que apresentem a escala de alguns funcionários (é importante ressaltar que os nomes utilizados são puramente fictícios), sendo, então, possível averiguar se as reclamações estão de acordo com a escala construída pela empresa. Essa análise de dados se faz necessária, pois a empresa requer resultados embasados em estudos, para que possa tomar medidas que visem minimizar o problema, refletindo, assim, no bem estar do funcionário e, também, na receita da mesma.

Referências

PMBOK_2008 PMI - Project Management Institute. PMBOK Guide - um guia para o cojunto de conhecimentos em Gerenciamento de Projetos; versão oficial em português. 4 ed. Philadelphia: PMI, 2008.

Vargas_2009 Vargas, R. Manual prático do plano de projeto: utilizando o PMBOK guide: aprenda a construir um plano de projeto passo a passo através de exemplos. 4 ed. Rio de Janeiro: Brasport, 2009.

Consultor Consultor Jurídico Empresas Reservam R$ 25 bi para ações trabalhistas. Disponível em: ¡http://www.conjur.com. jul-10/maiores-empresas-brasil-reservam-25-bilhoes-acoes-trabalhistas¿ Acesso em: 02/03/2017 ás 18:12.

Uma abordagem lúdica na educação matemática

Beatriz Estulano Vieira
Universidade Estadual de Londrina
b.est.vieira@gmail.com

Diego Jovino Luduvério
Universidade Estadual de Londrina
d.luduverio@gmail.com

Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina
rcgpasq@uel.br

Resumo

O projeto de extensão: Educação Financeira: Matemática, Economia e Cidadania o qual é desenvolvido na Universidade Estadual de Londrina contempla conhecimentos de matemática, economia e para o exercício da cidadania, uma vez que o objetivo deste é promover ações de formação e conscientização sobre educação financeira às comunidades pertencentes às regiões de baixo IDH e a contribuição com a oferta de materiais que subsidiem o tratamento do tema educação financeira para a Educação Básica. Neste trabalho apresentamos uma das ações do projeto, um jogo de tabuleiro, que traz de forma lúdica os conhecimentos de matemática, como proporção, regra de três simples, soma e subtração, para a educação financeira. A escolha do jogo como método de aprendizagem, foi com base no artigo de Marcos Aurélio Cabral: A Utilização de Jogos no Ensino da Matemática (2006, p. 19), onde refere-se as atividades lúdicas como uma estratégia que estimula o raciocínio levando o aluno a enfrentar situações conflitantes relacionadas com seu cotidiano, assim, esta forma de ensino traz um método descontraído capaz de chamar a atenção das crianças e adolescentes para as temáticas da matemática, o que facilita seu aprendizado. O jogo foi elaborado para a realização de oficinas com estudantes de sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental da Educação Básica. Esperamos com este trabalho divulgar nossas ações e fomentar a educação financeira como pratica neste nível de ensino.

Referências

CABRAL, Marcos Aurélio. **A Utilização de Jogos no Ensino da Matemática.** 2006. 52 fls. Trabalho de conclusão de curso – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

AS TAREFAS E OS PROBLEMAS NA OBRA "THREE DIMENSONS" DE ADRIAN TREFFERS

SARES, Natalia M. da S.; PIRES, Magna N. M.

RESUMO

Este trabalho relata uma Iniciação Científica realizada pela primeira autora, orientada pela segunda. Faz parte do projeto "A Utilização da Prova em Fases como Recurso à Aprendizagem na Formação Inicial de Professores de Matemática" e tem a intenção de investigar e inventariar como o autor Adrian Treffers, na abordagem EMR (Educação Matemática Realística), em sua obra Three Dimensions, refere-se às tarefas e aos problemas matemáticos. O projeto encontra-se em fase de execução e será apresentada parte do inventário que está sendo elaborado.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática Realística. Tarefas Matemática. Problemas.

INTRODUÇÃO

A intenção da Iniciação Científica apresentada é conhecer como o autor caracteriza boas tarefas para utilizar essa caracterização como parâmetro na elaboração dos instrumentos de avaliação.
Além disso pretende-se:
- identificar partes do texto da obra Three Dimensions que tratam de "task" e de "problem";
- construir um quadro indicando as páginas, o texto em inglês e a tradução do trecho coletado;
- construir um esquema ou um texto caracterizando as boas tarefas e os bons problemas de acordo com o autor estudado.

O inventário das partes do texto da obra de Adrian Treffers "Three Dimensons" está sendo elaborado em três fases.
A primeira fase consiste em localizar e copiar dos trechos com os termos "task" e "problem" na obra em tela.
Na segunda fase os trechos selecionados foram traduzidos.
A terceira fase consistirá na elaboração de uma análise para caracterizar, de acordo com o autor, as tarefas e os problemas matemáticos.
Até o momento o trabalho se encontra no início da terceira fase, em que a primeira autora já consegue destacar trechos, a respeito das tarefas e problemas matemáticos, segundo a obra em estudo. Destes, alguns são apresentados na sequência.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir são apresentados alguns trechos coletados no estudo.

O contexto dentro do qual os problemas matemáticos são colocados é de extrema importância nesta concepção da educação matemática: não é uma cobertura, nem um embrulho; mas pertence à essência da afirmação do problema matemático." (TREFFERS, 1987, p.61)

“Isso não significa que ‘um’ problema seja necessariamente ‘meu’ problema. Pode acontecer que quase não atraia ‘eu’. Por outro lado, também é possível que um problema seja convidativo e que a solução contenha um forte elemento ‘Eureka’, o que levará a uma experiência pessoal importante.” (TREFFERS, 1987, p.61)

“A análise de situações problemáticas permite indicar várias dessas possibilidades e restrições. Existem problemas para os quais a restrição reside na variedade limitada de possíveis métodos de solução.” (TREFFERS, 1987, p.61)

“É um fato que, em tais casos, há realmente apenas um caminho ao longo do qual a solução pode ser encontrada, e então está tão escondida, que encontrá-la parece coincidência. Subjetivamente falando, tais problemas, que têm um alto grau de ‘caráter Eureka’ e um baixo grau de diferenciação, podem ser atraentes. No entanto, para uso educacional geral, eles são menos adequados. Por essa razão - e com razão - eles geralmente são oferecidos como problemas de ‘enriquecimento’.” (TREFFERS, 1987, p.61)

“Isso significa que os mesmos problemas básicos devem ser considerados e resolvidos em níveis gradualmente mais altos, não esperando o momento em que podem ser resolvidos no nível mais alto possível.” (TREFFERS, 1987, p.97)

“[...] os seguintes pontos de partida podem explicar a escolha de certas atividades: envolvimento do aluno, atualidade do tema, possibilidades de trabalhar em diferentes níveis sobre o mesmo problema, acordo com os próprios objetivos dos alunos.” (TREFFERS, 1987, p.133)

“Os objetivos com um forte elemento criativo e produtivo podem permitir usar uma determinação de critério ‘flutuante’, o que indica que, até o final da instrução dada, o aluno deve encontrar uma solução ‘satisfatória’ para uma determinada tarefa ou situação problemática.” (TREFFERS, 1987, p.150)

“[...] ao procurar um problema inicial adequado, algo emerge no final que revela-se totalmente diferente das suas intenções originais. O espaço deve ser deixado para o desenvolvimento para que não haja restrições ou bloqueios causados por uma concretização prematura de metas.” (TREFFERS, 1987, p.171)

“Se uma descrição de objetivo holístico para uma certa instrução estiver disponível, pode-se, usando as próprias experiências na resolução de problemas matemáticos, chegar a uma análise construtiva do material.” (TREFFERS, 1987, p.192)

CONCLUSÃO

Os trechos apresentados fazem parte do inventário que está sendo elaborado pela primeira autora e caracterizam as tarefas e problemas matemáticos segundo o autor estudado.
Com o levantamento completo tentaremos caracterizar “boas” tarefas de uma forma didática e que possa ser mais um ponto de apoio para os professores da Educação Básica, trazendo exemplos que possam ilustrar essas caracterizações.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Depto de Matemática da UEL e a Pró-reitoria de Pesquisa e Pós Graduação (PROPPG) da UEL.

REFERÊNCIAS

TREFFERS, Adri; GOFFREE, Fred. Rational analysis of realistic mathematics education. In: STREEFLAND, L. (ed.). **Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht, The Netherlands: OW&OC. v. 2, p. 97-123, 1985.

Completude do Espaço l^p

Pedro Henrique Takemura

pedrohtak@hotmail.com

Paulo Liboni

liboni@uel.br

20 de Janeiro de 2018

Resumo

Tracidionalmente, Análise Funcional é o ramo da matemática que estuda espaços vetoriais de dimensão infinita munidos de alguma estrutura topológica adequada. Mais geralmente, a estrutura é induzida por um produto interno ou uma norma atuando neste espaço vetorial.

Neste trabalho, introduziremos conceitos capazes de nos levar a uma ideia generalizada do que é um espaço normado completo, os chamados Espaços de Banach. Além disso, teremos a ideia de convergência de sequências em espaços de Banach. Apresentaremos ainda alguns resultados e ferramentas que nos permitem demonstrar o resultado principal deste trabalho: a completude do espaço ℓ^p.

Palavras-Chave

Análise euncional, espaços normados, espaços de Banach, completude.

Fundamentação Teórica

Aqui, vamos introduzir o conceito de espaços normado, espaços de Banach e de convergência de sequências nesses espaços. Aqui consideramos que já se sabe conceitos e propriedades de espaços vetoriais e espaços métricos. Além disso, vamos considerar espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 0.1. Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma **norma** em X é uma função $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada vetor $x \in X$, associa-se a ele sua norma $\|x\|$. Além disso, para quaisquer vetores $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, a $\|\cdot\|$ deve satisfazer as seguintes propriedades:

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Desigualdade Triangular*)

Neste caso, dizemos que X é um espaço normado, e denotamos por $(X, \|\cdot\|)$.

Definição 0.2. Seja (x_n) uma sequência em um espaço normado X. Dizemos que (x_n) **convergente** se existir $x \in X$, tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > N.$$

Chamamos x de **limite da sequência** (x_n) e escrevemos $lim(x_n) = x$, ou $x_n \longrightarrow x$.

Definição 0.3. Uma sequência (x_n) em um espaço normado X é dita **sequência de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } m, n > N.$$

É fácil provar que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy. Porém, nem toda sequência de Cauchy é convergente. Ou seja, dependendo do espaço onde estamos trabalhando, uma sequência ser de Cauchy neste espaço, não garante sua convergência.

Definição 0.4. Uma espaço normado X é **completo** se toda sequência de Cauchy converge a algum ponto deste espaço. Neste caso, X é chamado de **espaço de Banach**.

Definição 0.5. (Espaço l^p) O espaço l^p, com $1 \leq p < \infty$, é o espaço de todas as sequências reais (ou complexas) (x_n) tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty.$$

Teorema 0.6. *O espaço l^p, com é um espaço normado, e sua norma é dada por*

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p},$$

onde $x = (x_n)$ é um ponto qualquer de l^p

Demonstração: Mostremos que $\|\cdot\|$ é de fato uma norma. Claramente (N1) e (N2) são satisfeitas. Agora, sejam $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ em l^p e α um escalar.

(N3)

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j|^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_j|^p \right)^{1/p} \\
&= \left(|\alpha|^p \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \\
&= |\alpha| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \|x\|
\end{aligned}$$

(N4) A desigualdade triangular em l^p é a Desigualdade de Minkowski

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \iff \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p \right)^{1/p}.$$

Logo, l^p é de fato um espaço normado.

c.q.d.

Lema 0.1. *$\mathbb{R}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: A norma em $\mathbb{R}$ é o módulo. Da Análise Real, já é sabido que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente. Então é claro que $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach.

c.q.d.

Conclusões

Teorema 0.7. *O espaço l^p é um espaço de Banach.*

Demonstração: Já vimos que l^p é um espaço vetorial normado. Resta provar sua completude. Assim para provar que l^p é completo, devemos mostrar que qualquer sequência de Cauchy em l^p é convergente. Assim, tome $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em l^p, ou seja, para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in l^p$. Esreva

$$x_m = (\xi_j^{(m)})_{j\in\mathbb{N}} = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}, \ldots).$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\|x_m - x_n\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon, \text{ para todo } m, n > N \tag{0.1}$$

Para cada j fixado, observe que para todo $m, n > N$,

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon^p \;\Rightarrow\; |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon$$

Logo, observe que para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, a sequência $(\xi_j^{(n)})_n = (\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Como $\mathbb{R}$ é completo, $(\xi_j^n)_n$ converge a algum ponto de $\mathbb{R}$. Digamos $\xi_j^{(n)} \longrightarrow \xi_j$, quando $n \longrightarrow \infty$. Defina a sequência $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$. Vamos provar que $x_m \longrightarrow x$, quando $m \longrightarrow \infty$, e que $x \in l^p$, concluindo assim a demonstração.

$$\begin{array}{rcl}
x_1 &=& (\ \xi_1^{(1)},\ \xi_2^{(1)},\ \xi_3^{(1)},\ \xi_4^{(1)},\ \ldots\ ) \\
x_2 &=& (\ \xi_1^{(2)},\ \xi_2^{(2)},\ \xi_3^{(2)},\ \xi_4^{(2)},\ \ldots\ ) \\
x_3 &=& (\ \xi_1^{(3)},\ \xi_2^{(3)},\ \xi_3^{(3)},\ \xi_4^{(3)},\ \ldots\ ) \\
x_4 &=& (\ \xi_1^{(4)},\ \xi_2^{(4)},\ \xi_3^{(4)},\ \xi_4^{(4)},\ \ldots\ ) \\
\vdots && \\
x_m &=& (\ \xi_1^{(m)},\ \xi_2^{(m)},\ \xi_3^{(m)},\ \xi_4^{(m)},\ \ldots\ ) \\
\downarrow && \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \\
x &=& (\ \xi_1,\ \ \xi_2,\ \ \xi_3,\ \ \xi_4,\ \ldots\ )
\end{array}$$

Primeiro observe que como 0.1 é válida, então para todo $k \in \mathbb{N}$, vale que

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon^p, \text{ para todo } m, n > N$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos que

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p < \varepsilon^p, \quad \text{para todo } m > N,$$

que é válida para todo k. Logo, fazendo $k \longrightarrow \infty$, obtemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p < \varepsilon^p, \quad \text{para todo } m > N. \tag{0.2}$$

Isto mostra que a sequência $x_m - x = (\xi_j^{(m)} - \xi_j)_j \in l^p$. Além disso, $x \in l^p$. De fato, pela Desigualdade de Mionkowski, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} + (\xi_j - \xi_j^{(m)})|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|(\xi_j - \xi_j^{(m)})\right|^p\right)^{1/p} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

É claro que $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$. Logo $x = (\xi_j) \in l^p$. Agora, basta notar que de 0.2, temos que

$$\|x_m - x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p < \varepsilon^p, \quad \text{para todo } m > N.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $x_m \longrightarrow x$. Portanto, l^p é completo.

c.q.d.

Agradecimento

Agradeço ao PET Matemática - UEL pela experiência que vem me proporcionando durante a graduação, e ao meu orientador Paulo Liboni por me orientar no meu segundo e terceiro ano de graduação.

Referências

1. KREYSZIG, E. O. *Introductionary Functional Analysis with Applications*, Winley India Pvt. Limited, 2007

Formação Continuada de Professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais: a importância do Sistema de Numeração Decimal

PIRES, Magna N. M.; PIRES, Maria C. M.; SILVA, Karina. A. P.

RESUMO

Este trabalho é referente ao Projeto de Extensão desenvolvido pela UEL em parceria com a UTFPR – Campus Londrina. Os participantes do projeto são professores das Universidades envolvidas, alunos da Graduação das duas IES, uma aluna do Mestrado da UTFPR e professoras da rede pública Municipal de Londrina e de Cambé. A intenção é de implementar Estudos de Aula (PONTE et al, 2016) na formação de professores dos Anos Iniciais em Matemática. Os encontros foram iniciados em abril de 2017 e a proposta é que todas as fases do projeto sejam desenvolvidas no prazo de três anos. Nos primeiros encontros as reuniões foram para integrar, sondar os conhecimentos e interesses dos participantes. Ficou decidido que o primeiro conteúdo a ser estudado pelo grupo seria o SND já que o interesse das professoras era entender por que os alunos dos anos iniciais têm dificuldades com os algoritmos convencionais das quatro operações fundamentais. Esse relato pretende apresentar justificativas, discutidas nas reuniões, que convenceram as professoras dos anos iniciais que a compreensão do SND é fator determinante para a realização das operações fundamentais por meio dos algoritmos convencionais.

.
PALAVRAS-CHAVE: Estudos de Aula. Formação de Professores. Anos Iniciais. Sistema de Numeração Decimal.

INTRODUÇÃO

O objetivo principal do projeto é possibilitar uma formação continuada em matemática de professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir da reflexão dos seus conhecimentos na área e da sua prática em sala de aula. Além disso, os encontros com os participantes pretendem: desenvolver o conhecimento Matemático dos professores dos anos iniciais e dos alunos em formação inicial; apresentar justificativas de que a compreensão do SND é fator determinante para a realização das operações fundamentais por meio dos algoritmos convencionais e aprimorar o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais.

Este estudo seguiu as seguintes fases:

1) Conversa com das professoras dos anos iniciais a respeito das dificuldades de seus alunos na aprendizagem de conteúdos matemáticos.
2) Definição do conteúdo a ser estudado: Sistema de Numeração Decimal (SND).
3) Apresentação de atividades utilizadas com as crianças para abordar o conteúdo SND.
4) Estudo de Textos que abordam o assunto o ensino de SND.
5) Oficina utilizando Ábaco, Palitos e Material Dourado.
6) Elaboração de Tarefas que serão desenvolvidas com os alunos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Pesquisas que discutem o desenvolvimento do Sistema de Numeração Decimal com os alunos dos anos iniciais têm sido recorrentes na literatura (VECE; SILVA; CURI, 2013; CURI, 2013, SOARES; PINTO, 2014, SOUZA et al., 2015). Essas pesquisas mostram que é necessário promover reflexões para que professores dos anos iniciais amadureçam suas ideias em relação

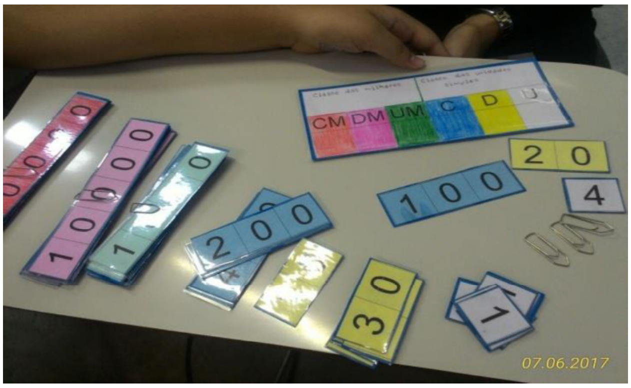
ao SND, possibilitando a exploração satisfatória desse importante conteúdo pelos alunos pequenos.
O Sistema de Numeração que utilizamos é chamado decimal ou indo-arábico. Decimal porque é organizado na base 10, ou seja, a escolha é agrupar de 10 em 10. Indo-arábico porque, de acordo com Ifrah (2001), Boyer (1996) e Eves (2004), foi criado pelos hindus e disseminado pelos árabes. Para Dienes,

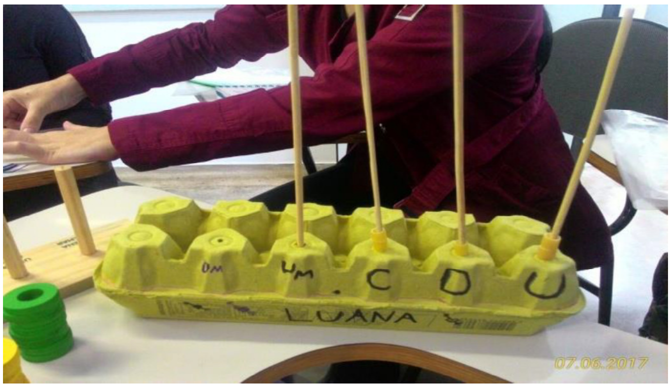
> O fato biológico que temos dez dedos tornou quase inevitável que contemos em dezenas. E é mesmo um fato neurológico que a parte do nosso cérebro que controla o movimento dos dedos é muito perto da parte que usamos para a matemática, em particular para a contagem. Um professor dizer a uma criança para não contar nos dedos é na verdade dizer: 'Não faça matemática'. (DIENES, 1970, apud SOARES e PINTO, 2014, 80)

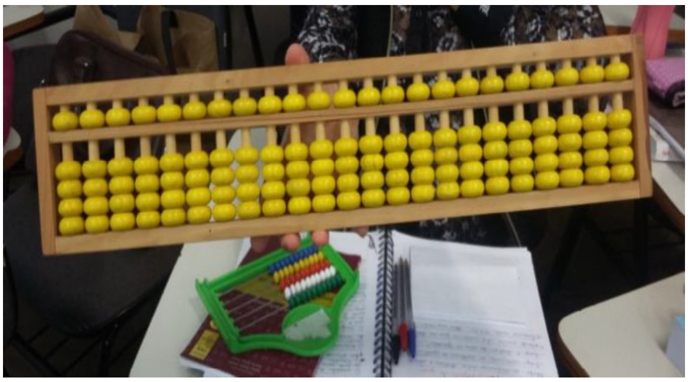
O princípio fundamental do SND é ser posicional. Esse fator induziu os algoritmos das operações fundamentais utilizados nos dias atuais.
Podemos citar, como exemplo, os procedimentos da adição: para somar juntamos unidades com unidades, se passar de dez, fazemos grupos de dez (dezenas) e reservamos, o que não entra nas dezenas são os que sobra e já consideramos a quantidade que será expressa o algarismo das unidades; em seguida, pelo algoritmo convencional, juntamos as dezenas, caso dê mais que dez, fazemos um grupo de grupo de dez (centena); o que não entra nas centenas são os que sobra e já consideramos a quantidade que será expressa o algarismo das dezenas.

A ABORDAGEM DO SND NO PROJETO

Para abordar o SND utilizamos tarefas e materiais que as professoras participantes disseram utilizar na prática educativa. As fotos mostram atividades realizadas durante os encontros.







Neste processo foi possível conhecer, por relato e pela participação, como as professoras abordam o conteúdo de SND com seus alunos. Após algumas sugestões fizemos oficinas com os vários materiais didáticos estruturados na base 10. Nos encontros posteriores as participantes já relatavam algumas implementações e foi possível discutir dificuldades e reações apresentadas pelos alunos.

Foi possível fazer diversas associações das atividades com os materiais e os algoritmos convencionais das operações fundamentais.
Exemplos:

1) as reservas e trocas realizadas nas adições e multiplicações;
2) a conveniência de substituir o termo "emprestar " pelo termo "trocar" na realização das subtrações.

CONCLUSÃO

O projeto "*Estudos de Aula na Formação de Professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais*" tem permitido uma boa integração entre os participantes. Com ele está sendo possível trazer a comunidade até as Universidades, inserir dos docentes da IES na Educação Básica e propiciar o contato dos acadêmicos com a realidade de seus futuros locais de trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Depto de Matemática da UEL, à UFPT, campus Londrina e a Pró-reitoria de Extensão da UEL.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CURI, E. Práticas e reflexões de professoras numa pesquisa longitudinal. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos** (online), Brasília, v. 94, n. 237, p. 474-500, maio/ago. 2013.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 1 ed. São Paulo: Atual, 2004.

IFRAH, G. **Os números história de uma grande invenção**. 10 ed. São Paulo: GLOBO, 2001.

PONTE, J. P., QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. and BAPTISTA, M. O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. **Bolema** [online]. 2016, vol.30, n.56, pp.868-891. ISSN 0103-636X. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01.

SOARES, E.T.P. e PINTO, N.B., Zoltan Dienes e o Sistema de Numeração Decimal (1960-1989). **Caminhos da Educação Matemática em Revista** – v. 1, n. 1, 2014.

SOUZA, J. K. C.; ARAÚJO, M. J. L.; FRADE, M. C.; SALES, E. R. O sistema de numeração decimal e os materiais manipulativos: uma experiência em um curso de formação continuada. In: XII Congresso Nacional de Educação, 2015, Curitiba. **Anais**...v. 1. p. 1-12.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana and BAPTISTA, Mónica. **O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática.** *Bolema* [online]. 2016, vol.30, n.56, pp.868-891. ISSN 0103-636X. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01.

VECE, Janaina Pinheiro; SILVA, Simone Dias; CURI, Edda. Desatando os nós do sistema de numeração decimal: investigações sobre o processo de aprendizagem dos alunos do 5º ano do ensino fundamental a partir de questões do SAEB/Prova Brasil.**Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 15, n.

1, maio 2013. ISSN 1983-3156. Disponível em:
<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/8724/11193>. Acesso em: 17 out. 2017.

Introdução a Sequências e Séries de Funções

Guilherme Rocha Ortega
Universidade Estadual de Londrina
guilhermerochaortega@gmail.com
Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina
michelealves@uel.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo demonstrar o seguinte teorema

Teorema 0.1. *Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ as funções integráveis $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e também a função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, então*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Introdução

Durante o decorrer do curso de Matemática, é comum em cálculo escrever uma função em formato de série de potências e integrar os termos associados a mesma. Entretanto, tal operação só é valida se forem satisfeitas algumas propriedades de sequências de funções e de integração de números reais. Porém, tais propriedades não são previstas nas ementas das disciplinas do curso de Matemática na UEL. Por tal motivo, o estudo aprofundado deste tema foi proposto em uma iniciação científica. Este trabalho tem como objetivo principal enunciar e demonstrar o teorema que relaciona a convergência uniforme de sequências de funções com integração termo a termo, bem como enunciar o resultado análogo para séries de funções reais.

Desenvolvimento

Os conceitos que serão estudados estão relacionados a integração, conjuntos de medida nula, além de sequências, séries de funções e o estudo da convergência das mesmas.

Definição 0.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n definida em X e tomando valores reais. Neste caso, utilizaremos a notação $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para sequência de funções.*

Como definimos uma sequência de funções, é quase que intuitivo pensar no estudo de convergência das mesmas. Assim, definiremos agora, convergência simples (pontual) e convergência uniforme.

Definição 0.2. *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas em X e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Diremos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge*

i) simplesmente para f se

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

ii) uniformemente para f se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

Teorema 0.2. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções arbitrária que converge uniformemente para $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se f_n for contínua em $a \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f será contínua em $a \in X$.*

Demonstração. Vide página 374 em [1]. □

A fim de concluir o que desejamos, é preciso antes definir conjuntos de medida nula e enunciar um resultado que relaciona estes conjuntos de medida nula com integração. Destarte, definamos um conjunto de medida nula.

Definição 0.3. *Seja X um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}$. Diremos que X tem medida nula se para qualquer $\varepsilon > 0$ for possível encontrar uma coleção enumerável de intervalos abertos I_n tais que*

$$X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon,$$

com $|I_n| = sup(I_n) - inf(I_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, denotaremos $m(X) = 0$.

Proposição 0.1. *Sejam $X, Y, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Então,*

i) Se $Y \subset X$ e $m(X) = 0$, então $m(Y) = 0$.

ii) Se $Y = X_1 \cup \cdots \cup X_n \cup \cdots$ e $m(X_1) = m(X_2) \cdots = m(X_n) = \cdots = 0$, então $m(Y) = 0$.

Demonstração. Ver página 343 em [1]. □

Teorema 0.3. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Então, f integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade D de f tem medida nula.*

Demonstração. Ver Teorema 20 na página 344 em [1]. □

Conclusão

Visto todos esses resultados, podemos agora demonstrar o teorema proposto neste trabalho.

Teorema 0.4. *Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ as funções integráveis $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e também a função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Demonstração. Devemos primeiramente, mostrar que f é integrável, ou seja, pelo Teorema 0.3, mostrar que o conjunto dos pontos de descontinuidade D de f possui medida nula. Para tal, note que por hipótese temos que o conjunto dos pontos de descontinuidade D_n dos termos da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui medida nula. Assim, se tomarmos um $c \in D$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c \in D_n$, pois se isso não ocorresse, teríamos que

$$c \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n,$$

ou seja, f_n seria contínua para qualquer $n \in \mathbb{N}$ em $c \in [a, b]$, logo, do Teorema 0.2 teríamos que f é contínua em $c \in [a, b]$ o que é um absurdo. Logo,

$$D \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n,$$

assim pela Proposição 0.1 teremos que $m(D) = 0$, isto é, f é integrável em $[a, b]$.

Note agora que como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, então dado um $\varepsilon > 0$ é possível encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$ segue que

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Assim obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx\right| \\
&\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\
&< \frac{\varepsilon}{(b-a)} \int_a^b 1\,dx \\
&= \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. Ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

□

Vale notar que se quiséssemos o mesmo resultado para séries de funções, a demonstração seria análoga visto que para uma dada série de funções arbitrária, temos associada a sequência a de funções das somas parciais. Assim, podemos concluir que

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

desde que as hipóteses do Teorema 0.4 sejam satisfeitas, ou seja, as funções f_n sejam integráveis para todo $n \in \mathbb{N}$ e a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ convirja uniformemente.

Referências

[1] LIMA, E. L. Curso de Análise, IMPA, Rio de Janeiro, 1995. (Projeto Euclides)

PIC - OBMEP/2017 - CRIANDO OPORTUNIDADES,

DISSEMINANDO MAIS TALENTOS

UMAKOSHI, Mayumi Luciana; SILVA, Profa. Dra. Ana Lucia.

RESUMO

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas encontra-se em sua 13ª edição e desenvolve o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) para atender os alunos medalhistas da OBMEP. Nesse trabalho, fazemos um relato do desenvolvimento do PIC na região PR-01 que engloba norte, norte velho, noroeste do Paraná e está vinculado a um projeto cadastrado na pró-reitora de extensão da Universidade Estadual de Londrina.

PALAVRAS-CHAVE: OBMEP. Matemática. PIC/OBMEP.

INTRODUÇÃO

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP - encontra-se em sua 13ª edição e desenvolve o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) para atender os alunos medalhistas da OBMEP.

A OBMEP está em sua 13ª edição e desenvolve um Programa de Iniciação Científica tipo júnior (PIC). O PIC é um programa que propicia ao aluno premiado em cada edição da OBMEP entrar em contato com interessantes questões no ramo da Matemática, ampliando o seu conhecimento científico e preparando-o para um futuro desempenho profissional e acadêmico. No programa, o estudante poderá participar do PIC Presencial, ou do PIC a Distância com aulas virtuais. Os alunos do PIC têm acesso a um fórum virtual, elaborado pela OBMEP, no qual, com ajuda de moderadores, realizam tarefas complementares às aulas. O material didático é preparado especialmente para os alunos nos diferentes níveis de participação. Os medalhistas que já fizeram o PIC mais de duas vezes, com pelo menos uma participação no nível 3 deverão participar do Programa Mentores OBMEP, que oferece atividades ministradas por professores universitários sobre conteúdos que envolvem matemática.
Neste trabalho, fazemos um relato do desenvolvimento do PIC na região PR-01 que engloba norte, norte velho, noroeste do Paraná e está vinculado a um projeto cadastrado na pró-reitora de extensão da Universidade Estadual de Londrina

METODOLOGIA

O PIC consta das seguintes atividades:

- Encontros presenciais (ou virtuais, dependendo da situação do aluno);
- Discussões virtuais no fórum da OBMEP - denominado Hotel de Hilbert;
- Tarefas para serem executadas em casa e no Fórum Hotel de Hilbert;
- Outras atividades virtuais a serem executadas no Portal da Matemática.

Os encontros presenciais são dirigidos por Professores orientadores. Nesses encontros os alunos recebem o material de estudo, orientação e o cronograma sobre os temas a serem abordados. Esse material é discutido no fórum, entre os alunos, sob orientação dos Moderadores do Fórum.

A equipe responsável pelo PIC é composta por:

- Professores Orientadores - orientam os alunos sobre seu desenvolvimento e a participação no programa nos encontros presencias.
- Moderadores de fórum - acompanham e estimulam as discussões e resolução de problemas entre os alunos em suas salas virtuais no fórum HH.
- Coordenadores de fórum - articulam os moderadores de fórum em relação à qualidade das intervenções realizadas nas discussões e acompanham a frequência e o cumprimento das regras estabelecidas pela Coordenação Acadêmica para o fórum.
- Coordenadores Orientadores - orientam e acompanham todas as atividades realizadas pelos professores Orientadores e premiados da OBMEP no PIC em sua região.

A seguir um quadro com o resumo do PIC/OBMEP/2017 da região PR-01.

Nomes	Local de atuação	Cidade de atuação	Nº de alunos	Nível	Situação
Prof. Antonio Carlos Mastine Discente Pedro G. S.Mendonça Discente Maria C. Marin Pires	Universidade Estadual de Londrina	Londrina	7	1	Presencial
Discente Leandro Figueira Ferreira	Universidade Estadual de Londrina	Londrina	15	2	Presencial
Discente Suelio J. da Silva Discente Adriano Junior G. Gonçalves	Universidade Estadual de Londrina	Londrina	11+1	3	Presencial
Discente Fernanda Nataly Preisner	Universidade Estadual de Maringá	Maringá	22	2 e 3	Presencial
Discente Marcelo dos Santos Antonio	Universidade Estadual de Londrina	Londrina	3	3	Virtual
Discente Michael Felipe Koga	Universidade Estadual de Londrina	Londrina	19	2	Virtual
Profa. Dra. Ana Lucia da Silva Discente João Paulo da Silva	Universidade Estadual de Londrina	Londrina	7	3	Mentor-Presencial
Profa. Dra. Ana Lucia da Silva	Universidade Estadual de Londrina	Londrina			CO
Mestranda Luciana Mayumi Umakoshi	Universidade Estadual de Londrina	Londrina			Apoio secretarial

CONCLUSÃO

O programa tem sido um sucesso e nesses 12 anos de existência, mais de 1500 estudantes participaram do PIC cuja coordenação está vinculada a um projeto cadastrado na pro-reitoria de extensão da Universidade Estadual de Londrina.

Nestes 12 anos do PIC/PR-01 temos estudantes que ingressaram num curso de graduação nas melhores instituições de ensino do país tais como: UEL, UEM, UNIOESTE, UFPR, UNICAMP, ITA, USP em cursos como Matemática, Física, Química, Medicina, Direito, Ciência da Computação, etc, bem como, cursando uma pós-graduação em nível de mestrado ou doutorado, com doutorado concluído, bem encaminhado profissionalmente. Todos estes estudantes são unânimes em atribuir uma parcela de seu sucesso à OBMEP, ao conteúdo aprendido, a disciplina Adquirida.

AGRADECIMENTOS

Governo do Estado do Paraná, Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, Fundação Araucária, OBMEP, Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática/UEL, PROEX, Comissão Organizadora do Evento.

REFERÊNCIAS

CADAR, L.; DUTENHEFNER, F.. **Encontros de Aritmética.**
CADAR, L.; DUTENHEFNER, F.. **Encontros de Geometria.**
CARVALHO, P.C.P. **Métodos de Contagem e Probabilidade**
Vídeos OBMEP - http://www.obmep.org.br/videos.htm
WAGNER, E..**Uma Introdução às Construções Geométricas**
Banco de Questões OBMEP - http://www.obmep.org.br/banco.htm
Apostilas do PIC - http://www.obmep.org.br/apostilas.htm

PROFMAT na UEL

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ALMEIDA, Gabriel Alencar de; SILVA, Ana Lucia da.

RESUMO

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional é um curso semipresencial, com oferta nacional, realizado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil, e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática. O programa é coordenado pela Comissão Acadêmica Nacional, que opera sob a égide da Diretoria da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e foi avaliado pela CAPES com nota 5, que é a nota máxima para um programa de mestrado. Cada Instituição de Ensino Superior que integra a Rede Nacional é denominada Instituição Associada. A Universidade Estadual de Londrina (UEL) é instituição associada desde o início do programa em rede nacional.

PALAVRAS-CHAVE: PROFMAT. Matemática. Mestrado Profissional.

INTRODUÇÃO

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - é um curso semipresencial, com oferta nacional, realizado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil, e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

O programa foi recomendado pelo Conselho Técnico-Científico da Educação Superior – CTC-ES da CAPES, em outubro de 2010.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), divulgou os resultados da avaliação dos programas de pós-graduação stricto sensu em funcionamento no Sistema Nacional de Pós-Graduação (SNPG) e novamente o PROFMAT, foi avaliado com nota 5, que é a nota máxima para um programa de mestrado.

Cada Instituição de Ensino Superior que integra a Rede Nacional é denominada Instituição Associada. No Brasil, são 79 instituições associadas ao todo.

A Universidade Estadual de Londrina é instituição associada desde o início do programa em rede nacional. Neste trabalho exibimos um panorama das atividades desenvolvidas no PROFMAT, seu objetivo, bem como um resumo dos números e desempenho do programa na UEL.

OBJETIVOS

O PROFMAT visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente. O Programa opera em ampla escala com o objetivo de, a médio prazo, ter impacto substantivo na formação matemática do professor em todo o território nacional.

DOCENTES VINCULADOS AO PROGRAMA
PROF. DR. ADEVAL LINO FERREIRA
PROFA. DRA. ANA LUCIA DA SILVA – Coordenadora
PROFA. DRA. ANA MÁRCIA FERNANDES TUCCI DE CARVALHO
PROF. MS. ANDRIELBER DA SILVA OLIVEIRA
PROFA. DRA. MAGNA NATÁLIA MARIN PIRES
PROFA. DRA. MICHELE DE OLIVEIRA ALVES
PROFA. DRA. NEUZA TERAMON
PROFA. DRA. PAMELA EMANUELI ALVES FERREIRA
PROF. DR. PAULO ANTÔNIO LIBONI FILHO
PROFA. DRA. REGINA CELIA GUAPO PASQUINI
PROF. DR. RICARDO CEZAR FERREIRA
PROF. DR. TÚLIO OLIVEIRA DE CARVALHO
PROF. DR. ULYSSES SODRÉ

METODOLOGIA

a) Ingresso por seleções anuais – Exame Nacional de Acesso (ENA);
b) Atividades presenciais e a distância, organizadas em disciplinas obrigatórias, eletivas e finalização da dissertação de Mestrado;
c) Exame Nacional de Qualificação – ENQ.

<table>
<tr><th colspan="6">MATRIZ CURRICULAR</th></tr>
<tr><th colspan="6">1º ANO</th></tr>
<tr><th colspan="3">1º SEMESTRE</th><th colspan="3">2º SEMESTRE</th></tr>
<tr><td colspan="3">NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS</td><td colspan="3">GEOMETRIA</td></tr>
<tr><td colspan="3">MATEMÁTICA DISCRETA</td><td colspan="3">ARITMÉTICA</td></tr>
<tr><th colspan="6">ENQ – EXAME NACIONAL DE QUALIFICACÃO</th></tr>
<tr><th colspan="6">2º ANO</th></tr>
<tr><th colspan="2">VERÃO</th><th colspan="2">1º SEMESTRE</th><th colspan="2">2º SEMESTRE</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</td><td colspan="2">FUNDAMENTOS DE CÁLCULO</td><td colspan="2">GEOMETRIA ANALÍTICA</td></tr>
<tr><td colspan="2">TÓPICOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA</td><td colspan="2">TÓPICOS DE MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><th colspan="6">3º ANO</th></tr>
<tr><th colspan="6">PERÍODO DE VERÃO</th></tr>
<tr><td colspan="6">TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO</td></tr>
</table>

RESULTADOS

PROFMAT já ofereceu mais de 10.000 vagas em seus 7 anos de funcionamento.

A tabela a seguir mostra, em números, o desempenho de nossa instituição. São 41 defesas em 4 turmas e várias em andamento.

ANO	ENTRADAS	BOLSISTAS	DEFESAS
2011	30	-	21
2012	15	3	6
2013	20	4	8
2014	20	7	6
2015	20	10	EM ANDAMENTO
2016	26	7	EM ANDAMENTO
2017	25	5	EM ANDAMENTO
2018	25 (74 inscritos)	-	ENA 2018 (21/10/2017)
TOTAL	**181**	**36**	**41**

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O PROFMAT visa:

a) estimular e promover a independência do professor, fornecendo-lhe instrumentos para busca por conhecimento e desenvolvimento profissional, de forma autônoma e permanente;

b) incentivar a pesquisa e a produção de materiais e práticas pedagógicas inovadoras para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola (textos, atividades, *softwares*, simulações, práticas pedagógicas inovadoras e diferenciadas em ambientes de aprendizagem etc.).

AGRADECIMENTOS

Governo do Estado do Paraná, Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, Fundação Araucária, OBMEP, PROFMAT, Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática/UEL, PROEX, Comissão Organizadora do Evento.

REFERÊNCIAS

HEFEZ, A. ***Aritmética***. Coleção PROFMAT, SBM, 2016.

NETO, A. C. M. ***Geometria***. Coleção PROFMAT, SBM, 2016.

MORGADO, A. C., CARVALHO, P. C. P. ***Matemática Discreta***. Coleção PROFMAT, SBM, 2016.

LIMA, E. L. ***Números e Funções Reais***. Coleção PROFMAT, SBM, 2016.

Propriedades dos Triângulos Pitagóricos

Nilton Lucas Luciano Serafim
nilton-lucas@hotmail.com
Túlio Oliveira de Carvalho
tcarvalho@uel.br
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Londrina
CP 10.011, CEP 86057-970, Londrina - PR

RESUMO

Este trabalho trata de um estudo sobre triângulos pitagóricos, triângulos retângulos com medidas dos lados iguais a números inteiros. Um triângulo pitagórico é dito primitivo se o máximo divisor comum entre as medidas dos lados é 1. Apresentamos uma forma de caracterizar os triângulos pitagóricos não-primitivos a partir da medida da hipotenusa.

Palavras-chaves: triângulo pitagórico; congruências; investigação.

INTRODUÇÃO

Nosso trabalho visa mostrar parte dos conteúdos estudados na iniciação científica sobre Teoria dos Números, em especial resultados a respeito de triângulos pitagóricos. Esses resultados foram obtidos a partir de um processo de investigação matemática, como ressalta Ponte (2006) "investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades". Inicialmente tínhamos um problema, que após a análise em busca de respostas, encontramos regularidades a respeito dos triângulos pitagóricos. Para demonstrar essas regularidades utilizamos inicialmente (Santos, 2015). Usamos ainda parte do Capítulo XX de (Hardy et al, 2009).

Nosso problema inicial tem relação com outro mais geral, de escrever números naturais como somas de quadrados, de cubos, ou de n-ésimas potências, chamado *problema de Waring*. Em nosso estudo, são utilizados importantes resultados da teoria de números como o teorema de Wilson, entre outros resultados da decomposição em quadrados.

PROBLEMA INICIAL

Durante nossos estudos na iniciação científica sobre teoria dos números foi proposto o seguinte problema:

Dos números entre 100 e 200, quais são aqueles que podem ser hipotenusas de um triângulo pitagórico? E de um triângulo pitagórico primitivo?

A partir deste problema iniciamos um processo de investigação matemática, a fim de encontrarmos sua resolução. Nesse processo percebemos que todo número composto com pelo menos um fator primo 2, ou da forma $4k+3$ quando hipotenusa de um triângulo pitagórico, este seria não primitivo, ou seja, existe um fator primo comum entre os lados deste triângulo.

Ao refinarmos a relação mostrada acima obtemos uma propriedade nos Triângulos Retângulos Pitagóricos, chamamos tal propriedade de Teorema 1, e focamos nossos estudos em demonstrá-la.

Teorema 1. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e sua decomposição em primos dada por*

$$n = 2^a q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_j^{\alpha_j} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_i^{\beta_i} \ .$$

tal que os q's são primos da forma $4k+3$ e os p's são primos da forma $4k+1$. Se $a + \sum_{l=1}^{j} \alpha_l > 0$, e n for hipotenusa de um triângulo pitagórico, este não é primitivo.

RESULTADOS UTILIZADOS

A seguir apresentamos os resultados que utilizamos para demonstrar o Teorema 1.

Teorema 2. *Para p primo, a congruência $x^2 \equiv -1 \mod p$ tem solução se, e somente se, $p = 2$ ou $p \equiv 1 \mod 4$.*

Demonstração. Vemos $x = 1$ é solução da congruência para $p = 2$. Para $p = 4k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$, o Teorema de Wilson afirma que

$$\begin{aligned}
&(p-1)! \equiv -1 \mod p \Leftrightarrow \\
&\left(1 \cdot 2 \cdots j \cdots \frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2} \cdots (p-j) \cdots (p-2)(p-1)\right) \equiv -1 \mod p \; .
\end{aligned}$$

Escrevemos $(p-1)!$ em dois fatores, cada um deles escrito como o produto de $\frac{p-1}{2}$ naturais consecutivos. Agora agrupamos este produto nos pares j e $p-j$. Assim

$$\prod_{j=1}^{(p-1)/2} j(p-j) \equiv -1 \mod p \; .$$

Mas $j(p-j) \equiv -j^2 \mod p$, donde

$$-1 \equiv \prod_{j=1}^{(p-1)/2} (-j^2) \equiv (-1)^{(p-1)/2} \left(\prod_{j=1}^{(p-1)/2} j\right)^2 \mod p \; .$$

Usando que $p = 4k + 1$, temos que $\frac{p-1}{2}$ é par. Portanto escrevendo

$$x = \prod_{j=1}^{(p-1)/2} j = \left(\frac{p-1}{2}\right)! \; ,$$

temos que $x^2 \equiv -1 \mod p$.

Suponha agora que $x^2 \equiv -1 \mod p$ tenha solução e $p > 2$ é primo ímpar. Elevando ambos os membros da congruência a $(p-1)/2$

$$x^{p-1} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \mod p \; ,$$

e pelo Pequeno Teorema de Fermat, $x^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Portanto

$$(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \mod p$$

e $(p-1)/2 = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $p \equiv 1 \mod 4$. □

Proposição 1. *Se um primo p divide $a^2 + b^2$ com $(a, b) = 1$, então p é a soma de dois quadrados.*

Definição 1. *Dizemos que $n = x^2 + y^2$ é uma representação* primitiva *de n se $(x, y) = 1$. Caso contrário, dizemos que tal representação é* não-primitiva.

Proposição 2. *Se $p = 4m + 3$ e $p|n$, então n não tem representações primitivas.*

Demonstração. Se n tem uma representação primitiva, então $p|(x^2+y^2)$, com $(x,y)=1$. Portanto $p \not| x$ e $p \not| y$. Portanto x e y são invertíveis módulo p e existe l tal que $y \equiv lx \mod p$ (tome $l \equiv yx^{-1} \mod p$, em que x^{-1} é o único inverso de x módulo p).

Consequentemente

$$x^2(1+l^2) \equiv x^2+y^2 \equiv 0 \mod p\ ,$$

donde segue que $1+l^2 \equiv 0 \mod p$, e l é solução da congruência $a^2 \equiv -1 \mod p$, contrariando o Teorema 2. □

Temos a seguinte consequência imediata da Proposição 2:

Corolário 1. *Seja p um primo, tal que $p \equiv 3 \mod 4$, então a decomposição em quadrados $p^2=a^2+b^2$ possue somente as soluções: $a=0$ e $b=p$ ou $a=p$ e $b=0$, em $\mathbb{N}\cup\{0\}$.*

Em consequencia dos resultados apresentados conseguimos demonstrar o Teorema 1

Teorema 3. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e sua decomposição em primos dada por*

$$n = 2^a q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}\cdots q_j^{\alpha_j} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}\cdots p_i^{\beta_i}\ .$$

tal que os q's são primos da forma $4k+3$ e os p's são primos da forma $4k+1$. Se $a+\sum_{l=1}^{j}\alpha_l>0$, e n for hipotenusa de um triângulo pitagórico, este não é primitivo.

Demonstração. Temos que os expoentes na decomposição de n^2 são exatamente o dobro dos expoentes na decomposição de n.

Se $a>0$, temos então que um fator de n^2 será 2^{2a}.

Para todo $x \in \mathbb{Z}$ temos que $x^2 \equiv 0 \mod 4$ se x par ou $x^2 \equiv 1 \mod 4$ se x ímpar.

Considere n hipotenusa de um triângulo pitagórico, ou seja, $n^2=k^2+h^2$ com $k,h \in \mathbb{N}$. Em módulo 4, $n^2 \equiv 0 \mod 4$, portanto não pode ser o caso de k ou h serem ímpares, pois desta forma n^2 seria congruente a 1 ou 2 módulo 4. Portanto 2 divide cada um dos catetos, e n é hipotenusa de um triângulo pitagórico que não é primitivo.

Por outro lado, se $a=0$, existe algum primo da forma $4k+3$ que divide n. Então n não tem decomposições primitivas, tampouco n^2, pela Proposição 2. □

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL

Demosntrado o Teorema 1, voltamos ao problema inicial, nesse momento buscamos alternativas para utilizarmos o teorema demonstrado em busca da resolução. Ao aplicarmos a contrapositiva temos:

Teorema 4. *Seja $n \in \mathbb{N}$ sua decomposição em primos dada por*

$$n = 2^a q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}\cdots q_j^{\alpha_j} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}\cdots p_i^{\beta_i}\ .$$

Tal que os q's são primos da forma $4k+3$ e os p's são primos da forma $4k+1$. Então n será hipotenusa de triângulo pitagórico primitivo se possuir em sua decomposição em primos, somente fatores primos da forma $4k+1$.

Aliado a esse resultado e ao fato de que para todo triângulo não primitivo, temos um triangulo primitivo associado. Temos que n só será hipotenusa de um Triângulo Retângulo Pitagórico se possuir em sua decomposição pelo menos um fator primo da forma $4k+1$.

Sendo assim para resolver nosso problema inicial basta analisarmos os fatores primos dos números candidatos a ser hipotenusa de um triangulo pitagórico, se ele tiver um fator primo da forma $4k+1$ ele será hipotenusa de triângulo pitagórico.

Tabela 1: Tabela de fatores primos de 100 a 200

$100 = 2^2.5^2$	$125 = 5^3$	$150 = 2.3.5^2$	$175 = 5^2.7$
$101 = 101$	$126 = 2.3^2.7$	$151 = 151$	$176 = 2^4.11$
$102 = 2.3.17$	$127 = 127$	$152 = 2^3.19$	$177 = 3.59$
$103 = 103$	$128 = 2^7$	$153 = 3^2.17$	$178 = 2.89$
$104 = 2^3.13$	$129 = 3.43$	$154 = 2.7.11$	$179 = 179$
$105 = 3.5.7$	$130 = 2.5.13$	$155 = 5.31$	$180 = 2^2.3^2.5$
$106 = 2.53$	$131 = 131$	$156 = 2^2.3.13$	$181 = 181$
$107 = 107$	$132 = 2^2.3.11$	$157 = 157$	$182 = 2.7.13$
$108 = 2^2.3^3$	$133 = 7.19$	$158 = 2.79$	$183 = 3.61$
$109 = 109$	$134 = 2.67$	$159 = 3.53$	$184 = 2^3.23$
$110 = 2.5.11$	$135 = 3^3.5$	$160 = 2^5.5$	$185 = 5.37$
$111 = 3.37$	$136 = 2^3.17$	$161 = 7.23$	$186 = 2.3.31$
$112 = 2^4.7$	$137 = 137$	$162 = 2.3^4$	$187 = 11.17$
$113 = 113$	$138 = 2.3.23$	$163 = 163$	$188 = 2^2.47$
$114 = 2.3.19$	$139 = 139$	$164 = 2^2.41$	$189 = 3^3.7$
$115 = 5.23$	$140 = 2^2.5.7$	$165 = 3.5.11$	$190 = 2.5.19$
$116 = 2^2.29$	$141 = 3.47$	$166 = 2.83$	$191 = 191$
$117 = 3^2.13$	$142 = 2.71$	$167 = 167$	$192 = 2^6.3$
$118 = 2.59$	$143 = 11.13$	$168 = 2^3.3.7$	$193 = 193$
$119 = 7.17$	$144 = 2^4.3^2$	$169 = 13^2$	$194 = 2.97$
$120 = 2^3.3.5$	$145 = 5.29$	$170 = 2.5.17$	$195 = 3.5.13$
$121 = 11^2$	$146 = 2.73$	$171 = 3^2.19$	$196 = 2^2.7^2$
$122 = 2.61$	$147 = 3.7^2$	$172 = 2^2.43$	$197 = 197$
$123 = 3.41$	$148 = 2^2.37$	$173 = 173$	$198 = 2.3^2.11$
$124 = 2.2.31$	$149 = 149$	$174 = 2.3.29$	$199 = 199$
$200 = 2^3.5^5$			

RESULTADO DO PROBLEMA

Apresentamos na Tabela 1 a representação em fatoração de primo dos números de 100 a 200, a fim de identificar os números que têm pelo menos um fator primo da forma $4k + 1$, ou seja, os números que podem ser escritos como hipotenusa de triângulos pitagóricos.

Sendo assim temos que os números que podem ser hipotenusa de um *triângulo retângulo pitagórico* são:

100	101	102	104	105	106	109	110	111	113
115	119	120	122	123	125	130	135	136	137
140	145	146	148	149	150	153	155	157	159
160	164	165	170	173	174	175	178	180	181
182	183	185	187	190	193	194	195	197	200

Destes números os que podem ser hipotenusa de *triângulo não-primitivo* são:

100	102	104	105	106	110	111	115	119	120
122	123	125	130	135	136	140	145	146	148
150	153	155	159	160	164	165	170	174	175
178	180	182	183	185	187	190	194	195	200

Pois esses números possuem mais de um fator primo em sua decomposição. E os que podem ser hipotenusa de um *triângulo primitivo* são:

101	109	113	125	137
145	149	157	173	181
185	193	197		

Pois esses números possuem apenas fatores primos da forma $4k+1$, quando possuem mais de um fator primo podemos encontrar sua decomposição utilizando $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$, de modo que a, b, c, d, são catetos associados aos triângulos primitivos formados por esses fatores. Com issso resolvemos o problema inicial, utilizando das propriedades encontradas a partir de um processo de investigação.

AGRADECIMENTOS

Nilton Serafim é bolsista do CNPq, através do PICME-PGMAC. Túlio Carvalho é bolsista da CAPES, como coordenador de área do PIBID-Matemática-UEL.

REFERÊNCIAS

[1] SANTOS, J. P. O. **Introdução à teoria dos números**. 3ª ed. IMPA, Rio de Janeiro. 2015.

[2] HARDY, G. H.; WRIGHT, E.M.; HEATH-BROWN, D.R.; SILVERMAN, J.H. **An Introduction to the theory of numbers**. 6th ed. Posts and Telecom Press, Beijing. 2009.

[3] PONTE, J. P.; Brocardo, J.; Oliveira, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Quebrando os Limites Euclidianos e Fracionando Dimensões

SILVA, Ana Lucia da; Gonçalves, Adriano Junior Gouveia; Menani, Gustavo Sylvio de Paula; Martinez, Isabela Yabe; Silva, João Paulo da.

RESUMO

Estamos familiarizados com a Geometria Euclidiana onde estudamos nossas conhecidas figuras: reta, quadrado, cubo, círculo, pirâmides. Habituamo-nos a calcular suas medidas de área, de comprimento, de volume e, neste contexto, a noção de dimensão já está em nossas mentes. No trabalho, estudamos alguns fractais primitivos – aqueles cujas primeiras iterações podem ser desenhadas a mão livre - definimos fractais, dimensão fractal e damos alguns exemplos.

PALAVRAS-CHAVE: Fractais. Matemática. Dimensão Euclidiana. Dimensão Fractal.

INTRODUÇÃO

Estamos familiarizados com a Geometria Euclidiana onde estudamos nossas conhecidas figuras: reta, quadrado, cubo, círculo, pirâmides. Habituamo-nos a calcular suas medidas de área, de comprimento, de volume e, neste contexto, a noção de dimensão já está em nossas mentes.

Na obra, os Elementos, de Euclides, existem cinco postulados. No primeiro livro dos Elementos encontramos 48 teoremas demonstráveis. Porém, é a partir do vigésimo nono teorema que Euclides utiliza-se pela primeira vez do quinto postulado. Os matemáticos e filósofos não estavam satisfeitos com a natureza deste último postulado e assim iniciou-se uma discussão em torno deste. A rejeição desse postulado dá origem às geometrias não-euclidianas.

A partir dos estudos de Gauss (1777-1855), Lobatshewski (1792- 1856), e Bolyai (1802-1860), se fortalecem as discussões quanto as Geometrias Não-Euclidianas.

No século XIX, Weierstrass (1815-1897) descreveu uma função que era contínua, mas não era diferenciável, isto é, em nenhum ponto se podia descrever uma tangente à curva.

Cantor (1845-1918) criou um método simples de transformar uma linha numa poeira de pontos, que apesar de não passar de pontos isolados no intervalo [0, 1], tem mais pontos que os números racionais, isto é, tem uma quantidade não numerável de pontos (Fig.1).

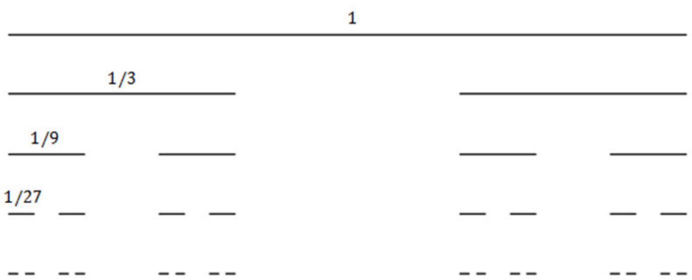


Fig. 1 – Conjunto de Cantor

Peano (1858-1932), gerou pela primeira vez uma curva ondulada, que tocava em cada ponto do plano.

Todas estas formas pareciam sair das categorias usuais de linhas unidimensionais, planos bidimensionais, espaços tridimensionais, daí o fato pelo o qual a maioria pode ser vista como *"casos patológicos"*.

Na década de 70, alguns cientistas nos Estados Unidos e na Europa começaram a encontrar um caminho em meio ao que parecia sair da ordem usual. Eram matemáticos, físicos, biólogos, químicos, todos eles buscando ligação entre diferentes tipos de irregularidade.

Com Mitchell Jay Feigenbaum (nascido em 1944) surge uma visão diferente nos estudos sobre uma teoria que tenta organizar uma desordem, encontrar padrões em meio à aleatoriedade, a teoria do caos.

O estudo moderno do caos começou com a assustadora compreensão, de que equações matemáticas muito simples podiam servir de modelo para sistemas muito violentos.

Todos estes acontecimentos contribuíram para o surgimento da Geometria Fractal, que desafiava as noções comuns de infinito e para as quais não havia uma explicação objetiva.

No trabalho, estudamos alguns fractais primitivos – aqueles cujas primeiras iterações podem ser desenhadas a mão livre - definimos fractais, dimensão fractal e damos alguns exemplos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Benoît Mandelbrot, entre os anos 1950 e 1970 com as facilidades proporcionadas pelos computadores, ampliou alguns conceitos da matemática, de maneira a descrever e analisar a irregularidade estruturada do mundo natural, e cunhou um nome para novas formas geométricas envolvidas: Fractais.

É surpreendente saber que formas conhecidas há muito tempo, possam ser consideradas como fractais e tenham sido desenhadas antes da era do computador. Elas são associadas a nomes como: Cantor, Peano, Koch, Hilbert, Sierpinski e Brown.

O termo *fractal* provém da palavra latina *fractus*, que significa quebrado, irregular ou descontínuo, e suas principais características são:

- Auto semelhança, pois o grau de irregularidade em um fractal permanece constante em diferentes escalas;
- Dimensões não inteiras;
- Obtida através de processos iterativos infinitos.

Matematicamente falando, dimensão de um espaço é o número de parâmetros necessários para a identificação de um ponto nesse espaço, assim, as dimensões são classificadas em:

(1) Unidimensional, as formas geométricas que identificam tal dimensão são as retas ($\mathbb{R}$).

(2) Bidimensional, as formas geométricas que a identificam são os planos ($\mathbb{R}^2$).

(3) Tridimensional, é a forma geométrica bidimensional acrescida de profundidade. Esta dimensão é representada pelos espaços ($\mathbb{R}^3$).

(4) n-dimensional, com $n > 3$. Estas dimensões estão presentes em disciplinas da Matemática, como Álgebra Linear e Cálculo ($\mathbb{R}^n$).

Entretanto, no mundo dos fractais, dimensão adquire um sentido mais amplo, não precisa ser um número inteiro, pode ser um número "quebrado".

Toda figura fractal é formada por infinitas iterações, a partir deste momento, vamos nos referir a forma do conjunto inicial de um fractal (quando ainda não foi feita nenhuma iteração, ou seja, dimensão inteira) como uma caixa. Uma caixa que pode ter diversos formatos: retas, quadrados, retângulos, triângulos, cubos, etc.

Dado S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, onde $n = 1, 2$ ou 3, iremos cobri-lo completamente com caixas de lado ε. Para cada $\varepsilon > 0$, denotaremos por $N(\varepsilon)$ o menor número de caixas cujo lado tem comprimento ε, necessário para cobrir o conjunto.

Definição: Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, onde $n = 1, 2$ ou 3. A dimensão de capacidade de S é dada por:

$$Dim\,S = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right)$$

se o limite existe. Se a dimensão de S existe e não é um inteiro, então dizemos que S tem dimensão fractal.

Teorema: Seja $0 < r < 1$. Considere um subconjunto S do $\mathbb{R}^n$, com $n = 1, 2$ ou 3. Então o limite

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\ln N(r^k)}{\ln\left(\frac{1}{r^k}\right)}$$

Existe se e somente se $Dim\,S$ existe e neste caso:

$$Dim\,S = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

CONCLUSÃO

Vamos calcular, como exemplo, a dimensão do **Triângulo de Sierpinski** para mostrar uma dimensão não inteira.

Tomemos um triângulo equilátero de lado 1, e denotemos por I_0. Dentro de I_0 vamos construir outro triângulo equilátero de forma que seus vértices coincidam com os pontos médios das arestas do triângulo inicial. Eliminamos o interior do triângulo inscrito obtendo assim o conjunto I_1.

Da mesma forma, em cada um dos três triângulos de I_1, inscrevemos um triângulo equilátero e eliminamos seu interior, obtendo assim I_2. Continuando este processo obtemos um conjunto formado pelos pontos do triângulo original que sobram depois das eliminações infinitamente numerosas. Tal conjunto é chamado **Triângulo de Sierpinski**.

Neste caso, a fim de facilitar a compreensão, utilizaremos as caixas sendo triângulos equiláteros.

Para o conjunto I_0 podemos tomar $\varepsilon_0 = 1$, e dessa forma temos que $N_0(\varepsilon_0) = 1$. Depois da primeira iteração teremos I_1, e para este podemos colocar $\varepsilon_1 = 1/2$ e assim $N_1(\varepsilon_1) = 3$. Note que cada iteração aumenta em três vezes a quantidade de triângulos do conjunto anterior, sendo que os novos triângulos possuem o lado com metade da medida. Então, de forma geral, para I_k temos $\varepsilon_k = 1/2^k$ e $N_k(\varepsilon_k) = 3^k$.

Aplicando a fórmula de dimensão obtemos

$$Dim\, I = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln N(1/2^k)}{\ln\left(\frac{1}{1/2^k}\right)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\ln 3^k}{\ln 2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k \ln 3}{k \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}584.$$

Portanto, a dimensão do Triângulo de Sierpinski é aproximadamente $1{,}584$.

AGRADECIMENTOS

Governo do Estado do Paraná, Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, Fundação Araucária, OBMEP, Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática/UEL, PROEX, Comissão Organizadora do Evento.

REFERÊNCIAS

Gulick D. – ***Encounters With Chaos*** – New York, United States of America. University of Maryland, College Park. McGraw-Hill, Inc. 1992.

Rezende V./ Secorun T./ Fuzzo R.A. - ***A História dos Fractais: De Euclides a Mandelbrot e Sua Importância no Ambiente Escolar*** – Encontro Paranaense de Educação Matemática EPREM – 2009.

Rebelo R.S. - ***Geometria Fractal e Aplicações*** - *Faculdade de Ciências da Universidade do Ciências da Universidade do Porto, Janeiro / 2006.*

Resolução de Problemas e Formação Continuada:

A OBMEP na Prática Docente

ALMEIDA, Gabriel Alencar de; SILVA, Ana Lucia da; PASQUINI, Regina Célia Guapo, BARBOSA, Sandra Malta.

RESUMO

O GETOM (Grupo de Estudos e Trabalho das Olimpíadas de Matemática) existe há dez anos e é constituído por professores da Educação Básica que ensinam Matemática, professores do Departamento de Matemática desta Universidade Estadual de Londrina (UEL) e estudantes da graduação dos cursos de Matemática, Economia, Física e Engenharia Civil. Esta atividade é uma ação desenvolvida por meio de um projeto de extensão vinculado à Pró-Reitoria de Extensão da UEL cujo público alvo são professores da Educação Básica (EB) que participam voluntariamente do projeto. O grupo reúne-se mensalmente com o objetivo de discutir a Matemática presente na sua prática docente subsidiando o seu trabalho em sala de aula. Neste trabalho pretende-se relatar a experiência obtida em um grupo de estudos efetuado com professores da Educação Básica.

PALAVRAS-CHAVE: GETOM. Formação Continuada. Matemática.

INTRODUÇÃO

A formação inicial do professor de matemática deve estar amparada em conhecimentos que estejam vinculados à prática docente, não somente do ponto de vista metodológico, mas que lhe possa dar segurança no exercício de sua profissão ao lidar com o conhecimento matemático. No Grupo de Estudos e Trabalho das Olimpíadas de Matemática – GETOM - abordamos questões que vão nessa tônica e que muitas vezes não são tratadas na formação inicial de maneira a promover a compreensão desejada pelo professor. Nesse Grupo, utilizamos a metodologia Resolução de Problemas como estratégia de ensino; nossa experiência mostra o quanto é significativo para os professores em formação inicial ou continuada um trabalho nessa direção.

O GETOM (Grupo de Estudos e Trabalho das Olimpíadas de Matemática) existe há dez anos e é constituído por professores da Educação Básica que ensinam Matemática, três professoras do Departamento de Matemática desta Universidade Estadual de Londrina (UEL), e estudantes da graduação dos cursos de Matemática, Economia, Física e Engenharia Civil. Esta atividade é uma ação desenvolvida por meio de um projeto de extensão vinculado à Pró-Reitoria de Extensão da UEL cujo público alvo são professores da Educação Básica (EB) que participam voluntariamente do projeto. O grupo reúne-se mensalmente com o objetivo de discutir a Matemática presente na sua prática docente subsidiando o seu trabalho em sala de aula.

OBJETIVOS

1. Colaborar com a formação do professor no que diz respeito a exploração de problemas e exercícios desafiadores como metodologia diferenciada na sala de aula.

2. Estimular o uso de problemas desafiadores como material didático na sala de aula.
3. Desenvolver uma cultura entre os professores que situe os problemas como elementos importantes para as aulas de matemática.
4. Oferecer aos professores um ambiente acadêmico e orientado para que possam se expor e manifestar frente às dificuldades de sua prática tanto do ponto vista de vista matemático quanto do metodológico.
5. Realizar um trabalho com os professores de modo que possam fazer um trabalho diferenciado com seus alunos, especialmente a partir dos problemas do Banco de Questões (BQ) da OBMEP.
6. Dar oportunidade para o professor vivenciar a exploração de problemas que podem ser desafios para os alunos, estabelecendo paralelos com os conteúdos do currículo oficial do ensino fundamental e Médio.

METODOLOGIA

O GETOM é um projeto de formação continuada de professores que ensinam matemática cuja ação é promovida por meio de reuniões mensais presenciais que são realizadas por meio de oficinas. As oficinas são coordenadas pelas professoras Ana Lucia da Silva - doutora em Matemática e coordenadora do projeto -, Regina Célia Guapo Pasquini - doutora em História da Matemática - e Sandra Malta Barbosa - doutora em Tecnologia da Informação e Comunicação. Cada professora pertence a uma área diferente, agregando ao grupo especialidades distintas, o que enriquece e fomenta as discussões e proporciona um leque maior de aplicações, debates e novas propostas sobre um mesmo assunto.

Tais reuniões são realizadas aos sábados durante os períodos manhã e tarde, com o objetivo de discutir questões que permeiam a prática docente em Matemática.

Pela manhã, são desenvolvidos, estudos subsidiados por materiais oferecidos pela OBMEP e/ou elaborados pelas professoras coordenadoras.

No período da tarde é dada continuidade a esses estudos por meio de novas tecnologias de informação (TIC).

Utilizamos, ainda, ambiente virtual da Plataforma *Moodle*, como facilitador para a continuidade das discussões.

ALGUNS QUESTIONAMENTOS REALIZADOS

1. $\sqrt{2}$ é um número racional ou um número irracional?
2. 0,123123123... é um número racional ou um número irracional?
3. $\log_3 2$ é um número racional ou um número irracional?
4. $\cos 1^O$ é um número racional ou um número irracional?
5. $\log_2 16$ é um número racional ou um número irracional?

Estas questões são debatidas, analisadas e, quando possível, demonstradas.

RESULTADOS

A formação continuada de professores que ensinam matemática é o destaque do GETOM (Grupo de Estudos e trabalho das Olimpíadas de Matemática), por meio de um projeto de extensão desde o ano de 2007.

Participam desse grupo, voluntariamente, aproximadamente trinta professores da rede pública de ensino de Londrina e região.

Além de desenvolvermos um trabalho que traz conhecimentos, que emergem da prática do professor, oportunizamos momentos de discussão sobre a Resolução de Problemas como estratégia de ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A oportunidade de desenvolvermos nosso trabalho por meio de material especializado da OBMEP, sob a perspectiva de explorá-lo didaticamente, de modo sistemático e com o acompanhamento de professores, nos traz a chance de incluí-lo no planejamento das aulas dos envolvidos e contribuir para o enriquecimento de material de estudo dos seus alunos.

O trabalho com questões a partir do Banco de Questões da OBMEP pode aproximar o professor desse programa favorecendo uma maior participação dos seus alunos nas Olimpíadas. Mais ainda, acreditamos que o contato dos alunos da educação básica pública com as Olimpíadas pode despertar um maior interesse desses pela matemática.

Neste projeto temos a oportunidade de unir professores do ensino básico, do ensino superior, estudantes de graduação e o ensino básico. Todos em uma troca de experiências única e gratificante. Todos participam, todos colaboram, todos aprendem.

Este ano de 2017 é muito especial, pois o GETOM completa 10 anos, uma década. Há professores que estão conosco desde o início dos trabalhos e pretendem continuar. É gratificante ter esse retorno, essa troca, essa experiência.

AGRADECIMENTOS

Governo do Estado do Paraná, Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, Fundação Araucária, OBMEP, Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática/UEL, PROEX, Comissão Organizadora do Evento.

REFERÊNCIAS

Banco de Questões OBMEP. 2017. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm>.

Vídeos OBMEP. 2017. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/videos.htm>.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. ***Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores***. Zetetiké, v.11, n.19, pp. 57-80, 2006.

ONUCHIC, L. R. *Ensino e aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas*. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, p.199220. 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.. *Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas*. **BOLEMA – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, v.25, n.41, p.73-98, 2011.

PARANÁ, ***Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática***. Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2008.

Teorema da Soma Direta

Nabila Iasbek Giroti
Universidade Estadual de Londrina
niasbekgiroti@gmail.com
Prof^{a}. Dr^{a}. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina
michelealves@uel.br

Resumo

Durante o desenvolvimento da iniciação científica foram estudados conceitos e resultados relacionados a espaços e subespaços vetoriais, onde notamos a importância do Teorema da Soma Direta objetivo principal deste trabalho.

Objetivos

O objetivo deste trabalho é enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 0.1. *Sejam F, F_1 e F_2 subespaços vetoriais do espaço vetorial E tais que $F_1 \subset F$ e $F_2 \subset F$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. $F = F_1 \oplus F_2$.
2. *Todo elemento $w \in F$ se escreve de maneira única como soma $w = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in F_1$ e $w_2 \in F_2$.*

Desenvolvimento

Definição 0.1 (Espaço Vetorial)**.** *Um espaço vetorial E é um conjunto, cujos elementos são vetores, no qual estão definidas duas operações:*

1) *Adição, que a cada par de vetor $u, v \in E$, faz corresponder um novo vetor $u + v \in E$, chamado de soma de u e v.*
2) *Multiplicação por escalar, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in E$, faz corresponder um novo vetor $\alpha v \in E$, chamado o produto de α por v.*

Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, as condições abaixo, chamadas de axiomas de espaço vetorial:

1) *Comutatividade: $u + v = v + u$;*
2) *Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;*

3) Vetor nulo: Existe um vetor $0 \in E$, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que

$$v + 0 = 0 + v = v, \forall v \in E;$$

4) Inverso aditivo: Para cada vetor $v \in E$, existe um vetor $(-v) \in E$, chamado inverso aditivo, ou simétrico de v, tal que $v + (-v) = (-v) + (v) = 0$;

5) Distributividade) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

6) Elemento neutro) Existe um vetor $1 \in E$ tal que $1v = v1 = v$.

Definição 0.2 (Subespaço Vetorial)**.** *Seja E um espaço vetorial. Um subespaço vetorial (ou simplesmente subespaço) de E é um subconjunto $F \subset E$ com as seguintes propriedades:*

1) $0 \in F$;

2) Se $u, v \in F$, então $u + v \in F$;

3) Se $v \in F$, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

Observe que da Definição 0.2, segue que, se $u, v \in F$ e α, β são números reais quaisquer, então $\alpha u + \beta v \in F$. Mais geralmente, dados $v_1, \ldots, v_m \in F$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, temos que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in F.$$

O conjunto $\{0\}$ e o espaço E são subespaços vetoriais. Todo conjunto é, em si mesmo, um subespaço vetorial.

Exemplo 0.1. *Seja $v \in E$ um vetor não-nulo. O conjunto $F = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ de todos os múltiplos de v é um subespaço vetorial de E. Chamado a reta que passa pela origem e contém v.*

Com efeito, notemos primeiramente que $0 \in F$, pois tomando $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$, temos que $0 \in F$. Agora, sendo $u_1, u_2 \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $u_1 = \alpha_1 u$ e $u_2 = \alpha_2 u$, com $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} u_1 + \alpha u_2 &= \alpha_1 u + \alpha(\alpha_2 u) \\ &= (\alpha_1 + \alpha\alpha_2)u \\ &= (\alpha_3)u, \end{aligned}$$

com $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha\alpha_2$. Portanto, $u_1 + \alpha u_2 \in F$. Logo, F é um subespaço vetorial de E.

Definição 0.3 (Soma Direta)**.** *Seja E um espaço vetorial e $F_1, F_2 \subset E$ subespaços vetorias de E. Quando os subespaços F_1, F_2 têm em comum apenas o elemento 0, isto é, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$ e diz-se que $F = F_1 \oplus F_2$ é a soma direta de F_1 e F_2.*

Teorema 0.2 (Teorema da Soma Direta)**.** *Sejam F, F_1 e F_2 subespaços vetoriais do espaço vetorial E tais que $F_1 \subset F$ e $F_2 \subset F$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. $F = F_1 \oplus F_2$.

2. Todo elemento $w \in F$ se escreve de maneira única como soma $w = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in F_1$ e $w_2 \in F_2$.

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $F = F_1 \oplus F_2$ e consideremos $w \in F$ arbitrário. Logo, por hipótese temos que

$$w = u_1 + u_2,$$

com $u_1 \in F_1$ e $u_2 \in F_2$. Sendo assim nos resta mostrar a unicidade de w ser escrito como soma de um elemento de F_1 com um elmento de F_2.

Suponhamos que $w = v_1 + v_2$, com $v_1 \in F_1$ e $v_2 \in F_2$. Neste caso, obtemos que

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2,$$

ou sejam

$$u_1 - v_1 = u_2 - v_2.$$

Assim segue que,

$$u_1 - v_1, u_2 - v_2 \in F_1 \cap F_2 = \{0\},$$

logo $u_1 - v_1 = u_2 - v_2 = 0$. Portanto, $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_2$.

Por outro lado, suponhamos que o item 2. seja válido, logo para provar o item 1. basta provar que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Considere $v \in F_1 \cap F_2$, então

$$v = 0 + v = v + 0,$$

com $v, 0 \in F_1$ e $v, 0 \in F_2$, logo da hipótese segue que $v = 0$. Portanto, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ e consequentemente $F = F_1 \oplus F_2$. $\square$

Considerações Finais

Do ponto de vista matemático, é de grande importância garantir a existência e a unicidade de alguma propriedade. Assim, com os estudos realizados durante a execução deste trabalho, foi observado que todo elemento de um espaço vetorial escrito como soma direta de dois subespaços vetoriais, é escrito de modo único como soma de elementos desses dois subespaços vetoriais. Tal fato será útil na continuidade dos estudos durante a iniciação científica e o curso de matemática.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária, 2016.

[2] COELHO, Flávio Ulhoa. LOURENÇO, Mary Lilian. Um curso de Álgebra Linear. 2 ed, São Paulo, 2013.

Teorema de Ascoli-Arzelá

Gabriel Eduardo Bittencourt Moraes
Departamento de Matemática, UEL
gabrielmatematica2014@gmail.com
Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Michele de Oliveira Alves
Departamento de Matemática, UEL
michelealves@uel.br
Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Departamento de Matemática, UEL
marcioajs@uel.br

Introdução

No desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso, entitulado como "Espaços Métricos Compactos e Conexos", observamos a grande importância do Teorema de Ascoli-Arzelá no conceito de compacidade de um espaço métrico. Diante desta importância, o objetivo deste trabalho é enunciar e demonstrar o Teorema de Ascoli-Arzelá. Para isto, definiremos espaços métricos completos, compactos, totalmente limitados e relativamente compactos, bem como conjuntos equicontínuos.

Objetivos

O objetivo principal é enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 0.1 (Teorema de Ascoli-Arzelá)**.** *Seja E um conjunto de aplicações contínuas $f : K \to N$, onde K é compacto. A fim de que $E \subset \mathfrak{C}(K;N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:*

1) E seja equicontínuo;

2) Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x)$ seja relativamente compacto em N.

Desenvolvimento

Definição 0.1. *Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.*

Definição 0.2. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma cobertura de X é uma família $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda$.*

Definição 0.3. *Uma cobertura de X dada por $\mathfrak{C} = (A_\lambda)_{\lambda\in L}$ diz-se aberta quando cada conjunto $A_\lambda, \lambda \in L$, é aberto em M.*

Definição 0.4. *A cobertura de X dada por $\mathfrak{C} = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ diz-se finita quando L é um conjunto finito.*

Definição 0.5. *Um espaço métrico M chama-se compacto quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.*

Definição 0.6. *Um espaço métrico M chama-se totalmente limitado quando, para todo $\epsilon > 0$, pode-se obter uma decomposição $M = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, de M como reunião de um número finito de subconjuntos em cada um tem diâmetro menor que ϵ.*

Proposição 0.1. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1) M é compacto;

2) M é completo e totalmente limitado.

Demonstração. Ver Página 248, [1]. □

Definição 0.7. *Sejam M, N espaços métricos e E um conjunto de aplicações $f : M \to N$. O conjunto E diz-se equicontínuo no ponto $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implique $d(f(x), f(a)) < \epsilon$, seja qual for $f \in E$.*

Definição 0.8. *Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se relativamente compacto quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto.*

Lema 0.1. *Se $X \subset M$ é relativamente compacto e $f : M \to N$ é contínua, então $f(X) \subset N$ é relativamente compacto.*

Demonstração. Ver Página 272, [1]. □

Teorema 0.2 (Teorema de Ascoli-Arzelá)**.** *Seja E um conjunto de aplicações contínuas $f : K \to N$, onde K é compacto. A fim de que $E \subset \mathfrak{C}(K; N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:*

1) E seja equicontínuo;

2) Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x)$ seja relativamente compacto em N.

Demonstração. Suponhamos que E seja relativamente compacto. Vamos mostrar, para cada $x \in K$, que $E(x)$ é relativamente compacto e que E é equicontínuo. Primeiro, vejamos que $E(x)$ é relativamente compacto, ou seja, que $\overline{E(x)}$ é compacto.

Considerando $h_x : \mathfrak{C}(K; N) \to N$, dada por $h_x(f) = f(x)$, temos que:

$$\begin{aligned} d(h_x(f), h_x(g)) &= d(f(x), g(x)) \\ &\leq \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) \\ &= d(f, g). \end{aligned}$$

Logo, h_x é uma contração, ou seja, contínua. Note que

$$E(x) = \{f(x) : f \in E\} = h_x(E).$$

Sendo E relativamente compacto, do Lema 0.1, segue que $h_x(E) = E(x)$ é relativamente compacto.

Agora, vejamos que E é equicontínuo em todo $x_0 \in K$. Com efeito, sendo E relativamente compacto, segue que $\overline{E}$ é compacto, logo da cobertura aberta

$$E \subset \bigcup_{f \in \overline{E}} B\left(f; \frac{\epsilon}{3}\right),$$

com $\epsilon > 0$ arbitrário, pode-se extrair uma subcobertura finita

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{p} B\left(f_i, \frac{\epsilon}{3}\right),$$

com $f_1, \ldots, f_p \in \overline{E}$.

Com para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ temos que as funções f_i são contínuas, segue que existe $\delta_i > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Tomando $\delta = \min\limits_{1 \leq i \leq p}\{\delta_i\}$ e considerando $f \in E$ arbitrária, segue que $f \in B\left(f_i, \frac{\epsilon}{3}\right)$ para algum $i \in \{1, \ldots, p\}$ e deste modo, note que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

desde que $d(x, x_0) < \delta$. Portanto, E é equicontínuo.

Reciprocamente, suponhamos que E seja equicontínuo e $E(x)$ seja relativamente compacto para todo $x \in K$. Mostremos que E é relativamente compacto, ou seja, $\overline{E}$ é compacto. Para isto, vejamos que $\overline{E}$ é completo e que E é totalmente limitado.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\overline{E}$, isto é,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m, f_n) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como $f_n \in \overline{E}$, temos que para todo $\epsilon > 0, B(f_n, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, ou seja, existe $\overline{f_n} \in E$ tal que

$$d(f_n, \overline{f_n}) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Vejamos que $(\overline{f_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy para todo $x \in K$. Com efeito, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_1 = n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_1$ implica que:

$$\begin{aligned} d(\overline{f_n}(x), \overline{f_m}(x)) &\leq d(\overline{f_n}(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), \overline{f_m}(x)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Assim, $(\overline{f_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\overline{E(x)}$, mas $\overline{E(x)}$ compacto e consequentemente completo, logo segue que $\overline{f_n}(x) \to f(x)$, para todo $x \in K$. Fazendo $m \to +\infty$ em (1), obtemos que

$$n > n_1 \Longrightarrow d(\overline{f_n}(x), \overline{f}(x)) < \epsilon.$$

Logo, note que

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f(x)) &\leq d(f_n(x), \overline{f_n}(x)) + d(\overline{f_n}(x), f(x)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\overline{E}$, ou seja, $\overline{E}$ é completo.

Agora, mostremos que E é totalmente limitado. De fato, E é equicontínuo em todo $x \in K$, logo:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_x > 0 \text{ tal que } y \in B(x, \delta_x) \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{4}, \forall f \in E.$$

Usando o fato de K ser compacto, da cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \delta_x)$, podemos extrair uma subcobertura finita $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \delta_{x_i})$, com $x_1, \ldots, x_p \in K$. Sendo para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ o conjunto $E(x_i)$ relativamente compacto, segue que $\overline{E(x_i)}$ é compacto, ou seja, $\overline{E(x_i)}$ é totalmente limitado. Assim temos que $E(x_i)$ é totalmente limitado, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ segue que

$$E(x_i) \subset \bigcup_{j=1}^{m_i} B\bigg(f_j(x_i), \frac{\epsilon}{4}\bigg).$$

Defina Q o conjunto das sequências $q_1, \ldots, q_p$ tal que

$$1 \leq q_i \leq m_i,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ e considere para cada $q_1, \ldots, q_p \in Q$ o seguinte conjunto

$$E_{q_1,\ldots,q_p} = \bigg\{f \in E : f(x_i) \in B\bigg(f_{q_i}(x_i), \frac{\epsilon}{4}\bigg), \forall i = 1, \ldots, p\bigg\}.$$

Considerando

$$G = \bigcup_{q_1,\ldots,q_p \in Q} E_{q_1,\ldots,q_p},$$

temos que $E \subset G$. Assim, basta mostrar que G é totalmente limitado.

Com efeito, seja $g \in G$ arbitrária, logo $g \in E_{q_1,\ldots,q_p}$ para algum $q_1, \ldots, q_p \in Q$. Assim, temos que $g \in E$ e

$$g(x_i) \in B\bigg(f_{q_i}(x_i), \frac{\epsilon}{4}\bigg), \tag{2}$$

para todo $i = 1, \ldots, p$.

Logo, dado $x \in K$ e $\epsilon > 0$ arbitrários, pelo fato de $g, f_{q_i} \in E$ e por (2), temos que

$$\begin{aligned} d(g(x), f_{q_i}(x)) &\leq d(g(x), g(x_i)) + d(g(x_i), f_{q_i}(x_i)) + d(f_{q_i}(x_i), f_{q_i}(x)) \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\ &= \frac{3\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$d(g, f_{q_i}) = \sup_{x \in K} d(g(x), f_{q_i}(x)) < \epsilon,$$

logo segue que

$$E \subset \bigcup_{q_1,\ldots,q_p \in Q} E_{q_1,\ldots,q_p} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_{q_i}, \epsilon),$$

ou seja, E é totalmente limitado. Portanto, mostramos que $\overline{E}$ é compacto, isto é, E é relativamente compacto. □

Considerações Finais

A partir dos estudos desenvolvidos durante a elaboração do Trabalho do Conclusão de Curso, foi possível observar a importância do Teorema de Ascoli-Arzelá, e também o fato de que este será bastante utilizado durante a vida acadêmica do aluno. Uma aplicação deste resultado é o Teorema de Peano da teoria de equações diferenciais, o qual nos permite avaliar a existência de solução de um problema de valor inicial. Existem outras aplicações deste resultado, que poderão ser vistas no decorrer dos estudos em matemática, num mestrado e/ou doutorado.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. Espaços Métricos. Projeto Euclides. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013

[2] KREYSZIG, E. Introductory functional analysis with applications. John Wiley Sons, Canada, 1978.

[3] https://www.ime.usp.br/ cpq/main/arquivos/oteoremadearzelaascolieaplicacoesaanalise.pdf

Tratamento da Informação na Educação Infantil: uma experiência

SILVA, Marli Guimarães da.

RESUMO

O presente trabalho relata atividades desenvolvidas por alunos de educação infantil propostas a partir da realização de uma enquete sobre o trânsito e meios de transporte. O objetivo da atividade foi introduzir o conceito de tratamento da informação numa turma de educação infantil de um Centro Estadual de Educação Infantil - CEEI. Os sujeitos desta pesquisa foram 13 crianças, com idade média de 6 anos e, até a realização da enquete, não tinham tido contato com um número elevado de informações que eles mesmos haviam coletado. A ideia da enquete surgiu após a visita à Escola Educativa de Trânsito, ocasião em que foram informados sobre cuidados necessários para prevenção de acidentes e as regras de trânsito, incluindo os pedestres. De volta à escola, os alunos passaram a questionar a estimativa de quantos vão à escola de carro, moto ou outros meios; quantos utilizavam corretamente o cinto de segurança; qual pai cruzava o semáforo com o sinal vermelho, enfim, a professora encontrou a oportunidade de sugerir uma pesquisa para todas as crianças matriculadas no CEEI. A turma foi dividida em três grupos que deveriam visitar as outras cinco salas de aula apresentando o trabalho: um coordenador encarregado de explicar a proposta, dois auxiliares para carregarem um painel com as regras de trânsito e um responsável pela entrega dos questionários à professora da sala visitada, comunicando a data em que voltaria para recolhimento dos questionários respondidos. Os questionários foram compostos de 6 questões simples elaboradas com a participação das crianças, envolvendo desde a distância da casa até a escola; o tempo gasto aproximadamente no trajeto; o meio de transporte utilizado; a marca do carro; se já se envolveu em acidente de trânsito e, por fim, se já foi multado. Após a tabulação dos dados utilizou-se de tabelas e gráficos para apresentar os resultados. A realização deste estudo contribuiu para a compreensão pelos alunos de como se tabulam dados, associando a representação dos gráficos às respostas contidas nos questionários, haja vista que visualizaram a contagem e registro de cada resposta.

PALAVRAS-CHAVE: Crianças. Enquete. Gráficos. Tabelas.

INTRODUÇÃO

O espaço da educação infantil é repleto de oportunidades de superações em que as crianças aprendem por meio de atividades que integram o lúdico e as próprias vivências, logo, pode-se explorar este espaço para a elaboração de atividades com enfoque matemático.

Em geral na educação infantil são abordadas com os alunos as operações que envolvem adição e subtração, relações entre quantificações entre outros conteúdos, conforme a idade dos mesmos. No entanto, o tratamento de informações, isto é, organizar os dados de diferentes formas e interpretá-los, ainda é algo escasso, fato que reflete nos anos futuros dos estudantes.

Portanto, este trabalho visou a abordagem de uma situação indagada pelos alunos, na qual, foi feito o tratamento de informações, visando discutir as formas de tratar e organizar dados coletados após a distribuição de uma enquete aos pais de 106 crianças matriculadas em um centro de educação infantil.

A metodologia teve caráter qualitativo conforme Borba (2004), na qual foi feita uma análise descritiva dos gráficos e tabelas que os alunos elaboraram juntamente com a professora. Os sujeitos da pesquisa foram 13 alunos de um Centro Estadual de Educação Infantil (CEEI) com idade média de 6 anos.

A atividade surgiu de uma visita à Escola Educativa de Trânsito localizada em Londrina e consistiu em questões envolvendo desde a distância da casa até a escola; o tempo gasto aproximadamente no trajeto; o meio de transporte utilizado; a marca do carro; se já se envolveu em acidente de trânsito e, por fim, se já foi multado.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A curiosidade associada à energia de uma criança de 6 anos abre um leque de possibilidades de trabalho que às vezes extrapola ao planejamento da sala de aula, permitindo que o professor avance em conteúdos que ainda não constam no currículo da Educação Infantil, desde que as crianças consigam acompanham com compreensão. Partindo deste pressuposto, percebendo o interesse das crianças em descobrir informações sobre os meios de transporte e o trânsito, buscou-se na literatura e encontrou-se que, de acordo com Guimarães e Gitirana (2013) a pesquisa “deve ser compreendida como eixo de formação de futuros professores e alunos de qualquer nível de escolaridade.” Desde então, surgiu o interesse na professora em montar uma pesquisa que envolvesse toda a escola para que sanasse as dúvidas das crianças.

Por outro lado, como montar a pesquisa? Quais perguntas? Quantas perguntas? As mesmas autoras deram a resposta ao continuarem

> Além disso, ela favorece a interação entre os alunos, com as práticas sociais e com a natureza; incentiva a linguagem oral; amplia o que o aluno tem a dizer sobre os variados temas; propicia o contato com representações diversas que resumem informações; favorece a observação e o desenvolvimento do raciocínio.
> Entretanto, para compreender como as pesquisas são desenvolvidas é preciso que os alunos participem das mesmas desde seu início até as conclusões, passando por todas as fases. (GUIMARÃES; GITIRANA, p. 96, 2013)

Em outras palavras, o professor não entrega pronto o material para a turma simplesmente distribuir; desde o assunto, a elaboração das questões, da quantidade de questões, do público envolvido, em todos os momentos as crianças deverão se sentir integrantes, verdadeiros investigadores.

Guimarães e Gitirana (2013) destacam que existem algumas fases que precisam ser planejadas cuidadosamente para que uma pesquisa tenha sucesso, indicando os passos: elaboração da questão; levantamento das hipóteses; definição da população e amostra; coleta de dados; classificação; registro de dados; análise dos dados e, por fim a conclusão, que é a validação dos resultados.

CONCLUSÃO

A realização deste estudo superou as expectativas iniciais. A princípio, a professora imaginava que as crianças apresentariam dificuldade ao tabularem os dados, mas ao fazerem de forma conjunta, enquanto a professora desenhava os resultados no quadro, cada criança preenchia seu gráfico individualmente.

Considerou-se alguns pontos positivos e outros negativos neste trabalho. Como favorável, a enquete contribuiu para a compreensão dos alunos de como se tabulam dados, associando a representação dos gráficos às respostas contidas nos questionários, haja vista que visualizaram a contagem e registro de cada resposta. Além das crianças se familiarizarem com os gráficos e tabelas, que agora nominam como gráfico de setores e gráfico de colunas.

As crianças conseguiram trabalhar em equipe, pois a turma foi dividida em três grupos em que cada membro tinha uma função. Cada um soube respeitar o espaço do outro de uma forma surpreendente, o que não era muito frequente, pois é uma turma consideravelmente pequena, mas que contem muitos líderes que procuram impor as próprias vontades e pontos de vista.

Como negativo observou-se que o número de questões foi excessivo. Embora tenha-se partido do princípio de deixar que as próprias crianças participassem da formulação das questões, seis é uma quantidade exaustiva, talvez três tivesse sido mais bem aproveitado. Outro ponto é a questão n.º 2, do tempo gasto aproximadamente da distância de casa até a escola, a professora utilizou as medidas de tempo apenas de até 30 minutos, até uma hora e mais de uma hora, uma vez que não havia trabalhado 15 minutos com a turma. Porém, mesmo a professora morando 12 kilômetros longe do CEEI, gasta aproximadamente 15 minutos no percurso, o que desvalida a maioria das respostas dos que vêm de carro.

Dentre os passos fundamentais elencados por Guimarães Gitirana (2013), ressalta-se que não foram seguidos todos, até mesmo porque não era o propósito deste trabalho esgotar todas as possibilidades de aprofundamento em Tratamento da Informação ou análise estatística. A intenção era uma apresentação conceituada dos gráficos e tabelas aumentando o potencial do raciocínio que os alunos já demonstram no dia-a-dia. Fica aqui a sugestão para que outros profissionais da Educação Infantil sigam esta proposta.

AGRADECIMENTOS

- ✓ Aos pais que participaram da proposta respondendo a enquete;
- ✓ Às Professoras Drª Magna Natalia Marin Pires, Ms Marilda Trecenti Gomes e Drª Karina Alessanda Pêssoa da Silva, coordenadoras do Projeto “Estudos de Aula na Formação de Professores que Ensinam Matemática nos Anos Inicias”;
- ✓ À Professora Drª Vanderli Marino Melen;
- ✓ À todas as integrantes do GEAMAI.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo C.. A pesquisa qualitativa em educação matemática. **Anais** da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004. Disponível em http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf Acesso em 25 set 2017

GUIMARÃES, Gilda. GITIRANA, Verônica. **Estatística no Ensino Fundamental: a pesquisa como eixo estruturador**. In BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira. (Orgs.) Processo de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática. vol 1. Recife. UFPE, p. 93-132, 2013.

Uma relação entre bases e geradores

Isabela Yabe Martinez
Universidade Estadual de Londrina
isas_yabe@hotmail.com
Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina
michelealves@uel.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é demonstrar um importante teorema de álgebra linear, referente a bases, geradores, conjuntos linearmente independentes e dimensões. Para a realização da demonstração será necessária à introdução de alguns tópicos de álgebra linear relacionados a espaços vetoriais de dimensão finita. Analisaremos em detalhes o conceito de base, suas propriedades e o fato dos elementos do espaço vetorial serem combinações lineares dos elementos da base.

Objetivos

O objetivo deste trabalho é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 0.1. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita n. Então, temos as seguintes propriedades válidas.*

1. *Todo conjunto X de geradores de E contém uma base.*
2. *Todo conjunto linearmente independente $\{v_1, ..., v_m\}$ de E está contido numa base.*
3. *Todo subespaço vetorial F de E tem dimensão finita menor ou igual a n.*
4. *Se a dimensão do subespaço F de E é igual a n, então $F = E$.*

Desenvolvimento

Definição 0.1. *Um espaço vetorial E é um conjunto em que temos definidas as operações de adição e multiplicação por um escalar real dadas por*

$$\begin{array}{rlcl} + : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} \cdot : & \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \cdot x, \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\alpha\beta \in \mathbb{R}$:

a) $x + y = y + x$,

b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

c) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$,

d) *existe* $0 \in E$ *tal que* $0 + x = x + 0 = x$,

e) *para cada* $x \in E$ *existe* $-x \in E$ *tais que* $x + (-x) = 0$,

f) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

g) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$,

h) *existe* $1 \in E$ *tal que* $1 \cdot x = x$.

Definição 0.2. *Seja* E *um espaço vetorial e* F *um subconjunto arbitrário de* E. *Dizemos que* F *é um subespaço vetorial de* E *se as seguintes propriedades forem válidas*

a) $0 \in F$,

b) *Se* $x, y \in E$, *então* $x + y \in E$,

c) *Se* $x \in E$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *então* $\alpha \cdot x \in E$.

Definição 0.3. *Seja* X *um subconjunto de um espaço vetorial* E. *O conjunto de todas as combinações lineares*

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_m \cdot v_m$$

tais que $v_1, \cdots, v_m \in X$ *e* $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *é chamado de subespaço gerado por* X. *Denotamos o subespaço gerado por* X *de* $S(X)$.

Definição 0.4. *Seja* E *um espaço vetorial. Um subconjunto* X *de* E *é chamado de linearmente independente quando nenhum elemento de* X *é combinação linear de outro elemento de* X.

Definição 0.5. *Seja* E *um espaço vetorial. Um subconjunto* X *de* E *é chamado de linearmente dependente quando não for linearmente independente.*

Exemplo 0.1. *Os vetores* $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$, $w = (-1, 1, 3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *são linearmente dependete, pois*

$$v = 3u - w$$

Teorema 0.2. *Sejam* $v_1, ..., v_2$ *vetores não nulos do espaço vetorial* E. *Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores, então o conjunto*

$$X = \{v_1, \cdots, v_m\}$$

é linearmente independente.

Demonstração. Ver Teorema 3.2 de [1]. □

Definição 0.6. *Sejam* E *um espaço vetorial e* B *um subconjunto de* E. *Dizemos que* B *é uma base para* E *se*

1. *B é um conjunto linearmente independente,*
2. $S(B) = E$.

Lema 0.1. *Todo sistema linear homogênio cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não-trivial.*

Demonstração. Ver Lema 3.1 de [1]. □

Teorema 0.3. *Se os vetores $v_1, \cdots, v_m$ geram o espaço vetorial E, então qualquer conjunto com mais de m vetores é linearmente dependente.*

Demonstração. Ver Teorema 3.3 de [1]. □

Proposição 0.1. *Se o espaço vetorial E admite uma base $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ com n elementos, então qualquer outra base de E também possui n elementos.*

Demonstração. Ver Corolário 2 de [1]. □

Definição 0.7. *Dizemos que um espaço vetorial E tem dimensão finita se possuir uma base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ com um número finito n de elementos. Neste caso dizemos que a dimensão de E é n e usaremos a notação $dimE = n$.*

Proposição 0.2. *Sejam E um aespaço vetorial arbitrário de dimensão n e $X = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Então, são equivalentes:*

1. *X gera E,*
2. *X é linearmente independente.*

Demonstração. Ver Corolário 3 de [1]. □

Conclusão

Tendo como ferramentas os resultados expostos anteriormente, podemos enunciar e demonstrar o teorema que é o objetivo principal deste trabalho.

Teorema 0.4. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita n. Então, temos as seguintes propriedades válidas.*

1. *Todo conjunto X de geradores de E contém uma base.*
2. *Todo conjunto linearmente independente $\{v_1, ..., v_m\}$ de E está contido numa base.*
3. *Todo subespaço vetorial F de E tem dimensão finita menor ou igual a n.*
4. *Se a dimensão do subespaço F de E é igual a n, então $F = E$.*

Demonstração. A demonstração de cada um dos itens segue da seguintes maneira

1. Seja $Y = \{v_1, \cdots, v_m\}$ um subconjunto linearmente independente de X com o maior número de elementos possíveis. Observe que se existir $v \in X$ tal que v não é combinação linear dos elementos de Y, então o conjunto $Y\{v_1, \cdots, v_m, v\}$ seria linearmente independente, mas isto contradiz o fato de m ser o máxmo possível escolhido. Logo, $X \subset S(Y)$ e assim $S(X) \subset S(Y)$.

   Por outro lado,
   $$S(X) = E \text{ e } S(Y) \subset E,$$
   então $S(Y) = E$. Portanto, Y é uma base de E contida em X.

2. Seja $Y = \{v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_k\}$ um conjunto linearmente independente de E com k elementos onde $k \leq n$ e k é o número máximo possível.

   Observe que Y gera E, pois se houvesse algum vetor $v \in E$ que não fosse combinação linear de
   $$\{v_1, \cdots, v_k\},$$

então o conjunto

$$\{v_1, \cdots, v_k, v\},$$

será linearmente independente, mas isto contradiz a maxilidade de k. Portanto, Y é uma base de E e contém o conjunto

$$\{v_1, ..., v_m\}.$$

3. Considere $Y = \{v_1, \cdots, v_m\}$ um subconjunto linearmente independente de F com o maior número de elementos possíveis. Analogamente ao que foi feito nos outros itens, obtemos que $F = S(Y)$. Assim Y é uma base finita para F e além disso, $\dim F = m \leq n$, pois pelo Teorema 0.3. não podemos ter $m > n$.

4. Por hipótese, temos que

$$\dim F = n,$$

então toda base B de F é um subconjunto linearmente independente de E com n elementos. Assim pela Proposição 0.2. temos que este subconjunto B gera E, ou seja, $E = S(B) = F$. Portanto, $E = F$.

□

Considerações Finais

Iniciamos o trabalho enunciando o teorema principal e passamos a apresentar definições, lemas, corolários e teoremas necessários à sua prova e compreensão. Por fim conseguimos demonstrar o teorema proposto pelo trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a professora Michele de Oliveira Alves que acompanhou meus estudos, me ensinou e me apresentou a álgebra linear. Agradeço ao apoio do CNPQ, PICME.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. Álgebra linear. Coleção Matemática Universitária. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

A IMPORTÂNCIA DA AVALIAÇÃO DE CURSOS DE GRADUAÇÃO NA PERSPECTIVA DO EGRESSO

Neuza Teramon nteramon@uel.br
Universidade Estadual de Londrina
Ricardo Cezar Ferreira rcezar@uel.br
Universidade Estadual de Londrina

15 de janeiro de 2018

Resumo

Avaliar é um processo contínuo e sequencial que apontam caminhos que podem ser percorridos. Entendido como processo, a avaliação deve ocorrer antes, durante e ao fim do processo de ensino aprendizagem. Considerando que a avaliação cumpre a função de retroalimentação, o ato de avaliar indica se os objetivos propostos foram ou não alcançados. Segundo esta perspectiva, a avaliação de um curso de graduação, segundo a percepção do egresso, produz informações sobre a qualidade do curso, verificando se as metas de formação profissional e cidadã foram atingidas. Em particular, neste trabalho pretende-se traçar o perfil do egresso do curso de graduação em Matemática, habilitações licenciatura e bacharelado, da Universidade Estadual de Londrina, verificando se as diretrizes indicadas no projeto político pedagógico do curso foram capazes de prepará-los para inserção no mundo do trabalho e se ocorreu desenvolvimento do espírito crítico e ético, comprometido com as finalidades da educação. Desta forma, pode-se obter informações consistentes capazes de provocar mudanças curriculares no projeto político pedagógico. Para empreender esta tarefa faz-se necessário analisar e compreender a avaliação educacional, em suas múltiplas dimensões. Desta forma, fazemos uma revisão sobre este tema, destacando alguns pontos importantes sobre avaliação educacional e sobre avaliação de cursos de graduação na perspectiva do estudante egresso.

Palavras Chave: Avaliação educacional. Ensino superior. Egresso da graduação.

Introdução

Neste trabalho pretendemos, numa etapa posterior, avaliar o curso de graduação em Matemática, da Universidade Estadual de Londrina - UEL, nas habilitações licenciatura e bacharelado, segundo a perspectiva do estudante egresso. Sant'Anna [14] sintetiza acertadamente que "Avaliar é: (1) ver se valerá a pena!, (2) ver se vale a pena!, (3) ver se valeu a pena! (p. 16)". Neste projeto focaremos a atenção no terceiro questionamento, verificando se o estudante egresso apresenta o perfil almejado para o professor de Matemática da educação básica, no caso da licenciatura, ou um profissional com formacão matemática sólida, preparado para a pesquisa científica e inserção no mercado de trabalho, no caso do bacharelado.

Para tanto fazemos um levantamento na literatura sobre a importância da avaliação educacional, da avaliação do ensino superior e da análise sob o olhar do egresso, pois o estudante egresso é o resultado de anos de formação. A avaliação, segundo este ponto de vista, constitui-se reflexo da prática e a compreensão de um trabalho conduzido por anos.

Porém, para avaliar, antes é preciso diagnosticar, ou seja, identificar o objeto de estudo, determinando as características relevantes e reais que o mesmo possui, sejam elas positivas ou negativas, satisfatórias ou insatisfatórias. Lembramos que o diagnóstico, que processa-se por meio de coleta e análise de informações, deve apoiar-se em regras e critérios aceitáveis e bem definidos, isentos, o máximo possível, de opinões subjetivas. Somente após a identificacão do objeto analisado, podemos fazer juízo de valores e tomar decisões que visem a melhoria do processo estudado, considerando que avaliar é um ato construtivo de transformação da realidade.

Munidos de informações provenientes dos egressos, esperamos alcançar subsídios para a crítica, reflexão e o diálogo sobre o projeto político pedagógico do curso e indicar tanto seus pontos fortes, que devem ser preservados e reforçados, quanto suas fragilidades que podem apontar aspectos que contribuirão em discussões que permitam a busca de propostas concretas que conduzam a tomada de decisões. Se a tomada de decisões não ocorrer, a avaliação não terá cumprido seu papel essencial.

Aspectos sobre a avaliação educacional

Segundo o dicionário Aurélio [8] da língua portuguesa, avaliar significa determinar a valia ou valor; apreciar ou estimar o merecimento de; reconhecer a grandeza, a intensidade, a força de. Avaliar também é observar a aquisição de competências e habilidades em alguma área do conhecimento ou no âmbito do campo de trabalho. Avaliar é uma prática que realizamos cotidianamente. Frequentemente temos que tomar decisões, atitude que envolve o pesar de prós e contras.

Objetos concretos como produtos das mais diversas naturezas e objetos não concretos como os serviços de um profissional, a aquisição de competências e habilidades por uma pessoa ou o rendimento de um estudante podem ser submetidos ao crivo de uma avaliação.

Ao analisarmos procedimentos, objetos ou mercadorias, instituições, pessoas, o desempenho de um aluno ou alguma outra particularidade, estamos atribuindo importância ou valor. A fim de determinar este valor ou grau de importância, é necessário inicialmente realizar um diagnóstico do objeto em estudo, por meio de coleta de dados, de naturezas quantitativas ou qualitativas, ou mesmo ambas, dependendo das características da pesquisa realizada.

A avaliação educacional é um sistema multifacetado pois apresenta implicações sociológicas, políticas, educacionais e pedagógicas. Na década de 1940, a avaliação educaional surgiu como atividade científica com os trabalhos pioneiros de Ralph W. Tyler [16] que entendia a avaliação como um método onde se compara dados do desempenho com os objetivos preestabelecidos. Tyler defendia fortemente que a avaliação deveria cumprir a função de favorecer de modo eficaz o processo ensino aprendizagem.

Nos anos de 1960, pesquisadores como Lee J. Cronbach, Michael Scriven e Robert E. Stake deram contribuições relevantes, suas diferentes perspectivas teóricas apontaram formulações diversas para o conceito de avaliação educacional.

A princípio, a avaliação educacional tinha como foco de interesse o aluno e os aspectos ligados a sua aprendizagem. Sucessivamete, o interesse voltou-se do indivíduo para a coletividade, porém o primeiro enfoque não foi esquecido. Assim surgiram propostas e procedimentos de avaliação do desempenho docente, a avaliação dos cursos e a avaliação institucional. Em seguida, a atenção foi orientada para os programas educativos e atualmente a atenção volta-se para a avaliação do sistema educacional. Há uma multiplicidade de aspectos que podem ser avaliados, que compreendem os diversos níveis de ensino, desde a educação básica ao ensino superior, incluindo os cursos de pós-graduaçao, considerando-se as especificidades de cada nível de ensino, conforme Vianna [18] e Sousa [15].

O processo de ensino e aprendizagem e o processo de avaliação são faces de uma mesma moeda, considerando-se que ambos desenvolvem-se em paralelo, pois as contribuições provenientes da avaliação podem oferecer considerações e reflexões que conduzem ao aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem. Desta forma, a avaliação educacional deve ser vista como uma elaboração do coletivo após mediações, com consequente aplicação de uma metodologia de análise bem definida, que resultará em um processo que se espera que seja cuidadoso, imparcial e preciso, com vistas a compreender e valorizar um determinado objeto. Por meio da avaliação é possível facilitar processos de ensino e aprendizagem e estimular o aprimoramento de pessoas ou instituições. A transformação da realidade, o movimento, de preferência para melhor, é uma das finalidades da avaliação.

Diferentes concepções para avaliação foram apresentadas por vários pesquisadores.

Embora Sacristán e Gómez [13] afirmem que o conceito de avaliação apresenta uma gama variada de significados possíveis, que dependem das necessidades impostas pela avaliação, os mesmos assumem que

> Avaliar se refere a qualquer processo por meio do qual alguma ou várias características de um aluno/a, de um grupo de estudantes, de um ambiente educativo, de objetivos educativos, de materiais, professores/as, programas, etc., recebem a atenção de quem avalia, analisam-se e valorizam-se suas características e condições em função de alguns critérios ou pontos de referência para emitir um julgamento que seja relevante para a educação(p.298).

A concepção de Sant'Anna [14] assume que

> A avaliação é um processo pelo qual se procura identificar, aferir, investigar e analisar as modificações de comportamento e rendimento do aluno, do educador, do sistema, confirmando se a construção do conhecimento se processou, seja ele teórico (mental) ou prático(p.31).

Sant'Anna afirma que a avaliação escolar é o indicador que possibilita constatar a condição em que se encontram os elementos compreendidos neste cenário e afirma que a avaliação é o cerne do processo educacional.

Segundo Vianna [18] "avaliar é determinar o valor de alguma coisa para um determinado fim", sendo resultado de uma dedicação metódica. O autor considera o significado das palavras: medir e avaliar. Medir, envolve quantificação, atribuição de valor numérico, ou seja, medir refere-se ao aspecto quantitativo do que se quer descrever, e esta ação conduz à avaliação, que se efetiva quando ocorre juízo de valor, que possui significação não material.

Na visão de Haydt [9] “avaliar consiste em fazer um julgamento sobre resultados, comparando o que foi obtido com o que se pretendia alcançar”(p. 11), para a autora a avaliação é um sistema de controle de qualidade que aponta a efetividade ou não do processo ensino-aprendizagem e Haydt admite como princípio fundamental que a avaliação é um processo contínuo e organizado, de caráter prático, orientador e integral.

Luckesi [11] defende a avaliação inclusiva

> Defino a avaliação da aprendizagem como um ato amoroso, no sentido de que a avaliação, por si, é um ato acolhedor, integrativo, inclusivo. Para compreender isso, importa distinguir avaliação de julgamento. O julgamento é um ato que distingue o certo do errado, incluindo o primeiro e excluindo o segundo. A avaliação tem por base acolher uma situação, para, então (e só então), ajuizar a sua qualidade, tendo em vista dar-lhe suporte de mudança, se necessário. A avaliação, como ato diagnóstico, tem por objetivo a inclusão e não exclusão; [...] O diagnóstico tem por objetivo aquilatar coisas, atos, situações, pessoas, tendo em vista tomar decisões no sentido de criar condições para a obtenção de uma maior satisfatoriedade daquilo que se esteja buscando ou construindo (p. 173).

Para Luckesi o julgamento envolve o sim ou o não, o certo ou o errado, inclusão ou exclusão. Por outro lado, a avaliação é acolhedora, no sentido de reconhecer (diagnosticar) uma situação, a avaliação não separa o certo do errado, apenas admite-se o que existe e esta condição é aceita, não havendo exclusão. A avaliação possibilita compreender a condição existente e tomar decisões de forma adequada, oferecendo perspectivas para alcançar resultados mais acertados para que passos à frente sejam dados. Desta forma, a avaliação é um meio que contribui para o crescimento.

Luckesi destaca que, ao longo do tempo, a simples realização de provas e exames desvirtuou as finalidades da avaliação, pois as provas classificam os estudantes e seus resultados tem sido utilizados como instrumento de poder e autoridade. A avaliação educacional tem a função de subsidiar a elaboração de um processo de aprendizagem que proporcione resultados satifatórios.

No documento “Bases para uma nova proposta de avaliação da educação superior” [3] encontramos um conceito de avaliação abrangente que abarca a aquisição de conhecimentos e a função social do processo educativo. Segundo a Comissão Especial de Avaliação

> O conceito de avaliação que se constituiu nos estudos e reflexões da Comissão Especial de Avaliação (CEA) tem como idéias centrais, dentre outras, as de integração e de participação - conceitos fundamentais para a construção de um sistema de avaliação capaz de aprofundar os compromissos e responsabilidades sociais das instituições, bem como promover os valores democráticos, o respeito à diversidade, a busca da autonomia e a afirmação da identidade. Além disso, desde o início a CEA procurou consolidar as necessárias convergências em relação a uma concepção de avaliação como processo que efetivamente vincule a dimensão formativa a um projeto de sociedade comprometido com a igualdade e a justiça social (p. 61).

Considerando este entendimento de avaliação, a proposta de como proceder a avaliação deve reunir a dimensão cognitiva e a compreensão das finalidades da educação superior. Logo a avaliação deve procurar a inter-relação entre um sistema de avaliação do desenvolvimento educativo/emancipatório e as atividades de regulação, que são próprias da supervisão estatal, com vistas à consolidação das funções e compromissos educativos.

Segue uma síntese das particularidades a serem consideradas na avaliação da educação superior, segundo [3],

> A avaliação da Educação Superior deve apresentar, como marcas essenciais, dentre outras, as seguintes características: justiça, rigor, efetividade, integração, globalidade, participação, eficácia formativa, efetividade social, flexibilidade, credibilidade, legitimidade, institucionalidade, continuidade, respeito à identidade institucional, sistematização (p.68).

No âmbito da educação superior, Dias Sobrinho [7] apresenta um conceito abrangente sobre avaliação e suas finalidades

> A avaliação é a ferramenta principal da organização e implementação das reformas educacionais. Produz mudanças nos currículos, nas metodologias de ensino, nos conceitos e práticas de formação, na gestão, nas estruturas de poder, nos modelos institucionais, nas configurações do sistema educativo, nas políticas e prioridades da pesquisa, nas noções de pertinência e responsabilidade social. Enfim, tem a ver com as transformações desejadas não somente para a educação superior propriamente dita, mas para a sociedade, em geral, do presente e do futuro (p. 195).

Dias Sobrinho considera as mudanças nas instituições de ensino provenientes da avaliação educacional, mas o pesquisador vai além apresentando uma abordagem social da avaliação pois observa as consequências da mesma na comunidade que abriga e interage com as instituições educacionais.

No mesmo trabalho, Dias Sobrinho confirma a relação entre as avaliações educacionais e as mudanças na sociedade, concebendo a avaliação como instrumento de reformas, por meio do entendimento de que

> 1) avaliação e transformações educacionais se interatuam, ou seja, a avaliação é um dos motores importantes de qualquer reforma ou modelação e, reciprocamente, toda mudança contextual produz alterações nos processos avaliativos; e
> 2) todas as transformações que ocorrem na educação superior e em sua avaliação fazem parte, de modo particular, porém, com enorme relevância, das complexas e profundas mudanças na sociedade, na economia e no mundo do conhecimento em âmbito global (p.196).

Um ponto de vista semelhante é defendido por Luckesi [11], quando o mesmo considera aspectos políticos e sociais nas implicações da avaliação

> Um educador, que se preocupe com que a sua prática educacional esteja voltada para a transformação, não poderá agir inconsciente e irrefletidamente. Cada passo de sua ação deverá estar marcado por uma decisão clara e explícita do que está fazendo e para onde possivelmente está encaminhando os resultados de sua ação. A avaliação, neste contexto, não poderá ser uma ação mecânica. Ao contrário, terá de ser uma atividade racionalmente definida, dentro de um encaminhamento político e decisório a favor da competência de todos para a participação democrática da vida social (p.46).

A finalidade principal da educação superior, segundo Dias Sobrinho [6] é a formação cidadã, o ponto principal é a formação integral do ser humano. Desta forma a missão que se evidencia é a formação de pessoas para uma vida íntegra, solidária, ética, associada ao desenvolvimento material, cultural, político e espiritual, considerando que para Dias Sobrinho "Se educar é formar para a vida social, essa deve ser a matéria principal da avaliação (p.196)".

Ainda que a elaboração e consolidação da cidadania seja sublinhada pelo pesquisador, o mesmo assume a importância da formação profissional e do avanço do conhecimento, pois a capacitação profissional é uma das competências mais solicitadas no contexto do ensino superior, caracterizando-se como um elemento importante para o desenvolvimento da vida social. Segundo o autor

> Produzir e transmitir conhecimentos é uma das funções essenciais, portanto, indescartáveis, de toda instituição educativa. A produção intelectual, as obras do espírito, são bem comum de uma nação e patrimônio da humanidade.(p.196).

A relevância de avaliar um processo após sua conclusão e a consequente necessidade de tomada de decisão para completar o ciclo característico do ato de avaliar foi destacado por Cardinet [5]

> Tomar informações sobre o resultado já atingido é um procedimento fundamental de toda atividade voltada a uma finalidade: por exemplo, nossos olhos seguem nossa mão,ou ainda, toda empresa, tem sua contabilidade. Uma informação que retorna é sempre necessária para reorientar a sequência da ação (p. 2).

Observamos que são diversas as concepções de avaliação, no entanto existem aspectos em comum como o entendimento de que a avaliação educacional é um processo, isto é, um conjunto de práticas contínuas, sequenciais e específicas de ações que pode constituir uma base para a tomada de decisões. Entendido como um processo, a avaliação deve ocorrer antes, durante e ao fim do processo de ensino aprendizagem. Desta forma, o processo avaliativo não pode ser uma atividade restrita, isolada a uma etapa do processo.

Outra interseção entre as concepções de avaliação, é que a avaliação cumpre a função de retroalimentação, pois o ato de avaliar sinaliza se os objetivos foram alcançados ou não, oferecendo subsídios concretos para reflexão que possibilite ações adequadas e eficientes que conduzam à transformação dos objetos ou projetos em estudo. No caso particular da avaliação educacional espera-se que ocorra crescimento qualitativo e quantitativo de conhecimento e que ocorra também a aquisição de valores ético-sociais do indivíduo que colaborará para construção de uma sociedade igualitária.

Avaliação educacional institucional no Brasil

A avaliação institucional da educação brasileira é um tema recente. No âmbito da educação básica, em 1990 foi implantado o Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB que é formado por avaliações externas aplicados em larga escala, cujo objetivo central é diagnosticar a educação básica ofertada em nosso país, produzindo informações sobre a qualidade do ensino. Inicialmente seu público alvo foram as escolas públicas, mas as escolas particulares foram inseridas a partir de 1997.

As informações provenientes do SAEB contribuem para a formulação, reformulação e controle das políticas públicas de ensino com o intuito de promover o avanço da qualidade, a isonomia e a eficiência do sistema educacional.

A atual configuração do SAEB consiste em três avaliações externas em larga escala. Em 2005, o SAEB foi reestruturado e sua organizacão passou a considerar a Avaliação Nacional da Educação Básica - ANEB, que preservou os objetivos e os procedimentos da avaliação já realizada pelo SAEB, com foco na gestão da educação básica, e incorporou a sua estrutura a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar - ANRESC, reconhecida como Prova Brasil, que tem por objetivo avaliar a qualidade do ensino ministrado nas escolas das redes públicas. A fim de analisar os graus de alfabetização e letramento em Língua Portuguesa e conhecimento da Matemática, o SAEB introduziu, em 2013, a Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA).

A fim de avaliar o desempenho escolar e acadêmico ao fim do ensino médio, além de diagnosticar as competências e as habilidades desenvolvidas pelos alunos ao longo do ensino fundamental e médio, necessários na vida acadêmica, no mundo do trabalho e para o exercício da cidadania, em 1998, foi criado o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. O exame é realizado anualmente e aplicado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP e Ministério da Educação - MEC.

Seu público alvo são os alunos que estão concluindo ou que já concluíram o ensino médio em anos anteriores.

De acordo com a portaria MEC N^{o} 438/98 [1], os objetivos do ENEM são:

i) conferir ao cidadão parâmetro para auto-avaliação, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;

ii) criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do ensino médio;

iii) fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;

iv) constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio.

No campo do ensino superior, o Programa de Avaliação Institucional das Universidades Brasileiras - PAIUB foi instituído pelo MEC em 1993, para que as instituições de ensino superior elaborassem sistemas de avaliação internos, com vistas ao aperfeiçoamento das instituições, por meio do desenvolvimento de três fases: avaliação interna, avaliação externa e reavaliação. Uma das características deste programa foi a adesão voluntária das universidades, assim a etapa inicial do processo dava-se através de auto-avaliação da instituição e que implicava na avaliação externa. Este programa teve curta duração, porém conseguiu aceitação da cultura da avaliação institucional e possibilitou mudanças concretas na prática universitária.

Entre os anos de 1996 e 2003, o Exame Nacional de Cursos, conhecido como Provão, tinha a finalidade de avaliar anualmente os cursos de graduação. O objetivo com a avaliação, organizada pelo INEP e pelo MEC, era analisar a qualidade e a eficiência das atividade de ensino, pesquisa e extensão do ensino superior no país. O exame era realizado pelos concluintes dos cursos de graduação.

Historicamente, este foi um período de notável expansão do ensino superior no país, principalmente do ensino superior privado. Em [7], Dias Sobrinho analisa as causas sociais e políticas deste crescimento, além de refletir os méritos e as deficiências do Provão. A expansão do ensino superior da época mencionada compôs um cenário onde o sistema de avaliação do ensino superior também desenvolvia funções controladoras e reguladoras. Uma das consequências do Exame Nacional de Cursos foi a classificação ordenada das instituições de ensino superior, determinando reestruturação das instituições que recebessem avaliações negativas através de medidas como a qualificação do corpo docente, com a contratação de mestres e doutores, melhoria das instalações físicas como laboratórios e bibliotecas, entre outros.

No PAIUB o foco de avaliação visava a totalidade do processo e a missão da instituição na sociedade, tendo como parâmetro a globalidade institucional, considerando-se as diversas dimensões e funções das IES. O Provão destacava os cursos de graduação, no aspecto do ensino, com função classificatória, com o objetivo de construir uma estrutura de fiscalização, regulação e controle estatal.

Devido a inúmeras deficiências, o Provão foi extinto, dando lugar ao Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior - SINAES, que foi criado, pela Lei no. 10.861/2004 [2] e este é o sistema de avaliação usado atualmente. O SINAES foi concebido como um sistema de avaliação global e integrado do ensino superior brasileiros. Sua concepção tem por base os estudos e reflexões contidos em [3] e tem por princípio desenvolver a qualidade do ensino superior, conduzir a sua expansão, zelar pela efetividade acadêmica e social, e aprofundar os compromissos e responsabilidades sociais do ensino superior.

A estruturação do SINAES considera uma sistemática que emprega múltiplos instrumentos de avaliação, aplicados em etapas, combinada a diversas metodologias, a fim de capturar a complexidade do sistema educacional.

Assim O SINAES é constituído por três processos diferenciados, a saber:

1. avaliação das instituições de educação superior,
2. avaliação dos cursos de graduação,
3. avaliação do desempenho dos estudantes.

A perspectiva de avaliação do SINAES, como um sistema, considera analisar a estrutura como um todo, analisando-se instituições, sistema, indivíduos, aprendizagem, ensino, pesquisa, administração, impacto e vinculação social. Os estudantes, os cursos de graduação e a instituição não são considerados em separado, e esta integração constitui um avanço em relação ao método utilizado no Exame Nacional de Cursos. Para Dias Sobrinho [7]: “A análise de cada parte deve levar à compreensão do todo e, reciprocamente, a compreensão da totalidade institucional é referência para o conhecimento das partes (p.210)”.

O SINAES fundamenta-se na concepção universal de educação superior, onde a formação integral do educando é meta a ser atingida, isto é, pretende-se formar cidadãos, que demonstrem competências profissionais (técnicas e/ou científicas), responsabilidade ético-social e capacidade de emancipação individual. Sob esta perspectiva, que põe a sociedade e seu bem estar como referência, a educação não é concebida como mercadoria.

Um ponto importante a ser destacado do SINAES é o desejo da articulação entre a avaliação e a regulação. A partir de resultados da avaliação integral, a atividade de regulação seria mais coerente e capaz de contribuir para atingir os objetivos da educação superior.

Na avaliação institucional, interna e externa, o SINAES considera dez dimensões, quais sejam:

1. Missão e o plano de desenvolvimento institucional;
2. Política para o ensino, a pesquisa, a pós-graduação e a extensão;
3. Responsabilidade social da instituição de ensino superior;
4. Comunicação com a sociedade;
5. As políticas de pessoal e de carreiras do corpo docente e do corpo técnico-administrativo;
6. Organização de gestão da instituição de ensino superior;
7. Infra estrutura física;
8. Planejamento de avaliação;
9. Políticas de atendimento aos estudantes;
10. Sustentabilidade financeira.

Em relação, especificamente, aos cursos de graduação são considerados três aspectos:

1. Organização didático-pedagógica;
2. Perfil do corpo docente:
3. Instalações físicas.

Retomando as dez dimensões propostas pelo SINAES, destacamos que a oitava dimensão trata do planejamento de avaliação e a nona dimensão diz respeito à política de atendimento aos estudantes, e entre os estudantes temos o egresso. O instrumento de avaliação institucional estabelece o acompanhamento do egresso por meio de intrumentos adequados, como pesquisas ou estudos, com o intuito de obter informações sobre a percepção dos egressos sobre formação adquirida, tanto profissional quanto referentes à construção da cidadania. Portanto, este trabalho deseja atender estas aspectos que compõem o SINAES, no contexto do curso de graduação em Matemática da UEL.

Não obstante, o SINAES apresentar esta visão global que analisa a identidade institucional, a diversidade do sistema e represente um avanço em relação ao Provão, o SINAES demonstra suas restrições e fragilidades, tais como: adotar a prática de *rankings*, a partir dos resultados do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes - ENADE; a visão equivocada, por parte principalmente da mídia e da sociedade, de que o SINAES limita-se unicamente ao ENADE; obstáculos operacionais decorrentes da falta de estrutura adequada por parte do INEP e a escassez de profissionais com experiência em avaliação.

Logo torna-se necessário atenção para que a visão de avaliação integrada do SINAES seja cumprida e reconhecida, para que se supere o ponto de vista anunciado pela mídia, onde classificações numéricas e rankings se sobressaem.

A avaliação segundo o estudante egresso

Considerando que este trabalho pretende avaliar o curso de Matemática na perspectiva do egresso, é preciso compreender o termo "egresso". Etimologicamente, egresso significa que saiu, que se afastou, que deixou de pertencer a uma comunidade, conforme [8]. No âmbito educacional surgem concepções distintas de egresso: por um lado o termo egresso refere-se aos alunos formados, que colaram grau na instituição de ensino, por outro o conceito de egresso é mais amplo ao considerar todos que deixaram o sistema educacional, por caminhos diversos: diplomados, alunos desistentes, transferidos ou jubilados.

Nesta pesquisa, consideramos como egresso aqueles que integralizaram todas as disciplinas do currículo de um curso, colaram grau e consequentemente são portadores de diplomas emitidos pela instituição de ensino. Lousada e Martins [10] incluem, além dos atributos já descritos, que o egresso é o indivíduo apto a ingressar no mercado de trabalho (p. 74). Um estudo abrangente sobre a concepção de egresso foi realizado por Pena em [12], onde o autor analisa as implicações do acompanhamento de egressos na avaliação institucional.

Segundo o Roteiro de Auto-Avaliação Institucional [4], proveniente do SINAES, em sua nona dimensão, apresenta como núcleo básico e comum a inserção profissional dos egressos e a participação dos egressos na vida da instituição de ensino e no núcleo de temas optativos orienta sobre a existência de mecanismos para conhecer a opinião dos egressos sobre a formação recebida, tanto curricular quanto ética e apresenta as seguintes questões:

1. qual a situação dos egressos? Qual o índice de ocupação entre eles? Há relação entre a ocupação e a formação profissional recebida?
2. existem mecanismos para conhecer a opinião dos empregadores sobre os egressos da instituição? Quais?
3. é utilizada a opinião dos empregadores dos egressos para revisar o plano e os programas? Como é feita?
4. existem atividades de atualização e formação continuada para os egressos? Quais?
5. há participação dos egressos na vida da instituição? Como?
6. que tipos de atividades desenvolvem os egressos? Que contribuições sociais têm trazido?

No item "Documentação, dados e indicadores desta dimensão", o documento instrui para que sejam realizadas pesquisas ou estudos sobre os egressos e/ou empregadores dos mesmos, que contenham dados sobre a ocupação dos egressos; diagnóstico de evidências de atividades de formação continuada para os egressos.

Por meio de pesquisas que considerem os elementos indicados, é possível comparar a formação efetivamente recebida com o perfil do concluinte e os objetivos do curso, propostos no projeto político pedagógico do curso.

O ponto de vista do egresso é importante porque ele é o resultado final de anos de trabalho, a resposta de seu empenho individual e do trabalho coletivo do sistema educacional. Foi ele quem adquiriu conhecimentos científicos, técnicos e operacionais, recebeu capacitação profissional e formação cidadã. A contribuição do egresso pode auxiliar verifica se a estrutura curricular do curso foi adequada para sua educação, se a formação oferecida proporciona segurança para seu desempenho profissional, se o mesmo tornou-se autônomo e construiu identidade ético-social. O egresso conviveu com professores e pessoal técnico-administrativo. Vivenciou o ambiente universitário tanto no aspecto acadêmico, quanto nos problemas cotidianos relacionados à infraestrutura ou políticas de permanência e acessibilidade. É o egresso que está enfrentando o mercado de trabalho e seus desafios. Ele quem está aperfeiçoando-se nos programas de pós-graduação ou formação continuada. Somente o egresso pode responder se, ao concluir um curso de graduação, suas expectativas foram correspondidas.

Conclusão

A avaliação de cursos de graduação segundo o ponto de vista do egresso é o ponto central deste trabalho, onde se pretende traçar o perfil dos egressos do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, verificando se os objetivos do curso e se o perfil do concluinte, estabelecidos no projeto político pedagógico, foram atingidos. Para tanto, fizemos uma revisão sobre temas como avaliação educacional, avaliação do ensino superior no Brasil e avaliação realizada por egressos.

Acreditamos que o egresso contribuirá com informações reais que impactarão na qualidade do curso. Desta forma, esperamos oferecer, ao Colegiado e ao Núcleo Docente Estruturante do curso de Matemática, subsídios para a crítica, reflexão e ação sobre o projeto político pedagógico do curso. À longo prazo, esperamos que o desenvolvimento de pesquisas com o egresso, torne-se uma prática contínua que estabeleça um caminho permanente de diálogo entre os egressos do curso de Matemática e a Universidade Estadual de Londrina.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao suporte oferecido pelo Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, onde este trabalho está sendo desenvolvido.

Referências

[1] BRASIL. ENEM Lei no 438, de 28 de maio de 1998. Brasília, 1998. Disponível em < http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes_p0178-0181_c.pdf > . Acesso em: 13.jan.2018.

[2] BRASIL. SINAES Lei no 10.861, de 14 de abril de 2004. Brasília, 2004. Disponível em < http://portal.inep.gov.br/superior-sinaes >. Acesso em: 08.mai.2017.

[3] BRASIL. Bases para uma nova proposta de avaliação da educação superior . Brasília, 2003. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/sinaes.pdf >. Acesso em: 13.jan.2018.

[4] BRASIL. Roteiro de Auto-Avaliação Institucional - Orientações Gerais . Brasília, 2004. Disponível em < http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484109/Roteiro+de+auto-avaliação+institucional+orientações+gerais+2004/55b435d4-c994-4af8-b73d-11acd4bd4bd0?version=1.2>. Acesso em: 13.jan.2018.

[5] CARDINET, Jean. *Pour apprécier le travail des élèves*, Institut roman de recherches et de documentation pédagogiques, Neuchâtel,1984

[6] DIAS SOBRINHO, José. Avaliação educativa: produção de sentidos com valor de formação, *Avaliação*, Campinas, Sorocaba, SP, v.13, n. 1, p. 193-207, 2008.

[7] DIAS SOBRINHO, José. Avaliação e transformações da educação superior brasileira (1995-2009): do provão ao Sinaes, *Avaliação*, Campinas, Sorocaba, SP, v.15, n.1, p. 195-224, 2010.

[8] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda, *Dicionário Aurélio.*5 ed., Curitiba, Editora Positivo, 2014.

[9] HAYDT, Regina Cazaux, *Avaliação do processo ensino aprendizagem.* São Paulo, Editora Ática, 1992.

[10] LOUSADA, Ana Cristina Zenha, MARTINS, Gilberto de Andrade. Egressos como fonte de informação à gestão do curso de ciências contábeis, *Revista Contabilidade Financeira - USP*, São Paulo, n. 37, p. 73-84, 2005.

[11] LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar* São Paulo, Cortez Editora, 2005.

[12] PENA, Mônica Diniz Carneiro. Acompanhamento de egressos: análise conceitual e sua aplicação no âmbito educacional brasileiro, *Educação & Tecnologia*, Belo Horizonte, v.5, n. 2, p. 25-30, 2000.

[13] SACRISTÁN, José Gimeno, GÓMEZ, Angel Pérez. *Compreender e transformar o ensino.* Trad. Ernani F. da Fonseca Rosa. 4. ed., Porto Alegre, Artes Médicas Sul, 1998.

[14] SANT'ANNA, Ilze Martins. *Por que avaliar? Como Avaliar?: Critérios e Instrumentos.* Petrópolis, Vozes, 1995.

[15] SOUSA, Sandra Maria Zákia Lian. Possíveis impactos das políticas de avaliação do currículo escolar, *Cadernos de pesquisa*,São Paulo, n. 119, p. 175-190, 2003.

[16] TYLER, Ralph W., General statement on evaluation, *Journal of Educational Research*, n. 35, p.492-501, 1942.

[17] UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, Acompanhamento do Egresso, Universidade Estadual de Londrina, Pró-Reitoria de Planejamento; Coordenação: Ricardo de Jesus Silveira, *Cadernos de Avaliação Institucional,* 5, Londrina: UEL, 65p., 2006.

[18] VIANNA, Heraldo Marelim. *Introdução à avaliação educacional.* São Paulo, Ibrasa, 1989.

A Trissecção do Ângulo

Takaessu, Carlos; Carvalho, Ana Márcia F. Tucci de.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um breve relato sobre um dos três problemas clássicos da geometria grega, conhecido como Trissecção do Ângulo, o qual consiste em dividir um ângulo qualquer em três partes iguais usando apenas uma régua não graduada e um compasso. Iremos introduzir o problema e então mostrar matematicamente porque o problema não pode ser resolvido usando apenas os instrumentos acima mencionados.

PALAVRAS-CHAVE: Trissecção do Ângulo. Números Construtíveis. Teoria de Galois.

INTRODUÇÃO

Apesar do problema da trissecção do ângulo ser um clássico da geometria e existir há aproximadamente 428 a.C. não se sabe ao certo o que o originou (MEES, 1999). Uma das possíveis causas é a construção de polígonos regulares, como o eneágono (polígono regular de nove lados). Para construir um eneágono é preciso dividir o ângulo de 360º em nove partes iguais e consequentemente dividir 120º em três partes iguais, como mostra a figura 1 abaixo.

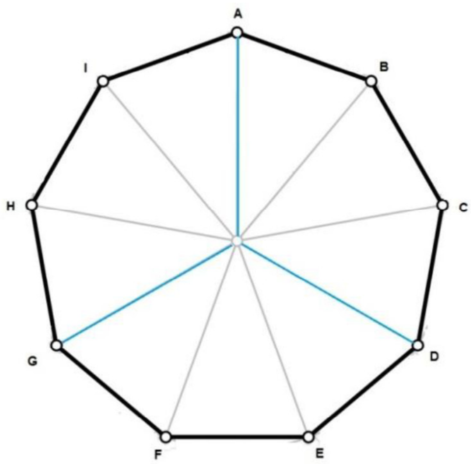


Figura 1: Divisão dos ângulos do eneágono

Outro problema da qual a trissecção do ângulo pode ter surgido é a bissecção do ângulo, pois como é possível dividir qualquer ângulo em duas partes iguais, usando régua não graduada e compasso, é natural tentar dividir um ângulo em mais partes. Assim como a bissecção do ângulo é possível, conseguimos dividir um segmento de retas em n partes iguais, o que também pode ter contribuído para a tentativa de dividir um ângulo em n partes, e particularmente em 3 partes iguais (MEES, 1999).

Este problema, que intrigou muitos matemáticos, foi mostrado como impossível pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel em 1837. Embora Wantzel tenha demonstrado que é impossível dividir um ângulo qualquer em três partes iguais, algumas pessoas continuaram tentando trisseccionar todos os ângulos. Mesmo em 1943, o matemático americano Howard Eves afirma que "todos os anos os jornais de matemática e os membros da classe dos professores de matemática do país (USA) recebem muitas comunicações dos "trisseccionadores de ângulos" e não é raro ler-se em jornais que alguém finalmente resolveu o evasivo problema".

OBJETIVOS E METODOLOGIA

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que não é possível trissectar um ângulo qualquer utilizando apenas régua não graduada e compasso. Para que a demonstração possa ser feita, é preciso conhecer alguns conceitos de álgebra abstrata (como grupos, anéis, polinômios e extensão de corpos) e tópicos de Teoria de Galois (Évariste Galois - início do século XIX).

Como a Teoria de Galois utiliza muitos conceitos, estarão aqui somente os fundamentais para a discussão do problema proposto. As definições e demonstrações aqui encontradas foram baseadas nos livros "Introdução à Teoria de Galois" (KAPLANSKY,1966) e "Introdução à Álgebra" (GONÇALVES, 2015).

Soluções particulares e soluções mecânicas

Neste parágrafo apresentamos construções particulares (1 e 2) e construções mecânicas (3)

Primeiramente, devemos salientar que uma diferença entre este problema e os outros dois problemas clássicos da geometria grega (duplicação do cubo e quadratura do círculo) é que para determinados ângulos, é possível obter uma solução usando apenas a régua não graduada e o compasso. Um dos ângulos que possibilita a trissecção é o ângulo reto.

Pappus de Alexandria mostra no livro IV de sua Coleção matemática que conseguiu dividir um ângulo reto através de um triângulo equilátero. "Se o ângulo for reto, tomaremos uma reta BG sobre a qual descreveremos o triângulo equilátero BDG e, dividindo o ângulo compreendido pelas retas DB, BG em duas partes iguais, teremos o ângulo compreendido pelas retas AB, BG dividido em três partes iguais” (RODRIGUES, 2001, p. 13).O esquema final é mostrado na figura 2 abaixo.

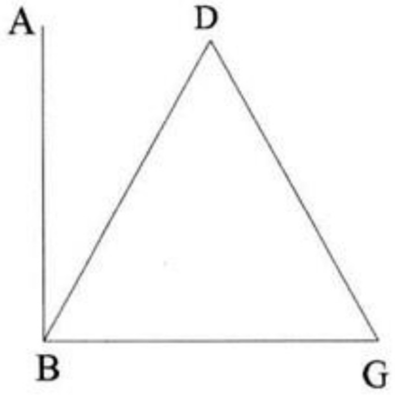


Figura 2: Trissecção do ângulo reto

Outra construção conhecida é a construção de Nêusis, a qual exporemos a seguir.

Sejam BA e BC os lados que determinam o ângulo que pretendemos trissectar (Figura 3).

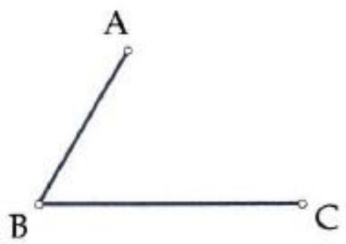


Figura 3: Segmentos AB e BC

Pelo ponto A traça-se uma paralela e uma perpendicular ao outro lado. O segmento DE é inserido entre estas duas retas de modo a que o seu comprimento seja duplo do comprimento do segmento AB e, ainda, de tal modo que o ponto B, vértice do ângulo a trissectar, esteja no seu prolongamento (Figura 4). Então, o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC.

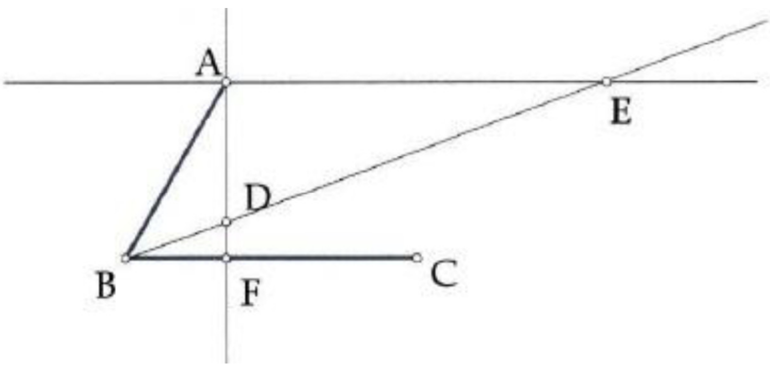


Figura 4: Construção de Nêusis

Mostraremos que o ângulo ABC é trissectado pela reta BD. Seja H o ponto médio do segmento DE. Por definição temos que DE=2AB e o ângulo DAE é reto. Podemos circunscrever uma circunferência com centro em H(pois DE é o diâmetro e qualquer ponto (A) da circunferência tem ângulo reto quando traçado segmentos que o ligam ao diâmetro) que passa pelos pontos A e D, como mostra a Figura 5 abaixo.

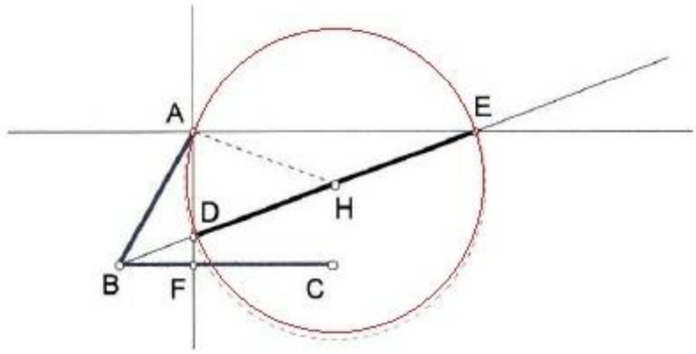


Figura 5: Circunferência com centro em H

Assim, temos que o raio da circunferência é BA e portanto AH=BA e AH=HE, formando os triângulos isósceles BAH e AHE. Além disso,o ângulo BEA é congruente ao ângulo EBF (interno alterno). Se chamarmos o ângulo EBF = BEA de x, temos que o ângulo EAH é x e AHE é 180 - 2x. Então o ângulo AHD é 180-(180-2x)=2x e portanto o ângulo ABH também é 2x (triângulo isósceles). Assim, temos a divisão de ABC com os ângulos x e 2x, ou seja, x é um terço de ABC.

A construção de Hípias, que apresentamos a seguir, é mecânica, e soluciona o problema (usando mais do que uma régua não graduada e compasso) da seguinte maneira: Desenha-se um quadrado BB'C'C, constrói-se um segmento de reta m, paralelo ao lado B'C' que desce a uma velocidade constante, desde a sua posição inicial até coincidir com o lado BC. Ao mesmo tempo, um segmento de reta k que começa em BB' despenca em movimento circular até chegar no lado BC. Os movimentos de m e k começam e acabam no mesmo instante. Se denominarmos de A o ponto onde a reta k e m se intersectam e desenharmos sua trajetória, obtemos a curva da trissectriz (Figura 6).

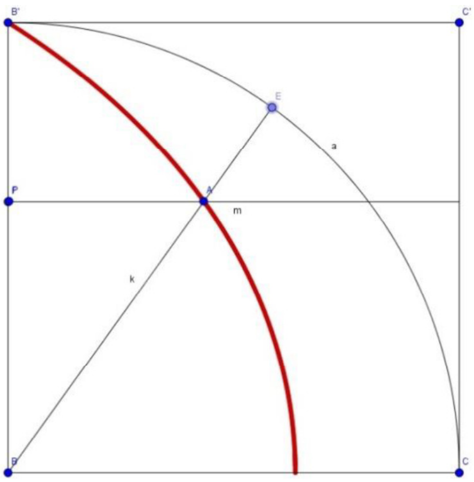


Figura 6: Trissectriz

Como o o intervalo de tempo é o mesmo para os movimentos de m e k, a trissectriz nos gera a proporção:

$$\frac{BB'}{BP} = \frac{arcoB'C}{arcoEC}$$

Sabendo desta igualdade, dividimos o segmento BP em três segmentos iguais (BR,RQ,QP). Agora traçamos o ponto L na intersecção da trissectriz com o segmento paralelo a BC que sai de R. Ao traçarmos uma reta por BL, ela passará por um ponto do arco formado pelo movimento de k, este ponto será o ponto N.

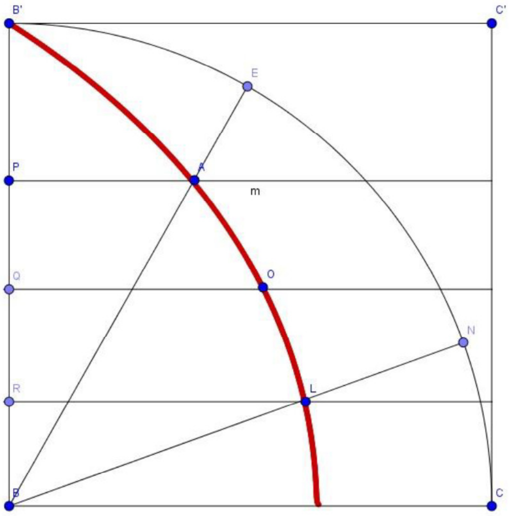


Figura 7: Ângulo trissectado

Agora temos:

$$\frac{BR}{BP} = \frac{arcoNC}{arcoEC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{arcoNC}{arcoEC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{BE\cdot(angCBN)}{BE\cdot(angCBA)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{(angCBN)}{(angCBA)}$$

e portanto obtemos a terça parte do ângulo CBA.

Alguns resultados oriundos da Álgebra

<u>Definição 1:</u>Um grupo (G,*) é um conjunto G munido de uma operação * que satisfaz as propriedades:

- Associativa

$$(a*b)*c = a*(b*c),\ \forall\ a,b,c \in G$$

- Existe um elemento 0∈ G tal que:

$$0+x = x = x+0,\ \ \forall\ x \in G$$

- Para todo x ∈G ∃-x ∈G tal que:

$$x*(-x) = 0 = (-x)*x$$

Caso o grupo também seja comutativo (x*y = y*x ,∀ x,y ∈ G) então diz-se que o grupo é abeliano. Um exemplo de grupo abeliano é o conjunto dos números reais com a adição (ℝ,+).Se os conjuntos A ⊂ B são grupos munidos da operação *, diz-se que (A,*) é subgrupo de B.

Exemplo 1:{1,-1, □,- □} é subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}$. De fato, seja o conjunto A= {1,-1, □,- □} munido da multiplicação.

1. Seja a,b∈ A. Como ab = ab e ab∈ A a operação é fechada em A.
2. Devemos mostrar que (A,·) é um grupo.

- Associativa: Como A ⊂ C e C é associativa para a multiplicação, então em A também é associativa.
- Elemento Neutro: Seja a ∈ A e *e* o elemento neutro de A. Temos que:

a1 = a = 1a e portanto *e* = 1.

- Elemento simétrico: Seja a ∈ A e a' o simétrico de a. Então,

a a' = 1 = a'a e portanto a' =$\frac{1}{□}$. Assim, os elementos simétricos de A são:

$$a = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{1} = 1 \qquad a = -1 \Rightarrow a' = \frac{1}{(-1)} = -1$$

$$a = □ \Rightarrow a' = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{(-1)} = □ \qquad a = -□ \Rightarrow a' = \frac{1}{(-□)} = \frac{(-□)}{□^2} = \frac{(-□)}{(-1)} = □$$

Assim ∀ a ∈A ∃ a' ∈A tal que a·a' = 1 = a'·a

Como a operação · é associativa em A, tem elemento neutro e elemento simétrico para todo a ≠ 0 ∈ A, então (A, ·) é grupo.

Satisfazendo as condições 1 e 2 provamos que (A, ·) é um subgrupo de □.

Anéis:

<u>Definição 2:</u> Um anel A ≠ ∅ é um conjunto denotado por (A,+, ·) munido de duas operações. Para a primeira operação ela deve ser um grupo abeliano e para a segunda operação deve satisfazer,∀ a,b,c, ∈ A:

- Associativa

$$(a·b)·c = a·(b·c)$$

- Distributiva à direita

$$a·(b+c) = a·b + a·c$$

- Distributiva à esquerda

$$(a+b)·c = a·c + b·c$$

Caso os conjuntos A ⊂ B sejam anéis, dizemos que A é um subanel de B.

Exemplo 2: Os conjuntos numéricos$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ são subanéis de $\mathbb{C}$ em relação a adição e multiplicação.

<u>Definição 3:</u> Um anel A é chamado anel de integridade quando possuir um elemento neutro para a multiplicação, for comutativo e não possuir divisores de zero, ou seja, a·b = 0⇒ a=0 ou b=0 ∀ a,b, ∈ A. Um exemplo de anel de integridade é o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$.

Corpos:

<u>Definição 4:</u>Um corpo K é um anel de integridade onde 0≠1 e os elementos diferentes de0 são inversíveis.

Uma consequência disso é que $a \cdot 0 = 0$, $\forall\ a \in K$. De fato, $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$, $\forall a \in K$

Como o corpo é um anel de integridade, as duas operações devem ser comutativas. Quando temos um anel onde a multiplicação não é comutativa chamaremos de anel de divisão.

Exemplo 3: O anel dos quatérnios $□ + □□ + □□ + □□$ (onde $□^2 = □^2 = □^2 = -1$) é um anel de divisão, pois $□□ = -□□$ e portanto a multiplicação não é comutativa.

O anel dos inteiros $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ não é um corpo pois seus elementos não possuem inverso multiplicativo. O anel dos número complexos $(\mathbb{C},+,\cdot)$ é um corpo. De fato, sabemos que $(\mathbb{C},+,\cdot)$ é um anel, devemos mostrar que além disso é de integridade e que todos seus elementos, com exceção do 0+0□, possuem inverso multiplicativo.

1. $(a+b□)(c+d□) = (c+d□)(a+b□)$, $(a+b□),(c+d□)\ \forall \in \mathbb{C}$
2. $(a+b□)(1+0□) = (a+b□)$, $\forall\ (a+b□) \in \mathbb{C}$
3. $(a+b□)(c+d□) = 0 + 0□ \Rightarrow (ac-bd)+(ad+bc)□ = 0+0i \Rightarrow ac-bd = 0$ e $ad+bc = 0 \Rightarrow (a+b□) = 0$ ou$(c+d□) = 0$, $\forall (a+b□),(c+d□) \in \mathbb{C}$
4. $(a+b□)\left(\frac{□}{□^2+□^2}+\frac{(-□)}{□^2+□^2}\right) = 1$, $\forall\ (a+bi) \neq 0+0□ \in \mathbb{C}$

Por 1,2,3 e 4 temos que $\mathbb{C}$ é um anel de integridade e por 4 temos que seus elementos são inversíveis (com exceção do 0+0□). Assim, $\mathbb{C}$ é um corpo.

Caso $J \subset K$ e J é um corpo, então diz-se que J é um subcorpo de K.O corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é um subcorpo de $\mathbb{C}$.

Polinômios:

<u>Definição 5:</u> Seja K um corpo qualquer. Chamamos de polinômio sobre K em um indeterminada x a expressão $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 \ldots + a_nx^n + \ldots$ onde $a_i \in K$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$. Dizemos que dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 \ldots + a_nx^n + \ldots$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots$ são iguais se e somente se $a_i = b_i$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$.

Vamos agora definir as operações de adição e multiplicação para o corpo K[x]:

<u>Definição 6:</u>Seja $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots \in K[x]$ e um $c \in K$, então:

- $p(x) + q(x) = (c_0) + (c_1)\cdot x + (c_n)\cdot x^n + \ldots$, onde $c_i = (a_i + b_i) \in K$
- $p(x)\cdot q(x) = (c_0) + (c_1)\cdot x^1 + (c_n)\cdot x^n + \ldots$, onde $c_0 = a_0b_0$, $c1 = a_1b_0 + a_0b_1$ eassim por diante

Note que se $p(x) = 0+0x^1 + 0x^2 \ldots + 0x^n + \ldots$ e $q(x) = a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n + \ldots \in K[x]$, então:

$$p(x) + q(x) = (0 + a_0) + (0 + a_1)x^1 + \ldots + (0 + a_n)x^n + \ldots = q(x)$$

$$q(x) + p(x) = (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x^1 + \ldots + (a_n + 0)x^n + \ldots = q(x)$$

Assim, p(x) é o elemento neutro de K[x] e denotaremos p(x) por 0_p.

Com as operações definidas anteriormente, pode-se provar que $(K[x],+,\cdot)$ é um anel de integridade em que 0_p é o elemento neutro da adição e $1_p = 1 + 0x^1 + ... + 0x^n + ...$ é a unidade de K[x] .

<u>Definição 7:</u> Se $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ...$ tal que $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$, $j > n \in \mathbb{N}$ então diz-se que o grau de p(x) é n e denotamos por $\partial p(x) = n$. Note que o grau do polinômio nulo 0_p não está definido. Podemos assim, associar uma função:

$$\partial: K[x] - \{0\} \rightarrow N$$
$$p(x) \rightarrow \partial p(x)$$

Do produto $p(x)\cdot q(x)$ nota-se que $\partial(p(x)q(x)) = \partial p(x) + \partial q(x)$

Extensão Algébrica dos Racionais:

<u>Definição 8:</u> Seja K um corpo e $L \supset K$ uma extensão de K. Diz-se que $\alpha \in L$ é algébrico sobre K se existe $f(x) \in K[x]-\{0\}$ tal que $f(\alpha)=0$. Caso contrário diz-se que α é transcendente sobre K. Os elementos algébricos sobre $\mathbb{Q}$ são ditos simplesmente algébricos.

Exemplo 4: Seja $\mathbb{Q} = K$ e $\mathbb{R}=L$, então $\sqrt[3]{2}$ é algébrico, pois é raiz do polinômio $p(x)=x^3-2 \in \mathbb{Q}[x]$.

Exemplo 5:Nas mesmas condições do exemplo anterior π é transcendente pois não é raiz de nenhum polinômio em $\mathbb{Q}[x]$.

Se $\alpha \in K$ evidentemente é algébrico pois $p(x) = x- \alpha \in \mathbb{Q}[x]$ e α é raiz de p(x). Se $\forall \alpha \in L \supset K$, α é algébrico sobre K então L é uma denominada extensão algébrica. Seja $\alpha \in L$ algébrico sobre K e seja p(x) um polinômio em K[x] mônico, de menor grau tal que $p(\alpha)=0$. Pela minimalidade do grau de p(x) segue que p(x) é o único polinômio mônico irredutível em K[x] tal que $p(\alpha)=0$, o qual denotaremos por $p(x)=irr(\alpha,K)$. Se $\alpha \in L \supset K$ definimos $K[\alpha] = \{f(\alpha)/f(x) \in K[x]\}$.

Exemplo 6: Se $\alpha = \sqrt{2}$ e $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ vamos mostrar que $K[\alpha]=Q[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\}$.

De fato, temos $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{f(\sqrt{2})/ f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$. Como $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, seque que $\exists$ $q(x),r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(x)=q(x)\cdot(x^2-2)+r(x)$, onde $r(x)=a+bx$ e então $f(\sqrt{2}) = r(\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}$ com $a,b \in \mathbb{Q}$.

Teorema 1: Se $\alpha \in L \supset K$ e se $\psi:K[x] \rightarrow L$ é definida por $\psi(f(x))=f(\alpha)$, então ψ é um homomorfismo tal que:

1. $Im(\psi) = K[\alpha]$, $K \subset K[\alpha] \subset L$
2. α é transcendente sobre K $\Leftrightarrow N(\psi)=\{0\}$
3. Se α é algébrico sobre K e $p(x)=irr(\alpha,K)$ então $N(\psi)=K[x]p(x)$ é um ideal maximal de K[x]
4. $K[x]/N(\psi) \approx K[\alpha]$ (onde ≈ denota isomorfismo)

<u>Demonstração:</u>

1. Como $\psi(f(x))=f(\alpha)$ então $Im(\psi) = \psi(K[x])= \{f(\alpha)/f(x) \in K[x]\} = K[\alpha]$
2. $(\Rightarrow)$

Se α é transcendente, então α não é raiz de f(x), exceto quando f(x)=0. Logo $N(\psi)=\{0\}$.

($\Leftarrow$)

Por hipótese $N(\psi)=\{0\}$, logo a única função em que α é raiz é a função nula, portanto $\alpha \in$ L e não é raiz de nenhum $p(x) \in K[x]-\{0\}$, logo α é transcendente.

3.

Sabe-se que p(x) é o polinômio de menor grau tal que $p(\alpha)=0$. Assim, qualquer polinômio que tenha α como raiz será de grau maior que o grau da p(x) e portanto poderá ser fatorada. Se tomarmos $f(x) \in K[x]$ arbitrário, ele terá a forma f(x)=g(x)p(x). Logo $N(\psi)=K[x]p(x)$.

$N(\psi)$ é um ideal pois se tomarmos $f(x) \in K[x]$ e multiplicarmos por $q(x) \in K[x]$ obtemos f(x)q(x)=g(x)p(x)q(x). Como p(x) é um dos divisores do polinômio, então $f(x)g(x) \in N(\psi)$.

Como $N(\psi)$ é um ideal, falta mostrar que é maximal. Seja I' ideal tal que $I \subset I'$ e $I \neq I'$. Então, $\exists\, q(x) \in I'$ tal que $q(x) \notin N(\psi)$, ou seja, $q(x) = K[x]p(x) + r(x)$, $r(x) \neq 0$. Assim, temos que os polinômios da forma f(x)= K[x]p(x) e g(x)=K[x]p(x)+ r(x) pertencem à I'. Portanto concluímos que I' é K[x] e $N(\psi)$ é um ideal maximal.

4.

Como já existe um homomorfismo entre K[x] e L basta provarmos que ele é sobrejetor para utilizarmos o Teorema do Homomorfismo. De fato, se $\alpha \in$ L existe $p(x)=(0+1\alpha+0\alpha^2+...+0\alpha^n+...) \in K[x]$ tal que $\psi(p(x))=p(\alpha)=\alpha$, portanto a função ψ é sobrejetora. Assim, pelo Teorema do Homomorfismo, $K[x]/N(\psi) \approx K[\alpha]$.

Corolário 1: Seja $\alpha \in L \supset K$. (a) Se α é algébrico sobre K, então K[x] é um subcorpo de L que contém K.(b) Se α é transcendente sobre K, então $K[\alpha]$ é um subdomínio de L isomorfo ao domínio K[x] dos polinômios em uma indeterminada x.

<u>Demonstração:</u>

(a) Pelo item 3 do Teorema 1, temos que $N(\psi)$ é um ideal e portanto $K[x]/N(\psi)$ é um corpo. Pelo item 4 do Teorema anterior temos que $K[x]/N(\psi) \approx K[\alpha] \Rightarrow K[\alpha]$ é corpo.

(b)Devemos mostrar primeiramente que $K[\alpha]$ é um subanel de L. Seja $f(\alpha),g(\alpha) \in K[\alpha]$.

- $f(\alpha)-g(\alpha)=(f-g)(\alpha) \in K[\alpha]$
- $f(\alpha)\cdot g(\alpha)=(f\cdot g)(\alpha) \in K[\alpha]$

Pelos resultados acima $K[\alpha]$ é um subanel. Mostraremos agora que não possui divisores de zero. $f(\alpha)g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$ ou $g(\alpha) = 0$ (pois $f(\alpha), g(\alpha) \in L$) como α é transcendente, então $f(\alpha) = 0(\alpha)$ ou $g(\alpha) = 0(\alpha)$.

Revisão de Álgebra Linear:

<u>**Definição 9:**</u>Seja K um corpo e V um conjunto não vazio onde estão definida as operações:

$+: V \times V \to V$ $\qquad\qquad$ $\cdot: K \times V \to V$

$(u,v) \to u+v$ $\qquad\qquad$ $(\lambda,v) \to \lambda v$

Dizemos que V é um espaço vetorial sobre K se as propriedades a seguir são válidas $\forall$ u,v $\in$ V$ e $\forall\lambda$, $\alpha\in$ K.

1. $u+(v+w) = (u+v)+w$
2. $\exists$ $0 \in V$ tal que $u+0=u=0+u$
3. $\forall$ $x \in V$ $\exists$ $y \in V$ tal que $x+y=0=y+x$
4. $u+v=v+u$
5. $1v = v$, onde 1é o elemento neutro da multiplicação do corpo (unidade)
6. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ e $(\alpha + \lambda)u = \alpha u + \lambda u$
7. $\lambda(\alpha v) = \alpha(\lambda v) = (\lambda\alpha)v$

Exemplo7: Seja S um conjunto não vazio, então o conjunto F(S,K) de todas as funções $f:S \to K$ é um espaço vetorial munido das operações a seguir. Sejam $f,g\in F(S,K)$ e $\lambda\in K$. Definindo:

- $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$, $\forall$ $s \in S$
- $(\lambda\cdot f)(s) = \lambda\cdot f(s)$$$

De fato, temos que

1. $(f+(g+w))(s) = f(s)+(g+w)(s) = f(s)+g(s)+w(s) = (f(s)+g(s))+w(s) = \quad =((f+g)+w)(s)$ $\forall$ $f,g,w \in F(S,K)$
2. $0_s\in F(S,K)$ onde $0_s = f: S \to K$ tal que $f(s)=0$ $\forall$ $s \in S$
3. $\forall$ $f \in F(S,K)$ $\exists$ $-f$ tal que $f+(-f)= 0_s=(-f)+f$
4. $(f+g)(s)=f(s)+g(s)=g(s)+f(s) =(g+f)(s)$, $\forall$ $s \in S$
5. $1\cdot f(s) = (1\cdot f)(s) = f(s)$
6. $\lambda (f+g)(s) = \lambda (f(s)+g(s)) = \lambda\cdot f(s) + \lambda\cdot g(s)$ e $(\alpha+\lambda)f(s) = \alpha\cdot f(s)+ \lambda\cdot f(s)$
7. $\lambda\cdot(\alpha\cdot f) = \alpha\cdot(\lambda\cdot f)=(\lambda\cdot\alpha)\cdot f$

<u>Definição 10:</u> Um subconjunto W não vazio de V é um subespaço vetorial se:

1. Se $w_1,w_2\in W \Rightarrow w_1+w_1\in W$
2. Se $\lambda \in K$ e $w\in W \Rightarrow \lambda w\in W$

Pelas condições acima um subespaço vetorial também é um espaço vetorial.

<u>Definição 11:</u>Dizemos que o conjunto $\{v_1,...,v_n\}$ de vetores em V é linearmente independente (l.i.) se,

dados $\alpha_1, \alpha_2, ... , \alpha_n\in K$ então

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1= \alpha_2 =...= \alpha_n=0$$

Caso contrário, dizemos que conjunto é linearmente dependente (l.d.).

Se todos os vetores de V podem ser escritos como combinação linear de $v_1,..., v_n\in V$, então o conjunto $\{ v_1,..., v_n\}$ é chamado de gerador de V e denotamos por $< v_1,..., v_n>$. Se os vetores $v_1,...,v_n$ geram V e são l.i. dizemos que $\{ v_1,...,v_n\}$ é uma base de V. É importante denotar que todo espaço vetorial V possui uma base. Caso a base seja finita com n elementos, então todas as bases de V possuem n elementos e escrevemos [V:K]=n.

<u>**Definição 12:**</u> Seja K um corpo. Uma extensão $L \supset K$ é finita se $[L:K]=n < \infty$, caso contrário diz-se que $L \supset K$ é uma extensão infinita.

Proposição 1: Seja K um corpo e $L \supset K$ uma extensão de K. Então,

1. Se $L \supset K$ é finita, então $L \supset K$ é algébrica
2. Se $\alpha \in L \supset K$ é um elemento algébrico sobre K e o grau de $irr(\alpha,K)$ é igual a n, então $\{1, \alpha, \alpha^2,..., \alpha^{n-1}\}$ é uma base do espaço vetorial $K[\alpha]$ sobre K e $[K[\alpha],K]=n< \infty$
3. Se $\alpha \in L \supset K$ é transcendente sobre K, então $K [\alpha] \supset K$ é uma extensão infinita.

<u>Demonstração:</u>

1. Seja $[L:K] = m < \infty$ e $\alpha \in L \supset K$. Como $K[\alpha]$ é um subespaço vetorial de L, segue que $[K[\alpha]:K] \leq m < \infty$. Se $[K[\alpha]:K] = n$ então $1, \alpha,..., \alpha^n$ é l.d. pois n é o número máximo de elementos l.i. e portanto existem escalares $a_0,a_1,...,a_n \in K$ não todos nulos tais que

$$a_0+ a_1\alpha^1 + ...+a_n\alpha^n = 0$$

e portanto α é algébrico sobre K.

2. Seja $\alpha \in L \supset K$ um elemento algébrico sobre K tal que $irr(\alpha,K)=n$. Vimos anteriormente que todo elemento de $K[\alpha]$ pode ser escrito de forma única como combinação linear de $1, \alpha,..., \alpha^{n-1}$. Como o conjunto $\{1, \alpha,..., \alpha^{n-1}\}$ gera $K[\alpha]$ e é l.i., então é base de $K[\alpha]$.
3. Segue diretamente do item 1

Corolário 2: Seja $\alpha \in L \supset K$. Então as afirmações são equivalentes:

1. α é algébrico sobre K
2. $[K[\alpha]:K]< \infty$
3. $K[\alpha]$ é uma extensão algébrica

<u>Demonstração</u>: Basta usar os resultados da Proposição anterior.

Um resultado que será interessante mas não será demonstrado aqui é da proposição a seguir.

<u>Proposição 2:</u>Seja $M \supset L \supset K$ corpos tais que [M:L] e [L:K] são finitos. Então $[M:K] = [M:L]\cdot[L:K]$.

Construções por Meio de Régua e Compasso

Finalmente, embasados neste arcabouço teórico, estamos em condições de retornar à discussão do problema proposto.

Seja P um subconjunto de R^2 contendo pelo menos dois pontos. Dizemos que uma reta r de R^2 é uma reta em P se r contém dois pontos distintos de P e dizemos que uma circunferência c em R^2 é uma circunferência em P quando o centro de c pertence a P e um ponto de P pertence a c.

As operações 1,2,3 abaixo são chamadas de operações elementares em P:

1. Interseção de duas retas em P
2. Interseção de uma reta em P e uma circunferência em P
3. Interseção de duas circunferências em P

<u>Definição 13:</u> Dizemos que um ponto $A \in R^2$ é construtível a partir de P se podemos determinar A através das operações elementares em P.

Denotaremos o conjunto dos pontos construtíveis por <P>, o conjunto das coordenas de P por A_n e o conjunto dos números construtíveis em $\mathbb{R}$ por $\mathcal{C}_r$.

Proposição 2: $\mathcal{C}_R$ é uma extensão algébrica dos racionais tal que $\forall\ \alpha \in \mathcal{C}_R$ temos que o grau $[Q[\alpha]:Q]$ é uma potência de 2.

Proposição 3: $u = \cos\frac{2\pi}{18}$ não é construtível.

<u>Demonstração</u>: Se $\theta = \frac{2\pi}{18}$ então $3\theta = \frac{2\pi}{6}$. Como $\frac{1}{2} = \cos 3\theta = 4\cdot\cos^3\theta - 3\cdot\cos\theta \Rightarrow 8\cdot\cos^3\theta - 6\cdot\cos\theta - 1 = 0$. Note que $p(x) = 8\cdot x^3 - 6\cdot x - 1$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e portanto $[\mathbb{Q}[u]:\mathbb{Q}] = 3$. Como $[Q[u]:Q]$ não é potência de 2, então $\cos\frac{2\pi}{18}$ não é construtível.

Teorema 2: É impossível, apenas com o uso de régua não graduada e compasso, trissectar o ângulo de 60°.

<u>Demonstração:</u> Suponhamos que $\theta = \frac{2\pi}{18} \in \mathcal{C}_R$, então $\cos\theta \in \mathcal{C}_R$, o que é um absurdo pela proposição anterior. Como $\theta = \frac{2\pi}{18} = 20^{\circ} = \frac{60^{\circ}}{3}$ não é construtível, não podemos trisseccionar o ângulo de 60º apenas com régua não graduada e compasso.

CONCLUSÃO

A Teoria de Galois nos proporciona ferramentas adequadas para solucionar alguns problemas, incluindo problemas de construção, como este da trissecção do ângulo. Ao estudar conceitos abstratos como corpos e extensões pode-se resolver problemas práticos que ficaram em aberto no mundo matemático por muitos séculos.

REFERÊNCIAS

MEES, Jociane: **Duplicação, Trissecção e Quadratura.** Dissertação (Graduação em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis., p. 18-24, 1999.

RODRIGUES, José. **Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Porto, Portugal: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. p. 13-23, 2001.

GONÇALVES,Adilson. **Introdução à Álgebra.** 2. ed. – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.2015

KAPLANSKY, Irving. **Introdução à Teoria de Galois.** 2. ed. - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. 1966

ALGUMAS POSSIBILIDADES PARA EXPLORAR TÓPICOS DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

CARVALHO[1], Ana Márcia; TAKAESSU Jr.[2], Carlos ; FURIHATA[3], Eduardo; SILVA[4], Luiza ;

RESUMO

Este trabalho, retrato de uma pesquisa em andamento cadastrada na PROPPG sob n. 10570, insere-se na área de Educação, tendo como subárea, a Educação Matemática. Realizamos o estudo sistemático e formal, como objeto matemático, de alguns aspectos de Álgebra, particularmente, tópicos de História da Álgebra, o estudo de números racionais e irracionais, transcendentes e algébricos. Como objeto didático-pedagógico, fazemos a elaboração e aplicação de atividades de ensino aprendizagem na aula de matemática, na Educação Básica. Utilizamos a metodologia qualitativa, em âmbito geral, para nortear a realização da pesquisa, a metodologia da sessão integrada para a condução das atividades semanais com os alunos de graduação e utilizamos a metodologia da resolução de problemas e o uso de informática para a aplicação das atividades de ensino-aprendizagem na Educação Básica. O objetivo é o estabelecimento de conexões entre o conhecimento matemático avançado e a sala de aula de matemática do ensino fundamental e do ensino médio. Realizamos (i) o estudo aprofundado de tópicos da matemática que explorem como temática geral tópicos de Álgebra (ii) a elaboração e a aplicação de atividades de ensino de matemática nos níveis fundamental e médio, cujo objeto matemático baseia-se no conceito da temática (iii) a utilização da História da Matemática, particularmente História da Álgebra, para nortear ações. Os resultados parciais obtidos foram o aprofundamento teórico no tema, a qualificação na formação inicial e continuada de professores. Nossa etapa atual consiste na elaboração das atividades que serão aplicadas na sala de aula.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebra. História da Matemática. Educação Básica. Educação Matemática.

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta algumas considerações sobre o projeto “Interfaces entre Tópicos de Álgebra e Educação Matemática”, cadastrado na PROPPG sob n. 10570, o qual se encontra em andamento.

Álgebra é um ramo da matemática que possibilita um contato direto com o formalismo matemático, entendido como os modos de conceber e demonstrar teoremas, baseados numa

[1]Professora Adjunta do Departamento de Matemática. Universidade Estadual de Londrina. Email: anatuccicarvalho@gmail.com
[2]Graduação em Matemática em andamento. Universidade Estadual de Londrina.
[3] Graduação em Matemática em andamento. Universidade Estadual de Londrina. Bolsista Fundação Araucária.
[4] Graduação em Matemática em andamento. Universidade Estadual de Londrina.

axiomática preestabelecida e em definições e conceitos bem determinados, o que certamente constitui bagagem essencial para o aluno de graduação em Matemática e é elemento fundamental para a continuação nos estudos na pós-graduação em Matemática ou áreas afins.

Por outro lado, o conhecimento da História da Matemática possibilita a compreensão da Matemática como fruto de produção humana, com suma importância na evolução das sociedades.

D'Ámbrósio (2013) alerta para a importância do estudo da História da Matemática, valorizando a origem do pensamento matemático como inter-relacionado com a necessidade de sobrevivência das comunidades, permitindo que os povos, ao longo do tempo, desenvolvessem estratégias para elaboradas para a resolução de problemas práticos e teóricos. Para este autor, existem muitos motivos para que se ensine História da Matemática, entre os quais o fato que de a matemática é uma manifestação cultural e, como tal, deve ser resgatada e incorporada nas práticas curriculares e nas ações pedagógicas. Além disso, como afirma este autor, "Não se pode entender conhecimento sem se atentar para o ciclo completo do conhecimento, desde sua geração, organização intelectual e social, transmissão, expropriação, institucionalização e difusão" (D'AMBRÓSIO, 2013, p.18).

Partimos, deste modo, de duas premissas. Primeiro, a de encarar Geometria e a matemática como *ciência das relações*, assumimos uma concepção que permite, por exemplo, pensarmos no famoso Teorema de Pitágoras como em seu enunciado clássico, (Se é dado um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c, então temos que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, isto é $c^2 = a^2 + b^2$) ou como um resultado que permite relacionar um certo tipo de grandeza, qual seja, o conceito de ângulo (no caso, o triângulo é reto), com outro tipo de grandeza, qual seja, o comprimento dos catetos e hipotenusa. A segunda premissa é a de que, sendo criação humana, a matemática deve ser entendida como produto inacabado, sujeito a novas descobertas e interpretações.

Tomar a concepção de matemática, como ciência das relações, parece-nos interessante porque permite (re)pensar o ensino e a aprendizagem de matemática não como processos estanques, quer sejam temporalmente, quer sejam quando se fazem referências aos conteúdos abordados, isto é, em suas diversas áreas, geometria, álgebra, cálculo, aplicações, etc., quer, ainda, quando a matemática é pensada como instrumento para estabelecer relações de compreensão do sujeito com o meio que o entorna.

Outra concepção fundamental é a posição daqueles que agem embasados numa premissa de uma Educação Matemática compreendida de forma ampla. Concordamos neste aspecto, por exemplo, com Fiorentini e Lorenzato, ao entenderem que o educador matemático, na consideração entre as ciências matemáticas e a educação, "tende a colocar a matemática a serviço da educação, priorizando, portanto, esta última, mas sem estabelecer uma dicotomia entre elas" (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 4).

O projeto "Interfaces entre Tópicos de Álgebra e Educação Matemática" privilegia estas duas últimas concepções, valorizando o conhecimento matemático avançado e colocando-o como conhecimento basilar do futuro professor de matemática, para que possa, a partir dele, desenvolver práticas pedagógicas e didáticas para serem utilizadas na Educação Básica e que estejam alinhadas com a Educação Matemática.

Além disso, a área da Educação Matemática trouxe ao ensino de matemática muitas descobertas, novos desafios e novas perspectivas sobre o que é o aprender matemática, como este aprender acontece e como as diversas pessoas envolvidas (professores, alunos, pais, diretores escolares, educadores, coordenadores pedagógicos) se relacionam e encaram novas possibilidades.

> A Educação Matemática toma como ponto de partida o cuidado com o aluno, considerando sua realidade histórica cultural e possibilidades de vir-a-ser; cuidado com a Matemática, considerando-se sua história e modos de manifestar-se no cotidiano e na esfera científica; cuidado com o contexto escolar, lugar onde a educação escolar se realiza; cuidado com o contexto social, onde as relações entre pessoas e entre grupos, entre instituições são estabelecidas e onde a pessoa educada de um ponto de vista matemático e solicitada a situar-se, agindo como cidadão que participa das decisões e que trabalha participando das forças produtoras (BICUDO, 1999, p.7).

Concordando com Ponte (2002), assumimos uma compreensão de educação matemática que permite o estabelecimento de uma postura onde a matemática é um campo de saber em permanente desenvolvimento, influenciado pelas condições históricas e políticas nas quais se insere, lugar em que o aluno é visto como sujeito no processo de aprendizagem e o professor é considerado como sujeito do seu processo de desenvolvimento profissional.

A ideia de número aparece de maneira natural já no início da infância, quando, mesmo sem uma escolarização formal, é comum indagarmos a uma criança: 'quantos anos você tem?' e pedirmos a ela para contar 'nos dedinhos'. Faz-se assim um contato natural com o conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos, utilizados desde o ensino infantil e nos primeiros anos de ensino fundamental. Estes números são conhecidos há tantos milênios que levou o famoso matemático Kronecker dizer em Berlim, em 1886: "Deus criou os números naturais, todo o resto é obra do homem" (STRUIK, 1987, p.257).

As necessidades básicas cotidianas levam à introdução de frações, como ½, 1/3, 5/4, etc., o que acontece ainda no primeiro ciclo do ensino fundamental (na 4ª. série, geralmente). Logo no início do 2º segmento do Ensino Fundamental, os números negativos aparecem como conteúdo, originando a ampliação dos números naturais, para o conjunto de todos os inteiros, que em matemática, é denotado por Z. Apresentam-se as frações negativas, completando o conjunto dos números racionais, denotado por Q, assim chamados porque são 'razões' de números inteiros. Assim, os alunos iniciam os estudos aritméticos conhecendo vários números de natureza diferente, suas operações, relações e aprendem que $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}$[5].

Normalmente, é no final do 2º. ciclo do Ensino Fundamental, já no nono ano (PARANÁ, 2010), que se dá o primeiro contato com os números irracionais. Em muitos livros didáticos, feito através da geometria, mostrando a relação entre perímetro e raio da circunferência, aparece o número irracional π. Muitos livros didáticos cometem neste ponto o 'pecado da circularidade', dizendo que o conjunto dos irracionais I, é obtido da diferença entre o conjunto dos reais R e dos racionais Q e depois, a seguir, caracterizando os números reais R como sendo a união disjunta de I e Q.

Não se sabe exatamente quando a Escola de Pitágoras tomou conhecimento da existência de grandezas que não poderiam ser comparadas por meio de números inteiros. Comenta-se que um tal de Hipasus de Metapontum (400 a.C.) foi expulso da vizinhança e depois afogado na mar como punição por ter dito que descobrira tais grandezas (BARON, 1985, v1, p.25).

Portanto, remonta a Pitágoras, e sua escola, a descoberta de que um sistema de números constituído de números inteiros e razões entre os números não é suficiente para representar relações entre quantidades contínuas, tais como segmentos de reta, superfícies e volumes.

Desta forma, os conjuntos numéricos ampliam-se, e o corpo R, dos números reais, é introduzido. Obtemos, então, as inclusões matemáticas: $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$. Os números reais então constituem um conjunto maior, formado por todos os números que podem ser escritos como frações de inteiros, os racionais, e todos os irracionais.

A utilização do sistema numérico, portanto, dá-se desde o início da escolarização e permeia grande parte do currículo de matemática, conhecida que é por ser "a ciência dos números".

O desenvolvimento desta pesquisa, no momento em que este projeto de encontra, dá-se por meio de estudos dos referenciais teóricos de Álgebra, discutidos semanalmente em encontros de Iniciações Científicas, além da produção de uma dissertação de mestrado na temática. Especificamente, foram desenvolvidas, ou ainda se encontram em andamento, quatro iniciações científicas: três focadas nos problemas clássicos da antiguidade (duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo); uma focada em tópicos relacionados com a teoria de números primos. A dissertação de mestrado, dentro do programa Profmat, faz correlação entre a teoria de números construtíveis a sala de aula de matemática, por meio da utilização do software dinâmico Geogebra para elaboração de atividades voltadas para o Ensino Médio.

[5] Historicamente, a 'descoberta' dos números seguiu, de forma geral, o seguinte caminho: primeiro os naturais, as frações positivas; mais tarde, os hindus inventaram o zero e, no início dos tempos modernos, algebristas italianos inventaram os números negativos (STRUIK, 1987).

Os objetivos são o estabelecimento de conexões entre o conhecimento matemático aritmético/algébrico e a sala de aula de matemática do ensino fundamental e do ensino médio e a elaboração de atividades que podem ser utilizadas na sala de aula. Propomos

(i) o estudo aprofundado de tópicos da matemática que explorem a temática de Álgebra;

(ii) articulação entre Universidade e Educação Básica, por meio de atividades matemática para os níveis de ensino Fundamental e Médio, cujo objeto matemático baseia-se em conceitos da temática;

(iii) utilizar a História da Matemática como 'pano de fundo' para o estudo da Álgebra.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Em âmbito geral, a pesquisa realiza-se utilizando-se a perspectiva da pesquisa qualitativa.

Para Chizzotti (2006), atualmente a abordagem qualitativa de pesquisa envolve as ciências humanas e sociais, sendo transdisciplinar, assumindo variados paradigmas de análise oriundos de diferentes correntes do pensamento filosófico e linhas teóricas tais como "o positivismo, a fenomenologia, a hermenêutica, o marxismo, da teoria crítica e do construtivismo" (CHIZZOTTI, 2006, p. 221).

Consequentemente, a pesquisa qualitativa assume como uma de suas premissas, o caráter construtível do conhecimento humano, sendo este passível de interpretação, sujeito às próprias práticas e concepções do sujeito pesquisador. Sendo influenciada por aquele que realiza a pesquisa, tal abordagem não é estática, torna-se passível de ressignificações. Como aponta Rey (2015)

> (...) não existe nada que possa garantir, de forma imediata no processo de pesquisa, se nossas construções atuais são as mais adequadas para dar conta do problema que estamos estudando. A única tranquilidade que o pesquisador pode ter nesse sentido se refere ao fato de suas construções lhe permitirem novas construções e novas articulações entre elas capazes de aumentar a sensibilidade do modelo teórico em desenvolvimento para avançar na criação de novos momentos de inteligibilidade sobre o estudado, ou seja, para avançar na criação de novas zonas de sentido. (REY, 2015, p. 7)

A condução dos encontros semanais, para o acompanhamento das iniciações científicas dá-se por meio da metodologia da sessão integrada (CARVALHO, 2003).

Sessões integradas é o nome que damos para uma situação de aprendizagem em que é possível tratar simultaneamente os objetos matemático, didático e pedagógico de forma integrada (CARVALHO et.al., 2003).

Assim, a situação de ensino e aprendizagem compreende, como sessão integrada: (i) o sujeito ao quadro que assume a posição de aluno e um problema matemático (objeto matemático), (ii) os sujeitos que ao assumirem a posição de professores/coordenadores respondem pela condução do processo de aprendizagem que inclui um tema de matemática (objeto didático), (iii) comentários e discussões sendo feitos a respeito da condução, como se abordará o objeto matemático (objeto pedagógico). O que permite que isso aconteça é que a condução nas sessões integradas é regida pelo aforismo: *quem quer aprender, deve falar e quem quer ensinar, deve ouvir*. Quebram-se as rotineiras posições sustentadas no ensino tradicional, as sessões integradas são um tempo em que ocorrem mudanças: quem fala é o aluno, quem escuta é o professor.

Essa perspectiva que assumimos é pautada pelo primado da educação sobre a matemática, considerando que há o manejo da matemática como instrumento de poder constitutivo da prática educativa. É uma tentativa de mudança partindo de um ponto interno ao sistema acadêmico. Aceitamos a academia como é e, ao não nos contentarmos com o dizer sobre o fracasso escolar, intervimos nesse meio, isto é planejamos ações e as colocamos em ato. As sessões integradas representam esta intervenção: uma resposta possível à exclusão do aprendizado de matemática, com exigência dirigida ao aluno no sentido de colocá-lo em posição de responder pelo saber instituído.

Finalmente, como procedimento metodológico para o desenvolvimento das atividades voltadas para o Ensino Básico, utilizamos recursos computacionais, como a utilização do software Geogebra e a metodologia da resolução de problemas.

A metodologia da resolução de problemas prevê que conteúdos matemáticos sejam estudados *através* de problemas. Este constitui, certamente, um de seus grandes desafios e também uma de suas maiores conquistas porque dá ao aluno, desde as séries iniciais, a possibilidade de *aprender descobrindo*, de formular questões sobre o problema, de procurar caminhos alternativos para resolvê-lo, de sentir prazer em aprender e descobrir; as atividades investigativas procuram explorar profundamente os tópicos selecionados, sendo de caráter divergente, abrande a possibilidade de expandir os objetos pesquisados (SCHOENFELD,1987; ONUCHIC e ALLEVATO, 2004; CARVALHO, 2007).

A aula tradicional põe em voga a sequência apresentação do conteúdo, apresentação de exemplos, resolução de exercícios de fixação e avaliação. Este desenvolvimento relega uma das principais características da Matemática imersa ao obscurantismo: o desafio intelectual e o prazer da descoberta. Fugindo desta linearidade da aula tradicional, novas etapas são seguidas para aplicação da metodologia da Resolução de Problemas.

As etapas propostas são: 1. Preparação do problema; 2. Leitura individual; 3. Leitura em conjunto; 4. Resolução do problema; 5. Observar e incentivar; 6. Registro das resoluções na lousa; 7. Plenária; 8. Busca do consenso; 9. Formalização do conteúdo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).

Quando o professor faz uso desta metodologia, o aluno é desafiado a resolver um problema cuja solução não se baseia meramente na aplicação de um algoritmo, o que exige mais de sua capacidade intelectual e domínio dos conhecimentos matemáticos para que a solução seja obtida, já que há a necessidade de se articular conceitos, rever estratégias de encaminhamento, procurar caminhos alternativos para obter-se a resposta. Logo, quando o aluno finalmente resolve o problema, sente-se bem, sente prazer, percebe que não agiu apenas de maneira mecânica. Esta é uma das razões porque a metodologia da resolução de problemas, esta maneira de ensinar, atrai, cada vez mais, inúmeros professores e conquista os alunos.

ALGUNS TRABALHOS DESENVOLVIDOS NO PROJETO

Para iniciar o projeto, elegemos como temática principal, neste momento, os problemas clássicos da antiguidade e os números construtíveis. Este tema serviu sobremaneira para os nossos propósitos, pois exemplificou de maneira cabal a necessidade de assumirmos a matemática como ciência investigativa sujeita às necessidades humanas, sujeita às práticas sociais mais amplas, às aspirações humanas e limitada, portanto, por essa mesma conjuntura.

São três os problemas que ficaram conhecidos como problemas clássicos da antiguidade:

1. Quadratura do círculo: determinar um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo de raio dado.
2. Duplicação do cubo: determinar a aresta de um cubo cujo volume fosse o dobro do de outro cubo aresta dada;
3. Trissecção do ângulo: dividir um dado ângulo em três partes iguais.

Para Yates (1971), estes problemas

> persistiram com vigor impressionante durante mais de dois mil anos. [...] Estes três problemas, solidamente inexpugnáveis malgrado todas as tentativas usando geometria plana, o método matemático dos antigos gregos, fizeram com que os matemáticos ficassem fascinados e construíssem novas técnicas e teoremas para sua solução. Por meio deste estímulo surgiu parte das estruturas atuais da álgebra e geometria (YATES, 1971, p.4; apud CARVALHO, 2007, p.92).

Segundo Baron (1985), os geômetras gregos sabiam que era possível, através de uma sequência de transformações geométricas, reduzir *qualquer figura poligonal* a um triângulo com igual área; o triângulo torna-se então um paralelogramo, o paralelogramo torna-se um retângulo e finalmente o retângulo torna-se um quadrado. Esta autora ressalta que estes resultados encontram-se já em Euclides, livro II. (BARON (1985, p.32).

O problema de redução de figuras curvas a quadrados equivalentes foi muito difícil. Regiões de formatos lunares deram origem às primeiras tentativas de determinações de áreas de figuras curvas, Hipócrates de Quios (430.a.C.) dedicou-se ao estudo destas questões. Independente de seu método, Hipócrates parece ter demonstrado um teorema importante para a quadratura de círculos, isto é, as áreas de círculos estão para si, assim como os quadrados de seus diâmetros (Euclides, XII, 2) (BARON, 1985, v.1, p.33).

Destacamos alguns trabalhos realizados até o momento no desenvolvimento deste projeto, que envolveram questões correlacionadas com os problemas clássicos e outros temas.

1. A Iniciação Científica "Teoria de Galois e o Problema da Trissecção do Ângulo": o *problema da trissecção do ângulo*, proposto dentro do contexto da matemática grega, consiste em construir, dado um ângulo qualquer, um novo ângulo com um terço de sua amplitute, usando para isso apenas uma régua não graduada e um compasso, num número finito de manipulações.

Proposto desta maneira, este problema é impossível, isto é, não tem solução, o que conduziu, historicamente, a inúmeras tentativas fracassadas. A busca por solução também conduziu ao desenvolvimento de inúmeros tópicos matemáticos. Com o auxílio da teoria de Galois, podemos demonstrar a impossibilidade de solução, que foi o objeto de estudo detalhado.

2. A Iniciação Científica "Teoria de Galois e o Problema da Duplicação do Cubo": o problema da duplicação do cubo, proposto dentro do contexto da matemática grega, consiste em construir, dada a aresta de um cubo, um novo cubo, cujo volume seja exatamente o dobro do volume do cubo inicial, usando para isso apenas uma régua não graduada e um compasso, num número finito de manipulações. Proposto desta maneira, este problema é impossível, isto é, não tem solução, o que conduziu, historicamente, a inúmeras tentativas fracassadas.

3. A Iniciação Científica "Teoria de Galois e o Problema da Quadratura do Círculo: o *problema da quadratura do círculo*, proposto dentro do contexto da matemática grega, consiste em construir um quadrado com a mesma área de um dado círculo, usando para isso apenas uma régua não graduada e um compasso, num número finito de manipulações. Proposto desta maneira, este problema é impossível, isto é, não tem solução, o que conduziu, historicamente, a inúmeras tentativas fracassadas, levadas à cabo por matemáticos tão famosos como Arquimedes. A busca por solução também conduziu ao desenvolvimento de inúmeros tópicos matemáticos, como o próprio conceito de integração, proposto por Newton e Leibniz. Com o auxílio da teoria de Galois, podemos demonstrar a impossibilidade de solução, que foi objeto deste estudo detalhado.

4. A Iniciação Científica "Um estudo sobre números primos": Na teoria dos números, o estudo da classe particular constituída pelos números primos é surpreendente porque resultados fáceis de enunciar, do ponto de vista matemático, são difíceis de provar, ou mesmo, impossíveis, causando espanto e curiosidade. Além disso, a teoria dos números primos possui aplicações em diversos campos científicos, como a criptografia. Álgebra, e teoria dos números como subárea, é um ramo da Matemática que possibilita um contato direto com o formalismo matemático, entendido como os modos de conceber e demonstrar teoremas, baseados numa axiomática preestabelecida e em definições e conceitos bem determinados, o que certamente constitui bagagem essencial para o aluno de graduação em Matemática e é elemento fundamental para a continuação nos estudos na pós-graduação em Matemática ou áreas afins. Este trabalho conta com o apoio financeiro da Fundação Araucária.

5. A dissertação de Mestrado “O problema das quadraturas e números construtíveis: possibilidades para o ensino de geometria e relações com a Álgebra”: neste trabalho o objeto matemático estudado constituiu-se pelos Números Construtíveis, um assunto de destaque dentro do desenvolvimento da Álgebra e também da Geometria, sendo abordado primeiramente através do problema da Quadratura do Círculo. A tentativa de resolver este problema clássico da matemática grega conduziu à discussão de vários problemas interessantes como a quadratura de Lúnulas tratada por Hipócrates de Quios. O objeto didático-pedagógico fundamentou-se no uso da História da Matemática e da Informática. Exploramos conceitos relacionados ao cálculo de áreas de figuras planas através de atividades que elaboramos e aplicamos em um grupo de estudantes de Ensino Médio.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para os professores de matemática as operações aritméticas e algébricas elementares (adição, multiplicação, subtração e divisão de números e polinômios) são fáceis e introduzidas de maneira natural durante as séries finais do Ensino Fundamental. No entanto, já na universidade, depois de longos anos de estudo formal, encontramos alunos[6] com dificuldades na álgebra de frações, por exemplo, efetuando somas através da soma dos numeradores e denominadores, simplificações em apenas ‘parte’ dos termos; como também na fatoração e/ou divisão de polinômios; tópicos elementares, mas necessários para o estudo de Cálculo, já que, por exemplo, o estudo de limites supõe o conhecimento destes assuntos.

Há uma distância enorme, medida em anos de escolarização, entre as séries finais do ensino fundamental e o primeiro ano universitário, mesmo para alunos que nunca ‘reprovaram’. O que acontece? Por que, embora as contas aritméticas elementares continuem impregnando os conteúdos matemáticos, as dificuldades nas somas, multiplicações, subtração e divisão de frações continuam presentes? É possível tornar o estudo de números racionais e irracionais mais significativo? Por que, embora o estudo de polinômios também ocorra antes do Ensino Médio, neste não é suficientemente apreendido pelo alunos? Pode a introdução de tópicos de História da Álgebra ser um fator facilitador para a compreensão de certos assuntos matemáticos?

Estas questões merecem atenção especial dos alunos em formação, futuros professores de matemática, como também de professores que já atuam na Educação Básica, quer em seus aspectos matemáticos mais profundos, quer em seus aspectos didático-pedagógicos.

Acreditamos que o estudo de tópicos formais de Álgebra, apoiados no estudo correlado de História da Matemática, possam auxiliar no desenvolvimento de atividades didático-pedagógicas

[6] Nossa experiência ao ministrar a disciplina de Cálculo para os alunos de primeiro ano de cursos de licenciatura permite afirmar que não são poucos os alunos que têm dificuldades na álgebra de frações, levando, por exemplo, à instituição em várias universidades dos chamados cursos de ‘pré-cálculo’, momento destinado à ‘revisão de conceitos elementares’, entre os quais, figuram a álgebra de frações e outros tópicos correlatos ao ensino de Álgebra, como o estudo de polinômios, incluindo fatoração e divisão de polinômios.

para utilização na sala de aula do Ensino Básico, sanando ao menos parcialmente algumas das dificuldades apontadas acima e possibilitando aos estudantes da Educação Básica que se apropriem culturalmente da Matemática. Neste sentido está a principal contribuição do projeto que ora encetamos.

AGRADECIMENTOS

À Fundação Araucária, que financia deste projeto, por meio de uma bolsa de Iniciação Científica.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. Episódios da História Antiga da Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

BICUDO, M. A. V. Ensino de matemática e educação Matemática: algumas considerações sobre seus significados. **BOLEMA**, ano 12, n.13, 1-11, 1999.

BARON, M. E. **Curso de História da matemática – origens e desenvolvimento do Cálculo.** Unidade 1 – 5. Brasília (DF): Editora Universidade de Brasília, 1985.

CARVALHO, A.M.F.T; CABRAL, T.C.B.; BALDINO, R.R. Sessões Integradas: tempo para mudanças. **In: Anais...** II SIPEM, Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. GT de Educação Matemática e Ensino Superior. Comunicação Científica. Santos, SP, 29 Outubro –1º Novembro. 2003.

CARVALHO, A. M.F.T. Considerações sobre a prática da metodologia da resolução de problemas nas aulas de matemática. *In* II Seminário Nacional Interdisciplinar em Experiências Educativas – II SENIEE. Francisco Beltrão, 26-27 abril de 2007. In **Anais**..., 2007.

CARVALHO, João Pitombeira. **Os três problemas clássicos da Matemática Grega.** Programa de Iniciação Científica da OBMEP, IMPA, 2007.

CHIZZOTTI, Antonio. A pesquisa qualitativa e seus fundamentos filosóficos. In: Chizzotti, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. Petrópolis-RJ: Vozes, 2006, p. 33-61.

D'AMBROSIO, U. Porque e Como Ensinar História da Matemática. **REMATEC**, Natal (RN) Ano 8, n. 12. p. 7 – 21. Jan. – Jun. 2013.

FIGUEIREDO, D.G. **Números Irracionais e Transcendentes**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. IMPA. Rio da Janeiro: SMB,IMPA, 1985.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra.** Projeto Euclides. Rio de Janeiro: SBM, IMPA, 1979.

KAPLANSKY, I. **Introdução à Teoria de Galois.** Rio de Janeiro: IMPA, 1966.

NIVEN, I. **Números: racionais e irracionais**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. IMPA. Rio da Janeiro: SMB, 1984.

ONUCHIC, L. R. ; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-arendizagem de matemática através da resolução de problemas. In **Educação Matemática – pesquisa em movimento.** Maria A. V. Bicudo & Marcelo C. Borba (Org.). São Paulo (SP): Cortez, pp 213 – 231, 2004.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares de matemática para as séries finais do ensino fundamental e para o ensino médio.** Disponível em: http://www.matematica.seed.pr.gov.br/ . Acesso em 19/03/2010.

PONTE, J. P. Educação matemática de hoje e de sempre: comentário ao livro 'Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas'. **BOLEMA**, ano 15, n. 17, p. 83 – 126, 2002.

REY, Fernando González. **Pesquisa Qualitativa e Subjetividade.** Os processos de construção da informação. Tradução de Marcel Aristides Ferrada Silva. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

RIBENBOIM, P. **Números primos: velhos mistérios e novos recordes**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

ROQUE, T.; CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de História da Matemática.**Rio de Janeiro, SBM, 2012.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in Mathematics. In **Handbook of Research on Curriculum – a project of the American Education.** Paul Jackson (Ed.). Reston: National Council of Teachers of Mathematics, cap 15, pp. 334 – 370, 1997.

STRUIK, D. **História Concisa das Matemáticas.** Portugal, Gradiva: 1987.

STWEART, I. **Galois Theory.** 3rd ed.,New York: Chapman & Hall, 2004.

SILVA, Luiza Camile Rosa da; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de.

RESUMO

O projeto "Interfaces entre Tópicos da Álgebra e Educação Básica", que atualmente está em andamento, tem como um de seus objetivos estabelecer relações entre conceitos de Álgebra moderna e a Educação Básica. Nesta comunicação, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre o problema da Quadratura do Círculo. Embasados nesta perspectiva histórica, percebe-se a potencialidade do problema. Traçamos um percurso que vai desde considerações sobre o conhecimento matemáticos dos egípcios até as técnicas atuais propostas pela Álgebra, que asseguram a impossibilidade de resolução do problema por meio dos instrumentos utilizados pelos gregos (régua não graduada e compasso). Um dos resultados parciais que obtivemos é perceber a possibilidade de realizar com recursos computacionais, como a utilização do Geogebra, atividades que permitem a exploração em sala de aula da Educação Básica de tópicos relacionados ao problema.

PALAVRAS-CHAVE: História da Matemática. Quadratura do Círculo. Trissetriz de Hípias.

INTRODUÇÃO

A Geometria é, certamente, um dos ramos mais fascinantes e presentes no cotidiano da Matemática. Formas e figuras geométricas estão ao nosso redor, criando a noção do belo e produzindo harmonia, influenciando a arquitetura, a construção civil, agronomia, artes plásticas, entre outros.

Para além da área matemática, Cornelli e Coelho (2007) defendem que a Geometria era preparatória e indispensável, na concepção grega, para a aprendizagem da Filosofia. Baseados em Platão, alegam que as "questões matemáticas estão presentes na discussão sobre os critérios para a aquisição de conhecimento verdadeiro" (CORNELLI e COELHO, 2007, p. 422), crucial para o pensamento filosófico e epistemológico. Ressaltam a importância, dentro do conhecimento matemático, da vertente geométrica.

> Galeno conta uma anedota que ilustra muito bem qual é a imbricação cultural das ciências matemáticas (e, de maneira especial, da geometria) no mundo grego: Aristipo teria sido jogado durante um naufrágio numa praia desconhecida, e vendo desenhadas na areia algumas figuras geométricas, teria ficado aliviado, pois, naquele momento, sabia não ter caído em terras bárbaras, e sim em terras gregas. (CORNELLI e COELHO, 2007, p. 423).

Por outro lado, D'Ámbrósio (2013) alerta para a importância do estudo da História da Matemática, valorizando a origem do pensamento matemático como inter-relacionado com a necessidade de sobrevivência das comunidades, permitindo que os povos, ao longo do tempo, desenvolvessem estratégias para elaboradas para a resolução de problemas práticos e teóricos. Para este autor, existem muitos motivos para que se ensine História da Matemática, entre os quais o fato que de a matemática é uma manifestação cultural e, como tal, deve ser resgatada e incorporada nas práticas curriculares e nas ações pedagógicas. Além disso, como afirma este autor, “Não se pode entender conhecimento sem se atentar para o ciclo completo do conhecimento, desde sua geração, organização intelectual e social, transmissão, expropriação, institucionalização e difusão” (D’AMBRÓSIO, 2013, 18).

Partimos, deste modo, de duas premissas. Primeiro, a de encarar Geometria e a matemática como *ciência das relações*, assumimos uma concepção que permite, por exemplo, pensarmos no famoso Teorema de Pitágoras como em seu enunciado clássico, (Se é dado um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c, então temos que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, isto é $c^2 = a^2 + b^2$) ou como um resultado que permite relacionar um certo tipo de grandeza, qual seja, o conceito de ângulo (no caso, o triângulo é reto), com outro tipo de grandeza, qual seja, o comprimento dos catetos e hipotenusa. A segunda premissa é a de que, sendo criação humana, a matemática deve ser entendida como produto inacabado, sujeito a novas descobertas e interpretações.

Tomar a concepção de matemática, como ciência das relações, parece-nos interessante porque permite (re)pensar o ensino e a aprendizagem de matemática não como processos estanques, quer sejam temporalmente, quer sejam quando se fazem referências aos conteúdos abordados, isto é, em suas diversas áreas, geometria, álgebra, cálculo, aplicações, etc., quer, ainda, quando a matemática é pensada como instrumento para estabelecer relações de compreensão do sujeito com o meio que o entorna.

Outra concepção fundamental é a posição daqueles que agem embasados numa premissa de uma Educação Matemática compreendida de forma ampla. Concordamos neste aspecto, por exemplo, com Fiorentini e Lorenzato, ao entenderem que o educador matemático, na consideração entre as ciências matemáticas e a educação, “tende a colocar a matemática a serviço da educação, priorizando, portanto, esta última, mas sem estabelecer uma dicotomia entre elas” (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 4).

O projeto “Interfaces entre Tópicos de Álgebra e Educação Matemática” privilegia estas duas últimas concepções, valorizando o conhecimento matemático avançado e colocando-o como conhecimento basilar do futuro professor de matemática, para que possa, a partir dele, desenvolver práticas pedagógicas e didáticas para serem utilizadas na Educação Básica e que estejam alinhadas com a Educação Matemática.

Neste trabalho, apresentamos algumas considerações parciais advindas do projeto, sobre a possibilidade de mesclar elementos oriundos da Teoria de Galois e tópicos de História da Matemática que podem ser intersecionados com os ensinamentos da Educação Básica. Acreditamos, como D’Âmbrósio (2013), que é possível tornar a matemática escolar menos obsoleta, mais interessante e útil.

Elegemos como temática principal, neste momento, os problemas clássicos da antiguidade e os números construtíveis. Este tema serve sobremaneira para os nossos propósitos, pois exemplifica de maneira cabal a necessidade de assumirmos a matemática como ciência investigativa sujeita às necessidades humanas, sujeita às práticas sociais mais amplas, às aspirações humanas e limitada, portanto, por essa mesma conjuntura.

São três os problemas que ficaram conhecidos como problemas clássicos da antiguidade:

1. Quadratura do círculo: determinar um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo de raio dado.
2. Duplicação do cubo: determinar a aresta de um cubo cujo volume fosse o dobro do de outro cubo aresta dada;
3. Trissecção do ângulo: dividir um dado ângulo em três partes iguais.

Para Yates (1971), estes problemas

> persistiram com vigor impressionante durante mais de dois mil anos. [...] Estes três problemas, solidamente inexpugnáveis malgrado todas as tentativas usando geometria plana, o método matemático dos antigos gregos, fizeram com que os matemáticos ficassem fascinados e construíssem novas técnicas e teoremas para sua solução. Por meio deste estímulo surgiu parte das estruturas atuais da álgebra e geometria (YATES, 1971, p.4; apud CARVALHO, 2007, p.92).

Neste momento, a pesquisa assume uma natureza predominantemente bibliográfica, situação na qual inúmeras obras são analisadas, tanto as que se relacionam com o conteúdo matemático envolvido, quanto com relação à bibliografia referente ao percurso histórico abordado. Além destas vertentes, referências técnicas correlatas à Educação Matemática também foram consideradas.

No que seguirá, procuraremos expor alguns aspectos históricos relacionados ao primeiro dos três problemas e alguns resultados de Álgebra relacionados aos números construtíveis, dentro da Teoria de Galois, que permitirão examinar porque nenhum dos problemas admite solução, pensada esta, como solução obtida com o uso do compasso e da régua não graduada (como proposta pelos gregos antigos).

A interseção com as práticas da Educação Básica dá-se pelo desenvolvimento de atividades que podem ser realizadas no Ensino Médio. Uma delas será indicada aqui e trata da construção mecânica realizada por Hípias para solucionar o problema.

OBJETIVO

Com a finalidade de haver uma intersecção do nosso estudo em Álgebra com a Educação Básica, o objetivo do escopo deste trabalho é trazer uma alternativa ao professor de Matemática para abordar os problemas clássicos, no caso a Quadratura do Círculo, em sala de aula. O professor poderá trabalhar utilizando-se das diversas tentativas de resoluções que foram surgindo durante toda a História, muito delas registradas em vários livros de História da Matemática, e também poderá utilizar o software Geogebra, onde é possível construir uma solução, pelo uso da curva Trissectriz. É importante ressaltar que o problema, originalmente proposto, com o uso apenas da régua não graduada e do compasso, é impossível.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os geômetras gregos interessavam-se por construções geométricas realizadas com o uso de apenas dois instrumentos, o compasso e a régua (sem marcas, não graduada). Construir com régua e compasso exige que algumas regras sejam cumpridas. Com o auxílio da régua é permitido traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos conhecidos. Com o compasso é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto passando por um segundo ponto qualquer. Para Eves (2004, p.134), se pensarmos as construções geométricas como um jogo em que são obedecidas estas duas regras, obteremos um dos jogos mais fascinantes e absorventes inventados.

Os postulados dos *Elementos* de Euclides determinam o uso da régua e compasso seguindo as regras anteriores, de forma que tais instrumentos ficaram conhecidos como instrumentos euclidianos. A régua utilizada não possuía escala e o compasso de Euclides desmontava-se quando um dos seus braços era retirado do papel, diferenciando-os dos compassos atuais, entretanto estes instrumentos são equivalentes.

Os gregos descobriram que assim procedendo era possível transformar qualquer triângulo em um quadrado de área equivalente; traçar uma perpendicular a uma reta conhecida, passando por um ponto qualquer; dado um ângulo qualquer, dividi-lo em duas partes iguais; e dado um segmento de reta qualquer, dividi-lo em partes iguais.

Segundo Baron (1985), os geômetras gregos sabiam que era possível, através de uma sequência de transformações geométricas, reduzir *qualquer figura poligonal* a um triângulo com igual área; o triângulo torna-se então um paralelogramo, o paralelogramo torna-se um retângulo e finalmente o retângulo torna-se um quadrado. Esta autora ressalta que estes resultados encontram-se já em Euclides, livro II. (BARON (1985, p.32).

O problema de redução de figuras curvas a quadrados equivalentes foi muito difícil. Regiões de formatos lunares deram origem às primeiras tentativas de determinações de áreas de figuras curvas, Hipócrates de Quios (430.a.C.) dedicou-se ao estudo destas questões. Independente de seu método, Hipócrates parece ter demonstrado um teorema importante para a quadratura de círculos, isto é, as áreas de círculos estão para si, assim como os quadrados de seus diâmetros (Euclides, XII, 2) (BARON, 1985, v.1, p.33).

Particularmente, o problema da Quadratura do Círculo consiste em construir um quadrado a partir de um círculo dado, com instrumentos euclidianos, tal que o quadrado venha a possuir a mesma área que o círculo.

Algebricamente, sabemos hoje em dia que, quando a área de um Círculo (Ac) é igual a de um Quadrado (Aq), sendo *r* o raio do círculo e *l* o lado do quadrado, temos a relação $Ac = Aq$ => $r^2\pi = l^2$ => $l = \sqrt{\pi}\, r$.

Explicitamente, o lado do quadrado deve ser $\sqrt{\pi}\, r$. Mais particularmente, quando o raio do círculo for 1, temos que o lado do quadrado é $l = \sqrt{\pi}$, ou seja, para construir o quadrado, temos que construir um segmento com esse valor de medida.

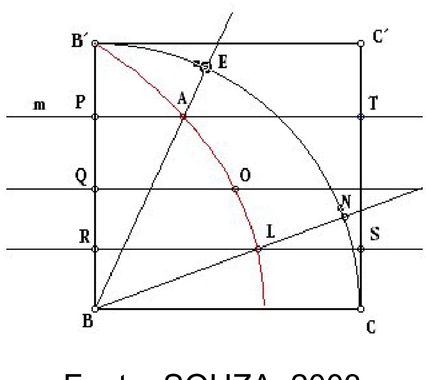
Os gregos foram os primeiros, de fato a tentar construir o problema usando somente régua não graduada e compasso.

Para Santana (2015), o percursor do problema foi Anaxágoras de Atenas (499-417a.C.) que, por ter uma mente muito à frente do seu tempo, fora preso e, durante o tempo na prisão dedicou-se para o problema da Quadratura do Círculo.

Hípias de Élis (443-399 a.C.) também teria se dedicado ao problema. Sua contribuição para a Quadratura do Círculo foi criar uma curva mecânica, a Trissetriz de Hípias, que nos dá 100% de aproximação da área do Círculo para o Quadrado. Esta primeira grande tentativa de resolver o problema data de aproximadamente 425 a.C. Este geômetra, no entanto, teria utilizado curvas e construções que não podem ser feitas apenas com régua e compasso (Carvalho, 2007, p.122).

Pappus de Alexandria (300 d.C.) no livro IV da sua *Colecção Matemática*, descreve esta tentativa de solução que é uma das mais antigas curvas da matemática posterior apenas à reta e a circunferência. A descrição dada por Pappus sobre a principal propriedade desta curva torna bastante admissível que esta tenha sido inventada durante as tentativas da trissecção do ângulo. Esta curva foi posteriormente usada por Dinostrato para a quadratura do círculo e passou a ser chamada algumas vezes de trissectriz, outras vezes quadratriz. Arquimedes também explorou a solução do problema utilizando-se de *neusis* ou construção por ajustamento, que consiste em ajustar um segmento dado entre duas curvas dadas.

Figura 3 – Trissetriz de Hípias



Fonte: SOUZA, 2003.

A curva é construída da seguinte maneira: o segmento BB’, com uma certa taxa, caminha até BC, criando o arco B’C. O segmento B’C’, com a mesma taxa do outro segmento, desce verticalmente até BC de tal forma que a intersecção entre a curva e criada anteriormente e o segmento B'C' forme a curva destacada em vermelho[1].

Como já dito anteriormente, podemos demonstrar como enquadrar o círculo usando a Quadratriz, assim, seja a o lado do quadrado:

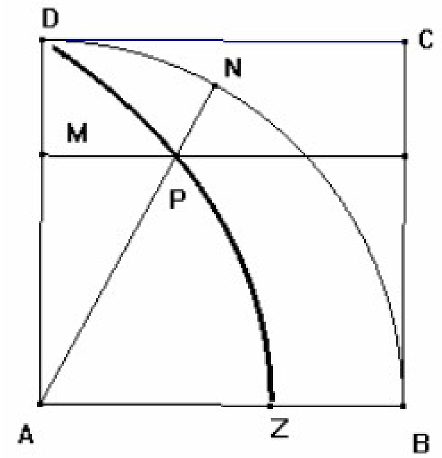


Fig.4: Quadratriz

Considere, inicialmente, que AZ=$\frac{2a}{\pi}$

De fato, considere θ o ângulo formado por PAZ. Considere também $y = AM, AB = AD = DC = a$.

Note que, temos uma relação de proporcionalidade entre o ângulo θ e o segmento y. Basta notar que a velocidade em que o segmento DC é de $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ e a velocidade com que o arco DB decresce é $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Como o tempo de decrescimento do arco DB é o mesmo que do segmento DC, temos $\frac{\Delta\theta}{w} = \frac{\Delta s}{v}$. Note que $\Delta s = y \; e \; \Delta\theta = \theta - 0 = \theta$. Disto, concluímos que:

$$k\theta = y \text{ com } k \in R \quad (1)$$

Observe que, quando $\theta = \pi/2$, temos em particular:

$$a = \frac{\pi k}{2} \Rightarrow k = \frac{2a}{\pi} \quad (2)$$

Logo, substituindo (2) em (1), temos:

$$\theta = \frac{\pi y}{2a} \Rightarrow y = \frac{2a\theta}{\pi} \quad (3)$$

[1] Os detalhes da construção da Trissetriz fogem ao escopo deste trabalho, mas podem ser encontrados no vídeo "Trissectriz de Hípias", disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=tk2AgMZANKU>.

Note que conseguimos escrever y em função de $sen\ \theta$, basta escrever em equação polar(ou seja, em função de θ, ρ)

$$y = \rho sen\ \theta \Rightarrow \rho = \frac{y}{sen\ \theta} = \frac{2a\theta}{\pi\ sen\ \theta}$$

Sendo que, na última igualdade, usamos (3).

Assim, usando o $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{sen\ \theta} = 1$, temos $\rho = \frac{2a\theta}{\pi\ sen\ \theta} = \frac{2a}{\pi}$

Deste modo, note que conseguimos medir este segmento, que corresponde ao AZ, assim, conseguimos extrair a medida de π. Basta notar que conseguimos dividir esta medida por $2a$ e depois inverter $\frac{1}{\pi}$, com a régua e compasso. Esta demonstração pode ser encontrada com mais detalhes em CARVALHO, 2007.

Antes de prosseguirmos com a revisão bibliográfica que ora apresentamos, vamos nos deter um pouco mais nesta solução de Hípias e na trissetriz.

Usamos o Geogebra para construir esta curva durante uma exposição que realizamos sobre o problema. Embora, neste primeiro momento, esta atividade tenha sido aplicada à alunos do Ensino Superior, acreditamos que pode ser realizada por estudantes do Ensino Médio. Assim, numa próxima etapa do projeto, estaremos aplicando a atividade em salas de aula da Educação Básica. Esta percepção, que consideramos um primeiro resultado parcial da pesquisa, não teria ocorrido sem a cuidadosa revisão histórica/bibliográfica que fizemos, ressaltando a importância do conhecimento de História da Matemática para o futuro professor de matemática.

Arquimedes (287 a.C. ?) em sua obra Medição do Círculo (Proposição 1) mostrará que a relação entre a área da circunferência e o raio obedece à Área = ½ circunferência x raio. Arquimedes usou uma demonstração por redução ao absurdo, na verdade um absurdo duplo: querendo provar que C=K, prova-se que C>K e C<K nos leva a uma contradição. O termo *exaustão* foi introduzido por Grégoire de Saint-Vicent (1647) para descrever essa forma de demonstração (BARON, 1985, v.1, p.37).

Com as ideias de Anaxágoras, Arquimedes tentou resolver o problema usando média geométrica. Primeiramente, ele provou a seguinte proposição “A área de um círculo é igual a de um triângulo retângulo quando a base deste retângulo possui a medida igual ao raio e a altura respectiva a esta base possui a medida igual a da circunferência”. Esta proposição gerou a construção da Triangulatura do Círculo, contudo a construção da Quadratura do Círculo por este método veio mais tarde (SANTANA, 2015).

Durante muitos séculos com a Europa no seu “período de trevas”, mais conhecido como Idade Média, muitos conhecimentos científicos foram desconsiderados. No século XVI, no Iluminismo, muitos cientistas voltaram a atuar na Matemática com um aspecto mais teórico do que havia antes com outros povos.

Leonardo da Vinci (1452 – 1519), deste período, é outro nome associado a este problema da quadratura do círculo, em seu famoso *O Homem de Vitrúvio,* constata-se que o círculo e o quadrado, de área desigual, são completados por um novo círculo, respectivamente, em que as medidas das áreas passam a ser "iguais" em cada par círculo-quadrado.[2]

Nesse novo contexto cultural a impossibilidade de existir a demonstração da Quadratura do Círculo, por meio da utilização de instrumentos gregos (régua não graduada e compasso) começou a ser identificada.

Um primeiro passo importante nesta direção foi a construção de polígonos de n lados. Gauss, com 19 anos, conseguiu construir um polígono de 17 lados. Segundo DIAS (2008, p.1), para tanto, demonstrou o seguinte teorema:

Teorema 1: Se o número de lados de um polígono for escrito da forma n= $2^{2^k}+1$, então o polígono pode ser construído com régua não graduada e compasso.

Os números da forma $2^{2^k}+1$ são, atualmente, conhecidos como primos de Fermat. Todavia, nem todos os números escritos assim são primos, fato que Gauss provou para $k=5$. Os números onde $0 \leq k \leq 4$, de fato, são primos. (SANTOS, 2012)

Antes de concluir este teorema, Gauss afirmou que as raízes de um polinômio escrito da forma $x^p=1$, com p primo, podem ser determinadas a partir de uma sequência de polinômios particulares, nos quais o grau dos fatores são fatores primos e são decompostos d do fator $p-1$.

Um exemplo é, $p = 2^m+1$, onde temos que $p-1=2^m$. Ou seja, o único fator primo de $p-1$ é 2. A respeito do m, ele pode ser um não primo, ou seja, existe r e $s \in N$ tal que $m=r.s$. Disto, podemos escrever $p-1=2^{rs}=(2^r)^s$ então $p=(2^r)^s+1$. (COLE, 2013). Em particular, se temos $r=2$, temos a forma de um Primo de Fermat.

Outra etapa importante relaciona-se à teoria dos números algébricos e transcendentes. Necessitamos de algumas definições. Nossa referência neste ponto é Monteiro (1969).

Seja E um subconjunto do plano R^2 e suponhamos que E possua pelo menos dois pontos. Toda reta que passa por dois pontos de E é chamada reta construtível a partir de E. Toda circunferência que tem como centro um ponto de E e que passa por um ponto de E é chamada circunferência construtível a partir de E. Todo ponto de R^2 que é a intersecção de duas retas, ou, de uma reta e uma circunferência, ou, de duas circunferências construtíveis a partir de E é denominado ponto construtível a partir de E. Indicaremos por s(E) o conjunto de todos os pontos construtíveis a partir de E.

Notemos que $E \subset s(E)$. De fato, se p é um ponto qualquer de E, então existe q $\in$ E tal que p ≠ q, sendo assim, a reta L determinada por p e q é construtível a partir de E, e o mesmo

[2] http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/davinci/matematico.htm. Acesso em 05/05/2009.

acontece com a circunferência r de centro q e que passa pelo ponto p. Como $p \in L \cap r$, podemos concluir que p é construtível a partir de E, logo $p \in s(E)$ e então $E \subset s(E)$.

Consideremos o subconjunto $E_0 = \{(0,0), (1,0)\}$ do plano R^2 e para todo número natural n ponhamos $E_{n+1} = s(E_n)$.

$E_0 = \{(0,0), (1,0)\}$, n = 0

$E_1 = s(E_0)$, ou seja: conjunto dos pontos construtíveis a partir de E_0.

$E_2 = s(E_1)$, ou seja: conjunto dos pontos construtíveis a partir de E_1.

$\vdots$

$E_{n+1} = s(E_n)$.

Conforme visto anteriormente $E_n \subset E_{n+1}$ e $E_n \neq E_{n+1}$.

O seguinte teorema é fundamental neste contexto: Todo ponto do conjunto $H = \bigcup_{n \in N} \mathrm{En}$ é denominado ponto construtível. Toda reta/circunferência construtível a partir de H é denominada reta/circunferência construtível.

O objetivo do problema geral de construção geométrica com auxílio de régua e o compasso é descrever o conjunto H de todos os pontos construtíveis do plano R^2.

Um resultado importante neste contexto é o teorema o qual afirma que "Um número real *u* é construtível se, e somente se, existe uma seqüência $(Kj)_{0 \leq j \leq m}$ de subcorpos de R tal que: 1) $K_o = Q \subset K_1 \subset ... \subset K_{m-1} \subset K_m$; 2) $[K_j : K_{j-1}] \leq 2$ para j = 1, 2, ..., m; 3) $u \in K_m$". (MONTEIRO, 1969, p. 67).

Chamamos de número algébrico qualquer solução de uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, onde os a_i´s são números inteiros. Um número real que não é algébrico chama-se transcendente.

O ponto importante aqui é que todo número real construtível é algébrico sobre Q e o grau de u sobre Q é uma potência de 2, resultado demonstrado somente em 1837.

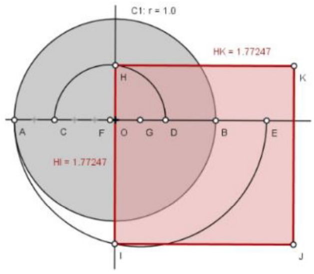
Finalmente, com a Teoria de Galois, feita por Évariste Galois (1811-1832), Carl von Lindemann provou, em 1874 que π é um número transcendente (Figueiredo, 1990). Finalmente, com a teoria dos números transcendentes, em 1934, Gelfond e depois, Schneider em 1935, demonstraram de forma independente o 7º. Problema de Hilbert, sobre transcendência de números como $2^{\sqrt{2}}$.

Após 1990, com estes resultados obtidos, encontramos algumas construções que aproximam em mais de 99% a área do círculo com a área de um quarado dado.

Dentre os matemáticos modernos que se dedicaram ao problema, destaca-se Ramanujan, cuja vida é relatada no recente filme "O homem que viu o infinito". Sobre trabalhos relacionados ao problema da Quadratura do Círculo, Ramanujan concluiu que o lado do quadrado deve ser $\frac{\sqrt{355}}{\sqrt{113}}$, o que, comparado com $l = \sqrt{\pi}$ chega a uma aproximação de 99,9999915...%[3].

Hobson (1913) fez várias contribuições matemáticas, como um estudo em Convergência de Séries de Funções Ortogonais. A publicação "Squaring the Circle: a history of the problem" em 1913 (ROBSON, 1913) oferece uma construção[4] que se aproximou em 99,998467...% comparado com (1). Consideremos um esboço da demonstração.

Figura 4 – Método de Ernest Hobson



Fonte: Kilhian (2012, s/p).

O nosso objetivo é encontrar o segmento HI, ou seja, o lado do quadrado. Então, para facilitar, vamos considerar um círculo de raio 1.

Por construção, OA=1, OC=3/5, OD=1/2. Vamos tentar encontrar a medida HF, que é o raio do semicírculo menor. Então:

O diâmetro CD: CD=OC+OD=11/10. Assim temos que FC=FD=11/2

O segmento OF é dado por: OF=OC-FC=3/5-11/20=1/20

Aplicando o Teorema de Pitágoras em FOH:

$(FO)^2+(OH)^2=(FH)^2 \Rightarrow OH=\sqrt{\frac{3}{10}}$ (1)

Da mesma forma, vamos encontrar a medida GI(raio) para o semicírculo maior:

Por construção: AB=2 e BE=1/2

O diâmetro do semicírculo é AE=AB+BE=5/2 e temos que AO=OE=5/4

O segmento OG=OE-GE=1/4

Aplicando o Teoremaa de Pitágoras em GOI:

$(GI)^2=(OI)^2+(OG)^2 \Rightarrow (OI)^2==3/2 \Rightarrow OI=\sqrt{\frac{3}{2}}$ (2)

Então, como queríamos HI=OH+OI => HI= 1,77246742..., concluímos que o lado do quadrado é aproximadamente $l = \sqrt{\pi}$.

[3] A construção de Srinivasa Ramanujan e os resultados podem ser encontrados como "Método de Srinivasa Ramanujan" em: <https://www.geogebra.org/m/WHsPjWnj>. Acesso em 28/04/2017

[4] A construção e o resultado citado acima pode ser encontrados na homepage "Método de Ernest Hobson": <https://www.geogebra.org/m/Df6dyRc7>. Acesso em 28/04/2017

CONCLUSÃO

Apresentamos neste trabalho resultados sobre a revisão bibliográfica que realizamos sobre o problema da Quadratura do Círculo, um dos três problemas clássicos da antiguidade. Passando por considerações que abarcaram desde a época dos egípcios, passando por matemáticos gregos como Hípias e Arquimedes, detivemo-nos em Gauss e a constatação do resultado de este problema relaciona-se ao grau de uma extensão algébrica. Sendo π um número transcendente, o problema não possui solução se utilizados como instrumentos apenas régua não graduada e compasso.

Todavia, ao longo do percurso histórico que fizemos, pudemos conhecer resoluções propostas que eram mecânicas, isto é, consideravam, por exemplo, o deslizar de curvas umas sobre as outras.

Desta forma, usamos o Geogebra para construir a curva conhecida como a **Trissetriz de Hípias** durante uma exposição que realizamos sobre o problema. Embora, neste primeiro momento, esta atividade tenha sido aplicada à alunos do Ensino Superior, acreditamos que pode ser realizada por estudantes do Ensino Médio.

Assim, numa próxima etapa do projeto, estaremos aplicando a atividade em salas de aula da Educação Básica. Esta percepção, que consideramos um primeiro resultado parcial da pesquisa, não teria ocorrido sem a cuidadosa revisão histórica/bibliográfica que fizemos, ressaltando a importância do conhecimento de História da Matemática para o futuro professor de matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao MEC-SISU pelo financiamento da minha bolsa através do Programa de Educação Tutorial(PET).

REFERÊNCIAS

BARON, Margareth. **Curso de História da Matemática** - A Matemática Grega, vol1, UNB, 1985.

CARNEIRO, J. P. Q. Construções Possíveis usando régua e compasso. *In:* Eduardo Wagner, **Construções Geométricas**, Coleção do Professor de Matemática, SBM, IMPA, 1993.

CARVALHO, João Pitombeira. **Os três problemas clássicos da Matemática Grega.** Programa de Iniciação Científica da OBMEP, IMPA, 2007.

COLE. B.S. Polígonos Estrelados Regulares. **(Dissertação)** Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013

CORNELLI, G. ; COELHO, M.C.M. “Quem não é Geômetra não Entre!” Geometria, Filosofia e Platonismo. **Kriterion**.Belo Horizonte, nº 116, Dez, 2007, p. 417-435.

DIAS. C.H.B.B.; **Construção de um Polígono Regular de 17 lados**. Universidade Estadual de São Paulo, 2008.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, Unicamp, 2004.

FIGUEIREDO, D. **Números Irracionais e Transcendentes.** Rio de Janeiro:SBM, IMPA, 1985.

FIORENTINI, Dario & LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática – percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

HOBSON, E. W. **Squaring the circle a history of the problem**. London: Cambridge University Press, 1913. Disponível em https://ia802604.us.archive.org/31/items/squaringcirclehi00hobsuoft/squaringcirclehi00hobsuoft.pdf Acesso em 13/05/2017.

KILIHAN, K.; **A Quadratura do Círculo Pelo Método de Ernest Hobson.** Novembro, 2009. Disponível em:<http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/09/a-quadratura-do-circulo-pelo-metodo-de.html> Acesso em: 28 abr. 17

KILIHAN, K.; **Aproximação de PI para os Egípcios.** Maio, 2011. Disponível em: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/05/aproximacao-de-pi-pelos-egipcios.html Acesso em: 28 abr. 2017

MONTEIRO, Jacy. **Teoria de Galois.** IMPA, 7º. Colóquio Brasileiro de Matemática, 1969.

ROQUE, T; CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de História da Matemática.** Coleção Profmat. Rio de Janeiro:SBM, IMPA, 2012.

SANCHO. J.A.A.; JOFRE. G; **Alexander Henry Rhind.** Julho 2008. Disponível em: < http://egiptologia.com/alexander-henry-rhind-de-sibster/> Acesso em: 29 abr. de 2017

SANTANA, R. S.. O problema da Quadratura do Círculo: Uma Abordagem Histórica Sob a Perpectiva Atual**. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015. Disponível em http://tede.ufam.edu.br/bitstream/tede/4551/2/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Erivaldo%20Ribeiro%20Santana.pdf Acesso em 04/04/2017.

SANTOS, J.C. **Quadratura do Círculo.** Maio 2012 Disponível em: http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/quadratura.html Acesso em: 28 abr de 2017

STRUIK, D. **História Concisa das Matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1989.

Axiomatização em $\mathbb{R}$

Ana Carolina Bardaçon ana.bardacon@gmail.com
Universidade Estadual de Londrina
Pedro Yoshiaki Takito takitopedro@gmail.com
Universidade Estadual de Londrina
Paulo Antônio Liboni Filho liboni@uel.br
Universidade Estadual de Londrina

15 de janeiro de 2018

Resumo

Matemáticos utilizaram, ao longo da história, o conceito de número real de maneira intuitiva e com diferentes níveis de precisão. Do ponto de vista moderno, as definições comumente vistas carecem de rigor e formalismo. Em meados do século XIX, Richard Dedekind desenvolveu uma rica teoria que buscava sistematizar – do ponto de vista axiomático – o conceito de número real. Enquanto lecionava Cálculo Diferencial e Integral na escola Politécnica de Zürich, Dedekind concebeu a ideia de corte, que é reconhecida atualmente como a definição de número real a partir do conjunto dos números racionais. O objetivo deste trabalho é explorar as técnicas matemáticas presentes no trabalho original de Dedekind.

Palavras Chave: Números Reais; Dedekind; Cortes de Dedekind

Introdução

Este trabalho tem o intuito de abordar o conceito de cortes de Dedekind, definindo cortes racionais, mostrando os principais resultados e associar tais cortes como números reais. Com isto, utilizando a construção de Dedekind, e entendendo um número real como um corte, é possível construir operações adequadas sobre tais objetos e demonstrar que existe (um único) corpo ordenado completo.

Resultados

0.1 Cortes de Dedekind

Definição 0.1. *Dizemos que um conjunto α de números racionais é um corte se:*

1. $\alpha \neq \emptyset$ *e* $\alpha \neq \mathbb{Q}$
2. *Seja* $q \in \mathbb{Q}$. *Se* $p \in \alpha$ *e* $q < p$ *então* $q \in \alpha$
3. *Se* $p \in \alpha$ *então* $p < r$, *para algum* $r \in \alpha$

Teorema 0.2. *Se* $p \in \alpha$ *e* $q \notin \alpha$, *então* $p < q$

Demonstração. Suponha que $q \in \alpha$ e $q \leq p$, pelo segundo item da definição já podemos concluir que $q \in \alpha$, o que é uma contradição. Logo $p < q$. □

Definição 0.3. *Sejam α, β cortes. Escrevemos $\alpha = \beta$ se de $p \in \alpha$ resulta $p \in \beta$ e de $q \in \beta$ resulta $q \in \alpha$, isto é, se os dois conjuntos são idênticos. Caso contrário, escrevemos $\alpha \neq \beta$.*

Definição 0.4. *Sejam α, β cortes. Escrevemos $\alpha < \beta$ (ou $\beta > \alpha$) para significar que α é subconjunto próprio de β, isto é, existe um racional p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$.*

Observação

1. $\alpha \leq \beta$ significa $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$.
2. $\alpha \geq \beta$ significa $\beta \leq \alpha$

Teorema 0.5. *Sejam α, β cortes. Então $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.*

Demonstração. Pelas definições anteriores, se $\alpha = \beta$ então nenhuma das outras duas relações é válida. Agora suponha que $\alpha < \beta$ e $\beta < \alpha$ sejam válidas. Como $\alpha < \beta$, existe um racional p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Como $\beta < \alpha$, existe um racional q tal que $q \in \alpha$ e $q \notin \beta$. Temos então,

$$p \in \beta \wedge q \notin \beta \Leftrightarrow p < q$$

$$q \in \alpha \wedge p \notin \alpha \Leftrightarrow q < p$$

O que é uma contradição, pois não é possível acontecer $p < q$ e $q < p$ ao mesmo tempo. Portanto, no máximo uma das três relações pode ocorrer. Suponha que $\alpha \neq \beta$, então ou existe um número racional p em α que não está em β ($\beta < \alpha$), ou existe um racional q em β que não está em α ($\alpha < \beta$), ou seja, pelo menos uma das relações deve ocorrer. □

Teorema 0.6. *Sejam α, β, γ cortes. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.*

Demonstração. Como $\alpha < \beta$, existe um racional p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Como $\beta < \gamma$, existe um racional q tal que $q \in \gamma$ e $q \notin \beta$. Note que se $p \in \beta$ e $q \notin \beta$ então $p < q$. Como $p \notin \alpha$, então $q \notin \alpha$. Portanto, $q \in \gamma$ e $q \notin \alpha$, o que implica que $\alpha < \gamma$. □

Teorema 0.7. *Sejam α, β cortes. Seja γ o conjunto de todos os racionais r tais que $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Então γ é um corte.*

Demonstração. Para mostrar que γ é um corte, precisamos mostrar que satisfaz as condições da definição de corte.

1. É fácil ver que γ não é vazio. Considere $s \notin \alpha$, $t \notin \beta$, onde $s, t \in \mathbb{Q}$. Temos que $s > p, \forall p \in \alpha$ e $t > q, \forall q \in \beta$. Assim, $s + t > p + q$ e $s + t \notin \gamma$.
2. Suponha que $r \in \gamma$ e $s < r$, com $s \in \mathbb{Q}$. Logo, $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Como $s < r$, temos que $s - q < p$, assim, $s - p \in \alpha$ e $s = (s - q) + q \in \alpha + \beta$.
3. Suponha que $r \in \gamma$. Logo, $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Assim, existe um racional $s > p$ tal que $s \in \alpha$. Portanto, $s + q > r$ e r não é o maior racional em γ.

□

Definição 0.8. *Se α, β são cortes, então*

$$\gamma = \alpha + \beta = \{r + s; r \in \alpha \ e \ s \in \beta\}$$

é um corte e chama-se soma de α e β. Vejamos algumas propriedades da operação de adição no conjunto dos cortes.

Utilizaremos a notação r^* para denotar o corte racional definido por:

$$r^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < r\}$$

Teorema 0.9. *Sejam α, β, γ cortes. Então,*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$

Demonstração.

1. $\alpha + \beta$ é o conjunto de todos os racionais da forma $p + q$, onde $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Na definição de $\beta + \alpha$, consideramos $q + p$, em vez de $p + q$. Pela comutatividade da adição de racionais, $p + q = q + p$. Portanto, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. Este resultado é fácilmente obtido a partir da propriedade de adição nos números racionais.
3. Seja $r \in \alpha + 0^*$. Logo, $r = p + q$ com $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$ (isto é, $q < 0$). Assim, $p + q < p$, de modo que, $p + q \in \alpha$ e $r \in \alpha$. Portanto, $\alpha + 0^* \subset \alpha$. Agora, suponhamos $r \in \alpha$ e tomemos $s \in \alpha$ com $s > r$. Então, $r - s \in 0^*$, e $r = s + (r - s) \in a + 0^*$. Portanto, $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Assim, $\alpha + 0^* = \alpha$.

□

Teorema 0.10. *Seja α um corte e $r > 0$ um racional dado. Existem racionais p, q tais que $p \in \alpha$, $q \notin \alpha$, q não é o supremo de α e $q - p = r$.*

Demonstração. Consideremos um racional $s \in \alpha$. Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ seja $s_n = s + nr$. Então existe um único inteiro m tal que $s_m \in \alpha$ e $s_{m+1} \notin \alpha$. Se s_{m+1} não for o supremo de α, consideremos $p = s_m$, $q = s_{m+1}$. Se s_{m+1} for o supremo de α, consideremos $p = s_{m+1} + \frac{r}{2}$, $q = s_{m+1} + \frac{r}{2}$. □

Teorema 0.11. *Seja α um corte. Existe um único corte β tal que $\alpha + \beta = 0^*$.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos a unicidade. Se $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = 0^*$, temos das propriedades da adição de cortes que, $\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$. Para provar a existência do corte, seja β o conjunto de todos os racionais p tais que $-p$ é uma cota superior de α, mas não o supremo. Temos que verificar que este conjunto β satisfaz as três condições da definição de corte. A primeira condição é óbvia. Vamos provar a segunda condição. Se $p \in b$ e $q < p$ (q racional), então $-p \notin \alpha$ e $-q > -p$, de modo que $-q$ é uma cota superior de α, mas não o supremo. Portanto, $q \in \beta$. Por fim, se $p \in \beta$,$-p$ é uma cota superior de α, mas não o supremo, de modo que existe um racional q tal que $-q < -p$ e $-q \notin \alpha$. Seja $r = \frac{p+q}{2}$. Logo, $-q < -r < -p$, de modo que $-r$ é uma cota superior de α, mas não o supremo. Portanto, encontramos um racional $r > p$ tal que $r \in \beta$, o que prova a terceira condição. Assim, mostramos que β é um corte, precisamos verificar se $\alpha + \beta = 0^*$. Suponhamos $p \in \alpha + \beta$. Logo, $p = q + r$, com $q \in \alpha$ e $r \in \beta$. Portanto, $-r \notin \alpha$, $-r > q$, $q + r < 0$ e $p \in 0^*$. Suponhamos $p \in 0^*$. Portanto, $p < 0$. Podemos determinar racionais $q \in \alpha$, $r \notin \alpha$ (e tal que r não seja o supremo de α), de modo que $r - q = -p$. Como $-r \in \beta$, temos $p = q - r = q + (-r) \in \alpha + \beta$. □

Teorema 0.12. *Sejam α, β, γ cortes.*

1. *Se $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ então $\beta = \gamma$*
2. *Se $\beta < \gamma$ então $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. Em particular, para $\beta = 0^*$ temos $\alpha + \gamma > 0^*$, se $\alpha > 0^*$ e $\gamma > 0^*$.*

Demonstração. 1. $\beta = 0^* + \beta = (-\alpha) + (\alpha + \beta) = (-\alpha) + (\alpha + \gamma) = 0^* + \gamma = \gamma$.

2. É óbvio que $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$, se $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$, pelo item anterior.

□

Teorema 0.13. *Sejam α, β cortes. Existe um único corte γ tal que $\alpha + \gamma = \beta$.*

Demonstração. Se $\gamma_1 \neq \gamma_2$ então $\alpha + \gamma_1 \neq \alpha + \gamma_2$. Assim, existe no máximo um γ nas condições enunciadas. Seja $\gamma = \beta + (-\alpha)$, então $\alpha + \gamma = \alpha + [\beta + (-\alpha)] = \alpha + [(-\alpha) + \beta] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = 0^* + \beta = \beta$. □

Teorema 0.14. *Sejam α, β cortes tais que $\alpha \leq 0^*$, $\beta \leq 0^*$. Seja γ o conjunto de todos os racionais r tais que $r = pq$, em que $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $p \leq 0$, $q \leq 0$. Então γ é um corte.*

Definição 0.15. *Chamamos o corte γ do Teorema anterior de produto de α e β e representamos por $\alpha\beta$.*

Definição 0.16. *Sejam α, β cortes. Definimos*

$$\alpha\beta = \begin{cases} -[(-\alpha)\beta] & \text{se } \alpha < 0^*, \beta \geq 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] & \text{se } \alpha \geq 0^*, \beta < 0^* \\ (-\alpha)(-\beta) & \text{se } \alpha < 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

Teorema 0.17. *Quaisquer que sejam os cortes α, β, γ temos:*

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4. $\alpha 0^* = 0^*$
5. $\alpha\beta = 0^*$ *somente se* $\alpha = 0^*$ *ou* $\beta = 0^*$
6. $\alpha 1^* = \alpha$
7. *Se $0^* < \alpha < \beta$ e $\gamma > 0^*$, então $\alpha\gamma < \beta\gamma$.*

Demonstração. As demonstrações dos itens das propriedades da multiplicação são análogas às da adição, bastando apenas atentar aos sinais separando em casos. □

Teorema 0.18. *Se $\alpha \neq 0^*$, para cada corte β existe um único corte γ tal que $\alpha\gamma = \beta$.*

Definição 0.19. *A cada corte α associamos um corte $|\alpha|$, que chamamos o valor absoluto de α, definido por:*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{se} \quad \alpha \geq 0^* \\ -\alpha & \text{se} \quad \alpha < 0^* \end{cases}$$

Teorema 0.20. **a)** $|ab| = |a||b|$

Demonstração. Se $ab > 0$, então $|ab| = ab$.
Caso 1.1:

$$a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow |a| = a \wedge |b| = b \Rightarrow |a||b| = ab = |ab|$$

Caso 1.2:

$$a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow |a| = -a \wedge |b| = -b \Rightarrow |a||b| = (-a)(-b) = |ab|$$

Se $ab < 0$, então $|ab| = -(ab)$.
Caso 2.1:

$$a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow |a| = a \wedge |b| = -b \Rightarrow |a||b| = a - (b) = -(ab) = |ab|$$

Caso 2.2

$$a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow |a| = -a \wedge |b| = b \Rightarrow |a||b| = (-a)b = -(ab) = |ab|$$

□

b) $|a|^2 = a^2, \forall a \in \mathbb{R}$

Demonstração. Sabemos que $a^2 \geq 0$, então temos:

$$a^2 = |a^2| = |aa| \overset{a)}{=} |a||a| = |a|^2$$

□

c) *Se $c \geq 0$, então $|a| \leq c$ se e somente se $-c \leq a \leq c$.*

Demonstração.

$$|a| \leq c \Leftrightarrow a \leq c \wedge -a \leq c \Leftrightarrow a \geq -c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$$

□

d) $-|a| \leq a \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$

Demonstração. Se tomarmos $c = |a|$ no item anterior, teremos:

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

□

Teorema 0.21. *Desigualdade triangular*
Se a, $b \in \mathbb{R}$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Demonstração. Do Teorema anterior, temos que $-|a| \leq a \leq |a|$ e $-|b| \leq b \leq |b|$. Somando essas desigualdades, nós obtemos:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Logo, $|a + b| \leq |a| + |b|$. □

Corolário 0.22. *Se a, $b \in \mathbb{R}$, então:*

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Demonstração.

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \quad (1)$$

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow |b| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow -|b - a| \leq |a| - |b| \quad (2)$$

De (1), (2), temos:

$$-|b - a| \leq |a| - |b| \leq |a - b| \Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b| \Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

□

Corolário 0.23. *Se a, $b \in \mathbb{R}$, então:*

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

Demonstração. Pela desigualdade triangular, temos:

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b| \Rightarrow |a - b| \leq |a| + |b|$$

□

Para demonstrar o Corolário a seguir, que é extensão da desigualdade triangular para finitos números reais, utilizaremos a Indução Matemática.

Corolário 0.24. *Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais quaisquer, então:*

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$

Demonstração. **i)** Para $n = 1$, temos:

$$|a_1| \leq |a_1|$$

ii) Suponha que a desigualdade seja válida para k. Vamos mostrar que vale para $k + 1$.

$$|a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}| \overset{desig.triang.}{\leq} |a_1+a_2+...+a_k|+|a_{k+1}| \overset{H.I.}{\leq} |a_1|+|a_2|+...+|a_k|+|a_{k+1}|$$

Por, i, ii, temos que a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 0.25. *Quaisquer que sejam os racionais p e q, temos:*

1. $p^* + q^* = (p + q)^*$
2. $p^* q^* = (pq)^*$
3. $p^* < q^*$ *se, e somente se,* $p < q$

Demonstração.

1. Se $r \in p^* + q^*$, temos $r = s + t$, com $s < p$, $t < q$, de modo que $r < p+q$. Portanto, $r \in (p+q)^*$, então $r < p+q$. Sejam $h = p+q-r$, $s = p-\frac{h}{2}$, $t = q - \frac{h}{2}$. Logo, $s \in p^*$, $t \in q^*$ e $r = p + q - h = (p - \frac{h}{2}) + (q - \frac{h}{2}) = s + t$, de modo que $r \in p^* + q^*$.
2. Análoga ao item anterior
3. Se $p < q$, então $p \in q^*$, mas $p \notin p^*$, de modo que $p^* < q^*$. Se $p^* < q^*$, existe um racional r tal que $r \in q^*$, $r \notin p^*$. Portanto, $p \leq r < q$, ou ainda $p < q$.

□

Teorema 0.26. *Se α, β são cortes e $\alpha < \beta$, existe um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$.*

Demonstração. Se $\alpha < \beta$, existe um número racional p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Escolhemos $r > p$ de modo que $r \in \beta$. Como $r \in \beta$ e $r \notin r^*$, temos $r^* < \beta$. Como $p \in r^*$ e $p \notin \alpha$, temos $\alpha < r^*$. □

Teorema 0.27. *Qualquer que seja o corte α, $p \in \alpha$ se, e somente se, $p^* < \alpha$.*

Demonstração. Qualquer que seja o racional p, $p \notin p^*$. Portanto, $p^* < \alpha$, pois $p \in \alpha$. Reciprocamente, se $p^* < \alpha$, existe um racional q tal que $q \in \alpha$ e $q \notin p^*$. Assim, $q \geq p$, donde concluímos que $p \in \alpha$, pois $q \in \alpha$. □

Teorema 0.28. *(Dedekind) Sejam A e B conjuntos de números reais tais que:*

1. *todo número real está em A ou em B*
2. *nenhum número real está simultaneamente em A e em B*
3. *nem A nem B é vazio*
4. *se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, temos $\alpha < \beta$*

Então, existe um e somente um, número real γ, tal que $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$, e $\gamma \leq \beta$, para todo $\beta \in B$.

Demonstração. (Unicidade) Suponhamos que existam dois números γ_1 e γ_2, para os quais a conclusão é válida e que $\gamma_1 < \gamma_2$. Existe γ_3 tal que $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$. De $\gamma_3 < \gamma_2$ resulta $\gamma_3 \in A$, enquanto que $\gamma_1 < \gamma_3$ resulta $\gamma_3 \in B$, o que contradiz (2). Portanto, não é possível existir outro número com as propriedades desejadas. (Existência) Seja γ o conjunto de todos os racionais p tais que $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Temos que verificar se γ satisfaz as condições da definição de corte.

- Como $A \neq \emptyset$, $\gamma \neq \emptyset$. Se $\beta \in B$ e $q \notin \beta$ então $q \notin \alpha$ qualquer que seja $\alpha \in A$, portanto $q \notin \gamma$.
- Se $p \in \gamma$ e $q < p$, então $p \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$ e, por conseguinte, $q \in \alpha$, portanto $q \in \gamma$.
- Se $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$, logo, existe $q > p$ tal que $q \in \alpha$; logo $q \in \gamma$.

Assim, γ é um número real. □

Conclusão

O objetivo deste trabalho era explorar as técnicas matemáticas presentes no trabalho original de Dedekind sobre a construção do conjunto dos Números Reais em que esta foi feita a partir do conjunto dos números racionais, utilizando a noção de Corte. Para isto, definimos o que é um corte, quando dois cortes são iguais e a relação de ordem de cortes e posteriormente, demonstramos as propriedades de ordem (tricotomia e transitividade). Em seguida, definimos as operações de adição e multiplicação de cortes, demonstramos as propriedades destas operações, definimos valor absoluto, demonstramos as propriedades do valor absoluto e por fim, demonstramos o teorema Dedekind, que comprova que a reta real, a grosso modo, não possui "buracos".

Agradecimentos

Agradecemos ao Governo do Estado do Paraná, a Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, a Fundação Araucária, a CAPES, a Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática/UEL, ao Programa de Educação Tutorial e ao MEC pelo apoio financeiro fornecido.

Referências

[1] AGUILAR, I.; DIAS, M. S. *A Construção dos Números Reais e suas Extensões.* 4º Colóquio da Região Centro-Oeste, 2015.

Calculando Determinantes pelo Método de Condensação de Charles L.Dodgson (Lewis Carroll)

Eduardo Henrique Cicero Lima,
Matheus Favero de Morais,
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Londrina
eduh_lima2006@hotmail.com
matheusfav@gmail.com
Ulysses Sodré
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Londrina
ulysses@uel.br

Resumo

Neste trabalho, apresentamos, de uma forma prática, o método de Condensação de Dodgson (Lewis L. Carroll) e vários exemplos numéricos e algébricos, mostrando como calcular determinantes através da redução da ordem da matriz a ordens menores, obtendo grande eficiência no processo. Este método foi publicado em 1867 e foi pouco divulgado na comunidade matemática, aparecendo um grande número de aplicações nos últimos dez anos.

Palavras-chave: Condensação, Determinante, Charles, Dodgson, Lewis, Carroll, ordem, redução.

1 Condensação de Charles Dodgson (Lewis L. Carroll)

Condensação simples é um processo pelo qual uma matriz A de ordem $n{\times}n$ é transformada por um determinado método, em uma matriz B de ordem $(n-1){\times}(n-1)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{Condensação}} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Condensação dupla é um processo pelo qual uma matriz A de ordem $n{\times}n$ é transformada por um certo método, em uma matriz B de ordem $(n-2){\times}(n-2)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{Condensação}} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

O interior de uma matriz A de ordem $n{\times}n$ é a matriz de ordem $(n-2)\times(n-2)$ obtida de A pela retirada: da primeira e da última linha de A, da primeira e da última coluna de A. Esta matriz é denotada por A°.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{Interior}} \quad A^\circ = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sejam $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij})$ e $Z = (z_{ij})$ matrizes de mesma ordem $m{\times}n$. A divisão pontual (ponto a ponto) de X por Y, é a matriz Z denotada por

$$Z = X \oslash Y$$

onde os elemento de Z são obtidos pela divisão $z_{ij} = x_{ij}/y_{ij}$ para cada par (i,j) de índices naturais.

2 Método geral para uma matriz de ordem 4

2.1 Condensação simples de uma matriz A

Seja uma matriz A de ordem $n{\times}n$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^\circ = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Com os elementos da matriz A, construímos 9 determinantes de ordem 2×2:

$$b_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad b_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad b_{13} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$$

$$b_{21} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad b_{22} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad b_{23} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$b_{31} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \quad b_{32} = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad b_{33} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

e montamos a matriz de ordem 3×3 com os nove (9) determinantes:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

2.2 Condensação simples da matriz B

A matriz obtida no primeiro passo é:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B^\circ = b_{22}.$$

Construímos 4 determinantes de ordem 2×2 com os elementos de B:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad c_{12} = \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}, \quad c_{21} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}, \quad c_{22} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

e montamos a matriz de ordem 2×2:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

2.3 Divisão pontual de C pelo interior de A

Após condensação dupla, realizamos a divisão pontual da matriz C pelo interior de A, para obter os valores:

$$d_{11} = \frac{c_{11}}{a_{22}}, \quad d_{12} = \frac{c_{12}}{a_{23}}, \quad d_{21} = \frac{c_{21}}{a_{32}}, \quad d_{22} = \frac{c_{22}}{a_{33}}$$

Assim, construímos a matriz

$$D = C \oslash A^\circ = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

2.4 Condensação da matriz D

A condensação da matriz D é obtida com o determinante desta matriz D:

$$E = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}$$

2.5 Divisão pontual de E pelo interior de B

Agora, obtemos o determinante da matriz A, com a divisão pontual da matriz E pelo interior da matriz B, isto é,

$$\det(A) = E \oslash B^\circ$$

3 Exemplos usando o método de condensação

3.1 Determinante de uma matriz quadrada da ordem 3

1. Identificando a matriz A e o seu interior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Obtendo a condensação de A:

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(5) - 4(2) & 2(6) - 5(3) \\ 4(8) - 7(5) & 5(1) - 8(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -43 \end{pmatrix}$$

3. Obtendo a condensação de B:

$$C = \det(B) = (-3)(-43) - (-3)(-3) = 120$$

4. Divisão pontual de C pelo interior de A:

$$D = C \oslash A^\circ = 120 \div 5 = 24$$

matriz	Operação	Resultado
A	Condensação	B
B	Condensação	C
$C \oslash A^\circ$	Divisão pontual	D

Tabela 1: Diagrama do método: matriz 3x3

3.2 Determinante de uma matriz quadrada de ordem 4

1. Identificando a matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 10 \\ 13 & 14 & 15 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A^\circ = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

2. Obtendo B que é a condensação de A:

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & 10 \\ 15 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -18 \\ -4 & -4 & -51 \end{pmatrix}$$

e o interior de B, é $A^\circ = (-4)$.

Nota: Por ter duas colunas iguais, $\det(B) = 0$, mas continuaremos a *condensar* esta matriz!

3. Obtendo C como a condensação de B:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -18 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -18 \\ -4 & -51 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 56 \\ 0 & 132 \end{pmatrix}$$

4. Obtendo D como divisão pontual de C pelo interior de A:

$$D = C \oslash A^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 56 \\ 0 & 132 \end{pmatrix} \oslash \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

5. Obtendo E como a condensação de D, isto é, $E = \det(D) = 0$.

6. Obtemos F como a divisão pontual de E pelo interior de B:

$$F = E \oslash B^\circ = 0 \div (-4) = 0$$

matriz	Operação	Resultado
A	Condensação	B
B	Condensação	C
$C \oslash A^\circ$	Divisão pontual	D
D	Condensação	E
$E \oslash B^\circ$	Divisão pontual	F

Tabela 2: Diagrama do método: matriz 4x4

3.3 Determinante de uma matriz quadrada de ordem 5

1. Consideremos a matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^\circ = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Obtendo B que é a condensação de A:

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 1 & 19 \\ -21 & -6 & 2 & 2 \\ 7 & -18 & -6 & 6 \\ -1 & -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

e o seu interior, denotado por:

$$B^\circ = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -18 & -6 \end{bmatrix}$$

3. Obtendo C como a condensação de B:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 14 & 5 \\ -21 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 19 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -21 & -6 \\ 7 & -18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -18 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & -18 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -18 & -6 \\ -10 & -15 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -15 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 16 & -36 \\ 420 & 72 & 24 \\ -88 & 210 & 60 \end{pmatrix}$$

e o interior de C:

$$C^\circ = 72.$$

4. Obtendo D como a divisão pontual de C pelo interior de A:

$$D = C \oslash A^\circ = \begin{pmatrix} 21 & 16 & -36 \\ 420 & 72 & 24 \\ -88 & 210 & 60 \end{pmatrix} \oslash \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{1} & \frac{16}{-2} & \frac{-36}{-3} \\ \frac{420}{-4} & \frac{72}{2} & \frac{24}{2} \\ \frac{-88}{-1} & \frac{210}{5} & \frac{60}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -8 & 12 \\ -105 & 36 & 12 \\ 88 & 42 & 30 \end{pmatrix}$$

5. Obtendo E como a condensação de D:

$$E = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 21 & -8 \\ -105 & 36 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -8 & 12 \\ 36 & 12 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -105 & 36 \\ 88 & 42 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 36 & 12 \\ 42 & 30 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -84 & -528 \\ -7578 & 576 \end{pmatrix}$$

6. Obtendo F como a divisão pontual de E pelo interior de B:

$$F = E \oslash B^\circ = \begin{pmatrix} -84 & -528 \\ -7578 & 576 \end{pmatrix} \oslash \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -18 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -264 \\ 421 & -96 \end{pmatrix}$$

7. Obtendo G como a condensação de F:

$$G = \det(F) = \begin{vmatrix} 14 & -264 \\ 421 & -96 \end{vmatrix} = 109800$$

8. Finalmente, H é a divisão pontual de G pelo interior de D, que é o determinante da matriz original A:

$$H = G \oslash D^\circ = 109800 \div 36 = 3050 = \det(A)$$

4 Dois casos particulares interessantes

4.1 Matriz quadrada de ordem 3 com interior não nulo

Seja uma matriz quadrada de ordem 3:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad M^\circ = (e) \neq 0.$$

matriz	Operação	Resultado
A	Condensação	B
B	Condensação	C
$C \oslash A^\circ$	Divisão pontual	D
D	Condensação	E
$E \oslash B^\circ$	Divisão pontual	F
F	Condensação	G
$G \oslash D^\circ$	Divisão pontual	H

matriz	Operação	Resultado
A	Condensação	B
B	Condensação	C
$C \oslash A^\circ$	Divisão pontual	D
D	Condensação	E
$E \oslash B^\circ$	Divisão pontual	F
F	Condensação	G
$G \oslash D^\circ$	Divisão pontual	H
H	Condensação	I
$I \oslash F^\circ$	Divisão pontual	J

Tabela 3: Diagramas do método: à esquerda matriz 5x5 e à direita matriz 6x6

Tomando N como a condensação (simples) de M, obtemos:

$$N = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae - bd & bf - ce \\ dh - eg & ei - fh \end{pmatrix}$$

O determinante de N é dado por

$$\begin{aligned} \det(N) &= (ae - bd)(ei - fh) - (bf - ce)(dh - eg) \\ &= ae^2i - aefh - bdei + befg + cdeh - ce^2g \\ &= e(aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg) = e \ \det(M) = M^\circ \det(M) \end{aligned}$$

assim

$$\det(M) = \frac{\det(N)}{M^\circ} = \frac{\text{Condensação}(M)}{M^\circ}$$

4.2 Matriz quadrada de ordem 3 cujo interior é nulo

Consideremos a matriz quadrada de ordem 3 com interior nulo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Para obter o $\det(M)$, devemos dividir a condensação de M pelo $M^\circ = 0$, o que não é possível. Trocando a primeira primeira linha pela segunda linha de M obtemos a matriz

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

e basta seguir o processo normalmente, lembrando que

$$\det(M) = -\det(M') = -28$$

Alternativamente, podemos obter o determinante através do cálculo de um limite.

Seja a mesma matriz quadrada de ordem 3 com interior nulo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Para obter $\det(M)$, trocamos o zero (0) por x para obter:

$$M'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & \mathbf{x} & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Realizamos a condensação de M' para obter:

$$M''(x) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ x & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & x \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3 & 1+3x \\ 9+x & -2x-3 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\det(M'') = (2x-3)(-2x-3) - (9+x)(1+3x) = -7x^2 - 28x$$

Finalmente, calculamos o determinante de M utilizando um limite:

$$\det(M) = \lim_{x\to 0} \frac{\det(M'')}{M^\circ} = \lim_{x\to 0} \frac{-7x^2 - 28x}{x} = \lim_{x\to 0}(-7x-28) = -28$$

Referências

[1] **Dodgson, Charles**, 1867, 'Condensation of Determinants, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values', Proceedings of the Royal Society of London, Vol.15 (1866-1867). 2017-1867=150 anos.

[2] **Dodgson, Charles**, 1867, Elementary Treatise on Determinants with the Applications to Simultaneous Linear Equations and Algebraical Geometry, MacMillan and Co, London.

[3] **Adrian Rice and Eve Torrence** Lewis Carroll's Condensation Method for Evaluating Determinants. Math Horizons, Vol.14, No.2 (Nov 2006), pp.12-15. Mathematical Association of America.
Acessado em: http://www.jstor.org/stable/25678651. 23-10-2017 15:57.

[4] **Adrian Rice and Eve Torrence** 'Shutting up like a telescope': Lewis Carroll's 'Curious' Condensation Method for Evaluating Determinants. Vol.38, No.2, March 2007. pag.85-95. The College Mathematics Journal. MAA.

[5] **Wilson, Robin** 2008, Lewis Carroll in Numberland: His Fantastical Mathematical Logical Life, W. W. Norton & Co, New York, NY.

DIFERENTES DEMONSTRAÇÕES DA EXISTÊNCIA DE INFINITOS PRIMOS

FURIHATA[1], Eduardo; CARVALHO[2], Ana Márcia Fernandes Tucci

RESUMO

Na teoria dos números, o estudo da classe particular constituída pelos números primos é surpreendente porque resultados fáceis de enunciar, do ponto de vista matemático, são difíceis de provar, ou mesmo, impossíveis, causando espanto e curiosidade. Além disso, a teoria dos números primos possui aplicações em diversos campos científicos, como a criptografia. Álgebra, e teoria dos números como subárea, é um ramo da Matemática que possibilita um contato direto com o formalismo matemático, entendido como os modos de conceber e demonstrar teoremas, baseados numa axiomática preestabelecida e em definições e conceitos bem determinados, o que certamente constitui bagagem essencial para o aluno de graduação em Matemática e é elemento fundamental para a continuação nos estudos na pós-graduação em Matemática ou áreas afins. Quantos números primos existem? Existem infinitos números primos. Realizaremos dez demonstrações da existência da infinidade de números primos. Algumas são simples, outras mais engenhosas. Euclides, na Grécia antiga, demonstrou de forma bem elementar. Kummer e Métrod demonstraram utilizando ideias semelhantes à de Euclides. Goldbach utilizou sucessões de primos entre si e essa sucessão pode ser feita utilizando os números de Fermat. Schorn e Stieltjes fazem uso de fatorial. Euler e Perott utilizam série. Thue e Auric utilizam o teorema da fatoração única.

PALAVRAS-CHAVE: Números primos. Teoria dos números. Demonstração Matemática. Números de Fermat.

INTRODUÇÃO

Uma diversidade de estudos pode ser feita considerando-se a teoria de números primos. Questões como: “qual a função que determina o enésimo termo primo?” e “como os primos se distribuem em um determinado intervalo?” são frequentes no estudo de primos. Do ponto de vista matemático, algumas proposições simples de enunciar, podem demandar inúmeros resultados preliminares, para serem demonstrados. As proposições também podem envolver vários campos da matemática como probabilidade, aritmética, topologia, anéis, grupos. O estudo de algumas relações, padrões, mistérios e perguntas em aberto são amplamente discutidas por Ribenboim (2014). Além disso, o estudo da teoria de números primos possui aplicações em diversos campos científicos, por exemplo, na criptografia.

Neste trabalho serão apresentadas dez demonstrações, de diferentes matemáticos, para a afirmação “Existem infinitos números primos”. A maioria das demonstrações é feita por absurdo.

Entendemos as demonstrações em matemática como sendo importantes não apenas para estabelecer o formalismo intrínseco à teoria, mas também como objeto de aprendizagem, isto é, a

[1] Graduação em Matemática em andamento. Universidade Estadual de Londrina. Email: eduardofurihata@gmail.com
[2] Professora Adjunta do Departamento de Matemática. Universidade Estadual de Londrina. Email: anatuccicarvalho@gmail.com

demonstração permite estabelecer um conjunto de conhecimentos que podem ser utilizados no cotidiano da prática matemática.

Os objetivos são:

- Estudar um tema que, geralmente, não é contemplado nos currículos de matemática dos cursos de graduação.
- Praticar técnicas de demonstrações, visando o formalismo.
- Obter contato com resultados e afirmações recentes no assunto.
- Contemplar várias formas de demonstrar a existência de infinitos primos.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada durante a realização deste projeto de iniciação científica é a sessão integrada (CARVALHO, 2004).

Sessões integradas é o nome que damos para uma situação de aprendizagem em que é possível tratar simultaneamente os objetos matemático, didático e pedagógico de forma integrada (Carvalho et.al., 2003).

Assim, a situação de ensino e aprendizagem compreende, como sessão integrada: (i) o sujeito ao quadro que assume a posição de aluno e um problema matemático (objeto matemático), (ii) os sujeitos que ao assumirem a posição de professores/coordenadores respondem pela condução do processo de aprendizagem que inclui um tema de matemática (objeto didático), (iii) comentários e discussões sendo feitos a respeito da condução, como se abordará o objeto matemático (objeto pedagógico). O que permite que isso aconteça é que a condução nas sessões integradas é regida pelo aforismo: *quem quer aprender, deve falar e quem quer ensinar, deve ouvir*. Quebram-se as rotineiras posições sustentadas no ensino tradicional, as sessões integradas são um tempo em que ocorrem mudanças: quem fala é o aluno, quem escuta é o professor.

Essa perspectiva que assumimos é pautada pelo primado da educação sobre a matemática, considerando que há o manejo da matemática como instrumento de poder constitutivo da prática educativa. É uma tentativa de mudança partindo de um ponto interno ao sistema acadêmico. Aceitamos a academia como é e, ao não nos contentarmos com o dizer sobre o fracasso escolar, intervimos nesse meio, isto é planejamos ações e as colocamos em ato. As sessões integradas representam esta intervenção: uma resposta possível à exclusão do aprendizado de matemática, com exigência dirigida ao aluno no sentido de colocá-lo em posição de responder pelo saber instituído.

O aluno sempre responde tentando conjugar fatores como os processos promocionais e o saber instituído. Esses vínculos são construídos ao longo do processo de formação que o coloca em posição de se reconhecer e se fazer reconhecer aluno na instituição.

Nas sessões integradas, por considerarmos que esses vínculos são integrantes dos processos de reconhecimento e para encetar o trabalho, partimos da posição inerente ao ensino tradicional vigente, isto é, assumimos inicialmente a posição, considerada por professores bastante estável e confortável, de quem tudo sabe sobre o processo de aprendizagem do aluno, em outras palavras, aceitamos a posição de sujeito-suposto-saber, tão cara aos professores, de um modo geral. Assumimos a posição de detentores do conhecimento, estabelecendo os vínculos necessários para que a transferência pedagógica se instaure e permitindo que os discursos se presentifiquem.

Em seguida, exatamente porque visamos a manejar o processo de aprendizagem e não visamos a conduzir o aluno entre verdades matemáticas, procuramos nos colocar em posição contrária à posição que indica ser o professor o sujeito que tudo sabe. Procuramos tornar o professor barrado. O professor, nestas sessões, procura sustentar o processo de aprendizagem colocando-se ‘fora’ da posição de sujeito-suposto-saber, isto é, conduz o aluno de maneira a que este se responsabilize pelo que aprende, pela sua própria enunciação.

Assumimos então a posição daquele que <u>não</u> sabe sobre os modos de o aluno lidar com sua própria aprendizagem, mas que pode prover condições para que o aluno produza esse feito.

As intervenções didática e pedagógica preveem que o ambiente possibilite que o aluno se exponha, fale e assuma compromissos com sua produção de saber. É de se esperar que na posição do falante a fala do aluno claudique. Quando isso ocorre, pontuamos as claudicações e procuramos desestruturar a certeza do aluno até que as respostas dele venham acompanhadas de uma nova estabilidade.

Esta estabilidade denota que é sua maneira preferencial de justificar que está em questão, ainda que o coloquemos em situações nas quais se veja perturbado. A essa permanência estável, denominamos simplesmente preferência. É preciso que a justificação esperada seja a justificação preferencial do sujeito diante da demanda, neste caso, a demanda é a aprendizagem de matemática tomada como conteúdo formal, por meio das demonstrações. Quando isso ocorre é que dizemos que o aluno entendeu.

Muitas vezes o aluno apenas reproduz o discurso do professor, sem realizar uma produção própria. Esta reprodução está fundada no circuito das identificações. Todos nós estamos sujeitos a identificações que nos moldam e, ao mesmo tempo, que delimitam certos posicionamentos e certos discursos, entre eles, o ‘discurso matemático’.

A sessão integrada permite interferir na aprendizagem do aluno, de modo que não apenas reproduza um discurso pré-estabelecido, mas consiga desenvolver uma produção própria, calcando degraus no formalismo matemático e na aprendizagem em matemática.

DEMONSTRAÇÕES NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

> Duvidamos, também, de todas as outras coisas que outrora já nos pareceram muito certas, incluindo as demonstrações de matemática e seus princípios, embora estes sejam bastante manifestos, porque homens há que se equivocaram raciocinando sobre tais matérias...
>
> Descartes, Princípios da Filosofia

Os cursos de Matemática, e particularmente o curso de Bacharelado em Matemática, apresentam uma característica própria no que diz respeito à grande quantidade de demonstrações dos resultados.

Morais Filho (2007), respondendo à pergunta "O que é uma demonstração?" afirma que

> Dentro de um modelo axiomático, dadas duas proposições H e T, uma **demonstração** de que a proposição H acarreta a proposição T é uma sequência finita de sentenças $P_{1,}P_{2,}P_{3,}\dots, P_k$, tais que cada uma delas é, ou um axioma, ou uma definição, ou uma hipótese, ou uma sentença resultante de sentenças anteriores, que foi deduzida por argumentações válidas. A proposição final P_k da sequência é a proposição T (tese), resultado de todo o processo dedutivo. (MORAIS FILHO, 2007, p. 98)(grifo do autor)

Este objeto nomeado "demonstração", com o qual o matemático tão bem lida, pode ser encarado como a resposta a um "por quê?" (HANNA e JAHNKE, 2002, p. 44) sobre um enunciado matemático. Essa resposta a um 'por quê' funda-se na perspectiva da busca pela 'verdade'; desde os primórdios da matemática fala-se em 'verdadeiro' e 'falso' (DOMINGUES, 2002) e essa 'verdade matemática' é encarada muitas vezes na fundamentação das proposições em um sistema axiomático-dedutivo. O primeiro exemplo deste método de dedução parece ser encontrado na obra Os Elementos de Euclides (c.300 a.C.)[3].

Garnica (1995), comentando os aspectos históricos do surgimento da 'prova rigorosa', nos lembra que "...seu surgimento, (...) é claro. Lugar e tempo são delimitados. Nomes são citados: Euclides, século III a.C., Grécia" (GARNICA, 1995, p. 15).

O que permite afirmar que a prova há muito tempo vem sendo considerada, e até hoje é, importante na matemática e nos currículos de matemática, desde o ensino fundamental até o superior. Como afirma Hanna, "a prova está viva e saudável na prática matemática, e continua a merecer um lugar de destaque no currículo de matemática". (HANNA, 2000, p. 5).

A questão da demonstração é certamente o foco principal da atenção dos alunos que se iniciam nos estudos da Matemática, quer por caracterizar onde a Matemática mostra toda a sua exatidão e excelência, quer por ser um dos aspectos mais difíceis da teoria. É tarefa do professor torná-las acessíveis, de fácil compreensão, para que o aluno se torne capaz de as reproduzir e, após um período mais longo de estudo, de criá-las, criticá-las, analisá-las, aprender com elas.

---

[3] *Os Elementos* de Euclides (300 a.C.), apresentavam uma geometria especulativa, de inspiração platônica, e preocupação com o rigor das demonstrações.

Em seu artigo, Simpson (1994) analisa diferentes tipos de atitudes de alunos diante das demonstrações. Segundo este autor, é interessante destacar os seguintes grupos de reações dos alunos relativamente às demonstrações: (i)as demonstrações não são necessárias, porque o simples fato do professor assegurar a veracidade de alguma afirmação já é suficiente para convencê-los (ii) as demonstrações são aceitas sem restrições porque desempenham o papel de determinar a validade de um teorema. O primeiro grupo de caracterização evidencia o grande abismo existente entre o que o matemático experiente e o aluno iniciante entendem pelo tema.

Defendemos que as demonstrações podem desempenhar diferentes papéis, entre os quais: funcionam como instrumento de validação de um argumento, conduzem a novas descobertas, geram debates e certamente, podem ajudar a eliminar erros preliminares.

Mais recentemente, Carvalho e Savioli (2013), analisando o papel das demonstrações matemáticas na Educação Matemática, trazem reflexões acerca das correlações entre demonstrações matemáticas e esta questão da 'verdade' que a demonstração estabeleceria. Utilizando-se de Foucault como referencial teórico, as autoras argumentam que não existe *a* verdade e sim, uma verdade que é instituída, combinada, obtida.

> [...] em Matemática, ao falarmos de verdade devemos falar em prova ou demonstração, aquilo que, dentro de um conjunto pré-estabelecido de axiomas ou premissas assumidas como verdadeiras e fundamentado em sequências lógicas ou regras de inferência, atesta a veracidade de uma afirmação. [...] A verdade é combinada. Fixam-se as regras fixando-se o modelo axiomático, aquilo de que se parte, o incontestável. O único desafio neste contexto é justamente não se esquivar dele. (CARVALHO e SAVIOLI, 2013, p. 50).

A questão a ser considerada neste contexto é a de que, sendo a verdade estabelecida pela demonstração *uma* das verdades, combinada culturalmente, está ela sujeita a *outros fatores* que não apenas restrita aos modelos axiomáticos defendidos pela matemática mais 'pura', as demonstrações em matemática estão, explícita ou implicitamente, em dependência direta de *outros* fatores como os sujeitos que as realizam (CARVALHO, 2004).

EXISTENCIA DE INFINITOS NÚMEROS PRIMOS

Definição de números primos e compostos: "Um número primo é um número inteiro maior que 1, que só admite como divisores ele próprio e 1. Os demais inteiros maiores que 1, não-primos, são chamados compostos." (RIBENBOIM, 2014).

Além disso valem as seguintes propriedades: "Todo número composto é produto de números primos. A menos da ordem dos fatores, esse produto é único. Esse é o teorema fundamental da aritmética." (RIBENBOIM, 2014).

A seguir, apresentamos dez demonstrações da seguinte afirmação "Existe uma infinidade de números primos". As demonstrações são baseadas em Ribenboim (2014).

1. Demonstração de Euclides

Suponha por absurdo que existem finitos r primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.

Considere $p = p_1 p_2 \dots p_r + 1$. Podemos afirmar que $p > p_r$.

Se p é primo, então existem $r + 1$ primos. Absurdo.

Caso contrário, se p é composto, então existe $i \in \{1, \dots r\}$ tal que $p_i | p$.

$$p_i | p_1 \dots p_r$$

$$p_i | p - p_1 \dots p_r$$

$$p_i | 1$$

Absurdo.

2. Demonstração de Kummer

Suponha por absurdo que existem finitos r primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.

Considere $p = p_1 p_2 \dots p_r - 1$. Podemos afirmar que $p > p_r$.

Se p é primo, então existem $r + 1$ primos. Absurdo.

Se p é composto, então existe $i \in \{1, \dots r\}$ tal que $p_i | p$.

$$p_i | p_1 \dots p_r$$

$$p_i | p_1 \dots p_r - p$$

$$p_i | 1$$

Absurdo.

3. Demonstração de Stieltjes

Sabe-se que existem infinitos naturais.

Se para todo n natural, podemos encontrar p primo tal que $p > n$, então podemos encontrar p tão grande quanto se queira. Assim, existem infinitos primos.

Dessa forma, é suficiente mostrar que dado n natural qualquer, podemos encontrar um número primo p tal que $p > n$.

Seja n natural.

Se $n! + 1$ é primo, então existe $p = n! + 1$ primo tal que $p > n$, pois $n! + 1 > n! > n$.

Se $n! + 1$ é composto, existe p primo tal que $p | n! + 1$.

Afirmamos que $p > n$. De fato, suponha por absurdo $p \leq n$.

$$p | n!$$

$$p | (n! + 1) - n!$$

$$p | 1$$

Absurdo.

4. Demonstração de Goldbach utilizando os números de Fermat

Goldbach utilizou a seguinte sequência de argumentos.

Se existe uma sucessão infinita $a_1 < a_2 < \cdots < a_i < \cdots$ de naturais dois a dois primos entre si, então obtemos infinitos $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ primos distintos, tal que p_i é fator primo de a_i. Basta encontrar uma sucessão infinita de naturais dois a dois primos entre si. Para isso vamos utilizar os números de Fermat.

Definição de número de Fermat: um número F_n é número de Fermat se está na forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, para $n \geq 0$ natural. Exemplos: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$.

Antes de provar que a sequência dos números de Fermat possui termos dois a dois primos entre si, vamos provar, por indução sobre m, a seguinte proposição: $F_m = F_0 \ldots F_{m-1} + 2$, para $m \geq 1$ natural.

Se $m = 1$, então $F_1 = 5 = 3 + 2 = F_0 + 2$. A proposição é válida para $m = 1$.

Suponha por indução que a proposição seja válida para m. Assim,

$$F_m - 2 = F_0 \ldots F_{m-1}$$

Queremos provar que a proposição seja válida para $m + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= 2^{2^{m+1}} + 1 \\ &= 2^{2^m \cdot 2} + 1 \\ &= (2^{2^m})^2 + 1 \\ &= (F_m - 1)^2 + 1 \\ &= F_m^2 - 2F_m + 2 \\ &= (F_m - 2)F_m + 2 \\ &= (F_0 \ldots F_{m-1})F_m + 2 \end{aligned}$$

Assim, a proposição é válida para $m + 1$.

Provemos que dados quaisquer dois termos distintos da sequência de Fermat são dois a dois primos entre si. É suficiente mostrar que, para qualquer m, se $n < m$ natural, então para qualquer p primo, p não divide F_n e F_m ambos ao mesmo tempo. De fato,

Seja $m \in \mathbb{N}$. Suponha $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < m$ e p primo.

$$n < m \Rightarrow F_n | F_0 \ldots F_{m-1} \Rightarrow F_n | F_m - 2$$

Suponha por absurdo $p|F_n$ e $p|F_m$.

$$p|F_n \Rightarrow p|F_m - 2 \Rightarrow p|(F_m - 2) - F_m \Rightarrow p|2 \Rightarrow p = 2$$

Portanto F_m é par. Absurdo, pois F_m é ímpar. Assim, a sequência de Fermat é uma sucessão infinita de naturais dois a dois primos entre si como queríamos exibir.

5. Demonstração de Schorn

Schorn apresenta uma sucessão finita de termos dois a dois primos entre si.

Suponha por absurdo que existem m primos. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + 1$. Considere a seguinte sucessão finita.

$$a_1 = 1 \cdot n! + 1$$
$$a_2 = 2 \cdot n! + 1$$
$$\vdots$$
$$a_n = n \cdot n! + 1$$

Queremos mostrar que nessa sucessão, que quaisquer dois termos distintos são primos entre si. Seja $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq i < j \leq n$. É suficiente mostrar que $mdc(a_i, a_j) = 1$. Para algum $d \in \mathbb{N}$, $j = i + d$.

$$\begin{aligned} mdc(a_i, a_j) &= mdc(i \cdot n! + 1, (i + d)n! + 1) \\ &= mdc(i \cdot n! + 1, d \cdot n!) \end{aligned}$$

Suponha por absurdo que existe p primo tal que $p|d \cdot n!$ e $p|i \cdot n! + 1$.

$p \leq n$, pois pela fatoração única, cada primo que divide $d \cdot n!$ é no máximo igual a n. Assim,

$$p|1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$
$$p|i \cdot n!$$
$$p|(i \cdot n! + 1) - (i \cdot n!)$$
$$p|1$$

Absurdo. Assim, a sucessão possui termos dois a dois primos entre si.

Podemos encontrar $p_1, p_2, \ldots, p_n$ primos distintos tais que p_i é fator primo de a_i. Dessa forma, obtemos uma sequência de $n = m + 1$ primos. Absurdo, pois assumimos que existem m primos.

6. Demonstração de Euler

Suponha por absurdo que existem finitos r primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.

Seja $p \in \{p_1, \ldots p_r\}$.

$$\frac{1}{p} < 1$$

A série geométrica de razão $\frac{1}{p}$ e primeiro termo 1 é dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

Seja $q \in \{p_1, \ldots p_r\}$ tal que $p \neq q$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{q}}$$

Por um lado,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q}}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q^k}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{pq}+\frac{1}{q^2}+\cdots$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^hq^k}$$

Ou seja, pela fatoração prima única, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q^k}$ é a soma dos inversos de todos os inteiros naturais da forma p^hq^k, cada um sendo contado uma só vez.

Estendendo a ideia anterior, para cada $i=1,\dots,r$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$$

Por um lado,

$$\prod_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}=\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-p_i}\in\mathbb{R}$$

Assim, $\prod_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}$ converge.

Por outro lado,

$$\prod_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{1}{p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}}$$

Isto é, pela fatoração prima única, $\prod_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}$ é a soma dos inversos de todos os naturais, cada um contado uma só vez. Dessa forma, $\prod_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}$ é equivalente à série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ com a ordem dos termos invertidos. Como a série harmônica diverge independente da ordem dos termos (RIBENBOIM, 2014), $\prod_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}$ diverge. Absurdo, pois concluímos que $\prod_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}$ converge e diverge ao mesmo tempo.

7. Demonstração de Thue

Sejam $n,k\in\mathbb{N}$ tais que $(1+n)^k<2^n$; $p_1=2,p_2=3,\dots,p_r$ os primos menores que 2^n.

Suponha por absurdo $r\le k$.

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq m \leq 2^n$. Sabemos que cada natural possui fatoração prima única.

$$\exists!\, e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}: m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$$

A quantidade de elementos do conjunto $\{1,2, \dots, 2^n\}$ é 2^n. Além disso, $0 \leq e_1 \leq n$ e $0 \leq e_2, e_3, \dots, e_r < n$. A quantidade de combinações dos fatores primos é $(n+1)n^{r-1}$. Assim,

$$2^n \leq (n+1)n^{r-1} < (n+1)^r \leq (n+1)^k < 2^n$$

$$2^n < 2^n$$

Absurdo.

Assim, $r > k$, isto é, $r \geq k+1$. Isto quer dizer que, fixado k, existem pelo menos $k+1$ primos. Como k pode ser tão grande quanto se queira, existem infinitos primos.

8. Demonstração de Perott

Sabemos que a p-série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge. Inicialmente vamos provar que $1 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 2$. De fato, para $i \in \mathbb{N}$,

$$i^2 < i^2 + i = i(i+1)$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{i^2} + \cdots < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{i(i+1)} + \cdots$$

$$1 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 + 1 = 2$$

$$1 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 2$$

Para algum $\delta \in (0,1)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 2 - \delta$$

Provemos agora a infinidade de números primos.

Suponha por absurdo que existem finitos r primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > p_1 \dots p_r$. Pela fatoração prima única, qualquer inteiro m pode ser escrito na forma $m = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$, com $t_1, \dots t_r \in \mathbb{N}$.

Considere os inteiros m do tipo $m = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$ tal que, para cada $j = 1, \dots, r$, $t_j = 0$ ou $t_j = 1$. Os inteiros desse tipo são os inteiros menores ou iguais a n sem fator quadrado. Dessa forma, a quantidade de inteiros menores ou iguais a n sem fator quadrado, pelo princípio fundamental da contagem é 2^r.

Aplicando a fatoração prima em n, obtemos $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ para algum $e_1, \dots, e_r \geq 1$ natural. Queremos encontrar a quantidade q_i de inteiros menores ou iguais a n e divisível por p_i^2 para cada $i = 1, \dots, r$.

Se $e_i = 1$, n não é divisível por p_i^2, então $q_i = 0 < \frac{n}{p_i^2}$.

Se $e_i > 1$, então, pelo princípio fundamental da contagem,

$$q_i = (e_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_i + 1 - 2) \cdot \ldots \cdot (e_r + 1) < p_1^{e_1} \ldots p_i^{e_i - 2} \ldots p_r^{e_r} = \frac{n}{p_i^2}$$

Note que $e_i + 1 < p_i^{e_i}$ e para cada $i = 1, \ldots, r$, $q_i \leq \frac{n}{p_i^2}$. Assim, para $q = \sum_{i=1}^{r} q_i$ quantidade de inteiros menores ou iguais a n e possuindo fator quadrado, temos $q \leq \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i^2}$.

A quantidade de elementos do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ é menor ou igual a soma da quantidade de elementos do conjunto de inteiros menores ou iguais a n sem fator quadrado com a quantidade máxima de elementos do conjunto de inteiros menores ou iguais a n possuindo fator quadrado. Assim,

$$n \leq 2^r + \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i^2}$$

Considerando que $\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i^2} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - 1$, temos

$$n \leq 2^r + \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i^2} < 2^r + n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - 1\right) = 2^r + n\big((2-\delta) - 1\big) = 2^r + n(1-\delta)$$

Escolhendo n suficientemente grande tal que $n\delta \geq 2^r$, temos $n < n$. Absurdo.

9. Demonstração de Auric

Suponha por absurdo que existem finitos r primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.

Sejam $t \geq 1$ inteiro e $n = p_r^t$. Pela fatoração prima única, para cada $j = 1, \ldots, n$

$$\exists!\, f_{1,j}, \ldots, f_{r,j} \in \mathbb{Z}: j = p_1^{f_{1,j}} \cdot \ldots \cdot p_r^{f_{r,j}}$$

Cada j dá uma sucessão $(f_{1,j}, \ldots, f_{r,j})$.

Considere $E = \frac{\log p_r}{\log p_1}$. Para cada $i = 1, \ldots, r$, temos:

$$p_1^{f_{i,j}} \leq p_i^{f_{i,j}} \leq j \leq n = p_r^t$$

$$f_{i,j} \log p_1 \leq t \log p_r$$

$$f_{i,j} \leq t\,E$$

$$f_{i,j} + 1 \leq tE + 1$$

Considere $f_i = \max\big(\{f_{i,1}, \ldots, f_{i,n}\}\big)$. Assim, $f_i + 1 \leq tE + 1$.

A quantidade de combinações dos fatores primos p_i de expoente a_i tal que $0 \leq a_i \leq f_i$ é $(f_1 + 1)(f_2 + 1) \ldots (f_r + 1)$. Conforme cada f_i foi definido, essas combinações geram pelo menos os números $1, \ldots, n$. Podemos concluir que

$$p_r^t = n \leq (f_1 + 1)(f_2 + 1) \ldots (f_r + 1) \leq (tE + 1)^r \leq t^r (E + 1)^r$$

$$p_r^t \leq (E+1)^r t^r$$

Para t suficientemente grande, a função exponencial p_r^t deve ser maior que a função polinomial $(E+1)^r t^r$. Assim, $p_r^t \leq (E+1)^r t^r$ é absurdo.

10. Demonstração de Métrod

Suponha por absurdo que existem finitos r primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.

Suponha $n = p_1 p_2 \ldots p_r$. Para cada $i = 1, \ldots r$, considere $q_i = n/p_i$. Suponha $s = \sum_{i=1}^{r} q_i$.

Se s é primo, então para algum $i \in \{1, \ldots, r\}$, $s = p_i$ e $p_i | s$.

Se s é composto, então para algum $i \in \{1, \ldots, r\}$, $p_i | s$.

Em qualquer um dos casos, existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $p_i | s$.

$$j \in (\{1, \ldots, r\} - \{i\}) \Rightarrow p_i | q_j \text{ e } p_i \nmid q_i \Rightarrow p_i \nmid s$$

Absurdo.

CONCLUSÃO

Euclides, Kummer, Perott, Euler, Perott, Auric e Métrod demonstram que existem infinitos números primos por absurdo, isto é, assumindo que a quantidade de primos é r finita, conseguem uma contradição. As demonstrações de Euclides, Kummer e Métrod consistem em encontrar um número m maior que o maior primo p_r que se assumiu existir. Se m é primo, então existem $r+1$ primos, absurdo. Conclui-se que existe p que divide m. Nesse caso, $p \leq p_r$ e o absurdo aparece utilizando a operação de divisibilidade conforme a forma que m foi escolhido. Perott e Auric consideram a fatoração prima única e chegam no absurdo a partir da relação de desigualdade entre a função polinomial x^t e a exponencial t^x para algum $t > 1$ inteiro fixo, que para valores grandes de x deve obedecer $x^t < t^x$. Euler faz uma demonstração bem característica, chegando no absurdo, considerando a fatoração prima única, com uma série que se comporta como a série harmônica que converge e ao mesmo tempo se comporta como a série geométrica que diverge.

Stieltjes, Goldbach, Schorn e Thue demonstram encontrando uma sucessão infinita de números primos. Stieltjes e Thue consideram o fato de existirem infinitos naturais, consequentemente, se para todo natural n existe primo p tal que $p > n$, uma vez que n pode ser tão grande quanto se queira, então existem infinitos números primos, pois podemos construir uma sequência infinita de primos distintos. Goldbach afirma que basta encontrar uma sucessão infinita de termos dois a dois primos entre si, pois cada termo possui um fator primo distinto e com isso, conseguimos uma sequência infinita de primos, para isso, utilizamos a sequência dos números de Fermat. Schorn supõe por absurdo que existem r finitos primos e utilizando uma ideia semelhante à de Goldbach, apresenta uma sucessão finita de $r+1$ termos dois a dois primos entre si que é absurdo.

A demonstração por absurdo é uma das técnicas mais utilizadas na Matemática, cuja essência muitas vezes é considerada como a própria demonstração, sendo fundamental na formação em Matemática.

Como defendemos acima, tomar as demonstrações formais como objeto de estudo permite não apenas tomar contato com o formalismo matemático, mas permite o estabelecimento de conexões com diversos ramos de conhecimento dentro da própria natureza matemática. Assim, podermos comparar diversas demonstrações de um mesmo resultado, além de ser interessante, torna-se ferramenta de aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Ao Eu Sou, que sempre me coloca no devido lugar e faz com que as coisas aconteçam tudo em seu devido tempo.

Aos meus pais que me ajudam financeiramente e apoiam para que eu possa concluir meus estudos.

À orientadora Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho que abriu as portas para esse maravilhoso projeto de pesquisa e orienta de forma alegre e divertida.

À minha namorada que está sempre comigo e me motiva para o sucesso.

À Fundação Araucária, que financia este projeto de Iniciação Científica.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, A. M. F. T.; SAVIOLI, A. M. P. D. Demonstrações em Matemática na Educação Matemática no Ensino Superior. In: **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior.** Maria Clara R. Frota; Ana Márcia F.T. de Carvalho; Bárbara L. Bianchini (Orgs.). Campinas: Papirus, 2013.

CARVALHO, A. M. F.T. A extimidade da demonstração. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática). UNESP, IGCE, Rio Claro, São Paulo, 2004.

CARVALHO, A.M.F.T; CABRAL, T.C.B.; BALDINO, R.R. Sessões Integradas: tempo para mudanças. **In: Anais...** II SIPEM, Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. GT de Educação Matemática e Ensino Superior. Comunicação Científica. Santos, SP, 29 Outubro –1º Novembro. 2003.

DOMINGUES, H. H. A Demonstração ao longo dos séculos. **Bolema.** Rio Claro: UNESP, n. 18, p. 55 – 67, 2002.

GARNICA, Antonio V. M. Fascínio da técnica, declínio da crítica: Um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro (SP). IGCE, UNESP, 1995.

HANNA, Gila; JAHNKE, Helen N. Arguments from physics in mathematical proofs: an educational perspective. **For the Learning of Mathematics.** 22(3): 38 –45, 2002.

HANNA, Gila. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics**, n. 44, p. 5 – 23, 2000.

MORAIS FILHO, Daniel C. **Um convite à matemática:** fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades. 2ª. edição (revista e ampliada). Campina Grande: EDUFCG, 2007.

RIBENBOIM, P. **Números primos: velhos mistérios e novos recordes**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

SIMPSON, A. Student Attitudes to Proof. **Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Lisboa, Portugal, p. 26 – 30, 1994.

DUPLICAÇÃO DO CUBO

FURIHATA, Eduardo; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um dos três grandes problemas da antiguidade, a duplicação do cubo utilizando apenas régua não graduada e compasso. Começaremos com uma visão histórica do problema que motivou a criação de modelos matemáticos para uma solução alternativa. Em seguida, será apresentado alguns desses modelos e por fim será apresentado a visão da álgebra moderna. A demonstração da insolubilidade do problema é um dos maiores resultados da álgebra e relaciona tópicos como anéis, extensões de corpos, polinômios, números algébricos e construtíveis.

PALAVRAS-CHAVE: Duplicação do cubo. Extensões de corpos. Números algébricos. Números construtíveis.

INTRODUÇÃO

O problema da duplicação do cubo é o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro de um cubo dado.

Diz a lenda que um poeta grego descreveu a insatisfação do rei Minos em relação ao tamanho do túmulo de seu filho Glauco. Minos ordenou que o túmulo fosse dobrado. O poeta sugeriu a Minos que dobrasse cada dimensão do túmulo. Essa solução equivocada levou os geômatras a tentar resolver o problema (EVES, 2004).

Passado algum tempo, uma peste atacou Delos. O oráculo orientou que, para a peste ir embora, o altar cúbico do templo de Apolo deveria ser dobrado. Platão ficou sabendo da história e levou o problema aos geômatras.

Hipócrates, em 440 a.C., deu o primeiro avanço ao problema com a redução do problema: a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados. De fato, construindo duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta, de comprimento *s* e *2s*, temos:

$$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s} \Rightarrow x^2 = sy \ e \ y^2 = 2sx \Rightarrow x^3 = 2s^3$$

Se s é a aresta de um cubo dado, então o volume do cubo de aresta *x* é o dobro do volume do cubo de aresta *s*. É suficiente encontrar a aresta *s* definida acima.

OBJETIVOS E METODOLOGIAS

O objetivo deste projeto foi compreender de maneira formal os resultados da Álgebra Moderna e dos tópicos de História de Matemática que permitem a análise do problema matemático clássico conhecido como Problema da Duplicação do Cubo. Durante o desenvolvimento do projeto foram estudados de forma sistemática e formal: teoria de grupos, teoria de polinômios, extensões de corpos e tópicos de História da Matemática concernentes à Álgebra.

Especificamente, podemos enumerar como objetivos atingidos:

- Estimular a criação do hábito da pesquisa e do estudo de matemática em alunos de graduação;
- Divulgar artigos e/ou trabalhos em publicações especializadas de circulação nacional e internacional e em anais de congressos nacionais e/ou internacionais;
- Formar recursos humanos (alunos de graduação em Matemática), consolidando o conhecimento em Álgebra e História de Matemática;
- Ampliar a pesquisa com enfoque na temática do projeto, isto é, ensino de matemática avançada e correlações;
- Fomentar a aproximação entre a Universidade e as escolas de Educação Básica, por meio da aplicação das atividades oriundas do projeto.

Estudamos os tópicos relacionados ao assunto proposto pelo projeto de acordo com o cronograma de desenvolvimento no período de 12 meses. Neste período realizamos encontros semanais agendados com a orientadora. Com o objetivo de consolidar o conhecimento dos fatos estudados, em cada encontro são apresentados seminários na forma oral relacionados ao conteúdo previamente proposto pela orientadora.

Estes encontros tiveram por finalidade esclarecer dúvidas relacionadas ao conteúdo estudado e orientar nas atividades realizadas. Elaboramos atividades que podem ser desenvolvidas por alunos do Ensino Médio, interligadas ao tema, proporcionando uma interface entre a Educação Superior e a Educação Básica, seguindo as tendências em Educação Matemática.

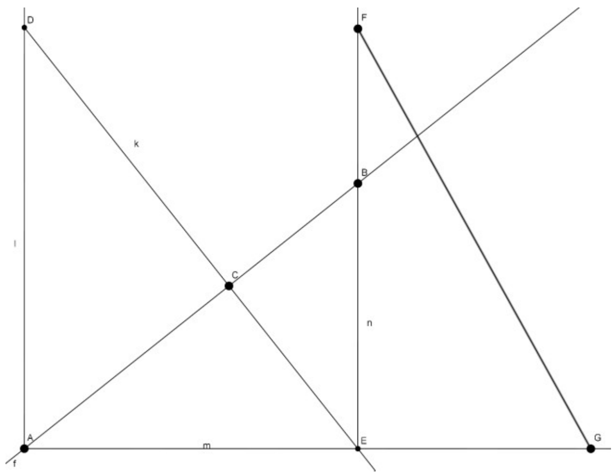
RESULTADOS

Método da máquina de Platão

É uma forma mecânica de resolver o problema reduzido. Os segmentos têm direção móvel.

- Considere uma reta f, definida pelos pontos A e B;
- Escolha um ponto C fixo em f, tal que BC = a, a lado de um cubo dado;
- Considere uma reta k que passe por C, perpendicular a f;
- Marque um ponto D em k, tal que DC = $2a$;
- Pegue um esquadro de coordenadas DAE. A reta m é a reta que passa por A e E;
- Considere uma reta n perpendicular à m tal que o ponto B pertença a essa reta;
- Deslize a reta n em m até que n, k e m se interceptem em um ponto;

Figura 1 Máquina de Platão



Fonte: autores

- O segmento CE é o valor que queremos encontrar. De fato,

$$\frac{BC}{CE} = \frac{CE}{CA} = \frac{CA}{CD} \Rightarrow \frac{a}{CE} = \frac{CE}{CA} = \frac{CA}{2a}$$

Solução de Menecmo

As cônicas podem ser obtidas pela interseção de um cone reto de base circular com um plano perpendicular a uma geratriz.

A interseção da parábola $y = x^2/a$ com a hipérbole equilátera $xy = 2a^2$ é a primeira solução de Menecmo.

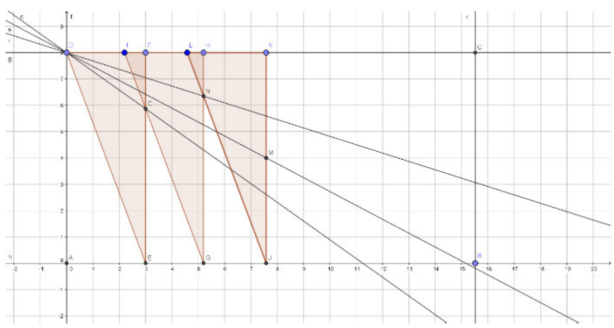
A interseção da parábola $y = x^2/a$ com a parábola $x = y^2/(2a)$ é a segunda solução de Menecmo.

Em ambas as soluções obtemos $x^3 = 2a^3$, conforme queríamos. Essa solução era muito elaborada na época, pois Menecmo não podia contar com a ajuda da geometria analítica.

Solução de Eratóstenes

É utilizado um instrumento mecânico chamado mesolabo. É uma estrutura retangular com uma calha tripla que permite três triângulos congruentes deslizar. Nessa calha pode ocorrer sobreposição parcial ou total.

Figura 2 Mesolabo

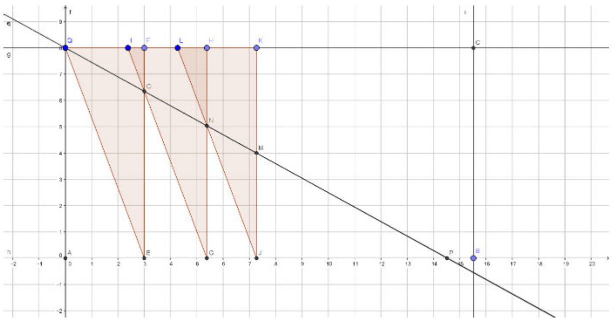


Fonte: autores

Dado um cubo de aresta *a*,

- AD deve ter medida 2*a*;
- M é o ponto médio de KJ;
- O triângulo DEF é fixo;
- N é a interseção de HG com LJ;
- O é a interseção de FE com IG;
- Mover os triângulos até que D, O, N e M estejam colineares em uma reta r;
- P é a interseção de r com AB.

Figura 3 Solução de Eratóstenes



Fonte: autores

- NG é o valor que queríamos encontrar. De fato, a congruência a seguir é válida:

$$\frac{OE}{DA} = \frac{OP}{DP} = \frac{OG}{DE} = \frac{GP}{EP} = \frac{NG}{OE} = \frac{NP}{OP} = \frac{NJ}{OG} = \frac{JP}{GP} = \frac{MJ}{NG}$$

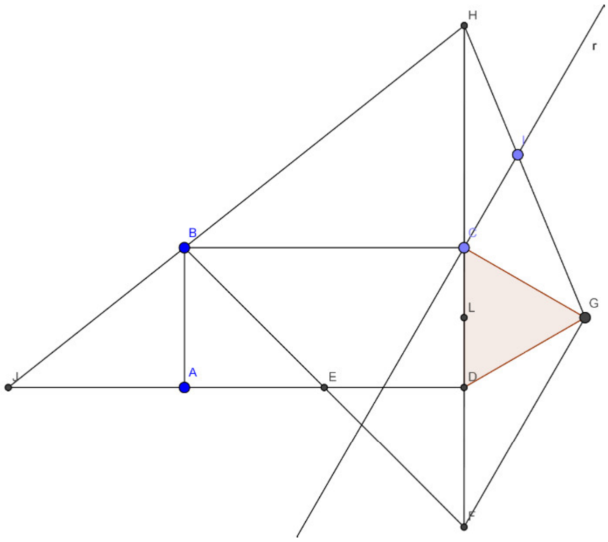
Assim,

$$\frac{MJ}{NG} = \frac{NG}{OE} = \frac{OE}{DA} \Rightarrow \frac{a}{NG} = \frac{NG}{OE} = \frac{OE}{2a}$$

Solução de Nicomedes

Inicialmente, fixe uma reta *r* e um ponto fora dessa reta, crie uma circunferência com centro em algum lugar de *r*. Ao deslizar o centro da circunferência pela reta *r*, o conjunto de pontos da interseção da reta que passa pelo ponto fixo e a origem forma uma curva que Nicomedes denominou concóide. Com isso, Nicomedes resolveu o problema reduzido da duplicação do cubo.

Figura 4 Solução de Nicomedes



Fonte: autores

- Faça um retângulo ABCD, tal que AD = 2AB = 2*a*;
- E é o ponto médio de AD, L é o ponto médio de CD;
- F é a interseção da reta que passa por B e E com a reta que passa por C e D;
- G está fora de ABCD e forma um triângulo regular CDG;
- Trace uma reta *r* paralela à reta que passa por GF e que passe por C;
- Usando a concóide, encontre o ponto H que é a interseção da reta que passa por C e D, com uma circunferência de raio *a* de centro I em *r* e com a reta que passa por G e I;
- J é a interseção da reta que passa por A e D com a reta que passa por B e H;
- AJ é o valor que queremos encontrar. De fato,

$$\frac{AB}{AJ} = \frac{HD}{JD} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow \frac{a}{AJ} = \frac{HC + a}{AJ + 2a} = \frac{HC}{2a}$$

Pela semelhança dos triângulos ABE e EDF, concluímos que DF = *a*.

Pelo Teorema de Thales,

$$\frac{HI}{IG} = \frac{HC}{CF} \Rightarrow \frac{a}{IG} = \frac{HC}{2a} = \frac{a}{AJ} \Rightarrow IG = AJ$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$LG^2 = CG^2 - CL^2 = HG^2 - HL^2$$

Assim,

$$a^2 - \frac{a^2}{4} = (a + AJ)^2 - \left(HC + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$AJ^2 + 2aAJ = HC^2 + aHC$$

$$\frac{HC + a}{AJ + 2a} = \frac{AJ}{HC}$$

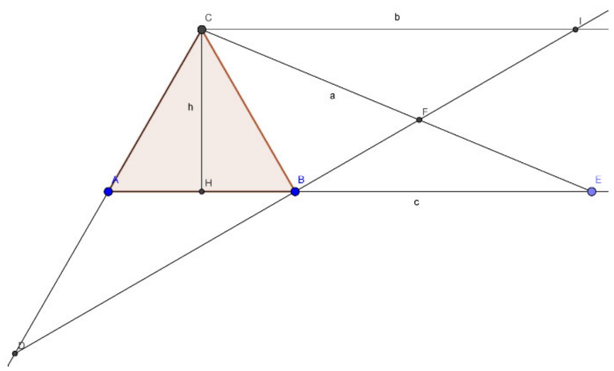
Portanto,

$$\frac{a}{AJ} = \frac{AJ}{HC} = \frac{HC}{2a}$$

Solução simples usando régua marcada

- Faça um triângulo regular ABC, de aresta 1, de qualquer unidade de medida;
- Pela semirreta CA, marque um ponto D, com distância 1 de A;
- Trace uma semirreta DB e outra AB;
- Encontre os pontos E e F, tal que E pertença à semirreta AB, F pertença ao segmento CE e FE tenha tamanho 1;
- FC é o valor que queríamos encontrar. De fato,

Figura 5 Solução com régua marcada



Fonte: autores

Considere H o ponto médio de AB. Como o triângulo é regular, HC é perpendicular à AB e HC é a altura de valor

$$h = \sqrt{3}/2$$

Considerando que CI = *b*, CF = *a* e BE = *c*, temos,

$$\frac{CI}{AB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow \frac{b}{1} = \frac{2}{1} \Rightarrow b = 2$$

e também,

$$\frac{BE}{EF} = \frac{CI}{CF} \Rightarrow \frac{c}{1} = \frac{2}{a}$$

E por Pitágoras temos:

$$CH^2 + HE^2 = CE^2$$

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{a}\right)^2 = (1 + a)^2$$

$$a^4 + 2a^3 - 4 - 2a = 0$$

$$a^3(a + 2) - 2(a + 2) = 0$$

$$(a^3 - 2)(a + 2) = 0$$

Assim, $a = \sqrt[3]{2}$ como queríamos demonstrar.

Álgebra

Todos os métodos utilizados anteriormente não se restringem ao uso da régua e compasso. Verificaremos, com os recursos da álgebra abstrata, que é impossível construir um segmento de reta que resolva o problema utilizando apenas régua e compasso. As demonstrações, enunciados e definições que serão apresentados são baseados em [GONÇALVES].

Definições, observações e notações

Definição 1. Seja A um conjunto munido de duas operações que chamaremos de soma e produto. Denotaremos soma por $+$ e produto por $\cdot$. Dizemos que $(A,+,\cdot)$ é um anel quando as seguintes propriedades são verificadas:

a) $(a+b)+c=a+(b+c)$, i.e., associatividade da soma.

b) $\exists 0 \in A | a+0=0+a=a$, i.e., existência de elemento neutro para a soma.

c) $\forall x \in A, \exists!\, y \in A | x+y=y+x=0$, i.e., existência de inverso aditivo. Denotamos o inverso aditivo por $-x$.

d) $a+b=b+c$, i.e., comutatividade da soma.

e) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, i.e., associatividade do produto.

f) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c; (a+b)\cdot c=a\cdot c+a\cdot b$, i.e., distributividade à esquerda e à direita.

Definição 2. Dizemos que um anel $(A,+,\cdot)$ é anel com unidade quando $\exists 1 \in A \mid \forall x \in A,\ x\cdot 1=1\cdot x=x$ e $1\neq 0$.

Definição 3. Dizemos que $(A,+,\cdot)$ é um anel comutativo quando $\forall x,y \in A, x\cdot y=y\cdot x$.

Definição 4. Dizemos que $(A,+,\cdot)$ é um anel sem divisores de zero quando para qualquer $x,y \in A$, $x\cdot y=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } y=0$.

Definição 5. Dizemos que $(A,+,\cdot)$ é um domínio de integridade quando A é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero.

Definição 6. Dizemos que $(A,+,\cdot)$ é um corpo quando para qualquer $x \in A-\{0\}$, existe $y \in A$ tal que $x\cdot y=y\cdot x=1$.

Notação 1. Denotaremos por K para indicar um corpo com a soma e produto acima definidos.

Definição 7. Seja $(A,+,\cdot)$ um anel. Dizemos que B é subanel de A quando B é subconjunto não vazio de A e é fechado para as operações soma e produto.

Definição 8. Seja $(A,+,\cdot)$ um corpo. Dizemos que B é subcorpo de A quando B é subanel de A.

Definição 9. Dizemos que $p(x)$ é um polinômio sobre K em uma indeterminada x a uma expressão formal $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots$ onde para todo $i \in \mathbb{N}$, $a_i \in K$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n, a_{n+1}, \ldots = 0$.

Notação 2. Denotamos por $K[x]$ o conjunto de todos os polinômios sobre K em uma indeterminada x.

Definição 10. Sejam $p(x), q(x) \in K[x]$ tais que $p(x)=a_0+\cdots+a_mx^m+\cdots$ e $q(x)=b_0+\cdots+b_nx^n+\cdots$. Dizemos que $p(x)=q(x)$ se, e somente se, para todo $i \in \mathbb{N}, a_i=b_i$.

Definição 11. Dizemos que $p(x) = 0 \in K[x]$ é o polinômio identicamente nulo sobre K se, $p(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^n + \cdots$.

Definição 12. Dizemos $p(x) \in K[x]$ é o polinômio constante quando $p(x) = a \neq 0$, para algum $a \in K$.

Definição 13. Seja $p(x) \in K[x]$ tal que $p(x) = a_0 + \cdots + a_m x^m + \cdots$. Dizemos que n é o grau de $p(x)$ quando $a_n \neq 0$ e $\forall m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow a_m = 0$.

Notação 3. Denotamos grau de $p(x)$ por $\delta(p(x))$ ou abreviadamente $\delta p(x)$. Nesse caso, indicamos $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$.

Definição 14. Sejam $p(x), q(x) \in K[x]$ tais que $p(x) = a_0 + \cdots + a_m x^m + \cdots$ e $q(x) = b_0 + \cdots + b_n x^n + \cdots$ e $i \in \mathbb{N}$. Definimos $p(x) + q(x) = c_0 + \cdots + c_k x^k + \cdots$, tal que $c_i = (a_i + b_i) \in K$. Também definimos $p(x) \cdot q(x) = c_0 + \cdots + c_k x^k + \cdots$, tal que $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0$.

Definição 15. Seja $p(x) \in K[x]$ um polinômio não nulo e $a \in K$. Dizemos que a é raiz de $p(x)$ em K se $p(a) = 0$.

Definição 16. Sejam $f(x), g(x) \in K[x]$. Dizemos que $g(x)$ divide $f(x)$ em $K[x]$, se existe $h(x) \in K[x]$ tal que $f(x) = h(x) \cdot g(x)$.

Notação 4. Escrevemos $g(x) \backslash f(x)$ em $K[x]$ para indicar que $g(x)$ é divisor de $f(x)$ em $K[x]$.

Definição 17. Seja $f(x) \in K[x]$ tal que $\delta f(x) \geq 1$. Dizemos que $f(x)$ é um polinômio irredutível sobre K se toda vez que para algum $g(x), h(x) \in K[x]$, $f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow g(x) = a$ ou $g(x) = b$ constante. Se $f(x)$ não é irredutível sobre K, dizemos que $f(x)$ é redutível sobre K.

Definição 18. Seja $L \supset K$. Dizemos que $a \in L$ é algébrico sobre K, se $\exists f(x) \in K[x] - \{0\}$ tal que $f(a) = 0$.

Definição 19. Dizemos que $L \supset K$ é uma extensão algébrica se, $\forall a \in L \supset K, a$ é algébrico sobre K.

Notação 5. Denotaremos por L uma extensão de K.

Definição 20. Seja $p(x) \in K[x]$ um polinômio de grau n. $p(x)$ é dito mônico se o coeficiente associado ao x^n tem valor 1.

Notação 6. Seja $a \in L$ algébrico sobre K e $p(x)$ um polinômio em $K[x]$ mônico, de menor grau, tal que $p(a) = 0$. Pela minimalidade do grau de $p(x)$, $p(x)$ é o único polinômio mônico irredutível em $K[x]$ tal que $p(a) = 0$. Denotaremos por $p(x) = irr(a, K)$.

Notação 7. Se $a \in L \supset K$, definimos $K[a] = \{f(a) : f(x) \in K[x]\}$. É verificável que $K[a]$ é um subdomínio de L que contém K.

OBSERVAÇÃO: utilizaremos também os conceitos: espaço vetorial, vetores linearmente independentes, gerador do espaço vetorial e base do espaço vetorial encontrados em obras de álgebra linear. Também utilizaremos que todo espaço vetorial sobre um corpo, possui uma base. E se um espaço vetorial sobre um corpo possui uma base com n elementos, então toda base do espaço vetorial possui n elementos e nesse caso, dizemos que n é a dimensão de V sobre K e denotamos $[V : K] = n$.

Definição 21. Seja P um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ contendo pelo menos dois pontos distintos. Dizemos que uma reta $r \in \mathbb{R}^2$ é uma reta em P se r contém dois pontos distintos de P. Dizemos que uma circunferência $c \in \mathbb{R}^2$ é uma circunferência em P se o centro de c e um ponto de c pertence a P.

Definição 22. Chamaremos operações elementares em P:

a) Interseção de duas retas em P.

b) Interseção de duas circunferências em P.

c) Interseção de uma reta em P e uma circunferência em P.

Definição 23. Um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ diz-se construtível a partir de P se é possível determina-lo através de operações elementares em P.

Definição 24. Denotaremos por $< P >$ o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que são construtíveis a partir de P.

Definição 25. Seja $O = (0,0), U = (0,1) \in R^2$. Definiremos recursivamente os seguintes conjuntos de pontos construtíveis: $P_0 = \{O, U\}, P_1 =< P_0 >, \dots, P_{n+1} =< P_n >, \dots$. Em particular $P_1 = \{(-1,0), O, U, (2,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\}$. $P_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ são os pontos construtíveis. $a \in \mathbb{R}$ é dito construtível se $(a, 0) \in P_\infty$. O conjunto de reais construtíveis será indicado por $C_{\mathbb{R}}$.

Proposições

Proposição 1. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e $B \subset A$ não vazio. B é subanel de A se, e somente se, o elemento neutro de A pertence a B, B é fechado para a subtração e B é fechado para o produto.

Demonstração: Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e $B \subset A$ não vazio. (⇒) Suponha B subanel. Seja $x, y \in B$. Por definição de subanel, $x - x = 0 \in B, x \cdot y \in B, -y \in B, x - y \in B$. (⇐) Suponha que o elemento neutro de A pertence a B, B é fechado para a subtração e B é fechado para o produto. Queremos mostrar que B é subanel. $0 \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$. É suficiente mostrar que B é fechado para a soma. Seja $x, y \in B$. $0 - y = -y \in B$ e assim, $x + y = x - (-y) \in B$.

Proposição 2. $(K[x], +, \cdot)$ é um domínio de integridade.

Demonstração: Conforme as operações $+$ e $\cdot$ foram definidas em $K[x]$, que K é um corpo e pelas definições de domínio de integridade, é fácil verificar que $K[x]$ é domínio de integridade.

Proposição 3. Algoritmo da divisão: sejam $f(x), g(x) \in K[x]$ e $g(x) \neq 0$. Existem únicos $q(x), r(x) \in K[x]$ tais que $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ e, ou $r(x) = 0$ ou $\delta(r(x)) < \delta(g(x))$.

Demonstração: Sejam $f(x), g(x) \in K[x]$ e $g(x) \neq 0$. Provemos a existência, i.e., queremos encontrar $q(x), r(x) \in K[x]$ tais que $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ e, ou $r(x) = 0$ ou $\delta(r(x)) < \delta(g(x))$. Se $f(x) = 0$, defina $q(x) = r(x) = 0$. Se $f(x) \neq 0$. Seja $\delta(f(x)) = n$ e $\delta(g(x)) = m$. Se $n < m$, defina $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$. Suponha $n \geq m$. Considere $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$, $g(x) = b_0 + \cdots + b_m x^m$. Se $n = m$, $f(x) = a_n b_m^{-1} g(x) + a_0 a_n^{-1} + ((a_0 - b_0 a_n b_m^{-1}) + \cdots + (a_{n-1} - b_{n-1} a_n b_m^{-1}) x^{n-1})$. Façamos $q(x) = a_n b_m^{-1}$ e $r(x) = ((a_0 - b_0 a_n b_m^{-1}) + \cdots + (a_{n-1} - b_{n-1} a_n b_m^{-1}) x^{n-1}$. Se $n > m$. Demonstremos por indução finita. Se $n = 0$, então $m = 0$, $f(x) = a_0 = a_0 b_0^{-1} b_0 =$

$a_0b_0^{-1}g(x)$. Façamos $q(x) = a_0b_0^{-1}$ e $r(x) = 0$. Suponha a afirmação válida se o polinômio tem grau $n - 1$. Provemos por indução que é válido se o polinômio tem grau n. De fato, $f(x) = a_0 + \cdots + a_nx^n = a_0 + x(a_1 + \cdots + a_nx^{n-1})$. Existem $q_1(x), r_1(x) \in K[x]$ tais que $a_1 + \cdots + a_nx^{n-1} = q_1(x)g(x) + r_1(x)$ e $\delta\big(r(x)\big) < n - 1$. Assim, $f(x) = a_0 + x\big(q_1(x)g(x) + r_1(x)\big) = \big(xq_1(x)\big)g(x) + (a_0 + xr_1(x))$. Definamos $q(x) = xq_1(x)$ e $r(x) = a_0 + xr_1(x)$. $\delta\big(r(x)\big) \leq n$. Provemos a unicidade. Sejam $q_1(x), q_2(x), r_1(x), r_2(x) \in K[x]$ tais que, $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$ e, para $i = 1{,}2$, ou $r_i(x) = 0$ ou $\delta r_i(x) < \delta g(x)$. Temos $\big(q_1(x) - q_2(x)\big)g(x) = r_2(x) - r_1(x)$. Suponha por absurdo que $q_1(x) \neq q_2(x)$. $\delta\Big(\big(q_1(x) - q_2(x)\big)g(x)\Big) \geq \delta g(x)$ e $\delta(r_2(x) - r_1(x)) < \delta g(x)$. Absurdo. Portanto $q_1(x) = q_2(x)$.

Proposição 4. Fatoração única: Seja K um corpo. Para todo polinômio $f(x) \in K[x] - \{0\}$ existe constante $u \in K - \{0\}$ e únicos polinômios irredutíveis $p_1(x), \ldots, p_m(x) \in K[x]$ tal que $f(x) = u \cdot p_1(x) \cdot \ldots \cdot p_m(x)$.

Demonstração: Seja $f(x) \in K[x] - \{0\}$. Queremos encontrar $u \in K[x]$ e $p_1(x), \ldots, p_m(x) \in K[x]$ irredutíveis tal que $f(x) = u \cdot p_1(x) \cdot \ldots \cdot p_m(x)$. Provemos a existência por indução sobre $\delta f(x) = n$. Se $n = 0$, então $f(x) = a \neq 0$. Definamos $u = a$. Suponha que a afirmação seja válida para polinômios de grau menor que n. Queremos provar que a afirmação é válida para polinômios de grau n. Se $f(x)$ é irredutível, então $u = 1$ e $p_1(x) = f(x)$. Suponha $f(x)$ redutível sobre K. Existem $g(x), h(x) \in K[x]$, $1 \leq \delta g(x), \delta h(x) \leq n$ tais que $f(x) = g(x)h(x)$. Por indução, existe $g, h \in K - \{0\}$ e $g_1(x), \ldots, g_r(x), h_1(x), \ldots, h_s(x) \in K[x]$ irredutíveis tais que $g(x) = gg_1(x) \ldots g_r(x)$ e $h(x) = hh_1(x) \ldots h_s(x)$. Assim, $f(x) = (gh)g_1(x) \ldots g_r(x)h_1(x) \ldots h_s(x)$. Definamos $u = ab$ e $p_1(x) = g_1(x), \ldots, p_r(x) = g_r(x), p_{r+1}(x) = h_1(x), \ldots, p_{r+s}(x) = h_s(x)$ como queríamos provar. Provemos a unicidade. Sejam $v \in K - \{0\}$ e $q_1(x), \ldots, q_t(x) \in K[x]$ e irredutíveis tais que $f(x) = up_1(x) \ldots p_m(x) = vq_1(x) \ldots q_t(x)$. $p_1 \backslash q_1(x) \ldots q_t(x)$. Existe $v_i \in K - \{0\}$ tal que $q_i(x) = v_ip_1(x)$. Nesse caso, dizemos que q_i e p_1 são associados em $K[x]$. Provemos a unicidade por indução sobre m. Se $m = 1$ e $p_1(x)$ é irredutível, então $t = 1$ e $p_1(x)$ e $q_i(x)$ são associados em $K[x]$. Suponha a afirmação válida para $m - 1$. Provemos que é válida para $m > 1$. Usando $q_i(x) = v_ip_1(x)$, temos $up_2(x) \ldots p_m(x) = vu_iq_1(x) \ldots q_{i-1}(x)q_{i+1}(x) \ldots q_t(x)$. Pela hipótese de indução, cada $q_i(x)$ está associado a algum $p_j(x)$ através de alguma constante.

Proposição 5. Sejam $L \supset K, a \in L$ algébrico sobre K. Se o grau do polinômio $irr(a, K)$ é n, então para qualquer polinômio $f(x) \in K[x]$, existem únicos coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ tais que $f(a) = a_0 + a_1a + \cdots + a_{n-1}a^{n-1}$.

Demonstração: Sejam $L \supset K, a \in L$ algébrico sobre K e $f(x) \in K[x]$ qualquer. Considere $\delta\big(irr(a, K)\big) = n$ e $p(x) = irr(a, K)$. Pelo algoritmo da divisão, $\exists q(x), r(x) \in K[x] | f(a) = q(a)p(a) + r(a)$. $r(x) = 0$ ou $\delta\big(r(x)\big) < \delta(p(x))$. Portanto, $r(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_{n-1}x^{n-1}$, para algum $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$. $p(a) = 0 \Rightarrow f(a) = r(a) = a_0 + a_1a + \cdots a_{n-1}a^{n-1}$. Queremos mostrar a unicidade. Suponha $f(a) = a_0 + a_1 a + \cdots + a_{n-1}a^{n-1} = b_0 + b_1 a + \cdots + b_{n-1}a^{n-1}$ para algum $a_i, b_i \in K,\ i \in \{1, \dots, n-1\}$. Seja $q(x) = (a_0 - b_0) + \cdots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} \in K[x]$. Assim, $q(a) = 0$. $\delta\big(q(x)\big) < n = \delta(irr(a, K))$. Pela definição de $irr(a, K)$, $q(x) = 0$. Assim, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_i = b_i$ e a unicidade é verdadeira.

Proposição 6. Seja *K* um corpo e $L \supset K$ uma extensão de *K*. Se $L \supset K$ é extensão finita, então $L \supset K$ é extensão algébrica.

Demonstração: Seja *K* um corpo e $L \supset K$ uma extensão de *K* tal que $L \supset K$ é extensão finita. Suponha $[L{:}K] = m < \infty$. Seja $a \in L$ tal que $K[a]$ é um subespaço de L. $[K[a]{:}K] \leq m$. Seja $n = [K[a]{:}K]$. $1, a, \dots, a^n$ é L.D., pois n é o número máximo de elementos L.I. que um conjunto pode ter. Existem escalares $a_0, \dots, a_n$ não todos nulos tais que $a_0 + a_1 a + \cdots + a_n a^n = 0$. Assim, a é algébrico sobre K.

Proposição 7. Seja *K* um corpo e $L \supset K$ uma extensão de *K*. Se $a \in L \supset K$ é um elemento algébrico sobre *K* e o grau do polinômio $irr(a, K)$ é *n*, então $1, a, \dots, a^{n-1}$ é uma base do espaço vetorial *K[a]* sobre *K* e $[K[a]{:}K] = n < \infty$.

Demonstração: Seja $a \in L \supset K$ um elemento algébrico sobre *K* tal que o grau do $irr(a, K)$ é *n*. Todo elemento de $K[a]$ pode ser escrito de modo único como combinação linear de $1, a, \dots, a^{n-1}$ sobre *K*. $1, a, \dots, a^{n-1}$ é base de $K[a]$ sobre *K*. Assim, $[K[\alpha]{:}K] = n$.

Proposição 8. Se $M \supset L \supset K$ são corpos tais que $[M{:}L]$ e $[L{:}K]$ são finitos, então $[M{:}K]$ é finito e $[M{:}K] = [M{:}L][L{:}K]$.

Demonstração: Considere $M \supset L \supset K$ corpos tais que $[M{:}L] = r$ e $[L{:}K] = s$, $r, s \in \mathbb{Z}^+$ são finitos. Seja $v_1, \dots, v_r$ uma base de *M* sobre *L*. Seja $u_1, \dots, u_s$ uma base de *L* sobre *K*. É suficiente provar que $\beta = \{v_i u_j : i = 1, \dots, r \text{ e } j = 1, \dots, s\}$ é uma base de *M* sobre *K*. Seja $a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$. Se $\sum_{i,j} a_{ij} v_i u_j = \sum_i (v_i * \sum_j a_{ij} u_j) = 0$, então $\sum_j a_{ij} u_j = 0$ para cada $i = 1, \dots, r$. Assim, $a_{ij} = 0$, para cada $i = 1, \dots r$ e $j = 1, \dots s$. β é um conjunto L.I. de *M* sobre *K*. Queremos provar que β é gera *M* sobre *K*. Seja $y \in M$ qualquer. Existem $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in L$, tal que $y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$. Para cada $i = 1, \dots r$, existem $a_{i1}, \dots, a_{ij} \in K$, tais que $\lambda_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} u_j$. Assim, β gera *M* sobre *K*.

Proposição 9. O conjunto dos construtíveis é um subcorpo dos reais contendo os racionais.

Demonstração: Sejam $a, b \in C_{\mathbb{R}}$. Sem perda de generalidade, suponha $0 < a < b$. Sejam os pontos $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$ construtíveis. Existe uma reta $|OX| = |AB|$ tal que X é construtível. Nessas condições, $X = (b - a, 0)$, portanto 1) $b - a$ é construtível. Seja a reta $\overline{OT}$ construtível tal que $T = (0,1)$. A reta bissetriz *r* de $\overline{OT}$ e $\overline{AB}$ é construtível. Seja *C(O, p)* uma circunferência de centro O e raio *a*. $A_1 = r \cap C(O, a)$ e $U_1 = r \cap C(O, 1)$. Considere o segmento de reta $A_1 U$. Existe uma reta *s* construtível paralela a $\overline{A_1 U}$ passando por *B*. Considere $C = r \cap s$. Dessa forma, *C* é construtível. Sabemos que a relação $\frac{OC}{OA_1} = \frac{OB}{OU}$ é válida. Assim, $|OC| = a * b$. Assim, $(ab, 0) = \overline{OU} \cap$

$C(O,|OC|)$ é construtível. Portanto, *ab* é construtível. Existe uma reta *t* construtível paralela a $\overline{A_1U}$ passando por U_1. Seja $X = \overline{OU} \cap t$. *X* é construtível. A relação $\frac{OU_1}{OA_1} = \frac{OX}{OU}$ é válida. Assim, $|OX| = 1/a$. $\left(\frac{1}{a}, 0\right) = C(O,|OX|) \cap \overline{OU}$ é construtível. $1/a$ é construtível. Assim o conjunto dos contrutíveis é um subcorpo dos reais. Conforme P_n foi definido, $\mathbb{Z}$ são construtíveis. Como os construtíveis é subcorpo dos reais, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}: a, b \in \mathbb{Z}\}$ são construtíveis.

Proposição 10. O conjunto dos construtíveis é uma extensão algébrica dos racionais tal que se *a* é construtível, então $[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]$ é potência de 2.

Demonstração: Sejam A_n o conjunto das coordenadas de P_n, $K_0 = \mathbb{Q}, K_1 = \mathbb{Q}[A_1], \dots, K_n = [A_n], \dots$. Segue que $A_n \subset C_{\mathbb{R}}$ e $K_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = C_{\mathbb{R}}$. $C_{\mathbb{R}}$ é extensão algébrica. Basta provar que $[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]$ é potência de 2. De fato, seja $a \in C_{\mathbb{R}}$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in K_n = \mathbb{Q}[A_n]$. Sabemos que $[K_n:\mathbb{Q}] = [K_n:\mathbb{Q}[a]][\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]$. Como $a \in K_n$, $\left[K_n:\mathbb{Q}[a]\right] = 1$. É suficiente provar que $[K_n:\mathbb{Q}]$ é potência de 2. Provemos por indução finita. $K_0 = \mathbb{Q}$ e $[K_0:\mathbb{Q}] = 1$ é potência de 2. $K_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ e $[K_1:\mathbb{Q}] = 2$ é potência de 2. Suponha por indução que $[K_{n-1}:\mathbb{Q}]$ é potência de 2. Queremos provar que $[K_n:\mathbb{Q}]$ é potência de 2. $[K_n:\mathbb{Q}] = [K_n:K_{n-1}][K_{n-1}:\mathbb{Q}]$. É suficiente provar que $[K_{n+1}:K_n]$ é potência de 2. Seja $L = K_n, L_0 = K_{n-1}$. Suponha $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. $L = L_0[A_n] = L_0[a_1, a_2, \dots, a_k]$. Além disso, $L_0 \subset L_1 = L_0[a_1] \subset \cdots \subset L_k = L_{k-1}[a_k] = L$. É suficiente mostrar que $[L_i:L_{i-1}] = [L_{i-1}[\mathbb{Q}]:L_{i-1}]$ é potência de 2. Seja $a_i \in A_n$. Existe outra coordenada $b_i \in A_n$, tal que $(a_i, b_i) \in P_n$ ou $(b_i, a_i) \in P_n$. Sem perda de generalidade, suponha $(a_i, b_i) \in P_n$. $P_n = < P_{n-1} >$. Dessa forma, (a_i, b_i) é resultado de alguma operação elementar de retas ou circunferências construtíveis de P_{n-1}, isto é, a_i satisfaz alguma equação de primeiro grau ou segundo grau com coeficientes em K_{n-1}. Portanto, $[L_i:L_{i-1}] = 1 = 2^0$ ou $[L_i:L_{i-1}] = 2 = 2^1$.

Proposição 11. Se *n* é ímpar, *n ≥ 3* e *p* é primo, então $\sqrt[n]{p}$ não é construtível.

Demonstração: Seja *n* é ímpar, $n \geq 3$ e *p* primo e $a = \sqrt[n]{p}$. Suponha por absurdo *a* construtível. $irr(a,\mathbb{Q}) = x^n - p$. Assim, $[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}] = n$ é ímpar. Absurdo. Portanto *a* não é construtível.

Proposição 12. Não existe aresta construtível *a* de um cubo, tal que o volume do cubo de aresta *a* é o dobro do volume do cubo de aresta 1.

Demonstração: Seja *a* a aresta do cubo tal que $a^3 = 2$. Suponha por absurdo *a* construtível. $irr(a,\mathbb{Q}) = x^3 - 2$. $[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}] = 3$. Vimos que $[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]$ deve ser potência de 2. Absurdo. Portanto *a* não é construtível.

CONCLUSÃO

Por aproximadamente 1800 anos, os matemáticos e geômetras tentaram resolver o problema da duplicação do cubo. As tentativas contribuíram significativamente no desenvolvimento da álgebra moderna. No decorrer da história foram desenvolvidos métodos bem engenhosos como forma alternativa de resolver o problema, ninguém queria acreditar que o problema era insolúvel.

O problema se resume em encontrar um segmento de reta, utilizando apenas régua não graduada e compasso, de tal forma que o cubo cuja aresta possui o tamanho desse segmento de reta, possui o dobro do volume de um cubo dado. Se o volume do cubo tem volume 1, queremos encontrar um segmento de tamanho $\sqrt[3]{2}$.

Vimos que o conjunto dos racionais junto com as operações de soma e produto formam um corpo. Corpo é uma classificação da álgebra quando um conjunto possui determinadas características em relação às operações e elementos do conjunto. O conjunto pode ser "aumentado", formalmente denominamos extensão de corpo. Por exemplo, $\sqrt{2}$ não é racional, porém podemos fazer uma extensão de forma que $\sqrt{2}$ pertença ao novo conjunto e as propriedades de corpo continuam sendo válidas.

Queremos encontrar um segmento por meio de construção de régua e compasso, assim é classificado pela álgebra como construtível. Os números construtíveis são uma extensão algébrica dos racionais. As últimas proposições demonstram que o segmento que resolveria o problema, de tamanho $\sqrt[3]{2}$, não é construtível. Assim está demonstrado a insolubilidade do problema.

AGRADECIMENTOS

Ao Eu Sou, que sempre me coloca no devido lugar e faz com que as coisas aconteçam tudo em seu devido tempo.

Aos meus pais que me ajudam financeiramente e apoiam para que eu possa concluir meus estudos.

À orientadora Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho que abriu as portas para esse maravilhoso projeto de pesquisa e orienta a equipe de forma alegre e divertida.

Aos colegas de equipe Carlos Takaessu e Luiza da Silva que participam do mesmo projeto com tema diferente e contribuíram para esse trabalho.

À minha namorada que está sempre comigo e me motiva para o sucesso.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, J. P. de. **Os três problemas clássicos da matemática grega**. Programa de Iniciação Científica-PIC, OBMEP, 2010.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino DOMINGUES. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

KAPLANSKY, I. **Notas de matemática: Introdução à Teoria de Galois**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1966.

SOUZA, J. M. R. D. **Trissecção do ângulo e duplicação do cubo: as soluções na antiga Grécia**. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. [S.l.]. 2001.

ESTÁGIO EM MATEMÁTICA EMPRESARIAL: GESTÃO DE ESTOQUES

OLIVEIRA, Cainan K.; MENCK, Henrique G.; TAKITO, Pedro Y.; CIRILO, Eliandro R.; NATTI, Paulo L.

RESUMO

O objetivo do trabalho é trazer uma solução inteligente que resolva ou minimize os problemas reais de uma empresa, com auxílio das ferramentas matemáticas. Em particular o projeto está voltado ao estudo da otimização e gestão de estoques em uma empresa localizada no norte do Paraná. A empresa estudada neste projeto apresenta necessidade de melhorias na sua gestão de estoque. Verifica-se no cenário atual que o estoque possui um papel fundamental na cadeia de produção de uma empresa, então uma boa gestão é crucial para reduzir os problemas, otimizar os lucros e obter vantagens competitivas. O propósito do trabalho é realizar uma análise do estoque, focada nas curvas ABC dos materiais para determinar, por exemplo, através do Modelo de Lote Econômico de Compra (LEC) o tamanho ideal do lote de compra e a periodicidade que minimizem os custos totais de estocagem. Alguns resultados serão mostrados e discutidos.

PALAVRAS-CHAVE: otimização; gestão de estoques; curvas ABC; Modelo LEC.

1. INTRODUÇÃO

Administração ou gestão dos materiais é uma atividade que vem sendo realizado nas empresas desde os primórdios da administração, tendo como principal objetivo atender às necessidades e expectativas dos clientes. Segundo GONÇALVES (2013), no formato tradicional, a administração de materiais tem o objetivo de conciliar os interesses entre as necessidades de suprimentos e a otimização dos recursos financeiros e operacionais das empresas. E uma gestão de materiais bem estruturada permite a obtenção de vantagens competitivas por meio da redução de custos, da redução dos investimentos em estoques, das melhorias nas condições de compras mediante negociações com os fornecedores e da satisfação de clientes e consumidores em relação aos produtos oferecidos pela empresa.

Existe uma grande necessidade de se estocar materiais para a produção, porem estocar materiais tem um custo, portanto, a falta de organização pode resultar em um custo muito alto para o produto final, e a má gestão do estoque pode gerar outros problemas na cadeia de produção. Então para evitar tais custos, esse trabalho tem por objetivo trazer uma solução inteligente e otimizada para os problemas do estoque da empresa, por meios de modelos matemáticos e simulações numéricas.

Dificuldades e problemas são comuns em qualquer meio empresarial, em geral dentro de um estoque identificamos problemas relacionados ao controle e organização dos materiais. Os problemas de organização, dimensionamento e níveis de estoque têm papel importante dentro de uma indústria, e na maioria dos casos estes problemas são tratados somente pela parte de logística. De acordo com Ching (2008), o estoque tem que ser eficiente, pois está integrado na cadeia de produção da empresa com uma função de grande importância. Nosso foco será a utilização da Matemática para descrever a performance de estoque e deixá-lo na sua melhor forma organizacional, funcional e rentável possível.

Alguns dos principais problemas clássicos que identificamos são:

A) Desorganização e falta de controle.

- Dificuldade de acesso ao produto (espaço/noção)
- Atraso na produção devido à demora em encontrar o produto no estoque
- Acúmulo de materiais inutilizados (lixos)
- Acúmulo de produtos prontos parados no estoque

B) Gestão de estoque

- Discordância entre estoque físico e contábil
- Falta ou excesso de material no estoque
- Atraso no recebimento em relação ao fornecedor
- Incompatibilidade entre pedidos e demanda

A empresa estudada apresenta necessidade de uma melhor gestão de seu estoque. Um de seus principais problemas é a discordância entre o estoque físico e contábil e a incerteza em decisões de compras por oportunidade, que acabam optando em comprar matérias primas, quando estão com preços em conta, sem levar em consideração se vale a pena comprar nesse momento para então deixar o item estocado até o momento que ele será utilizado.

2. OBJETIVOS E MÉTODOLOGIAS

Existem inúmeros modelos matemáticos e ferramentas eficientes que auxiliam as otimizações e resoluções de problemas de estoques, mas nesse trabalho não estudaremos os modelos focados em organizações e distribuições dos itens dentro do estoque, que visam facilitar o acesso pelos itens e minimizam os tempos e os custos gerados pelas movimentações dos materiais dentro do estoque, e do estoque para a produção.

Então as ferramentas matemáticas que serão detalhadas e analisadas nos próximos capítulos serão destinadas a determinar basicamente: quantidades ideais de quanto pedir e momentos ideais de quando pedir de cada material, de modo a minimizar os custos e otimizar os processos da produção. São técnicas de controle que podem ser aplicadas a todos os itens do estoque, mas assim como Ching (2008) diz, nem todos os itens estocados merecem a mesma atenção pela administração ou precisam manter a mesma disponibilidade.

2.1. Curva ABC

Tanto o capital empatado nos estoques como os custos operacionais podem ser diminuídos, se entendermos quais são os itens mais importantes, que circulam com maiores frequências e que sejam mais caros. Alguns itens sofrem mais concorrência em relação a outros, são mais requisitados, mais rentáveis, ou podem ter clientes que exigem um melhor nível de serviço. Por esses fatos, cada produto deve ser classificado de acordo com suas prioridades antes de estabelecer uma política adequada de estoque. O método da curva ABC é um dos métodos que servem para esse intuito.

A curva ABC baseia-se no raciocínio do diagrama de Pareto, em que nem todos os itens tem a mesma importância e a atenção deve ser dada para os mais significativos. O modelo classifica os materiais em 3 faixas, e essas faixas estão relacionadas com os valores monetários de cada material, pois não basta apenas ter o preço unitário caro, mas ter pouca demanda. O valor monetário é o resultado da multiplicação entre a demanda total desse item com o preço unitário desse material, desse modo valor monetário representa o quanto em dinheiro esse item vale para o proprietário.

Por exemplo, sejam dois itens A e B. A demanda anual do item A foi de 10 unidades, e o preço de uma unidade do item A é de R$ 1000,00, e a demanda anual do item B foi de 100 unidades, mas o preço de uma unidade do item B é de R$ 100,00, ou seja, o item A é mais caro que o item B, mas os dois possuem o mesmo valor monetário, portanto são de mesma prioridade.

Para calcular a representatividade de cada item em estoque, basta calcular o valor monetário de cada item, em seguida listar em ordem decrescente e calcular o percentual relativo de cada item em relação ao custo total da soma de todos os valores monetários.

Nome Item	Demanda anual	Preço unitário	Valor Monetário	% relativo	% acumulado
Item 1	12000	R$ 10,00	R$ 120000,00	3,00%	3,00%
Item 2	6667	R$ 15,00	R$ 100005,00	2,50%	5,50%
Item 3	10000	R$ 9,00	R$ 90000,00	2,25%	7,75%
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99,50%
.	.	.	.	0,03%	99,80%
.	.	.	.	0,02%	100,00%
Item total			R$ 4000000,00	100,00%	

Tabela 1: Calculo da proporção monetária

Assim observe que, por exemplo, o Item1 representa 3% de todo o estoque, e os Itens 1, 2 e 3, juntos representam 7,75% de todo o estoque em questões de valores monetários. As faixas da curva ABC são classificadas então em A, B e C, sendo os itens de classe A os com maiores prioridades. E as margens de proporções para cada faixa são:

- Classe A: até 80% (dos itens mais caros e maiores demandas)
- Classe B: acima de 80% até 95%
- Classe C: acima de 95%

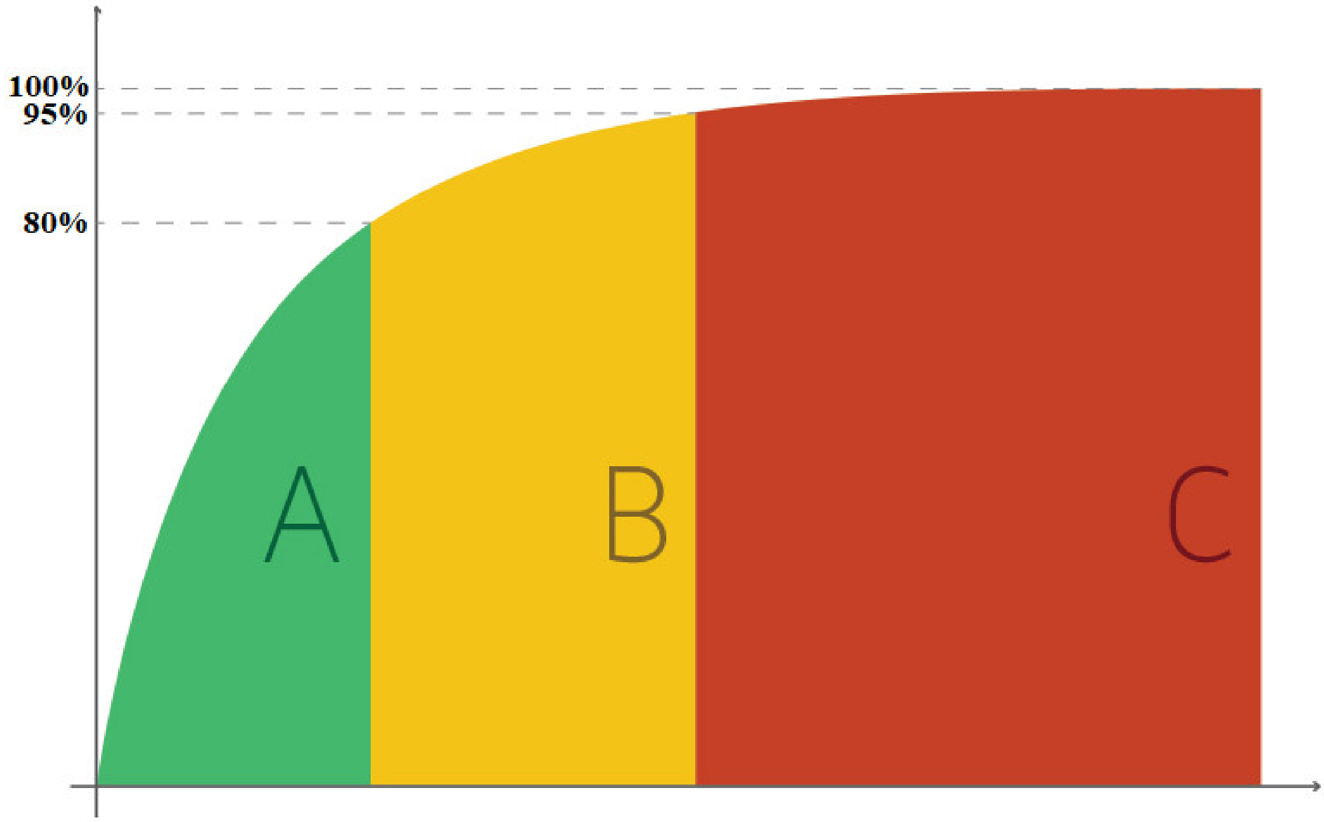


Fig1 Curva ABC

As proporções atribuídas para cada faixa de classe podem variar de caso a caso, o mais comum é o 80-15-5% citado acima. Em certas situações são viáveis as proporções de 70-20-10%, mas vai do interesse do empresário e das circunstâncias. Note que pequena parte dos itens são de classe A e grande parte dos itens são de classe C. A grosso modo, o que acontece é que em geral aproximadamente 20% dos itens em quantidade é responsável por 80% dos valores de todos esses itens. Assim, apenas 20% dos clientes representam 80% das vendas realizadas.

2.2. Custos associados ao estoque e modelo LEC

Como em qualquer meio empresarial tem-se o maior interesse em reduzir os custos para aumentar os lucros. Em geral, em qualquer tipo de estoque, independente de qual material esteja contido nele, os custos associados são basicamente:

a) O custo de manter estoques.
b) O custo de incorrer em déficits do produto.
c) O custo de reabastecer os estoques (pedido) ou custo de preparação.

Simplificando, supondo o caso em que não ocorra déficits nos produtos, o custo total gerado pelos estoques seria a soma entre o custo de manter e o custo de pedido. Uma questão crítica é balancear esses custos de modo a encontrar um plano de suprimento que minimize o custo total, pois esses custos têm comportamentos conflitantes, inversamente proporcionais, ou seja, enquanto que o custo de manter é crescente quanto maior o tamanho do lote, o custo de pedido é decrescente quanto maior o tamanho do lote. Note que quanto maiores as quantidades estocadas, mais espaço ocupará no estoque, e maiores serão os custos de mantê-lo, no entanto, quanto maior o tamanho do lote, menor será a quantidade de reposição, então menor será a quantidade de pedidos consequentemente menor será o custo de pedido.

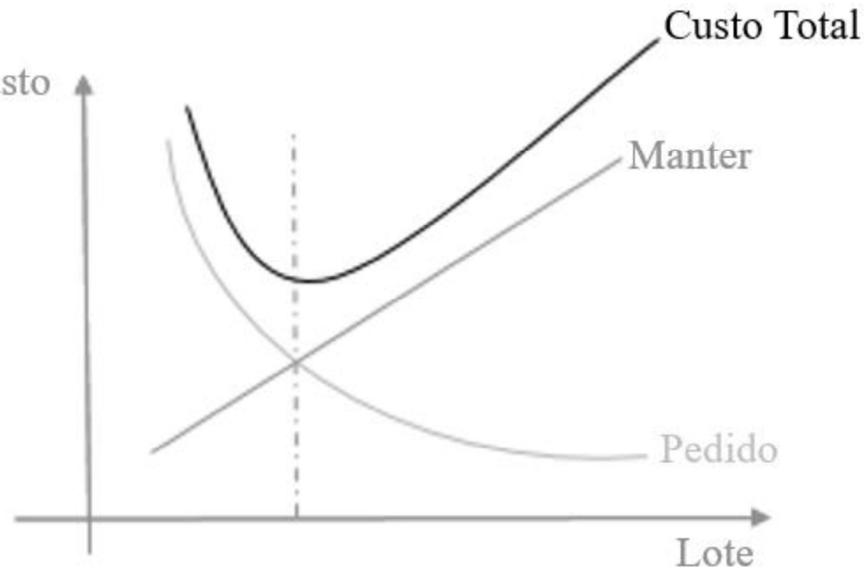


Fig2. Custos gerados pelo estoque

Observe na Fig2 que a função do custo total mostra o formato de uma concavidade para cima, o que significa que existe um valor mínimo para essa curva, que no caso simples, é o ponto em que o somatório dos custos de manter e pedir é o mais baixo. Observando os gráficos nota-se que esse ponto é onde as funções de manter e de pedir se igualam. Porém modelar o problema é mais complexo do que isso, pois envolvem mais fatores como no caso de incorrer déficits do produto, inflação, entre outros que serão mais detalhados nos capítulos dos modelos matemáticos.

Para auxiliar no entendimento, talvez seja trivial para alguns que já estejam familiarizados com esses termos, mas é importante definir e diferenciar o significado de demanda de um item e o lote do mesmo, pois são duas palavras que se repetem muitas vezes neste trabalho.

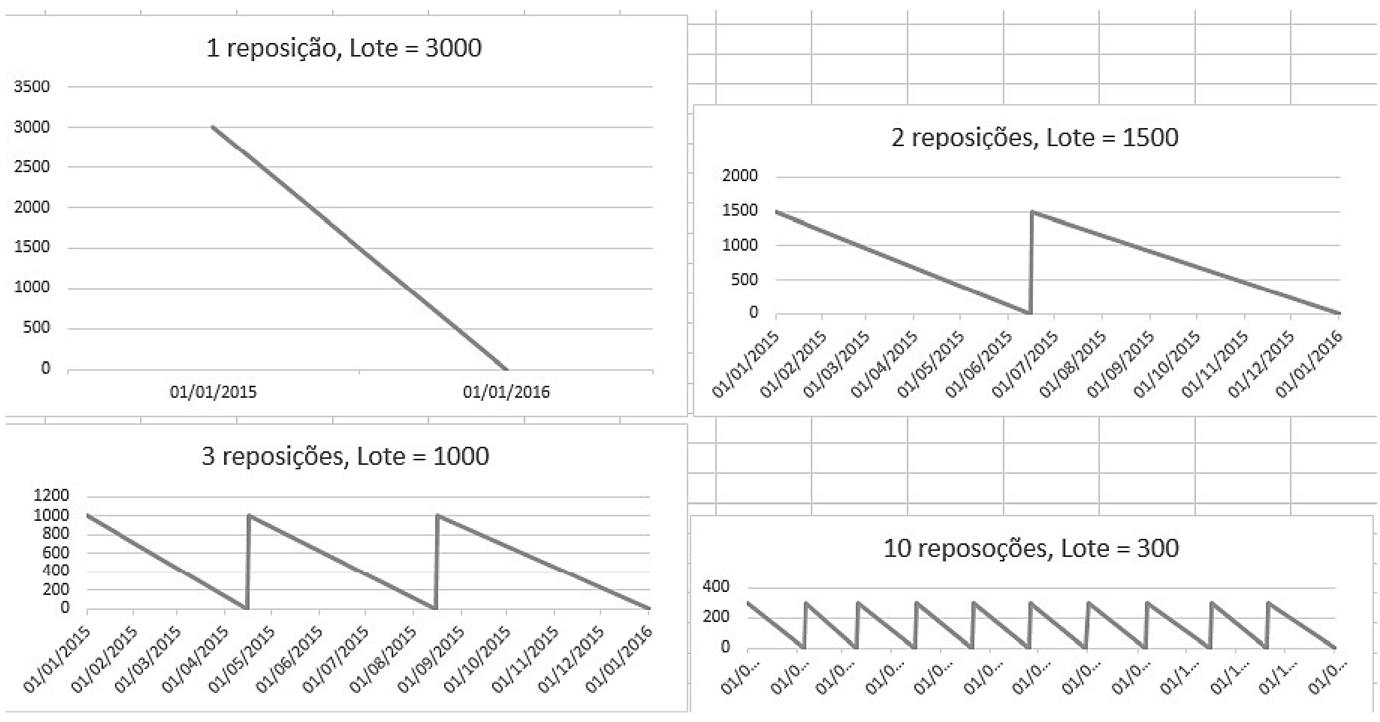


Fig3. Itens com mesma demanda e lotes variados

Na Fig. 3 temos o exemplo de um item que possui uma demanda anual de 3000 unidades. Supondo que o item tenha um nível de produção continua e com as taxas de utilização desse material constante, o que é raro, note que a única coisa que varia são as quantidades de reposições e o tamanho do lote. Então basicamente, demanda significa a quantidade que foi requisitada pela produção desse determinado item, e o lote é a quantidade máxima que será estocada desse item em cada reposição, lembrando que em situações mais comuns o tamanho do lote é diferente em cada reposição, mas de qualquer maneira a soma de todos os lotes tem que ser equivalente ao valor da demanda.

Então temos como um dos objetivos, determinar quais são as quantidades ideais de reposição e o tamanho do lote, de cada material, que minimizem os custos gerados dentro do estoque, mas sem deixar de lado o objetivo principal da gestão de estoque que é de dar garantia do suprimento dos materiais necessários ao bom funcionamento da empresa, evitando faltas, paralisações eventuais na produção e satisfazendo às necessidades dos clientes e usuários.

O Modelo do Lote Econômico de Compra (LEC) é um modelo básico de controle de estoque, que permite determinar uma quantidade ótima de pedido de compra para um item do estoque, tendo em vista minimizar os custos totais de estocagem (por isso a denominação de Lote Econômico). Dentro desse modelo, utilizam-se abordagens gráficas e matemáticas (formulas) com variáveis do tipo custo de manter estoque, demanda do item, custo de pedir, quantidade do pedido e custo total.

O modelo LEC considera os custos associados ao estoque nos seguintes termos matemáticos:

- Custo de manutenção: $\frac{Q}{2} * cm$

  São os custos diretamente proporcionais à quantidade estocada. Incluem os custos de armazenagem, propriamente dita, os custos de seguro, os custos de transporte e manuseio, os custos de obsolescência, etc.

- Custo de pedido: $\frac{D}{Q} * cp$

  São os custos inversamente proporcionais à quantidade estocada. Note que a demanda dividida pelo tamanho do lote representa a quantidade do item reposicionado, ou seja, quantidade de pedido. O custo associado ao trabalho de efetuar o pedido de determinado lote de produtos engloba custos de mão de obra, de transporte de pedido, controle do recebimento do produto, controle de qualidade do pedido recebido, entre outros. No caso de itens fabricados são chamados de custos de preparação.

- Custo de aquisição: $D * P$

  Correspondem aos custos de compra de materiais que serão estocados. Esses custos independem do tamanho do lote. É o valor monetário, demanda multiplicada pelo preço unitário.

Desse modo o objetivo do modelo LEC é determinar o tamanho do lote de compra e a periodicidade ou ponto do pedido, de forma a minimizar os custos totais de estocagem. A função objetivo pode ser expressa como:

$$\min = f(Q) = \frac{Q}{2} * cm + \frac{D}{Q} * cp + D * P$$

em que:

Q: tamanho do lote de compra.

D: demanda anual do produto.

P: Preço de compra unitária.

cm: Custo unitário de armazenagem

cp: Custo unitário do pedido.

Como já vimos na Fig2 acima, a função do custo total que queremos minimizar tem concavidade para cima, assim para encontrar um valor de Q que minimize o resultado, basta derivar $f(Q)$ em relação a Q e igualar a zero, e isolar Q. Obtém-se o valor do lote econômico:

$$Q = \sqrt{\frac{2 * D * cp}{cm}}$$

3. RESULTADOS

Os dados da empresa que contem históricos de entradas e saídas de todos os tipos de itens desde 2009 até 2016 são conhecidos. Essas tabelas possuem colunas que informam: Nome do item; tipo do movimento (“E” se entrou, “S” se saiu); Data do movimento; Quantidade (em unidade) e Quantidade (em KG, positiva se entrou negativa se saiu). Na tabela 2 segue um exemplo de um trecho de como é esta tabela.

Nome	Movimento	Data	Qtd.	Saldo KG
item A	E	10/01/2011	200	22,8
item A	S	24/09/2011	-300	-34,2
item B	E	10/01/2011	734	88,08
item B	E	31/03/2011	3352	402,24
Item C	E	17/08/2011	1500	265,5
item C	E	20/10/2011	300	531
item C	S	30/08/2011	-692	-122,484
item C	S	31/08/2011	-682	-120,714
item D	E	14/01/2011	400	12
item D	S	05/01/2011	-60	-1,8

Tabela 2: Exemplo de um trecho do dado fornecido

Sabemos que os preços dos materiais são referentes a cada quilograma do material, então basta agora identificarmos os preços por quilo de cada material para obtermos a classificação dos materiais pela curva ABC. Tendo isso, calcularemos o valor monetário dos itens no ano de 2016, que é do ano que temos os dados mais atualizados.

A partir dos históricos de entradas e saídas é possível extrair diversas informações, por exemplo: número total de tipos de itens, quais itens possuem maiores frequências de entradas e saídas, quais itens possuem maiores demandas em quesito quantidade, quais itens possuem maiores demandas em quesito quilogramas. E também construir gráficos que representam as movimentações de cada item.

Então, dos itens considerados como de classe A, e partir desses dados, construímos gráficos que representam a movimentação desse item nos últimos anos para observar se eles possuem frequências de rotatividade estável, se é periódica, como é o tipo de movimentação do material, suas quantidades máximas de lote de compra e se é gerenciado de forma eficiente. Seguem alguns exemplos de gráficos construídos:

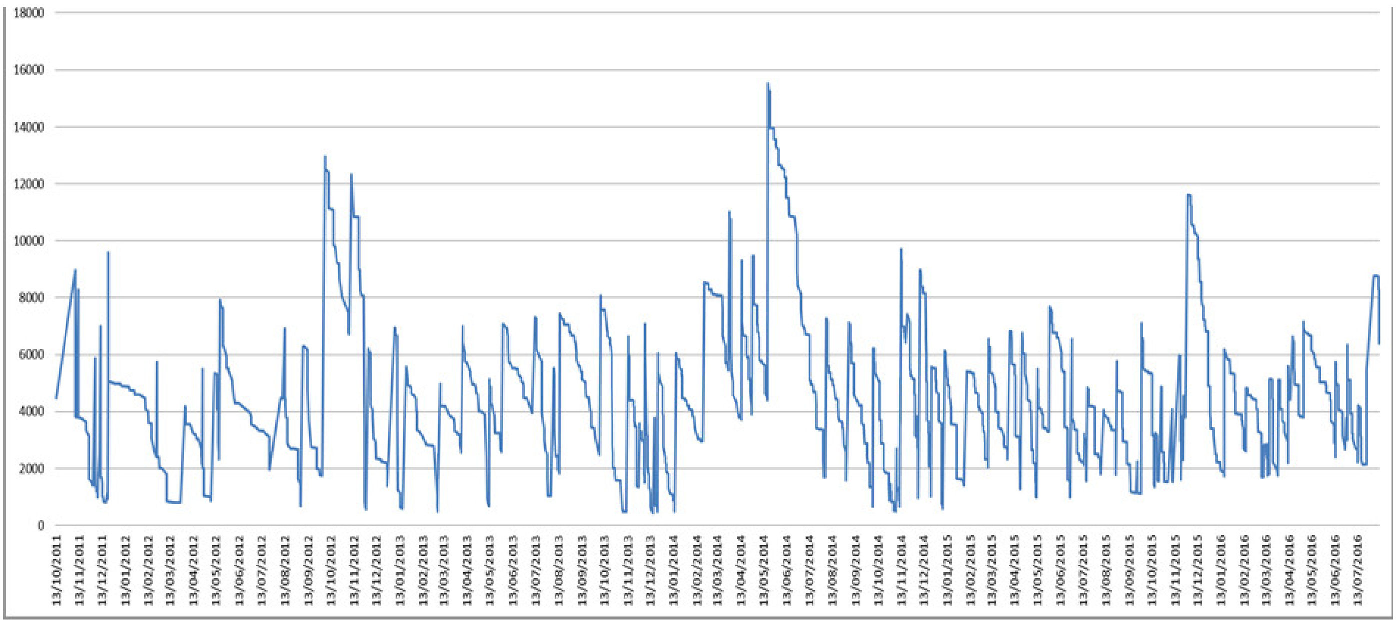


Figura 4: Gráfico do item A

Na Figura 4 vemos um exemplo de gráfico cujo resultado é satisfatório, pois não possui grandes picos e flutuações e aparentemente as movimentações são periódicas.

Já na Figura 5 podemos observar que existe uma certa flutuação no período entre maio de 2014 a outubro de 2015, isso mostra que durante esse período uma certa quantidade de materiais esteve parada no estoque e mesmo com itens ainda estocados, continuou entrando mais materiais desnecessariamente. Tais situações são designadas de casos patológicos, quando se verifica que as movimentações dos itens mostram um comportamento um tanto quanto inaceitável. Em realidade, o que é comum de se acontecer é que a empresa opta em comprar mais de determinados materiais, que estão com os preços em promoções pelo fornecedor, sem levar em conta se realmente vale a pena comprar, e deixar esse material estocado gerando custos. Tais situações evidenciam a possibilidade na melhoria da gestão do estoque.

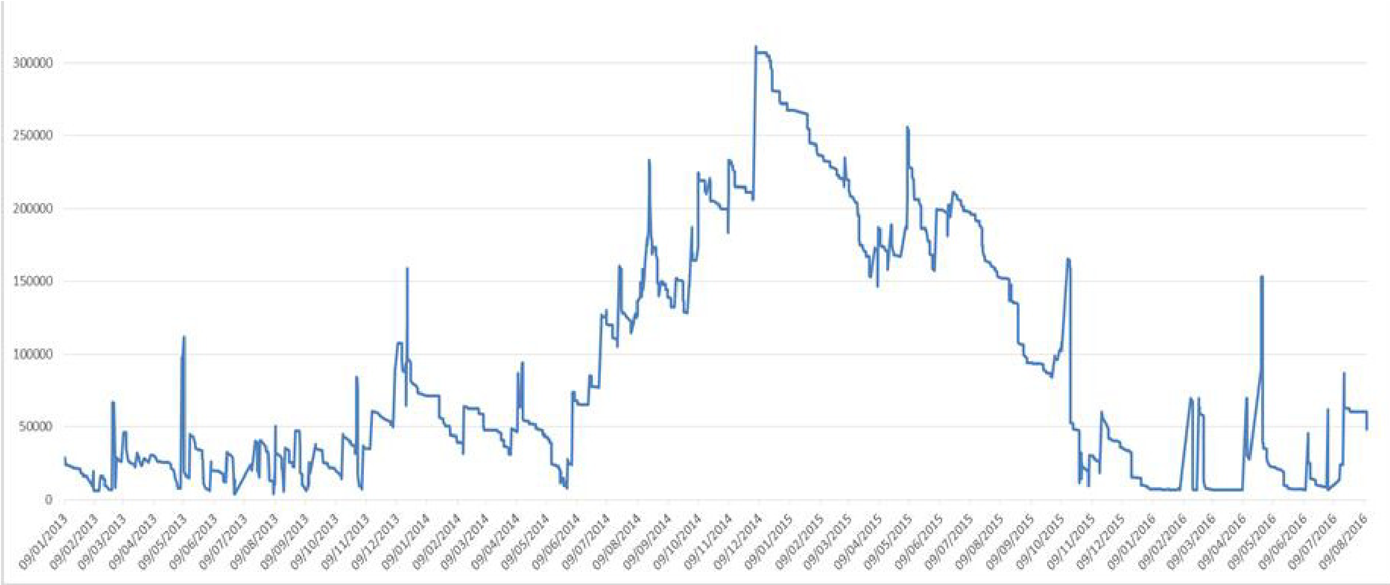


Figura 5: Gráfico do item B

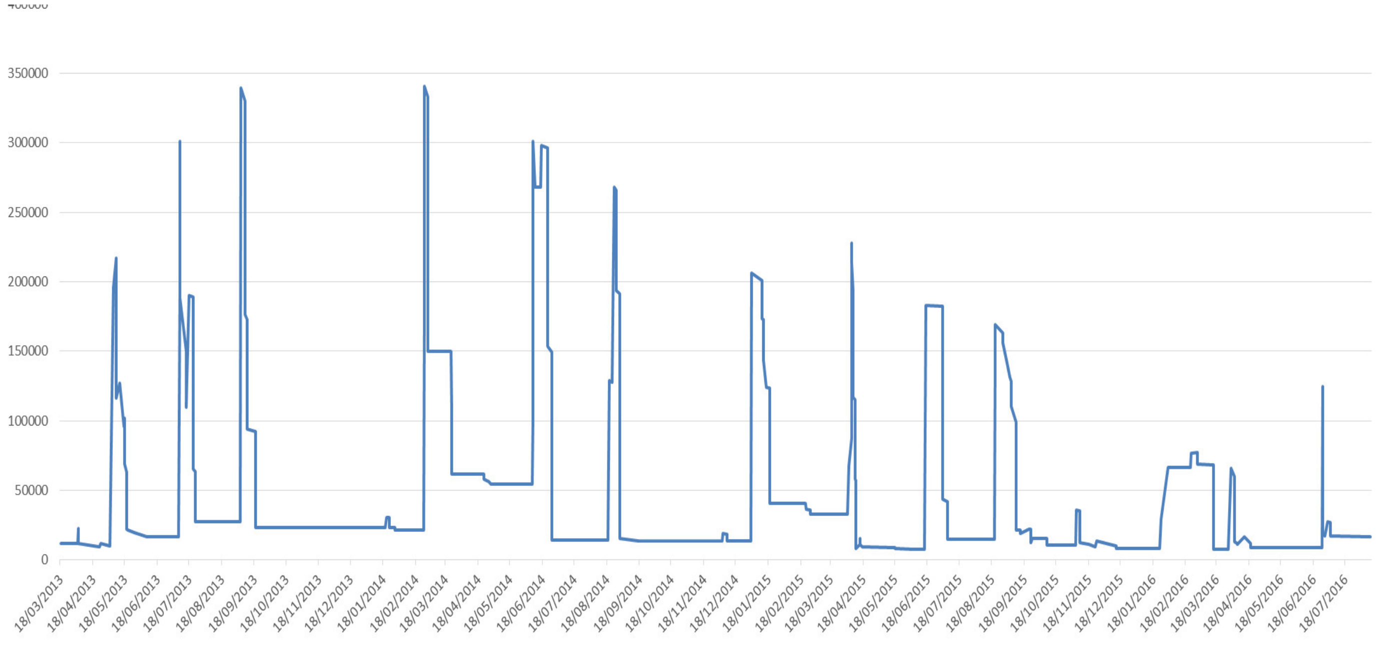


Figura 6: Gráfico do item C

Também existem casos de itens com gráficos como na Figura 6. Podemos observar que os itens são comprados e já utilizados logo em seguida, fazendo com que os itens fiquem menos tempo parado no estoque, o que é bom. O modelo matemático eficiente para esses tipos de materiais é o Just In Time, que infelizmente não abordamos nesse trabalho, mas é um modelo que visa utilização mínima do estoque.

3.1. Aplicando o LEC

Para aplicar o modelo LEC precisamos saber quais são os valores para as constantes cm e cp da função que queremos minimizar. Relembrando, os cm e cp são constantes unitárias que representam o que se gasta por cada espaço ocupado e o que se gasta por cada pedido, respectivamente. Os dados que recebemos são referentes a gastos totais que foram gerados no período de 2016, os custos de armazenagem como os custos com pessoal, custos de manutenção como os alugueis e impostos, e o custo de pedido como os custos com as mãos de obra e fretes.

Nomeamos os gastos totais anuais de armazenagem de CM e os gastos totais de pedido de CP, e a partir desses valores somos capazes de calcular as constantes unitárias cm e cp.

Assim, através de modelagens chegamos à conclusão que as constantes cm e cp são dados pela equação matemática:

$$cm = \frac{CM}{Q_t}; \qquad cp = \frac{CP}{E_t}$$

onde E_t é a quantidade de reposição de todos os itens somados, enquanto Q_t é o estoque médio de todos os itens estocados no período de 2016 que foram responsáveis pelas despesas de armazenagem.

Tendo calculado os valores para as constantes cm e cp, basta aplicar os valores no modelo LEC e teremos o valor para o lote econômico de qualquer item que desejamos do estoque.

4. CONCLUSÃO

Analisando os gráficos concluímos que de fato a maioria dos itens não possuem frequências periódicas, ou seja, aparentemente as movimentações são aleatórias e difíceis de serem previstas, e que existe uma possibilidade de melhoria na sua gestão por meio das metodologias estudadas. A quantidade e tipos de itens no estoque são grandes e variadas, porém tendo os valores de demanda e o custo por quilo de cada item, é possível classificar os itens utilizando a curva ABC. Classificados os produtos mais importantes, e tendo coletados todos os dados necessários para a função objetivo do modelo LEC, podemos identificar as variáveis que irão otimizar o tamanho do lote para cada item e minimizar os custos gerados dentro do estoque.

Para a empresa será sugerida então os valores do lote ideais de cada item mostrando qual seria o lucro obtido caso utilizasse o tamanho do lote econômico, comparando o custo gerado em 2016 sem o lote econômico com o possível custo estimado caso o lote econômico tivesse sido aplicado. Juntamente, as formulas de calcular as constantes cm e cp que são praticamente fixas, e a formula do modelo LEC, que irá auxiliá-los em decisões futuras de compras que poderão determinar qual será a quantidade ideal.

5. AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Governo do Estado do Paraná, a Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, a Fundação Araucária, a CAPES, a Universidade Estadual de Londrina e o Departamento de Matemática/UEL. Os autores C.K. Oliveira, H.G. Menck e P.Y. Takito agradecem ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC/UEL pelo apoio financeiro fornecido.

6. REFERÊNCIAS

CHING, H. Y.; Gestão de Estoque na Cadeia de Logística Integrada: Supply chain. São Paulo: Ed. Atlas, 2008.

ELLENRIEDER, A. V.; Pesquisa Operacional. Rio de Janeir : A. Neves, 1971.

GONÇALVES, P. S.; Administração de Materiais. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

TAHA, Hamdy A. Pesquisa operacional: uma visão geral. Tradução Arlete Simille Marques. Revisão Rodrigo Arnaldo Scarpel. 8. Ed. São Paulo: person Prentice Hall, 2008.

COELHO, Leandro C. Entendendo o Lote Econômico de Compras. Disponível em: <http://www.logisticadescomplicada.com/entendendo-o-lote-economico-de-compras-lec-ou-eoq/> Acesso em 20 out 2016.

MOURA, C. E.; Gestão de Estoque: Ação e Monitoramento na Cadeia de Logística Integrada. Rio de Janeiro: Ciências Moderna, 2004.

LESSON STUDY NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

GOMES, Joice Caroline Sander Pierobon; Silva, Karina Alessandra Pessoa.

RESUMO

O presente artigo busca estabelecer um panorama de artigos publicados em eventos de âmbito nacional e internacional sobre a metodologia de pesquisa Estudos de Aula (Lesson Study). Oriunda do Japão, a metodologia de pesquisa Estudos de Aula tem como foco principal a capacitação do professor. Suas ações atuam de forma colaborativa e centrada na prática letiva, surgindo como uma alternativa de resgate a autoestima do professor em relação a sua prática docente, pois fortalece de acordo com Baptista et al (2013) o trabalho coletivo, além de oferecer um ambiente estimulante para os alunos no processo de aprendizagem. Neste contexto, a pesquisa aponta relatos de autores sobre como esta metodologia pode auxiliar na melhoria da prática escolar, apresentando como ocorreram o desenvolvimento desta metodologia no grupo em que estavam. Os trabalhos analisados apontam para um olhar diferente dos professores em relação à sua prática escolar após sua participação nos grupos colaborativos, pois como apontam, Quaresma et al (2014) passaram a valorizar mais aspectos de aprendizagem dos alunos a partir de suas dificuldades, buscando compreender o raciocínio dos alunos durante as discussões coletivas. Este artigo faz parte da dissertação de mestrado da primeira autora, na qual busca a partir da metodologia Estudos de Aulas, desenvolver atividades de modelagem matemática, na formação de professores dos anos iniciais. Para isso, sentimos necessidade de evidenciar, na literatura, relatos de pesquisa em que a metodologia Estudos de Aula foi empreendida com professores de Matemática para subsidiar nossa investigação.

PALAVRAS-CHAVE: Estudos de Aula. Formação de professores. Anos inicias.

INTRODUÇÃO

Discussões relativas à capacitação de professores vêm ganhando destaque no âmbito da Educação Matemática. Isso se deve ao fato do crescente avanço das tecnologias de informação e comunicação e das rápidas transformações no processo de trabalho e produção da cultura, conforme destacam Alencar e Lautenschlager (2014, p.79).

Levando em consideração a prática profissional, a metodologia Estudos de Aula se caracteriza como um processo de formação de professores, desenvolvido a partir de um grupo colaborativo. Tal metodologia busca a partir da reflexão, promover momentos em que professores possam trocar experiências, a partir da identificação de determinado problema relevante na aprendizagem dos alunos.

Neste trabalho, apresentamos relatos encontrados em artigos publicados em revistas de âmbito nacional e internacional, realizando uma busca no google acadêmico, e em referências de artigos encontrados no site de busca, de como a metodologia Estudos de Aula contribui para a formação de professores de diferentes níveis de escolaridade. A referida metodologia, na formação, é subsidiada por análises feitas em diversos episódios, em que se evidenciam suas potencialidades para a formação profissional e os desafios que fazem parte das etapas de realização.

Nossa investigação apresenta a metodologia Estudos de Aula e seus principais teóricos, descrevendo, por conseguinte os trabalhos encontrados e por fim as considerações finais apresentadas.

ESTUDOS DE AULA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Com origem no Japão, no início do século anterior, jugyokenkyuu, de acordo com Stigler & Hiebert (1999), se constitui num processo de formação de professores, que vem conquistando adeptos gradualmente em todo mundo. Nos Estados Unidos, esse processo foi traduzido como Lesson Study, e em Portugal, o termo utilizado se traduz em Estudos de Aula.

Esta metodologia tem como característica principal a colaboração e reflexão entre professores envolvidos em um grupo colaborativo. Fiorentini (2004) destaca em seu trabalho, a essência de um trabalho colaborativo, em que pode esclarecer tal conceito, a partir de seu grupo colaborativo,

> [...] um grupo autenticamente colaborativo é constituído por pessoas voluntárias, no sentido de que participam do grupo espontaneamente, por vontade própria, sem serem coagidas ou cooptadas por alguém a participar. As relações no grupo tendem a ser espontâneas quando partem dos próprios professores, enquanto grupo social, e evoluem a partir da própria comunidade, não sendo, portanto, reguladas externamente, embora possam ser apoiadas administrativamente ou mediadas/assessoradas por agentes externos (FIORENTINI. 2004. p. 53).

Neste sentido, Quaresma et al (2014), corroboram com o autor acima em relação à colaboração, e destacam como o processo dos Estudos de Aula acontece. Uma vez determinado o tema de pesquisa, ou seja, o conteúdo específico que emergiu da discussão inicial do grupo colaborativo, em que esteja diretamente relacionado à aprendizagem dos alunos, passa-se a seguir algumas etapas, nas quais, visam favorecer o ambiente de reflexão sobre o problema de aprendizagem e quais dificuldades os alunos apresentam em relação ao tema escolhido.

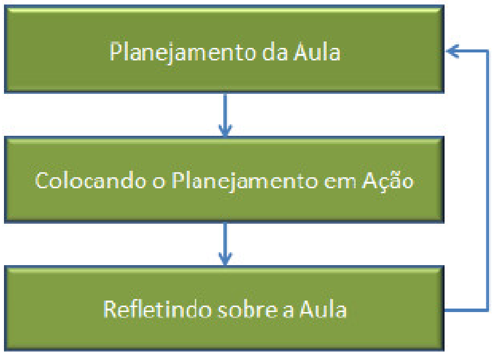
Com isso, é realizada uma análise das dificuldades apresentadas por alunos em relação ao referido tema, e os professores passam a refletir sobre o que pode ser feito para que tais dificuldades possam ser minimizadas. Logo, passa-se a ser confeccionado um plano de aula, de forma colaborativa, buscando identificar possíveis perguntas e respostas que possam surgir no desenrolar da aula, sendo esta etapa classificada como planejamento da aula.

Posteriormente, acontece o que Felix (2010) classifica como colocar o planejamento em ação, ou seja, nesta etapa um professor se dispõe a desenvolver o plano de aula em sua turma de alunos e os outros professores são convidados a observar a aula, no intuito de anotar pontos importantes para uma análise a posteriori.

Após realizada a etapa de ação do planejamento, os professores se reúnem para realizar uma reflexão sobre a aula, em que buscam não apenas a melhoria específica da mesma, mas também o aprimoramento do profissional docente. Sendo assim, a metodologia Estudos de Aula, estimula o despertar para uma prática de grupo de pesquisas no ambiente escolar, em que o objetivo é promover o aperfeiçoamento profissional de forma colaborativa.

Vale ressaltar que a reflexão sobre a aula planejada e colocada em ação não finaliza com a reflexão. O plano de aula pode sofrer uma reformulação com as reflexões realizadas. Com isso, há necessidade de se retomar a etapa inicial de planejamento, e este plano de aula poderá ser desenvolvido em outras turmas, com outros professores e, assim, sucessivamente, constituindo-se em um ciclo que pode ser representado como no esquema desenvolvido por Felix (2010).

Figura 01 - Ciclos da metodologia de pesquisa de aula (Lesson Study)



Fonte: Felix, 2010

Ponte et al (2016) complementam que os Estudos de Aula se diferencia de outros processos formativos que envolvem observação de aulas, por estar centrado na atuação do professor. Nesta oportunidade os professores participantes do grupo têm a chance de aprender questões importantes em relação ao conteúdo nos quais ministram em suas aulas, além de refletir sobre orientações curriculares, e aos processos de raciocínio dos alunos incluindo dificuldade e a própria prática em sala de aula. Como salientam Ponte et al (2016):

> Os estudos de aula são desenvolvidos em ambientes colaborativos, levando os participantes a criar um relacionamento próximo, partilhar ideias e apoiar-se mutuamente. Desta forma, constituem um contexto não só para refletir, mas também para promover a autoconfiança, fundamental para o seu desenvolvimento profissional (p. 870).

Considerando a relevância de Estudos de Aula na formação de professores, nosso intuito foi evidenciar e apresentar um panorama do que apontam as pesquisas em que tal metodologia foi desenvolvida. Com isso, nos apoiamos na caracterização de pesquisa qualitativa (Garnica 2004), buscando refletir como se apresentam as reflexões e resultados apontados nos trabalhos analisados e quais suas contribuições para dissertação de mestrado em andamento da primeira autora deste artigo.

ESTUDOS DE AULA, O QUE APONTAM AS PESQUISAS

Os autores Baptista et al (2013) descrevem uma experiência de lesson study em uma escola de tipologia híbrida em Lisboa. O ensaio relatado teve como objetivo identificar as aprendizagens profissionais realizadas pelos professores envolvidos, sendo trabalhado o conceito de ângulo. Neste desenvolvimento, a equipe do Instituto de Educação, foi responsável por proporcionar a cinco professoras do 1º ciclo momentos de capacitação profissional, fundamentados em Estudos de Aulas. Os autores apontaram que as professoras relataram estar mais atentas aos processos de raciocínio dos alunos. Isso pôde ser observado ao longo do trabalho e também na reflexão escrita coletiva que elaboraram, relatando que o lesson study lhes permitiu "acompanhar, com mais detalhes, a evolução do pensamento e as diferentes estratégias de resolução apresentadas pelos grupos de alunos ao longo da realização da tarefa" (BAPTISTA; PONTE; COSTA; VELEZ; BELCHIOR. 2013, p. 135).

Baptista et al (2014), apresentam também uma experiência com cinco professoras, trabalhando em grupo em escolas da Lourinhã, situada numa região rural, a cerca de 80 km de Lisboa. Os resultados reforçam a ideia de que os Estudos de Aula podem proporcionar aos professores um olhar mais atento sobre a natureza das tarefas a propor em sala de aula e levá-los a valorizar mais os processos de raciocínio dos seus alunos. Além disso, este trabalho evidencia as contribuições do Estudo de Aula para o desenvolvimento de um trabalho colaborativo entre professores, analisando neste processo as etapas que a metodologia descreve, e como os professores se posicionaram em cada uma delas.

Ponte et al (2016), analisaram também um grupo de cinco professoras em Lisboa, que atuam em 5º e 6º anos do Ensino Fundamental. Os objetivos da experiência foram de compreender as potencialidades do estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional e os desafios que se colocam à sua realização. Tais autores apresentam resultados que evidenciam fortemente a colaboração e como os estudos de aula foram significantes para que as professoras mudassem sua maneira de pensar, visto que num primeiro momento demonstravam estranheza com a qual era composta a formação. Os autores concluem que as professoras destacaram que lesson study lhes permitiu "acompanhar, com mais pormenor, a evolução do pensamento e as diferentes estratégias de resolução apresentadas pelos grupos de alunos ao longo da realização da tarefa" (PONTE; QUARESMA; PEREIRA; BAPTISTA, 2016, p. 887).

Nos relatos apresentados, as professoras evidenciaram diversas aprendizagens profissionais por elas realizadas, valorizando as discussões coletivas na sala de aula, e destacaram o trabalho colaborativo e a oportunidade de um espaço de formação em Estudos de Aula no ambiente escolar, além da importância de um bom planejamento por parte da equipe responsável pela formação.

Merichelli e Curi (2016) apresentam resultados parciais de uma pesquisa qualitativa que envolveu o uso da metodologia Estudos de Aula para professores do 3º ano do Ensino

Fundamental, em um curso de formação continuada da diretoria leste I da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. A metodologia descreve contribuições, centrando-se na formação dos cursistas. Os autores puderam inferir que os professores mudaram sua postura, sendo mais investigativos e colaborativos, promovendo o desenvolvimento profissional e a melhoria do plano de aula estudado e de sua execução.

Os autores supracitados descreveram, também neste trabalho, o que chamaram de primeira, segunda e terceira geração, ou seja, organizados por data e referência, trabalhos publicados nacionalmente nos quais abordavam Estudos de Aula como metodologia para formação profissional. Tais autores buscaram nos referencias teóricos, entendimento de como desenvolver esta prática para seu grupo colaborativo.

Utimura e Curi (2016) apresentaram um recorte da dissertação de mestrado profissional da primeira autora, e teve como foco analisar como Estudos de Aula, enquanto alternativa metodológica pode proporcionar ao professor dos anos iniciais, capacitação profissional. A proposta dos autores foi apresentar como esta alternativa reflete diretamente na aprendizagem dos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental em relação ao conceito matemático figuras geométricas espaciais. Sendo sujeitos desta pesquisa professores da rede municipal da cidade de São Paulo.

Os resultados desta pesquisa mostram os avanços dos alunos em relação ao conteúdo matemático voltado à geometria, além de desenvolverem a linguagem oral e escrita matemática, tendo por base, os níveis criados pelo casal holandês Van Hiele, em relação as dificuldades apresentadas pelos alunos em Geometria.

Tall (2008) descreve uma experiência com professores japoneses na participação de lesson study em que, a partir do grupo colaborativo, passaram a utilizar palavras japonesas para discutir com a classe primária ao buscar, comparar alternativas e procedimentos para resolução de um problema, destacando palavras como hayai para rápido, kantan para fácil, e seikaku para uso da precisão e lógica. Para o autor a principal contribuição que os professores conseguem perceber a partir de lesson study é que esta metodologia oferece a oportunidade de analisar como as crianças constroem seus significados em relação à matemática, e como se trabalhar com diferentes alternativas para que esses significados possam fazer sentido para o ensino e aprendizagem dos alunos.

Além disso, Tall (2008) relata que lesson study nos ensina a olhar para a matemática de novo, ou seja, não apenas para ensinar técnicas e procedimentos, mas para que o foco seja a compreensão conceitual de como contribuir no modo de pensar das crianças, relacionando seu crescimento intelectual.

O trabalho desenvolvido por Burghes e Robinson (2010) apresenta o livro intitulado *Estudo de lição: Melhorando a Matemática ensinando e aprendendo* (tradução nossa), no qual aborda a metodologia lesson study enquanto prática colaborativa de desenvolvimento profissional que visa contribuir para melhoria do ensino. Os autores descrevem diversos relatos a nível primário e secundário das contribuições desta metodologia. Afirmam que é uma excelente forma de CPD (continuação de desenvolvimento profissional), ou seja, tem o potencial de proporcionar melhorias no processo de ensino e aprendizagem que se sustentam em longo prazo, à medida que os professores desenvolvem esta metodologia em suas próprias salas de aula. Portanto não há dúvida de que o estudo de aulas tem o potencial para transformar radicalmente as escolas em ambientes de aprendizagem em que professores, trabalhando colaborativamente podem investigar, compartilhar e verificar o que melhor se aplica aos seus alunos (BURGHES; ROBINSON. 2010).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve como objetivo refletir sobre a metodologia Estudos de Aula para a formação de professores dos anos iniciais (Brasil) e ensino primário (outros países), como forma de subsidiar o trabalho que temos desenvolvido. Iniciamos com a definição da metodologia Estudos de Aula, apresentando diversos autores que fundamentam a mesma, assim como acontecem as etapas/ciclos no grupo colaborativo.

A partir dos trabalhos analisados, podemos inferir que o uso da metodologia Estudos de Aula para formação de professores se apresenta como um recurso eficaz, proporcionando ao professor, se desvincular da figura do formador, passando o mesmo ser o foco central ao grupo. O que podemos analisar em todos os trabalhos foi a postura investigativa e colaborativa, mesmo em professores que não estavam habituados a trabalhar desta forma como apontam Ponte et al (2016). Este fato se deve, contudo, a forma como esta metodologia está dividida, fazendo com que professores que lecionam em mesmos níveis de escolaridade possam voltar seus olhares às diferentes formas de pensamento dos seus alunos, valorizando o modo como cada um constrói seu conhecimento.

Planejar é algo muito importante, principalmente quando se elaboram planos em que foram construídos de forma colaborativa, em que cada professor tem a oportunidade de expor suas ideias, fundamentadas em suas próprias práticas, promovendo a qualidade e melhoria do plano de aula em estudo.

Logo esta metodologia a ser utilizada como fonte de investigação nesta pesquisa pode proporcionar um processo de colaboração entre profissionais que atuam em diferentes níveis de escolaridade. Indo ao encontro do que muitos professores buscam em seu processo de formação profissional, ou seja, desenvolver uma disposição para a sua prática tendo por base uma perspectiva de ensino enquanto espaço de aprendizagem, como protagonistas de seu processo de contínua aprendizagem.

A partir das análises realizadas, destacamos a importância da divulgação e a continuidade de pesquisas envolvendo Estudos de Aula como metodologia de formação de professores. Neste sentido é que estamos desenvolvendo a dissertação de mestrado, na qual este trabalho faz parte.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é parte da dissertação de mestrado intitulada estudos de aula com atividades de modelagem matemática na formação de professores dos anos iniciais, tendo como orientadora a segunda autora deste artigo, na qual agradece o apoio e incentivo que vem demostrando ao longo deste ano, na elaboração das etapas da dissertação.

REFERÊNCIAS

Alencar, E. S.; Lautenschlager E. et al. **Modelagem Matemática nos Anos Iniciais**. 1ª edição. Editora sucesso. São Paulo. 2014

Baptista, M.; Ponte, J. P.; Costa, E.; Velez, I.; Belchior, M. **Lesson study na formação de professores do 1.º ciclo do ensino básico**. In Atas AFIRSE 2013. Lisboa: IE-UL.

Baptista, M.; Ponte, J. P.; Velez, I.; Costa, E. **Aprendizagens profissionais de professores dos primeiros anos participantes num estudo de aula.** Educação em Revista|Belo Horizonte|v.30|n.04|p. 61-79 |2014

Burghes, D.; Robinson D. **Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning**. CIMT (Centre for Innovation in Mathematics Teaching) University of Plymouth. 2010.

Felix, T. F. **Pesquisando a melhoria de aulas de matemática segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a Metodologia da Pesquisa de Aula (Lesson Study**). Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, PPGECEUFSCar, 2010.

Fiorentini, D. **Pesquisar Práticas Colaborativas ou Pesquisar Colaborativamente?** In: Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

Garnica, A. V. M. **História Oral e educação Matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

Merichelli, M. A. J.; Curi, E. **Estudos de aula (“lesson study”) como metodologia de formação de professores.** REnCiMa, Edição Especial: Educação Matemática, v.7 , n.4, p. 15-27, 2016

Ponte, J. P.; Quaresma, M.; Pereira, J. M.; Baptista, M. **O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 868 - 891, dez. 2016.

Quaresma, M. Ponte, J.P.; Baptista, M.; Pereira, J. M. **O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional**. Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática - SIEM. Braga: APM., pp. 311–325. 2014.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). **The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.** New York, NY: Free Press.

Tall, D. **Using japanese lesson study in teaching mathematics**. The Scottish Mathematical Council Journal 38, 45-50. 2008.

UTIMURA, G. CURI, E. **Figuras geométricas espaciais: alunos de quinto ano e suas professoras aprendendo juntos**. 1. ed. - Curitiba: Appris, 2016.

Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica: Um Olhar para a Literatura

SILVA, Rafael Machado; SILVA, Karina Alessandra Pessoa.

RESUMO

Neste artigo analisamos trabalhos que versam sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, com a finalidade de fazer um estado da arte referente ao tema. Assim, pesquisamos publicações em periódicos de Educação Matemática e em eventos da área de Modelagem, com o objetivo de encontrar trabalhos que tratam do entrelaçamento entre os dois temas desde 2012 até 2016. Dessa forma apresentamos Modelagem Matemática na perspectiva Crítica, em seguida a Educação Matemática Crítica, e a partir dessas explanações, trazemos nosso estudo de cada trabalho que evidenciamos possuir articulação entre Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica com o intuito de identificar como essa articulação está sendo abordada nas pesquisas, bem como possíveis encaminhamentos para futuras pesquisas.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Educação Matemática Crítica. Estado da Arte.

INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática é uma linha de pesquisa a qual diferentes perspectivas podem ser articuladas, aqui destacamos a Educação Matemática Crítica. Neste trabalho nosso objetivo foi identificar publicações em periódicos de relevância na área da Educação Matemática e de eventos específicos de Modelagem Matemática que versam sobre aspectos sócio-políticos-econômicos no ensino de Matemática.

Com o presente estudo, almejamos, entre outras contribuições, possibilitar uma aproximação do pesquisador com seu tema de pesquisa, obter uma visão geral do que tem sido publicado desde 2012 até 2016 em alguns periódicos de Educação Matemática com Qualis A1 e A2 (BOLEMA, Ciência & Educação, Educação Matemática em Revista e Zetetiké), e em anais de eventos da área de Modelagem Matemática, como VI e VII EPMEM, XIV CNMEM e do 17° ICTMA.

Assim, a priori colocamos nosso entendimento sobre Modelagem Matemática, em seguida, uma síntese da Educação Matemática Crítica, para em seguida trazermos um panorama sobre as publicações encontradas. Finalizamos com nossas considerações.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica para o ensino de Matemática na sala de aula. Em geral uma atividade de Modelagem Matemática tem origem em um contexto do dia a dia, assim as atividades podem seguir diferentes configurações, levando em consideração as concepções de quem orienta o desenvolvimento da atividade.

Com o objetivo de analisar as diferentes concepções de Modelagem Matemática, Kaiser e Sriramam (2006) analisaram trabalhos presentes no ICTMA (International Conference on Teaching Mathematical Modelling and Applications) e no ICMI (International Commission on Mathematical

Instruction) e os organizaram em seis perspectivas: realística, epistemológica, contextual, educacional, sociocrítica e cognitiva.

Dentre as seis perspectivas apresentadas, a sociocrítica está relacionada a uma compreensão crítica do mundo, em um contexto político social, tratando também do papel e da natureza dos modelos matemáticos, características essas que estão de acordo com as características da Educação Matemática Crítica.

Ainda de acordo com Kaiser e Sriramam (2006), na perspectiva sociocrítica, proporcionar o pensamento crítico do aluno é o foco central do ensino e discussões reflexivas dos alunos são vistas como parte indispensável no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, pois essas discussões e reflexões são indispensáveis para o desenvolvimento do pensamento crítico.

O trabalho que Kaiser e Sriramam (2006) colocam na perspectiva sociocrítica é o trabalho do brasileiro Jonei Cerqueira Barbosa. Araújo (2009, p. 58) destaca que no Brasil, diferentemente do restante do mundo, a perspectiva sociocrítica tem grande impacto na comunidade de Modelagem Matemática, característica que Kasiser e Sriramam (2009) atribuem também à influência das ideias de Ubiratan D'Ambrosio com a Etnomatemática.

De acordo com Jacobini e Wodewotzki (2006), por meio da Modelagem Matemática é possível enfatizar ações político-sociais o que pode despertar novos olhares tanto sobre a Matemática, quanto sobre a realidade social ao redor do estudante. Dessa maneira, é possível que os estudantes possam mudar sua própria visão e também influenciar a visão de outros em relação a assuntos de naturezas sociais e que podem ser melhor compreendidos por meio da Matemática.

As atividades de Modelagem Matemática têm por característica o foco no trabalho em equipe. Como pontuam Almeida e Dias (2004), a Modelagem Matemática em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa, onde a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm papel importante na construção do conhecimento.

É na interação que os alunos podem discutir diferentes visões de uma mesma situação. Uma atividade de Modelagem Matemática permite que os alunos possam defender seus pontos de vista, colaborando na formação de alunos mais independentes que se coloquem a frente na busca por uma solução ao problema proposto. Essas características são defendidas por Araújo (2009), que desenvolve atividades de Modelagem Matemática segundo a Educação Matemática Crítica. Essa autora defende que quando se trabalha dessa maneira, a Modelagem Matemática se preocupa com a formação política do estudante, fazendo com que atuem criticamente na sociedade, levando o que discutem nas atividades para a vida em sociedade. Assim, adiante detalhamos nosso entendimento sobre Educação Matemática Crítica.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

Alro e Skovsmose (2010) colocam que uma das ideias da Educação Matemática Crítica é de que fazer Matemática é mais do que dar aos alunos um entendimento sobre a arquitetura lógica da Matemática, é proporcionar um entendimento de como a Matemática influência a vida.

De forma geral, a Educação Matemática Crítica se apoia em questões relacionadas como "de que forma a aprendizagem de Matemática pode apoiar o desenvolvimento da cidadania" e "como o indivíduo pode ser empowered através da Matemática" (ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p.19), ou seja, coloca um olhar diferenciado sobre o ensino e sobre o papel da Matemática, que vai além de resolver algoritmos. Além disso, busca contribuir para entender como utilizar os algoritmos para compreender o que está a sua volta e como saber Matemática pode colaborar para essa compreensão.

Uma Educação Matemática Crítica deve possibilitar uma visão mais ampla sobre os conceitos que versam a realidade social,

> os estudantes têm que desenvolver não apenas conhecimento pragmático sobre como usar a matemática e como construir modelos (simples), mas também, primariamente, conhecimento sobre como usar a construção do modelo, e esse conhecimento deve ser voltado para o entendimento das funções sociais e aplicações "adultas" de modelos matemáticos (SKOVSMOSE, 2001, p. 52).

A relação entre a Educação Matemática Crítica e a sociedade é salientada por Barbosa (2003), que afirma que, para a construção de uma sociedade democrática, é necessário que as pessoas sejam capazes de participar de debates públicos com decisões pautadas/ratificadas pela matemática.

No que tange a democracia, Skovsmose (2001) faz referência ao papel do professor,

> Se queremos desenvolver uma atitude democrática por meio da educação, a educação como relação social não deve conter aspectos fundamentalmente não democráticos. É inaceitável que o professor (apenas) tenha um papel decisivo e prescritivo. Em vez disso o processo educacional deve ser entendido como um diálogo (SKOVSMOSE, 2001, p.18).

A Educação Matemática Crítica, ainda segundo Skovsmose (2001, p.19), se preocupa com questões como:

> 1) A aplicabilidade do assunto: quem usa? Onde é usado?
> 2) Os interesses por detrás do assunto: que interesses formadores de conhecimento estão conectados a esse assunto?
> 3) Os pressupostos por detrás do assunto: que sugestões e que problemas geraram os conceitos e os resultados na matemática? Que contextos tem promovido e controlado o desenvolvimento?
> 4) As funções do assunto: que possíveis funções sociais poderiam ter o assunto?
> 5) As limitações do assunto: em quais áreas e em relação a que questões esse assunto não tem qualquer relevância?

Questões como essas levantadas acima proporcionam que o estudante tenha uma visão diferente da que está acostumado a lidar no dia a dia, faz uma nova leitura do que é a Matemática e como ela se encontra disseminada na sociedade.

O QUE DIZEM AS PUBLICAÇÕES

A fim de analisar o que está sendo pesquisado e desenvolvido na área de Educação Matemática com uma perspectiva que aborde a relação entre o ensinar Matemática e sua implicação na sociedade de forma a contribuir para uma formação cidadã demos início em nossa pesquisa.

A pesquisa foi feita por meio das palavras-chave, *social*, *crítica* e *socioeducação* nos periódicos BOLEMA, Ciência & Educação, Educação Matemática em Revista e Zetetiké, das publicações a partir de 2012 até 2016. Assim, iniciamos uma leitura mais rigorosa para identificar quais dos trabalhos continham uma abordagem da Educação Matemática Crítica ou que se assemelhavam a essa proposta, e posteriormente olhar com mais detalhes para quais desses trabalhos são de Modelagem Matemática em uma abordagem da Educação Matemática Crítica.

Em nossa pesquisa selecionamos 20 artigos (quadro 1), os quais relacionam em seus resumos uma abordagem Crítica em relação a Matemática e sua influência na sociedade. No entanto, apenas dois destes aliam Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica.

Quadro 1. Quantidade de Trabalhos por Periódico

Periódico	Quantidade de Trabalhos
BOLEMA	18
Ciência & Educação	0
Educação Matemática em Revista	1
Zetetiké	1

Fonte: Os autores

Cabe destacar alguns artigos pela quantidade com que aparecem e que relacionam a Matemática com aspectos sócio-políticoco-econômicos, como Vigo e Abalos (2014), Soto e Cantoral (2014) e Gasperini e Cantoral (2014), que se embasam na Teoría Sociepistemológica de la Matemática Educativa (CANTORAL, 1990).

Bernardi e Caldeira (2012) abordam a contribuição da Educação Matemática Crítica como aqui já definida, em uma aldeia indígena, bem como Kisteman Jr e Lins (2014), apoiados na Educação Matemática Crítica, tratam o consumo na sociedade atrelando a isso a Teoria dos Campos Semânticos (LINS, 1994). Os artigos que articulam Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica são os de Silva e Kato (2012) e Araújo (2012).

Silva e Kato (2012) tratam dos elementos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica e fazem um estudo sobre os relatos de experiência apresentados na VI CNMEM que se enquadram nesta perspectiva, segundo alguns referenciais teóricos brasileiros que desenvolvem estudos nessa área.

Por meio da Análise Textual Discursiva, constroem quatro categorias que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica, sendo as categorias: (1) participação ativa do aluno na construção do modelo, (2) participação ativa do aluno na sociedade, (3) problema não-matemático da realidade, (4) atuação do professor como mediador. Ainda, segundo as autoras, muitas das características aqui indicadas não são exclusivas da perspectiva sociocrítica, e a opção por esta abordagem não implica na exclusão dos propósitos característicos de outras perspectivas da Modelagem Matemática. Consideram também que atividades de Modelagem se enquadram nessa perspectiva apenas se desenvolver um conjunto de ações que atenda todas as quatro categorias construídas.

Araújo (2012), embasada em Ole Skovsmose e Paulo Freire, tece uma análise sobre como ser crítico em projetos de Modelagem. Após conceituar o que é criticidade, a autora contextualiza o desenvolvimento de sua pesquisa, que aconteceu na construção de um projeto de Modelagem Matemática na Perspectiva Crítica, em uma turma de graduação em Geografia da UFMG, em que a autora discutiu com os alunos o que é Modelagem Matemática na perspectiva Crítica, e os dividiu em grupos para elaborar um plano de trabalho.

Em sua análise Araújo (2012) utilizou o trabalho dos alunos do grupo que escolheu estudar o tema aspectos socioeconômicos do projeto de construção da Linha Verde em Belo Horizonte, e o objetivo era identificar a interpretação crítica que eles tiveram. O estudo matemático dessa situação foi um elo entre a discussão sobre os impactos socioeconômicos na região e os argumentos e dados utilizados pelo governo para justificar a obra. Essa comparação levou os integrantes do grupo a concluir que não houve preocupação do governo com o impacto que a obra estava tendo sobre a vida das pessoas.

Para Araújo (2012) esse posicionamento crítico do grupo diante da realidade pode ser interpretado como receptividade para o desenvolvimento de projetos de Modelagem Matemática na perspectiva crítica.

Com relação aos trabalhos publicados em anais de eventos, nos pautamos nos VI e VII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM), na 9ª Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), no VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) e na 17° International Conference on Teaching Mathematical Modelling and Applications (ICTMA).

Nos anais do VI EPMEM, encontramos três trabalhos que colocam atividades de Modelagem Matemática juntamente com alguma abordagem social, sendo apenas um diretamente ligado a Educação Matemática Crítica. Barros e Kato (2014) trabalharam uma atividade com alunos de engenharia voltando a atividade para a conscientização ambiental. Simonetti et al. (2014) usam a Modelagem Matemática para ajudar a prever e tomar decisões sociais, no caso deles, investigar o número de homicídios.

Já Mello (2014), em um curso de costura de um programa do governo federal, desenvolveu atividades de Modelagem Matemática com mulheres em situação de vulnerabilidade, essas atividades à luz da Educação Matemática Crítica estavam voltadas para ensino de medidas e para a Educação Financeira.

Na primeira atividade proposta com tabela fornecida pela professora, devia-se calcular o quanto de tecido e qual o custo para a confecção de uma cortina.

A segunda atividade foi que a partir de uma lista com diversos itens, as mulheres fizessem a melhor compra, não necessariamente a mais barata, mas a que fosse melhor para elas. A autora destaca nesta atividade que as alunas relataram que quando iam ao mercado não se preocupavam com a quantidade de papel higiênico nos rolos apenas com a quantidade de rolos no pacote, e por meio da atividade se deram conta da diferença que isso pode fazer em uma compra.

Na terceira atividade, Mello (2014) pediu que, utilizando propagandas de lojas, as alunas escolhessem três produtos e destacassem qual a melhor opção de compra, a vista ou a prazo, e com a intervenção da professora as alunas calcularam a taxa de juros e ficaram impressionadas como os juros eram altos.

Finalizando, a autora coloca que as atividades foram elaboradas no desafio apresentado por Skovsmose, que se refere a explorar em que medida é possível, por meio da Educação Matemática, fazer a diferença para algumas situações, e dessa forma tentar realizar uma Educação Matemática para a justiça social. Apesar de não saber em que medida a Educação Matemática fez diferença na vida das mulheres, pelos relatos e pelo desenvolvimento das atividades, acredita que algum movimento foi feito.

No VII EPMEM, identificamos duas publicações que trazem esse olhar sobre sociedade e criticidade, ambos atrelam Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica. Littig e Alves (2016) refletem sobre a influência do empowerment no desenvolvimento do conhecimento reflexivo em uma atividade com alunos do 2° ano do Ensino Médio, que se deu a partir de uma situação-problema trazida pelos alunos que tratava da falta de água para irrigar o jardim da escola. Kistemann Jr e Canedo Jr (2016) em uma turma de 6° do Ensino Fundamental além da Modelagem Matemática associa o construto seres-humanos-com-mídias à luz da Educação Matemática Crítica.

Littig e Alves (2016) observam que o envolvimento em discussões reflexivas está associado quando os alunos trazem questões que os inquietam. Além disso, abordam que quando a autonomia dos sujeitos está relacionada ao seu posicionamento na atividade, questões subjetivas da formação social se fazem presentes e isso está associado à construção do empowerment, como colocado por Skovsmose (2001).

Os autores ainda ponderam sobre a importância do contexto social no desenvolvimento do conhecimento reflexivo, por ser o contexto social um espaço de formação dos indivíduos, e que desenvolver a capacidade reflexiva amplia a visão do mundo como preconiza a Educação Matemática Crítica.

Littig e Alves (2016), concluem que a partir das falas dos alunos esse cenário propiciou a autonomia dos mesmos e promoveu principalmente a reflexão sobre a relação da Matemática com o contexto social.

Kistemann Jr e Canedo Jr (2016), antes de apresentarem a análise dos dados, tecem uma ligação entre as referências da Educação Matemática Crítica e seres-humanos-com-mídias, em que colocam o paradigma do exercício (SKOVSMOSE, 2000), como um entrave para o desenvolvimento de condições favoráveis para que os alunos desenvolvam reflexões a respeito da Matemática em uma sociedade altamente tecnológica que vivemos. Se as aulas de Matemática não conseguem se libertar desse paradigma, as mídias acabam por não cumprir o papel proposto pelo construto seres-humanos-com-mídias, pois tem apenas um papel substitutivo de apresentação de informações na sala de aula.

Os autores propuseram aos alunos que escolhessem um tema para ser estudado na aula. Um grupo de alunos escolheu o tema viagem e, a princípio, usaram somente a fala para comentar o que sabiam sobre o tema. Em um segundo momento, o professor apresenta aos alunos uma lista de preços obtida na internet com passagens aéreas e rodoviárias. Nesse segundo momento, os autores perceberam como a mídia interferiu no diálogo dos alunos, pois com a lista eles deixaram de lado a oralidade livre do primeiro momento para falas condicionadas ao que estava na tabela, ou seja, as mídias têm influência perceptível. Na tarefa também se observou que apesar das listas sugerirem a unicidade da resposta, algo que remete ao paradigma do exercício, a maneira que a atividade foi encaminhada e o tratamento dos dados se distancia da tradição dos exercícios rotineiros.

Para finalizar, Kistemann Jr e Canedo Jr (2016) destacam que a presença da Modelagem Matemática favorece a construção da autonomia dos estudantes necessária para transitar no novo paradigma dos cenários para investigação.

Os anais da 9ª Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), trazem o trabalho de Pagung, Rezende e Lorenzoni (2015). Os autores, fundamentados na Educação Matemática Crítica, desenvolveram atividades em uma associação de catadores de resíduos, para subsidiar o ensino do conceito de função com alunos de um 9° ano do Ensino Fundamental.

A atividade foi estruturada em 19 aulas, com a exibição de documentários sobre consumo e reciclagem, debates e pesquisas para investigar a partir de que década o índice de resíduos sólidos começou a crescer no Brasil e no mundo, bem como reflexões a respeito dos atuais valores sociais em relação ao consumo.

Na sequência Pagung, Rezende e Lorenzoni (2015), a partir de um questionário que aplicaram aos alunos no final das atividades, categorizaram a atividade em quatro grupos: envolvimento com a atividade, sociabilização, aprendizagem e compreensão da realidade. Em especial, na categoria *compreensão da realidade*, os autores concluem que o objetivo de levar os estudantes a refletir sobre a inteiração da Matemática com a realidade e com a sociedade foi alcançado, visto que, obtiveram alto percentual de resposta, concordo totalmente, para as afirmações: “Estudar função a partir de uma situação real ajuda a entender que a Matemática pode estar presente na vida” e “a atividade me levou a conhecer melhor a realidade de outras pessoas e entender que a Matemática também se preocupa com os problemas sociais”

Assim, os autores destacam em suas considerações finais que a atividade propiciou a participação ativa e comprometimento dos alunos, a discussão acerca do cotidiano e a conscientização do estudante quanto a seu papel na sociedade, aspectos esses que comtemplam pressupostos da Educação Matemática Crítica.

No 17° ICTMA, três trabalhos possuem características da Educação Matemática Crítica: Araújo e Campos (2015), Rosa e Orey (2015) e Villarreal, Esteley e Smith (2015), dois trabalhos brasileiros e um argentino, respectivamente.

Araújo e Campos (2015), tratam de uma atividade de Modelagem Matemática que tem como objetivo constituir um espaço de negociação com a perspectiva da Educação Matemática Crítica. As autoras analisam as atividades de um grupo que estudou o orçamento do SUS no estado de Minas Gerais.

Para o desenvolvimento do que as autoras chamam de Projeto de Modelagem, o grupo partiu do confronto entre a divulgação dos gastos com saúde, publicado pelo governo do estado, com o do Sistema de Informação Orçamentária de Saúde Pública (SIOPS). Com a ajuda da professora, em um processo de negociação, o grupo se dedicou a investigar a diferença entre os gastos em cada ano e fazer uma projeção para os próximos, ao invés de, apenas transformar as informações da tabela em informações gráficas que era a proposta inicial do grupo antes da intervenção da professora.

Com base nessa negociação, Araújo e Campos (2015) acreditam que se configurou um espaço de negociação e um modelo de cooperação investigativa (CI) semelhante ao proposto por Alro e Skovsmose (2000). Além disso, no diálogo entre a professora e o grupo, foi possível verificar a presença da Ideologia da Certeza em Educação Matemática (BORBA; SKOVSMOSE, 2001), no fato de a princípio o grupo olhar para os dados como algo inquestionável e posteriormente a professora ajudá-los a ver além dos dados coletados.

O trabalho de Rosa e Orey (2015), respaldado em diversos autores incluindo Skovsmose, trata da importância de uma dimensão social crítica na Modelagem Matemática, essa união ajuda os alunos a desenvolver sua eficácia social-crítica.

Os autores colocam que para que os alunos desenvolvam sua eficácia social-crítica, é preciso que isso venha de propostas pedagógicas. Ainda apontam que a dimensão social-crítica, facilita as competências, habilidades necessárias para que professores e estudantes desempenhem um papel transformador na sociedade.

Villarreal, Esteley e Smith (2015), professores da Universidade de Córdoba na Argentina, relatam a utilização da Educação Matemática Crítica em projetos de Modelagem Matemática com Licenciandos em Matemática na fase de estágio.

Os autores analisam parte do trabalho de um dos 11 grupos. Todos os trabalhos desenvolvidos tinham que ter relação com problemas sociais. O grupo analisado optou por estudar a coleta de recicláveis, a escolha do tema se deu pelo fato de Córdoba ter problemas quanto a coleta de lixo reciclável. Durante a atividade de modelagem, as estudantes relatam que seu projeto pode ajudar na conscientização das pessoas sobre o tema, o que mostrou a preocupação social nesse processo.

Villarreal, Esteley e Smith (2015), concluem ressaltando que tanto os Licenciandos do estudo, quanto os demais, poderão construir futuramente projetos de Modelagem Matemática com uma perspectiva sociocrítica. E ainda, o projeto proporcionou reflexões sobre a própria Matemática, sobre criação de modelos e o papel da Matemática na sociedade

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A partir desse estudo podemos perceber como se encontram as publicações que articulam Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, e assim traçar um panorama, organizando-as em duas grandes categorias: trabalhos teóricos e práticas de sala de aula.

Como primeira categoria, colocamos os trabalhos estritamente teóricos, que são Silva e Kato (2012) e Rosa e Orey (2015), podemos observar que ambos buscam estabelecer relações entre Modelagem Matemática e aspectos da Educação Matemática Crítica. Silva e Kato (2012) categorizam o que torna uma atividade de modelagem como sociocrítica e Rosa e Orey (2015) enfatizam como uma abordagem social-crítica contribui para o desenvolvimento social, proporcionando a eficácia social-crítica.

A segunda categoria engloba os trabalhos que são relatos de experiência com Modelagem Matemática juntamente com Educação Matemática Crítica, em que dada a pluralidade de relatos é possível sub categorizá-los quanto ao nível de ensino, ou seja, em nível Fundamental, Médio e Superior.

Relatos que tratam de atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental são dois. Littig e Alves (2016) trabalham com uma turma de 6° ano e Pagung, Rezende e Lorenzoni (2015) em uma turma 9° ano. E no Ensino Médio temos uma publicação de Littig e Alves (2016), que tratam de atividades em um 2° ano.

A maior quantidade de publicações se concentra no Ensino Superior, três publicações. Araújo (2012) em uma turma de Licenciatura em Geografia, Araújo e Campos (2015) em uma turma de Gestão Pública, e Villarreal, Esteley e Smith (2015) que desenvolveram atividades com Licenciandos em Matemática. E um trabalho, o de Mello (2014) que é um relato do desenvolvimento de atividades em um curso profissionalizante oferecido pelo Governo Federal.

Essa diversidade quanto a natureza dos trabalhos traz indícios da versatilidade da associação da Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica. As leituras nos levam a perceber como essa união torna as atividades mais abrangentes, trazem outras possibilidades no que diz respeito ao desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, pois as perspectivas da Educação Matemática Crítica interferem desde a problematização da situação até a validação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane. **Um estudo sobre o uso da modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.** In: BOLEMA, Rio Claro – SP, 2004.

ALRO, Helle, SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Autêntica, 2006.

ARAÚJO, Jussara de Loiola; CAMPOS, Ilaine da Silva. **Negotiating the Use of Mathematics in a Mathematical Modelling Project.** In. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer. 2015.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Ser Crítico em Projetos de Modelagem em uma Perspectiva Crítica de Educação Matemática.** Bolema. n.43, p. 839-859. 2012.

ARAÚJO, Jussara L. **Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica.** Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 55-68, jul. 2009.

BARBOSA, J.C. **Modelagem Matemática e a Perspectiva sócio-crítica.** In: SEMINÁRIO INERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos, SP. **Anais**...Santos, SP: SBM, 2003. p. 1-13. GT Modelagem matemática.

BARROS, Michele Carvalho de; KATO, Lilian Akemi. **A Modelagem matemática e a Educação Ambiental Crítica: Um estudo sobre a dinâmica populacional de Campo mMurão.** In. VI Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. Anais. Curitiba- PR. 2014.

BERNARDI, Luci dos Santos; CALDEIRA, Ademir Dinizeti. **Educação Matemática na Escola Indígena sob uma Abordagem Crítica.** Bolema. n.42B, p.408-431. 2012.

BORBA, Marcelo C.; SKOVSMOSE, Ole. A ideologia da certeza em educação matemática. In: SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001. p. 127-148.

CANTORAL, R. **Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funcionesanalítica**. 1990. 554 f. Tesis (Doctorado en Ciencias) - Departamento de Matemática Educativa del Centrode Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, 1990.

GASPERINI, Daniela Reyes; CANTORAL, Ricardo. **Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático.** Bolema. n. 48, p. 360-382. 2014.

JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L. **Uma Reflexão sobre a Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica.** *Bolema*, n. 25, p. 71-88, 2006.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. **A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education**. The International Journal on Mathematics Education, v. 38, n. 3, p.302-310, 2006.

KISTEMANN JR, Marco Aurélio, LINS, Romulo Campos. **Enquanto isso na Sociedade de Consumo Líquido-Moderna: a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores.** Bolema. n.50, p.1303-1326. 2014.

KISTEMANN JR, Marco Aurélio; CANEDO JR, Neil da Rocha. **A participação das mídias no fazer Modelagem de alunos do Ensino Fundamental a partir de uma perspectiva crítica.** In. VII Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. Anais. Londrina- PR. 2016.

LINS, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos: **uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico.** Revista Dynamis, Blumenau, v. 1, n. 7, p. 29-39, junho.1994.

LITTING, Jonisario; ALVES, Leonardo Correia. **A Modelagem Matemática sob a Perspectiva Sociocrítica: O Empowerment no Desenvolvimento do Conhecimento Reflexivo.** In. VII Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. Anais. Londrina- PR. 2016.

MELLO, Jéssica Adriane de. **Reflexões obre a Educação Matemática Crítica a partir de Atividades de Modelagem Matemática.** In. VI Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. Anais. Curitiba- PR. 2014.

PAGUNG, Camila Maria Dias; REZENDE, Oscar Luiz Teixeira, LORENZONI, Luciano Lessa. **Contribuições da Modelagem Matemática na construção do conceito de função a partir da geração de renda em uma associação de catadores de resíduos sólidos.** In. 9ª Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. Anais. São Carlos-SP. 2015.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. **Social-critical Dimension of Mathematical Modelling.** In. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer. 2015.

SILVA, Cíntia; KATO, Lilian Akemi. **Quais Elementos Caracterizam uma Atividade de Modelagem Matemática na Perspectiva Sociocrítica?** Bolema. n.43, p. 817-838. 2012.

SIMONETTI, Djerly; et al. **Modelagem Matemática: uma possível contribuição social.** In. VI Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. Anais. Curitiba- PR. 2014.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001 – (Coleção perspectivas em Educação Matemática).

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOTO, Daniela; CANTORAL, Ricardo. **Discurso Matemático Escolar y Exclusión.Una Visión Socioepistemológica.** Bolema, n.50, p. 1525-1544. 2014.

VIGO, Molfino Verónica; ÁBALOS, Gabriela Buendía. **Un Modelo de prácticas para analizar el Proceso Social de Institucionalización Escolar del Conocimiento Matemático.** Bolema, n. 50, p.1217-1238. 2014.

VILLARREAL, Mónica E; ESTELEY, Cristina B.; SMITH, Silvina. **Pre-service Mathematics Teachers' Experiences in Modelling Projects from a Socio-critical Modelling Perspective.** In. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer. 2015.

PIBID: uma experiência na docência com a utilização de jogos no ensino da matemática

Soares, Natalia Maria da Silva; Pires, Magna Natalia Marin.

RESUMO

O presente relato é resultado de um trabalho desenvolvido no PIBID Matemática - UEL (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência). Serão apresentadas partes de uma oficina implementada em três turmas de 7° ano do Colégio de Aplicação Pedagógica da UEL Professor José Aloísio Aragão, Educação infantil, Ensino fundamental, Médio e Profissional, no município de Londrina, Paraná. A oficina se resume na aplicação de um jogo matemático que aborda o conteúdo de equações do 1° grau. O jogo aplicado foi elaborado pela primeira autora, com base na teoria desenvolvida pela segunda autora na aula de Prática e Metodologia do Ensino de Matemática I: Estágio Supervisionado. No relato é descrito em detalhes, a preparação e desenvolvimento da oficina, juntamente com as reflexões da primeira autora a respeito de aspectos da ação docente, isto é, desde a elaboração de questões que não fossem ambíguas ou de difícil entendimento, de acordo com a série a qual se destina, até ter clareza ao explicar a dinâmica de uma aula. Após a realização da oficina nas três turmas, o que ficou para a primeira autora deste relato, foi de grande valia na construção da sua perspectiva como docente.

PALAVRAS-CHAVE: PIBID. Oficinas. Jogos no ensino de Matemática. Ação docente.

INTRODUÇÃO

Como participante do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência), este ano, a primeira autora teve a oportunidade de implementar uma oficina, em três turmas de 7° ano nas quais sua supervisora, a professora Cristiane Rodrigues Reina Soriani ministra aulas. A oficina foi realizada no Colégio de Aplicação pedagógica da UEL Professor José Aloísio Aragão, Educação Infantil, Ensino Fundamental, Médio e Profissional, no município de Londrina, Paraná.

A oficina se resume na aplicação de um jogo matemático, que aborda aplicações do conteúdo de equações do 1° grau; conteúdo já abordado pela professora da turma.

Alguns dos objetivos que almejava com a implementação desta oficina eram:

- proporcionar uma aula diferente aos alunos, numa perspectiva que não fosse a tradicional;
- analisar a produção escrita das resoluções dos alunos, observando possíveis erros e os possíveis motivos dos erros, e diferentes resoluções;
- vivenciar a experiência de planejar, executar e refletir a respeito da utilização de uma tendência em Educação Matemática diferente, em turmas diferentes.

A RESPEITO DA UTILIZAÇÃO DE JOGOS NA AULA DE MATEMÁTICA

Os jogos são utilizados em aulas, especialmente na área de Matemática há muitos anos, mesmo antes de serem realizadas pesquisas a respeito da sua contribuição na aprendizagem escolar. Isto, muito pelo fato da matemática como disciplina, ter o caráter de influenciar o aluno no desenvolvimento de estratégias.

Mas, trabalhar com jogos em sala de aula não é somente dar o jogo pelo jogo, a respeito da sua utilização em aula, Grando (2000, p. 26) explica que não só os alunos devem se interessar para que a aprendizagem esteja garantida, é "necessário fazer mais do que simplesmente jogar um determinado jogo. O interesse está garantido pelo prazer que esta atividade lúdica proporciona, entretanto é necessário o processo de intervenção pedagógica a fim de que o jogo possa ser útil à aprendizagem, [...]", o que corrobora também para a intenção do professor ao utilizar jogos em suas aulas. Fiorentini e Miorim (1990, p.7) apresentam os jogos com duas finalidades, destacam que "eles podem vir no início de um novo conteúdo com a finalidade de despertar o interesse da criança ou no final com o intuito de fixar a aprendizagem e reforçar o desenvolvimento de atitudes e habilidades".

Esta oficina foi escolhida com intuito de desenvolver atitudes e habilidades em algumas estratégias de resolução de equações do 1° grau, conteúdo que a supervisora do PIBID havia desenvolvido com os alunos.

Além disso, os jogos são uma excelente oportunidade para se aprender a trabalhar em equipe. Marco (2006, p. 199) ressalva que:

> Um outro aspecto que é próprio da natureza do jogo é o seu caráter social que possibilita à criança expor suas ideias e analisar pontos de vista dos outros colegas, refletir sobre as jogadas realizadas pelo grupo e as do adversário e tomar decisões sobre qual melhor jogada deve realizar, podendo entender que a opinião de um colega pode ser melhor que a própria ou que juntos podem encontrar soluções mais interessantes. Esse fato contribui para que o aluno compreenda que, em seu futuro profissional, a interação e troca de ideias serão relevantes para poder bem desempenhar seu papel na sociedade.

Nessas perspectivas foi implantada a oficina de jogos acompanhada da supervisora em suas turmas de 7° ano.

PREPARAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DA OFICINA

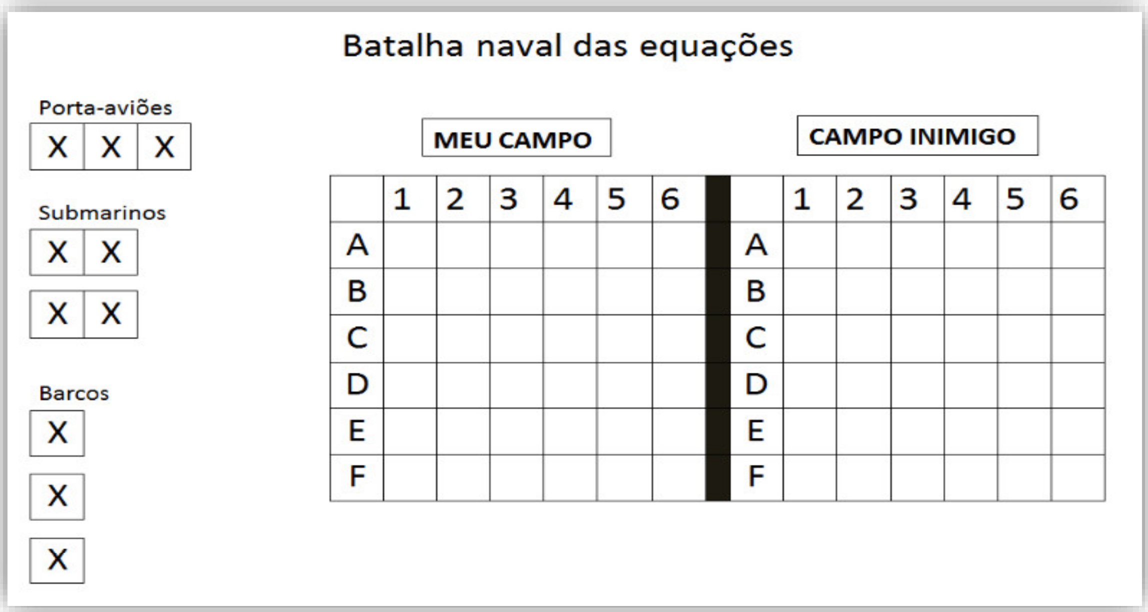
Partiu da primeira autora desse relato a ideia de trabalhar com jogos. Antes de compartilhar com a professora supervisora a intenção de implantar a oficina no trabalho com os alunos naquele bimestre, foi feita uma busca na internet a respeito de jogos matemáticos.

Foram encontrados muitos artigos que tratavam do tema e muitos jogos interessantes. Porém, muitos deles eram jogados por apenas dois alunos, e para uma primeira oficina, por não saber como eles iriam se comportar, preferiu-se buscar por jogos que fossem jogados por mais de dois alunos, para que pudéssemos dar conta de auxilia-los durante a oficina.

Foram encontrados jogos de tabuleiro, de cartas, que precisavam de dados, pinos, uma gama enorme de jogos. A maioria, ainda que com boas ideias e fundamentos, não estavam explicados de forma clara para quem fosse tentar jogar. E entre esses que não estavam claros, havia um que tinha chamado muito a atenção, talvez pelo próprio nome: Batalha naval das equações.

Não estava muito claro como se dava a dinâmica do jogo, então foram adaptadas as regras, o tabuleiro e tudo mais que fosse necessário para que ele ficasse claro. O tabuleiro ficou menor (6x6), pensando que teríamos no máximo duas aulas para a oficina e, com um tabuleiro muito grande, os alunos poderiam demorar a acertar jogadas. As regras foram reescritas de acordo com o que pensávamos que seria mais dinâmico. A seguir são apresentados os objetos do jogo.

Figura 1 – Tabuleiro adaptado



Fonte: as autoras

Antes de levar para a supervisora, conversamos a respeito do jogo com um outro professor de matemática, ele já havia trabalhado essa tendência em suas aulas e poderia dar algumas dicas. Suas dicas foram excelentes, ele alertou a não dar a equação “pura” aos alunos, pois eles (a maioria dos alunos) têm alguma dificuldade com a álgebra, nos sugeriu trabalhar com problemas envolvendo equações. Além disso, alertou também a não deixar por conta dos alunos, escreverem as respostas e nos entregarem, sugeriu fazer uma ficha de resoluções que eles deveriam preencher e entregar.

Na sequência apresentamos a ficha elaborada para as resoluções e alguns exemplos de questões que havia no jogo.

Figura 2 – Modelo de ficha de resoluções

Ficha de resoluções e respostas 7°___ Equipe_______________

Aluno(a)____

Aluno(a)____

Aluno(a)____

Número da questão___	Número da questão___	Número da questão___
Número da questão___	Número da questão___	Número da questão___
Número da questão___	Número da questão___	Número da questão___

Fonte: as autoras

Figura 3 – Exemplos de questões (problemas) contidas no jogo

4. João guardou durante três meses sua mesada para comprar um brinquedo de R$ 60,00. Quanto João recebe de mesada por mês? **(R$ 20,00)**

5. Qual é o número que, somado a 9, dá -1? **(-10)**

6. Em uma balança equilibrada tem três queijos e 10 kg de chumbo de um lado, cinco queijos e 2 kg de chumbo do outro lado. Qual o peso de cada queijo? **(4 kg)**

Fonte: as autoras

Com relação às questões, foram elaboradas ou adaptadas 15 questões para cada equipe, chamadas de equipe Azul e equipe Vermelha. As questões eram apresentadas de forma aleatória em uma folha, mas tanto as da equipe Vermelha, quanto as da equipe Azul tinham, na nossa avaliação, o mesmo nível de dificuldade.

Após as modificações tudo foi mostrado para a professora da turma. Ela gostou muito da proposta e permitiu que o jogo fosse aplicado na turma. Também deu algumas dicas e sugestões que incorporamos ao trabalho. A seguir são apresentadas a Preparação e as Regras do jogo.

Figura 4 – Regras reescritas - versão final.

Preparação do jogo

- Jogado por duas equipes, cada uma possui seis embarcações indicadas do lado esquerdo da área "MEU CAMPO".
- Distribua as embarcações no "MEU CAMPO" marcando um "X" nos quadradinhos, respeite o tamanho e o formato de cada uma.
- Uma embarcação não pode encostar na outra!
- Uma equipe não pode ver o jogo da equipe oponente.

Regras do jogo

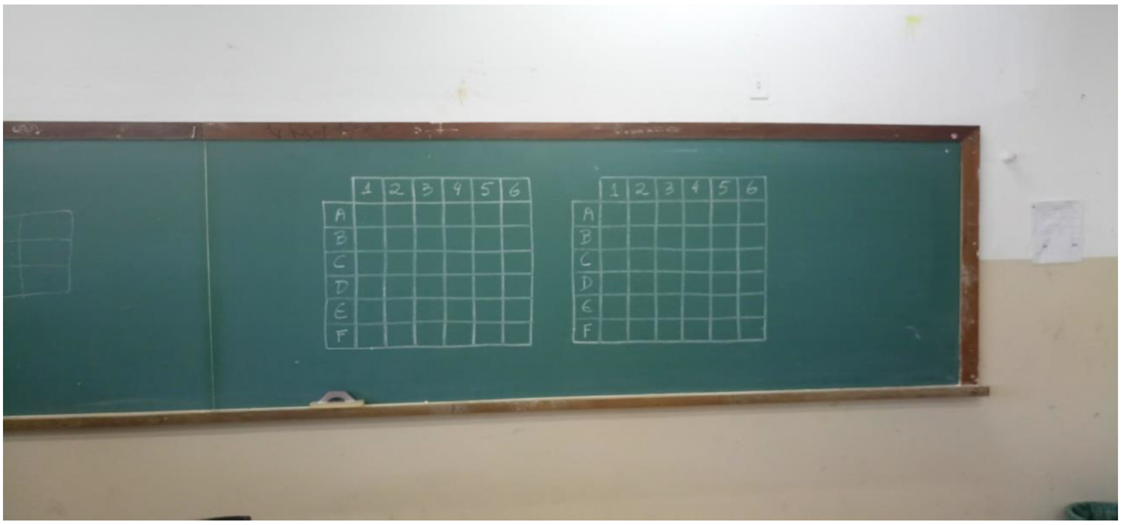
1. Após decidir quem vai começar, a primeira equipe irá dar as coordenadas de onde vai atirar sua bomba fornecendo a letra e o número do quadradinho.
2. A equipe oponente responderá **ÁGUA**, caso o quadradinho esteja vazio ou **ACERTOU**, caso tenha acertado toda ou parte da embarcação.
3. Para que sua bomba exploda, sua equipe deve responder à questão que a equipe oponente lhe propuser. Caso sua resposta esteja correta, a equipe oponente responde **FOGO**, que significa que sua bomba explodiu ou **AFUNDOU** quando tiver pegado fogo em toda a embarcação ou todas as partes dela.
4. As bombas atiradas devem ser marcadas com uma bolinha no "CAMPO INIMIGO" e as recebidas da equipe oponente marcadas no "MEU CAMPO".
5. Quando uma bomba não explode (ou seja, a equipe não respondeu corretamente a questão), a equipe que a atirou tem o direito de atirar outra no mesmo lugar, mas somente quando for sua vez de novo.
6. Quando sua bomba, ou a da equipe oponente explodir, pinte todo o quadradinho.
7. Vence a equipe que afundar todas as embarcações da oponente.

Fonte: as autoras

Fizemos a oficina nos três 7º anos que a professora supervisora ministra aula. No dia da oficina contamos com, além da professora, outros pibidianos também supervisionados por ela.

Os procedimentos gerais utilizados em todas as turmas foram os seguintes: primeiro formamos os grupos; a professora, por conhecer melhor os alunos, cuidou dessa parte; após os grupos estarem formados, já sabendo que teriam que se subdividir em duas equipes, foi entregue o material a eles e lemos junto com todos os alunos as regras, usando a lousa para exemplificar jogadas. Somente após essas explicações, entregamos as questões para que eles começassem a jogar.

Figura 5 – utilização da lousa para exemplificar jogadas



Fonte: as autoras

Após o início do jogo, na primeira turma, algumas equipes apresentavam muitas dúvidas sobre a dinâmica do jogo, dúvidas essas que foram sanadas na medida do possível. Nas outras duas turmas aparentemente isso não ocorreu ou ocorreu com menor frequência.

A maioria dos alunos se empenhou em jogar, as equipes trabalhavam bem e o jogo fluiu, ainda que lentamente em alguns grupos. Também houve grupos em que o jogo fluiu rapidamente. Quando percebíamos dúvidas recorrentes, solicitávamos a atenção de todos e fazíamos os devidos esclarecimentos.

O clima de competição influenciou bastante na participação dos alunos. Uma das turmas se mostrou muito mais competitiva que outras pois, além das equipes competirem em seu grupo, tentavam saber sobre as equipes de outros grupos. Foram criadas muitas estratégias para se tentar vencer. Infelizmente nenhum grupo conseguiu “vencer” o outro de fato, mas chegaram perto disso.

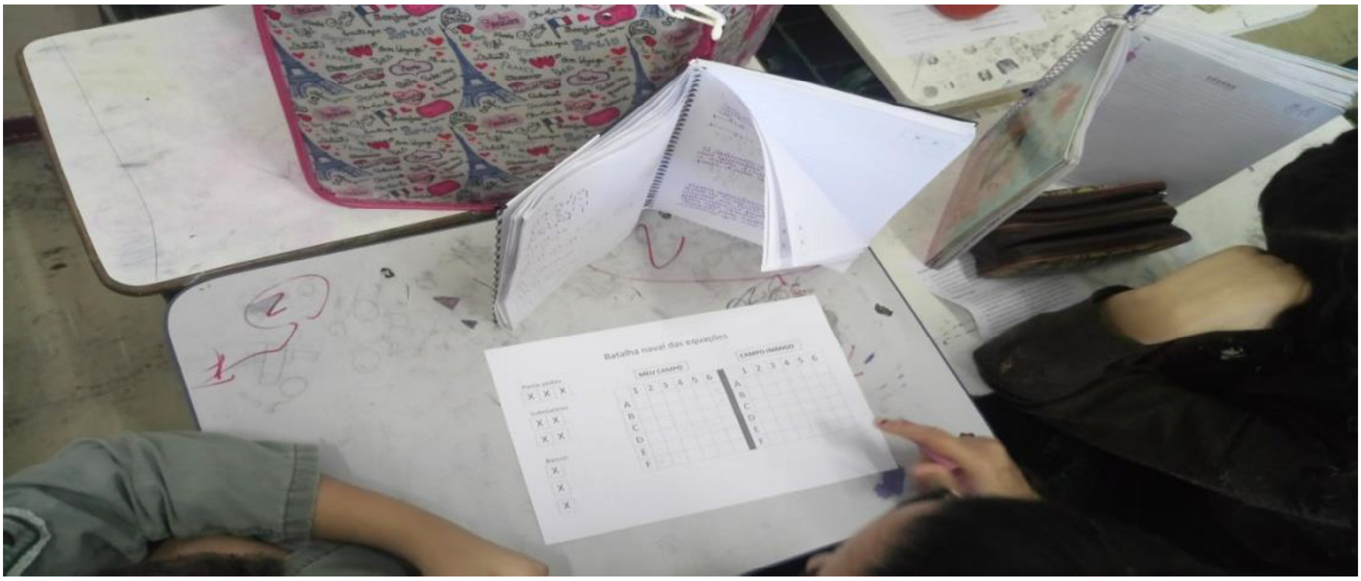
Para o caso de um grupo terminar muito antes de todos os outros, também elaborei e adaptei questões extras, para um segundo jogo.

As equipes faziam “barricadas” para que a equipe oponente não pudesse ver seu jogo.

Figura 6 – Aplicação do jogo em uma das turmas

Fonte: as autoras

Figura 7 – Alunos jogando



Fonte: as autoras

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A primeira impressão que tivemos durante a aplicação da oficina foi que os alunos gostaram bastante. Eles aparentaram estar muito motivados a participar, talvez por ser um jogo.

Percebemos que ao explicar a dinâmica da aula na primeira turma não o fizemos com clareza, pois eram recorrentes as dúvidas sobre os procedimentos gerais do jogo. O que não ocorreu com tanta frequência nas outras turmas, já que nos esforçamos para que as explicações fossem mais claras e foram dados outros exemplos.

Dúvidas com relação aos enunciados das questões também eram frequentes, a maioria por dificuldade de interpretação por parte dos alunos, mas algumas também por ambiguidade nos enunciados.

A partir deste momento começamos a analisar a produção escrita dos alunos, que era um dos meus objetivos e então percebemos que os alunos dominavam alguns conceitos ao representar o problema na forma de equação. Conceitos como o de dobro, triplo, metade, números consecutivos, balança equilibrada, eles sabiam representar utilizando incógnitas.

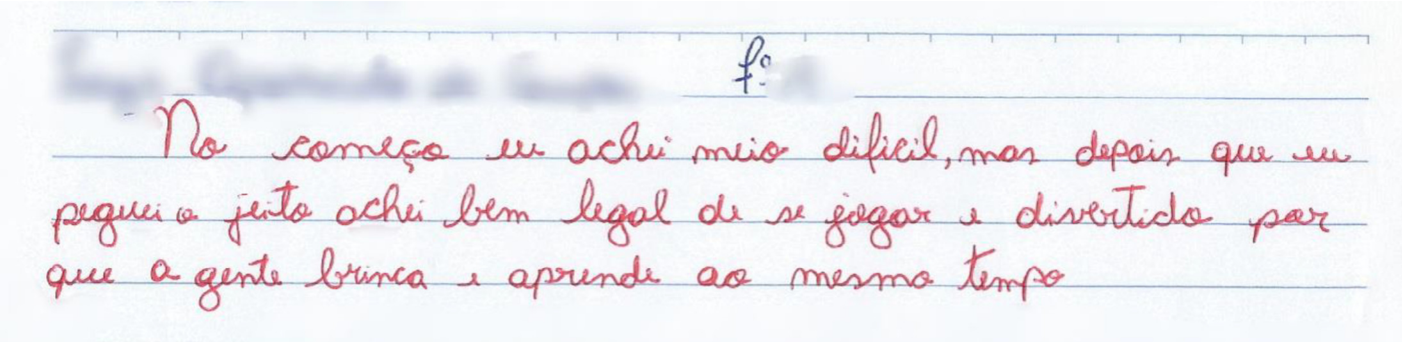
Continuamos esta análise após a oficina corrigindo as questões, pois todo o material do jogo foi nos devolvido para que pudéssemos fazer a avaliação. Durante a correção, pudemos notar que embora soubessem representar na forma de equação, ainda cometiam erros procedimentais ao resolver a equação. Habituados a resolver pela operação inversa, ainda se confundiam ao “inverter” a operação.

Conseguimos observar resoluções alternativas utilizando desenhos e também por tentativa, tivemos a oportunidade de validar com os alunos na devolução do jogo corrigido a eles. Nessa devolução também esclarecemos as dúvidas e erros frequentes.

A supervisora do PIBID, a pedido da primeira autora, solicitou que os alunos escrevessem com suas palavras, o que acharam da oficina. Esse feedback foi muito importante, pudemos perceber outros aspectos da oficina.

A seguir apresentamos algumas opiniões de alunos[1], a respeito da oficina.

Figura 8 – Comentário 1

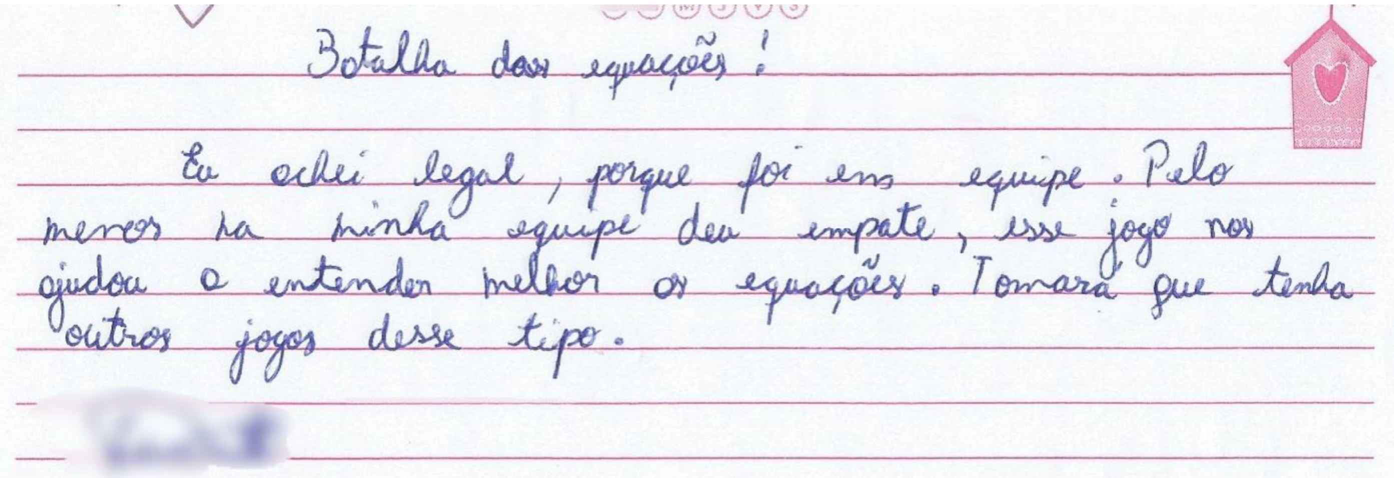


7º

No começo eu achei meio difícil, mas depois que eu peguei o jeito achei bem legal de se jogar e divertido por que a gente brinca e aprende ao mesmo tempo

Fonte: as autoras

Figura 9 – Comentário 2

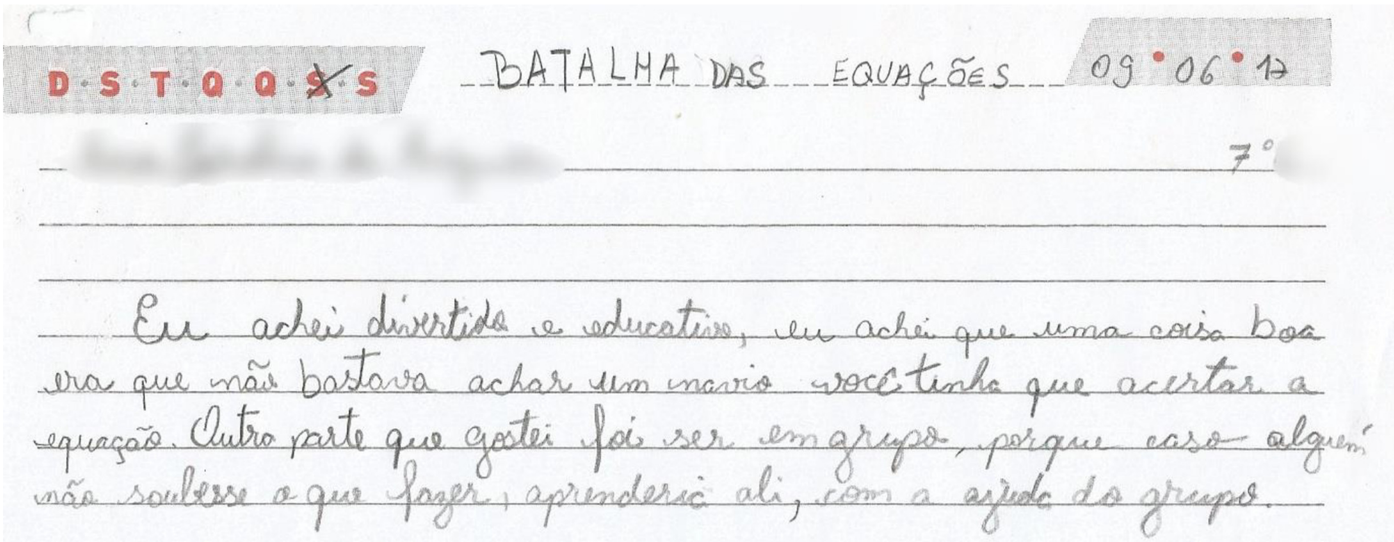


Batalha das equações!

Eu achei legal, porque foi em equipe. Pelo menos na minha equipe deu empate, esse jogo nos ajudou a entender melhor as equações. Tomara que tenha outros jogos desse tipo.

Fonte: as autoras

Figura 10 – Comentário 3



D · S · T · Q · Q · S · S   BATALHA DAS EQUAÇÕES 09 · 06 · 17

7º

Eu achei divertido e educativo, eu achei que uma coisa boa era que não bastava achar um navio você tinha que acertar a equação. Outra parte que gostei foi ser em grupo, porque caso alguém não soubesse o que fazer, aprenderia ali, com a ajuda do grupo.

Fonte: as autoras

[1] Nome e turma dos alunos foram ocultados, para fins de preservação da imagem dos mesmos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a realização da oficina nas três turmas, o que ficou para a primeira autora deste relato, foi de grande valia na construção da sua perspectiva como docente. As várias etapas do trabalho: o planejamento de como seria a aula; a elaboração e adaptação das situações problemas do jogo; a ação docente, que trata do saber se expressar e comunicar corretamente algo no atendimento individual ou em conjunto aos alunos, junto com sua supervisora; a experiência de desenvolver o mesmo trabalho em três turmas com características e comportamentos diferentes; só acrescentaram no desenvolvimento pessoal e profissional da futura professora.

A utilização de uma tendência em Educação Matemática diferente da tradicional, também contribuiu para uma percepção de como os alunos podem entender e reagir à forma de trabalho que foi utilizada e outras que poderiam ser tentadas posteriormente. Pois quando eles são chamados a falar sobre o que acharam, expressam não só uma opinião se foi bom ou não, mas falam sobre o que trabalhar em grupo pode contribuir para sua aprendizagem, sobre como a aprendizagem pode ser dinâmica e por que não dizer, divertida. Comentários que só confirmam os resultados de pesquisas sobre o uso de jogos como estratégia de ensino e corroboram com outras tendências em Educação Matemática.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a CAPES, pela bolsa de iniciação a docência.

A professora supervisora Cristiane Rodrigues Reina Soriani, pela oportunidade e apoio na implementação da oficina.

A professora orientadora Magna Natalia Marin Pires, pelo incentivo e paciência em auxiliar a escrita deste relato.

Aos meus amigos e familiares, que me apoiaram e muito contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

FIORENTINI, D; MIORIM, M, A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM. SBM**: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

GRANDO, R. C**. O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Tese de Doutorado. Campinas, SP. Faculdade de Educação, UNICAMP, 2000.

MARCO, F. F. Jogo no ensino de matemática: uma visão de futuros professores. **FAMAT em Revista (UFU)**, v. 1, n. 6, p. 197-207, 2006.

Projeções da Cesta de Sierpinski

Weberty Domingos Silva*
Túlio Oliveira de Carvalho†
Departamento de Matemática, UEL, Londrina, PR

28 de Janeiro de 2018

Resumo

Resumo Neste trabalho apresentamos os avanços que aconteceram no estudo da conjectura de Furstenberg onde são feitas suposições sobre a dimensão de Hausdorff de uma certa classe de conjuntos que é a projeção de um conjunto de Cantor do plano Mais especificamente, apresentamos algumas suposições que já foram feitas e deonstradas sobre o problema que permenecia aberto desde 1954, mas foram apresentados avanços no seu estudo até que, aparentemente foi resolvido em 2014.
Palavras-chave. Conjuntos de Cantor regulares, Projeções, Medida, Dimensão.

1 Introdução

Conjuntos de Cantor regulares são fundamentais nos estudos de sistemas dinâmicos e também aparecem em notáveis problemas de teoria dos números. Eles podem ser definidos por funções expansoras e possuem uma certa autosimilaridade (pequenas partes do conjunto são difeomorfas a partes maiores com distorção uniformemente limitada). Nesse trabalho pretendemos trabalhar com as projeções de um conjunto de Cantor regular problema, como dito proposto por Furstenberg com base, principalmente nos resultados de Marstrand a seguir, apresentamos o conjunto, suas projeções e alguns resultados que foram obtidos.

*w.domingos@hotmail.com
†tcarvalho@uel.br

Considere:

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} : \alpha_i \in \{(0,0),(1,0),(0,1)\} \right\}$$

O conjunto S recebe o nome de cesta de Sierpinski unidimensional dadas algumas de suas propriedades.

Note que S é um conjunto de Cantor regular.

Além disso, S pode ser escrito como

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathcal{C}^2 : x + y \in \mathcal{C} \right\}$$

Onde $\mathcal{C}$ denota o conjunto de Cantor dos terços médios com intervalo inicial $(0, \frac{1}{2})$ este, por sua vez também pode ser visto como sendo o seguinte conjunto.

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} : \alpha_i \in \{0,1\} \right\}$$

Com mais algumas observações sobre S, podemos concluir que S é invariante ao seguinte conjunto de funções:

- $f_1(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$
- $f_2(x,y) = \left(\frac{x+1}{3}, \frac{y}{3}\right)$
- $f_3(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y+1}{3}\right)$

Sendo ainda atrator para estas funções no $\mathbb{R}^2$.

Para concluir que a dimensão de Hausdorff do conjunto S é 1, usaremos o seguinte resultado provado por Falconer:

Teorema 1 (Falconer). *Seja A um conjunto auto-similar, f_i, $\quad 1 \leq i \leq m$ similaridades de comprimento c_i. Se as f_i satisfazem a condição do conjunto aberto e A é tal que*

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A)$$

Então a dimensão de Hausdorff (dim_H) e a dimensão de Minkowski ou contagem de caixas (dim_B) de A são finitas e iguais a um certo s que satisfaz

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$$

Vejamos agora o que, mais especificamente, temos que mostrar para poder aplicar o resultado.

Temos que S é fortemente invariante com relação às f_i.

Claramente, S é invariante com relação a f_1 uma vez que $f_1(S) \subset S$.

Mostraremos que S é invariante com relação a f_2 e o caso f_3 é feito de forma análoga. temos que:

$$(x,y) \in S \to (x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} \quad \text{com} \quad \alpha_i \in \{(0,0);(1,0);(0,1)\}$$

Assim

$$(\frac{x+1}{3}, \frac{y}{3}) = (\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3})$$

Que podemos escrever como

$$(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}) + (\frac{1}{3}, 0) = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{i-1} 3^{-i} + (\frac{1}{3}, 0)$$

Considerando

$$\beta_i = \alpha_{i-1},\ i \geq 2,\ \beta_1 = (1,0)$$

Temos que

$$f_2(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 3^{-i} \in S.$$

Não é muito complicado verificar que S é fortemente invariante, uma vez que se $(x,y) \in S$

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}$$

Se $\alpha_1 = (0,0)$ então $(x,y) \in f_1(S)$. Se $\alpha_1 = (1,0)$ então $(x,y) \in f_2(S)$ e caso contrário $(x,y) \in f_3(S)$.

Como S é fortemente invariante com relação às f_i, temos que S é auto-similar (basta tomar as $f_i(S)$ como sendo as cópias).

Definição 1 (Condição do conjunto aberto). *Dizemos que as funções (contrações) f_i satisfazem a condição do conjunto aberto se existe um conjunto aberto, não-vazio V tal que:*

$$\bigcup_{i=1}^{m} f_i(V) \subset V \quad \textit{com} \quad f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset, \ \textit{para } i \neq j$$

é facil verificar que as f_i dadas satisfazem a condição do conjunto aberto.

Verifiquemos agora que, de fato, as f_i são similaridades.

Definição 2 (Similaridade)**.** *Dizemos que uma função f é uma similaridade se*

$|f(x) - f(y)| = c|x - y|$ *para algum c com $0 < c < 1$ c é chamado de comprimento.*

É facil ver que as f_i são similaridades e que ambas tem comprimento $\frac{1}{3}$.

Com isso, podemos aplicar o teorema (Falconer), e concluir que $dim_H(S) = 1$ uma vez que $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} = 1$.

O teorema de Marstrand garante que a projeção de um conjunto com dimensão 1 no $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 1 para quase todas as direções.

Foi conjecturado por Furstenberg que a dimensão das projeções seria 1 em todas as direções irracionais, deixando o problema em aberto.

Uma vez definido o conjunto S, definimos S_u como sendo a projeção de S na direção $(1, u)$.

$$S_u = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i} : \alpha_i \in \{0, 1, u\} \right\}$$

Para quais valores de u temos que $dim_H(S_u) = 1$? será que a afirmação é válida para todo irracional u?

Trablhemos agora com S_u pra ver o que se pode dizer sobre estes conjuntos.

Com algumas observações sobre S_u, podemos ver que $S_u = \pi_u(S)$ e, uma vez que as projeções são contínuas, temos que S_u conserva as propriedades topológicas de S. Além disso,

S_u é atrator para as seguintes funções:

- $g_1(x) = \frac{x}{3}$
- $g_2(x) = \frac{x+1}{3}$
- $g_3(x) = \frac{x+u}{3}$

Para o estudo do problema, inicialmente consideremos os conjuntos em que u é racional e, procuremos verificar o que acontece, partido da medida de S_u.

Os trabalhos de Kenyon provam algumas propriedades de S_u, em especial para u racional, inclusive, sendo este o primeiro exemplo não trivial de um conjunto dinâmicamente definido o qual podemos calcular explicitamente a medida de suas projeções.

Iniciemos com a medida de S_u. (μ denota a medida de Lebesgue)

Seguem alguns resultados:

Lema 1. *Se $\mu(S_u) > 0$, então S_u contém intervalo.*

Lema 2. *Se S_u contém intervalo então u é racional.*

Lema 3. *Se $u = \frac{p}{q}$ em termos irredutíveis com $p + q \equiv 0(mod 3)$ então $\mu(S_u) = \frac{1}{q}$*

Lema 4. *Se $u = \frac{p}{q}$ com $p + q \not\equiv 0(mod 3)$ então $\varphi(u) < 1$ onde $\varphi(u) = dim_H(S_u)$*

Assim, se $\mu(S_u) > 0$ então $\varphi(u) = 1$ uma vez que S_u contém intervalo. Com isso temos o seguinte teorema:

Teorema 2. *$\mu(S_u) > 0$ se $u = \frac{p}{q}$, em termos irredutíveis com $p + q \equiv 0(mod 3)$. Caso $p + q \not\equiv 0(mod 3)$ então $\varphi(u) < 1$*

No sentido de encontrar a dimensão de S_u em direções racionais definimos

$$S_u^k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 3^{-i} \quad | \alpha_i \in \{0, 1, u\} \right\}$$

asim, temos o seguinte teorema.

Teorema 3. *Seja $u = \frac{p}{q}$ então $\lim_{k\to\infty} S_u^{\frac{1}{k}}$ é o autovalor de Perron para uma matriz não negativa com entradas inteiras.*

De onde tiramos que

Corolário 1. *Para $u \in \mathbb{Q}$ temos que $\varphi(u) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} log_3 |S_u^k|$*

Pode-se verificar que este número existe e é a dimensão de Minkowski (contagem de caixas) de S_u, mas, usando um resultado de K. Falconer temos que vale a igualdade das dimensões de Hausdorff e Minkowski.

Keane e Smorodinsky mostraram que $\varphi(3) = \log_3 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Peres generalizou o resultado, garantindo o mesmo valor para $\varphi(3^n)$, com $n \geq 1$

Para $u = \frac{p}{q}$ podemos estabelecer uma limitação similar a essa:

Teorema 4. *Se $u = \frac{p}{q}$, $0 < p < q$, $3 \not| q$ e $k > 0$ então existe uma limitação superior para $\varphi(3^k u) < f_{p,q} < 1$ independente de k. Se $k > 2\log_3(2q)$ então:*

$$\varphi(\frac{3^k p}{q}) < 1 - \frac{1}{16pq\log(2q)}$$

Referências

[1] C. G. T. A. Moreira and J.C. Yoccoz, Stable Intersections of Regular Cantor Sets with Large Hausdorff Dimensions, Ann. Math., **154**, (2001), pp. 45-96.

[2] F. E. B. Martinez, C. G. T. A. Moreira, N. C. Saldanha e E. Tengan, Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.Completar

[3] K. Falconer, Fractal Geometry,

[4] P. Mattila, Fourier analysis and Hausdorff dimension,

[5] R. Kenyon, Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket, Israel J. Math., **97** (1997), 221-238

Tipos de instrumentos de avaliação da aprendizagem escolar: um inventário

OLIVEIRA, Júlia Rodrigues; SANTOS, Caio Luiz Escobar dos; GIBELLATO, Rafael Batista;
BURIASCO, Regina Luzia Corio de.

RESUMO

Este estudo faz parte da pesquisa "Análise da produção escrita como estratégia para aprendizagem na formação inicial de professores de matemática", em desenvolvimento no GEPEMA - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação coordenado pela Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco e, teve como objetivo identificar e Inventariar instrumentos de avaliação da aprendizagem escolar, presentes em materiais impressos da Especialização em Avaliação a Distância da Universidade de Brasília da Cátedra Unesco (1997), e em periódicos das áreas de Ensino e Educação com Qualis A1, A2, B1, B2, B3, B4, B5 e C nos últimos dez anos. Com uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo foi produzido o inventário pretendido.

PALAVRAS-CHAVE: Avaliação. Instrumentos de avaliação. Avaliação da aprendizagem.

INTRODUÇÃO

Um dos temas abordados nos trabalhos desenvolvidos no GEPEMA nos últimos anos diz respeito à avaliação da aprendizagem escolar, em especial, à avaliação como oportunidade de aprendizagem na perspectiva da prática de investigação. Nessa direção tem-se utilizado a prova escrita em fases como ferramenta de investigação que possibilita obter informações a respeito do processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Ampliando os estudos, pretende-se investigar potencialidades de outros instrumentos para a avaliação e, para isso, uma primeira etapa é o inventário aqui realizado.

Para a produção deste trabalho foram identificados conteúdos relacionados à avaliação escolar em materiais impressos da Especialização em Avaliação a Distância da Universidade de Brasília da Cátedra Unesco (1997) e, artigos publicados nos periódicos das áreas de Ensino e Educação com Qualis A1, A2, B1, B2, B3, B4, B5 e C dos últimos dez anos. A partir desses artigos foi elaborado o inventário apresentado em um quadro contendo os fragmentos que continham alguma referência a instrumento de avaliação.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A iniciação cientifica apresentada neste trabalho foi desenvolvida para atender ao projeto: ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA COMO ESTRATÉGIA PARA APRENDIZAGEM NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA e suas etapas foram:

Etapa 1 - Identificação dos periódicos das áreas de Ensino e Educação com Qualis A1, A2, B1, B2, B3, B4, B5 e C. Nesta etapa utilizamos a Plataforma Sucupira como referência para identificarmos os periódicos com os Qualis avaliados pela Capes em 2014 e a partir dessa referência encontramos as seguintes revistas: Anped – RBE, BOLEMA, Ciência e Educação, Ensaio, Educação & Realidade, Educar em Revista, Interface – Comunicação; Saúde; Educação, Pro –Posições, Cadernos de Educação, Imagens da Educação, Experiências em Ensino de Ciências, Nuances, Perspectivas na Educação Matemática, Quadrante, Renote, Cadernos da Pedagogia, Conjectura, Dialogia, Educação (Rio Claro. Online), Linhas Críticas (UNB), Revista de Produção Discente em Educação Matemática, Revista Educação (PUCRS. Online), Revista Paranaense de Educação Matemática, Saberes em Perspectiva, VIDYA, Ciência Cuidado & Saúde, Revistaleph, Educação em Revista (Unesp. Marília), Educere ET Educare, Em Questão, Espaço Pedagógico, Informática na Educação, Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, Meta: Avaliação, Nuances, Revista Educativa, Instrumento - Revista de Estudo e Pesquisa em Educação, Interfaces da Educação, Perspectiva da Educação Matemática, Zero-A-Seis, REVEMAT (Revista Eletrônica de Educação Matemática) e Cadernos de Pesquisa.

Etapa 2 - Montagem de quadro explicativo. Nesta etapa pesquisamos e baixamos os arquivos das revistas selecionadas que tinham em seus títulos ou palavras-chave os termos: avaliação ou instrumentos de avaliação. Arquivos estes organizados em forma de um quadro apresentando Qualis, ano, revista, autor, palavras-chaves, link, título, edição, contudo nessa fase não houve refinamento acerca dos objetivos buscados, apenas uma primeira seleção de artigos.

Etapa 3- Identificação de artigos que continham alguma menção a algum instrumento de avaliação da aprendizagem escolar em cada número dos periódicos já listados na primeira fase. A partir do quadro montado na etapa 2, conseguimos filtrar os artigos que referenciassem apenas Instrumento de avaliação no título ou nas palavras-chave.

Etapa 4- Montagem de quadro contendo as referências dos artigos.

Etapa 5- Identificação e compilação das informações a respeito de instrumentos de avaliação da aprendizagem escolar nos artigos listados. Nesta etapa, os artigos organizados no segundo quadro foram lidos e todos os parágrafos que apresentaram o termo instrumento de avaliação foram recortados.

Etapa 6- Montagem de quadro contendo as informações encontradas nos artigos. Com as informações recortadas foi montado um novo quadro, apresentando o título da revista e os parágrafos completos.

Etapa 7- Elaboração de um inventário que expressa caraterísticas dos diferentes instrumentos identificados na fase.

Etapa 8- Elaboração do inventário contendo as informações dos diferentes instrumentos identificados.

CONCLUSÃO

Ao seguirmos as etapas para a construção do inventário, foi nos surpreendendo a pequena quantia de artigos cujo objeto de pesquisa tenha sido algum instrumento de avaliação, considerando que selecionamos os periódicos dos últimos dez anos em oito Qualis diferentes mais os materiais da Cátedra Unesco. E à medida que líamos os artigos mais notávamos que neles eram mostradas situações cujo trabalho utilizou algum instrumento, mas em poucos era de fato estudado o próprio instrumento.

Com a leitura dos artigos foi então elaborado o inventário, parte dele apresentado a seguir, para atender às pesquisas desenvolvidas pelos participantes do GEPEMA e para compor o banco de informações do grupo, uma vez que as encontradas estão agora organizadas, com trechos recortados e com a apresentação da rota de acesso ao artigo completo.

QUALIS DA REVISTA / MATERIAL CÁTEDRA UNESCO	REFERÊNCIAS	RECORTES
A1	BONA, Aline Silva de, BASSO, Marcos Vinicius de Azevedo. Portfólio de Matemática: um instrumento de análise do processo de aprendizagem. **BOLEMA** (Rio Claro), Rio Claro SP, v. 27, n. 46, p. 339 -416, Ago 2013.	[...] instrumento de avaliação denominado Portfólio de Matemática. Esse instrumento é mais um espaço no qual o estudante pode demonstrar o que aprendeu de Matemática, por suas estratégias nesse período de tempo, permitindo entender que a avaliação faz parte do ser humano, e os erros são parte do processo.
		O modelo de avaliação desse instrumento decorre de uma avaliação qualitativa baseada em categorias e indicadores metacognitivos, cognitivos e afetivos [...].
		A definição de Portfólio, enfim, de acordo com a proposta deste trabalho e base teórica, é um instrumento de avaliação reflexiva que evidencia os processos cognitivos dos estudantes, e, direta e/ou indiretamente, as estratégias de aprendizagem dos mesmos.
A1	TREVISAN, André Luis; AMARAL, Roseli Gall do. A Taxionomia revisada de Bloom aplicada à avaliação: um estudo de provas escritas de Matemática. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 451-464, jun. 2016.	[...] na elaboração de provas como instrumentos que aproximam a avaliação de uma prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, que orientasse a construção de objetivos a serem alcançados de forma sucessiva.
A2	SOUZA, Nadia Aparecida de; BORUCHOVITCH, Evely. Mapa conceitual: seu potencial como instrumento avaliativo. **Pro-Posições**, Campinas, v.	Os instrumentos avaliativos são numerosos, e as possibilidades de utilização que oferecem variam conforme seus propósitos e suas características. O mapa conceitual é apenas uma das alternativas para a promoção de uma avaliação mais

	21, n. 3, p. 173-192, Dec. 2010.	comprometida com a aprendizagem e o desenvolvimento do educando[...].
B1	MENDES, Marcele Tavares; TREVISAN, André Luis.; SOUZA, Thamires da Silva. Observação do Trabalho em Grupo como Instrumento de Avaliação da Aprendizagem em Aulas de Matemática. **Perspectivas na Educação Matemática**, v.9, n.20. 2016.	O professor, ao observar o trabalho em grupo de seus alunos, pode gerar informações que servirão para subsidiar decisões relativas aos processos de ensino e de aprendizagem. Sob esse ponto de vista, a observação do trabalho em grupos configura um instrumento de avaliação. Observações, mesmo que sejam meras impressões capturadas pelo professor durante uma aula, podem fornecer um quadro bastante completo do processo de aprendizagem (TER HEEGE, 1978 apud VAN DEN HEUVEL PANHUIZEN, 1996).
B2	CARDOSO, Marcélia Amorin; GOMES, Maria da Conceição Silva. O PROCESSO DE AVALIAÇÃO E A PRÁTICA EDUCATIVA EMANCIPATÓRIA: UM ESTUDO SOBRE A PROVA COMO INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO ESCOLAR. **Cadernos da Pedagogia**. São Carlos, ano 9 v.9 n.18, p. 26-42, jan/jun 2016.	A prova escrita como instrumento de avaliação ainda é motivo de discussão e pesquisa. Em muitas escolas, a prova escrita ainda é usada como o único instrumento de avaliação, tornando esse aspecto didático-pedagógico, uma ferramenta social para julgar, classificar e excluir o aluno, e não como um dos componentes do processo de ensino aprendizagem.
		A prova escrita pode ser utilizada como instrumento de aprendizagem. Os erros ao serem considerados caminhos do pensamento devem ser transformados em conhecimentos, possibilitando mudanças, tanto no ensino como no processo de aprendizagem, além de promover a constituição de subjetividades e da cidadania através da apropriação do saber construído historicamente pela humanidade em diálogo com as próprias leituras de mundo.
B3	SANTO, Eniel Espírito. LUZ, Luiz Carlos Sacramento da Luz. Avaliação das Aprendizagens no Nível Superior: Avaliar Para Quê? **Dialogia** (São Paulo), n. 16, p. 149-152, 2012.	Portanto, o educador precisa estabelecer critérios que garantam e norteiem o desenvolvimento das competências desejadas ao longo do período letivo. Todavia, a falha na escolha da metodologia ou dos instrumentos de avaliação apropriados resulta num retorno deficiente e com poucos subsídios para a reflexão da eficácia do processo de ensino e aprendizagem.
		Finalmente, a avaliação somativa, normalmente aplicada ao término de uma unidade de ensino, possibilita verificar se os objetivos estabelecidos foram alcançados. Trata-se de um balanço final somatório dos vários instrumentos utilizados no transcorrer do processo, buscando conferir aprovação ou certificação de acordo com os resultados alcançados.
		Todavia, a existência de turmas com elevado número de alunos e o pouco tempo disponível pelos docentes para correções tornam praticamente inexequíveis a utilização de ampla variedade de instrumentos de coleta de dados para a avaliação.

		Nessa perspectiva, o processo avaliativo não deve pautar-se apenas num único instrumento de coleta de dados, recomendando-se ao docente o uso de uma ampla variedade de instrumentos que permita investigar se as estratégias planejadas são coerentes e, acima de tudo, exitosas.
B3	COMIS, Daniela. A função social da escola e da avaliação da aprendizagem. **Dialogia** (São Paulo), v. 5, p. 136, 2006.	A avaliação será um instrumento que auxiliará o professor a identificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, de modo que trace objetivos para que eles possam superá-las.
B3	BOUFLEUER, Jose Pedro. PRESTES, Rosane Mürmann. A escola que avalia e que é avaliada: o papel da escola na construção de um mundo humano comum. **Revista Educação** (Porto Alegre), v. 36, n. 2, p. 245, 2013.	A avaliação, como mediação, não está no final do processo, mas na constante observação do professor no decorrer da caminhada dos alunos, seus avanços, suas dificuldades. Refletindo, ambos buscam o aprimoramento. Essa prática assume um caráter processual, não se encerrando com a aplicação de algum instrumento avaliativo, ou seja, trata-se de uma avaliação que é contínua.
		O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) teve sua primeira aplicação em 1980. Tem como objetivo informar, através dos resultados obtidos com as provas, como está acontecendo o processo educativo e as condições em que ele é desenvolvido. Os instrumentos avaliativos são aplicados aos alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio, nas disciplinas de Língua Portuguesa e de Matemática.
		Tanto o SAEB, a Prova Brasil, como as demais avaliações externas foram criados com o objetivo de universalizar o ensino e são importantes instrumentos de avaliação educacional.
B3	REYS, José Aravena. SANTOS, Núbia Schaper. O portfólio como instrumento de avaliação a partir de uma experiência em um curso a distância. **Instrumento – Revista em Estudo e Pesquisa em Educação** (Juiz de Fora), v. 13, n. 2, p. 46, 2011.	Os trabalhos de conclusão de curso baseados no instrumento do portfólio têm nos mostrado que a experiência é promissora, principalmente se considerarmos a ideia de que é impossível desarticular teoria/prática.
B3	TREVISAN, André Luis. MENDES, Marcele Tavares. SOUZA, Thamires da Silva. Quando a Avaliação Torna-se uma Ação de Investigação e Intervenção: produções	No presente artigo, analisamos a produção escrita de três estudantes na resolução de uma das questões da prova. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo, na qual almejamos compreender os procedimentos e estratégias de resolução desses estudantes, bem como as potencialidades desse instrumento frente

	matemáticas de estudantes do 7º ano em uma prova em fases. **REVISTA PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** (Campo Mourão), v. 4, n. 6, p. 104-115, 2015.	a uma perspectiva de avaliação enquanto ação de investigação e de intervenção.
		Um exemplo de instrumento de avaliação presente em trabalhos recentes desenvolvidos no Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação GEPEMA é a prova em fases.
		Tal análise foi desenvolvida à luz da Análise de Conteúdo (BARDIN, 1977) e teve por objetivo investigar a resolução das questões em cada fase da prova frente ao instrumento prova em fases em uma prática avaliativa considerada uma ação de intervenção e investigação.
		Nesse contexto em que se busca fazer da prática avaliativa um ato de investigação e de intervenção, como também tornar o estudante cada vez mais autônomo sobre seus processos de aprendizagem, torna-se necessário sempre refletir e discutir sobre a potencialidade dos instrumentos de avaliação. A prova em fases tem se mostrado como um instrumento que pode atender a esses propósitos.
B4	MERINO, Maria de Fátima Garcia Lopes. HIGARASHI, Ieda Harumi. CARVALHO, Maria Dalva Barros. PELLOSO, Sandra Marisa. Instrumentos e Técnicas Avaliativas de Estudantes de Enfermagem. **Ciência, Cuidado & Saúde** (Maringá), v. 5, n. 2, p. 147-150, 2006.	Assim, é preciso que deixemos para trás a velha concepção de avaliação entendida como o mero ato de aplicar provas, testes, exercícios ou trabalhos, para a consolidação de uma nova e ampliada compreensão deste processo, entendendo-o enquanto instrumento para análise do fenômeno da aprendizagem aplicado de forma contínua e sistematizada, o qual implica em responsabilidades tanto do professor quanto do aluno.
		Não se deve pensar avaliação como algo que atenda somente às necessidades burocráticas da instituição de ensino, mas como um instrumento capaz de proporcionar a tomada de decisões, de direcionar questionamentos e de promover uma melhoria nos programas de ensino.
		Ainda para esse autor, os instrumentos utilizados na avaliação têm “o objetivo de obter dados de medida que formarão um conjunto ao qual será atribuído o juízo de valor” e devem ser dotados de “neutralidade” (dentro do possível), não sendo possível seu julgamento de forma subjetiva e individualizada.
		Um instrumento será adequado quando permitir que tanto o professor quanto o aluno reflitam sobre o processo, de forma individual ou em grupo.
		Os meios ou instrumentos que não sejam adequados não podem trazer decisões sobre a aprendizagem.
		O objetivo dos instrumentos utilizados para a avaliação dos alunos é detectar quanto estes alunos conseguiram caminhar no processo para

		atingir os objetivos esperados, baseando-se no referencial teórico proposto.
MATERIAL CÁTEDRA UNESCO	HURTADO, Sylvia. NAVIA, Christine N. SOUZA, Clarilza Prado de. **Acompanhamento e avaliação de alunos.** vol. 4; organização de Eda C. B. Machado de Souza, Brasília: Universidade de Brasília, p. 10-39, 1997.	[...] existem as avaliações de portfólio, onde são arquivados registros do trabalho escolar e do desempenho do aluno e que são revistos anualmente com o estudante.
		A avaliação é empreendimento científico orientado para aperfeiçoar, subsidiar o processo de tomada de decisões que visem garantir a equidade e a eficácia do ensino.
MATERIAL CÁTEDRA UNESCO	**MAPAS – Curso de Especialização em Avaliação a Distância**. Brasília: UnB, 1997.	Os instrumentos de avaliação são utilizados para a coleta de informações que subsidiam as decisões avaliativas. Neste sentido, a construção de instrumentos deverá ser bastante cuidadosa, de modo que possam coletar com precisão as informações que realmente se deseja obter.
		Os procedimentos básicos adotados para elaboração de instrumentos de avaliação são: ➢ Levantamento dos objetivos a serem avaliados; ➢ Definição das variáveis de avaliação; ➢ Identificação do tipo de instrumento a ser elaborado, de acordo com a variável de mensuração; ➢ Estabelecimento dos critérios de avaliação (atribuição de valores às respostas); ➢ Elaboração dos itens, aspectos ou questões que deverão compor o instrumento; ➢ Controle de qualidade preliminar do instrumento, junto a especialistas de avaliação e de conteúdo e, se possível, junto à clientela a qual será aplicado; ➢ Montagem final do instrumento.
		A seleção do tipo de instrumento de avaliação depende da natureza do objeto que vai ser avaliado.
		São muitos os instrumentos de avaliação existentes, como os testes, questionários, registros anedóticos, listas de verificação, questionários-escalas, roteiros de observação, roteiros de entrevista, escalas de atitudes que podem ser utilizados para as mais diferentes situações avaliativas.
		... no processo avaliativo, para que se obtenha informações úteis, é necessário que se disponha de instrumentos de coleta válidos, precisos e objetivos. Dentre as características apresentadas a mais importante é a validade do instrumento, para que na sua aplicação sejam obtidas as informações que se deseja obter.
		Para garantir a validade dos instrumentos, o teste de aprendizagem foi submetido a um especialista

		de avaliação e aos professores das disciplinas para ser verificada a adequação da construção do instrumento e dos conteúdos cobrados.
MATERIAL CÁTEDRA UNESCO	**Curso de Especialização em Avaliação a Distância, Mapas de Informação**. Organizado por Eda C.B. Machado de Sousa, Universidade de Brasília, 1997.	Portfólio é um instrumento que compreende a compilação de todos os trabalhos realizados pelos estudantes, durante um curso ou disciplina. Inclui entre outros elementos: registro de visitas, resumos de textos, projetos e relatórios de pesquisa, anotações de experiências etc. Inclui também ensaios auto-reflexivos, que permitem aos alunos a discussão de como a experiência no curso ou disciplina mudou sua vida.
		Usos do Portfólio: ➢ Demonstração, pelo estudante, de habilidades específicas, competências e valores. ➢ Possibilidade do aluno refletir sobre seu próprio aprendizado e avalia-lo. ➢ Explicação, pelo estudante, da natureza do trabalho e que tipo de desenvolvimento esta tarefa possibilitou. ➢ Fornecimento de retro-informação (“feedback”) para os estudantes, pelo professor ou comitê que avaliou o portfólio.
		Vantagens do portfólio: ➢ Obtenção de informações sobre a qualidade acadêmica, construção e eficácia do material relacionado à carreira escolhida pelo estudante. ➢ O corpo docente que analisa o portfólio geralmente faz uma apreciação melhorada da experiência acadêmica do aluno, pois várias disciplinas estão envolvidas. ➢ Oportunidade de aprendizagem para o corpo docente, pois está diretamente ligado à melhoria programática. ➢ Os professores melhoram sua própria habilidade de avaliar os alunos. Os alunos envolvem-se ativamente no desenvolvimento de seus portfólios pessoais. ➢ A avaliação é compartilhada com o estudante e com outros professores. ➢ Os alunos aprendem a revisar seus trabalhos de maneira organizada. ➢ Como é usado para relatar experiências e realizações, melhora a habilidade de comunicação. ➢ Os alunos aprendem a tomar posse da sua aprendizagem, ao envolverem-se ativamente na elaboração de seus portfólios pessoais. ➢ Quando avaliado também por membros da comunidade empresarial, o portfólio fornece importantes informações para os

		estudantes, por parte dos profissionais da sua área. ➢ O corpo docente obtém uma apreciação da vivência universitária, a partir da perspectiva do estudante. ➢ O corpo docente tem a oportunidade de examinar a experiência curricular como um todo, identificando os pontos que precisam ser aperfeiçoados.
		Limitações do portfólio: ➢ A avaliação de portfólio exige um tempo maior dos professores envolvidos, pois têm que analisar em conjunto os trabalhos dos alunos. ➢ Trata-se de uma abordagem inovadora, que foge aos padrões tradicionais de avaliação, onde o professor decide sozinho o destino do aluno.
		Portfolio de Ensino (também chamado de *dossier* do professor ou auto-relato do docente) é uma descrição pessoal que o docente faz de suas atividades de ensino e demais ocupações.
		Usos do Portfolio de Ensino: ➢ Avaliação somativa do desempenho docente, para embasar tomadas de decisão, para efetivação, renovação de contratos ou promoção; ➢ Avaliação formativa das atividades do professor, possibilitando a auto-análise e o aperfeiçoamento de seu desempenho.
MATERIAL CÁTEDRA UNESCO	DEY, Eric L. FRENTY, Joseph M. **Técnicas e Instrumentos de Avaliação**. Organização de Eda Coutinho Barbosa Machado de Sousa. Universidade de Brasília, vol. 1, p. 31-39, 1997.	Ressalta que, na essência, todo instrumento pode dar indícios para compreendermos e gerirmos os erros dos alunos.
		...as principais funções dos instrumentos deveriam ser: desencadear, observar e comunicar.
		Em sentido primeiro, um instrumento é um utensílio manual de trabalho que serve para agir sobre uma matéria para a trabalhar ou para a transformar.
		Que gênero de instrumento utiliza o avaliador? Quando se trata de avaliar os alunos, o instrumento, na maior parte das vezes, apresenta-se sob a forma de “temas” de exercício ou de problemas com os quais os alunos serão confrontados.
		Não há nenhum instrumento que não pertença à avaliação formativa. Certamente que qualquer instrumento que permita, por exemplo, compreender e gerir os erros dos alunos será bem-vindo.
		O instrumento de avaliação formativa mais adequado seria, neste sentido, um instrumento

		que permitisse dialogar com o aprendente enquanto este efetua a sua aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos nossa orientadora, a professora Doutora Regina Luzia Corio de Buriasco, também agradecemos ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e ao Programa de Educação Tutorial (PET) pelo apoio financeiro via bolsas de estudo, concedidas aos três alunos autores do trabalho. O GEPEMA esteve acompanhando, auxiliando e orientando a pesquisa em todas as etapas, por estes motivos nós também agradecemos ao grupo.

REFERÊNCIAS

ABDALLA, Maria de Fátima Barbosa. A pesquisa-ação como instrumento de análise e avaliação da prática docente. **Ensaio: aval.pol.públ.Educ.**, Rio de Janeiro , v. 13, n. 48, p. 383-400, Sept. 2005.

BONA, Aline Silva de, BASSO, Marcos Vinicius de Azevedo. Portfólio de Matemática: um instrumento de análise do processo de aprendizagem. **BOLEMA** (Rio Claro), Rio Claro SP, v. 27, n. 46, p. 339 -416, Ago 2013.

BONA, Aline Silva de; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Portfólio de Matemática: um instrumento de análise do processo de aprendizagem. **Renote** (Rio Grande do Sul), v.7, n.3, 2009.

BOUFLEUER, Jose Pedro. PRESTES, Rosane Mürmann. A escola que avalia e que é avaliada: o papel da escola na construção de um mundo humano comum. **Revista Educação** (Porto Alegre), v. 36. n. 2, p. 245, 2013.

CARDOSO, Marcélia Amorin; GOMES, Maria da Conceição Silva. O processo de avaliação e a prática educativa emancipatória: um estudo sobre a prova como instrumento de avaliação escolar. **Cadernos da Pedagogia** (São Carlos) ano 9 v.9 n.18, p. 26-42, jan/jun 2016.

Cátedra UNESCO. Curso de Especialização em Avaliação a Distância. Brasília: Universidade de Brasília, 1997.

CAVALCANTI NETO, Ana Lúcia Gomes; AQUINO, Josefa de Lima Fernandes. A avaliação da aprendizagem como um ato amoroso: o que o professor pratica?. **Educ. rev.**, Belo Horizonte, v. 25, n. 2, p. 223-240, Aug. 2009.

COMIS, Daniela. A função social da escola e da avaliação da aprendizagem. **Dialogia** (São Paulo), v. 5, p. 136, 2006.

CORREIA, Larissa Costa. SOUZA, Nádia Aparecida de. Portfólio na promoção da autoavaliação da aprendizagem: a educação infantil sob foco. Nuances (São Paulo), v.25, n.3.

COTTA, Rosângela Minardi Mitre; COSTA, Glauce Dias da. Instrumento de avaliação e autoavaliação do portfólio reflexivo: uma construção teórico-conceitual. **Interface (Botucatu)**, Botucatu , v. 20, n. 56, p. 171-183, Mar. 2016.

CROCHIK, José Lean.; SILVA, Pedro Fernandes da; SILVA, Lucas Bullara M. da; ALMEIDA, Rafael C.T. de; SPEDO, Lenara.; FERREIRA, Karen Danielle Magri; DIAS, Marian A.L. Análise de um formulário de avaliação de inclusão escolar. **Imagens da Educação**, v. 1, n.2, 2011.

DEY, Eric L. FRENTY, Joseph M. Técnicas e Instrumentos de Avaliação. Organização de Eda Coutinho Barbosa Machado de Sousa. **Cátedra UNESCO. Curso de Especialização em Avaliação a Distância.** Brasília: Universidade de Brasília, vol. 1, p. 31-39, 1997.

HURTADO, Sylvia. NAVIA, Christine N. SOUZA, Clarilza Prado de. Acompanhamento e avaliação de alunos. Organização de Eda C. B. Machado de Souza, **Cátedra UNESCO. Curso de Especialização em Avaliação a Distância.** Brasília: Universidade de Brasília, vol. 4, p. 10-39, 1997.

LINS, Auristela Maciel. A avaliação de intervenções sociais como potencial instrumento de construção do conhecimento. **Interface (Botucatu)**, Botucatu, v. 5, n. 8, p. 175-180, Feb. 2001.

MACHADO, Cristiane; ALAVARSE, Ocimar Munhoz. Qualidade das escolas: tensões e potencialidades das avaliações externas. **Educ. Real.**, Porto Alegre, v. 39, n. 2, p. 413-436, jun. 2014.

MAPAS – Curso de Especialização em Avaliação a Distância. **Cátedra UNESCO. Curso de Especialização em Avaliação a Distância.** Brasília: Universidade de Brasília, 1997.

MENDES, Marcele Tavares; TREVISAN, André Luis.; SOUZA, Thamires da Silva. Observação do Trabalho em Grupo como Instrumento de Avaliação da Aprendizagem em Aulas de Matemática. **Perspectivas na Educação Matemática**, v.9, n.20. 2016.

MERINO, Maria de Fátima Garcia Lopes. HIGARASHI, Ieda Harumi. CARVALHO, Maria Dalva Barros. PELLOSO, Sandra Marisa. Instrumentos e Técnicas Avaliativas de Estudantes de Enfermagem. **Ciência, Cuidado & Saúde** (Maringá), v. 5, n. 2, p. 147-150, 2006.

MONDONI, Maria Helena de Assis.; LOPES, Celi Espasandin. O Processo da Avaliação no Ensino e na Aprendizagem de Matemática. **BOLEMA** (Rio Claro), Rio Claro, SP, v.22, n.33, p. 199-204, 2009.

MOREIRA, Rozemeiry dos Santos Marques; SORDI, Mara Regina Lemes de. Avaliação externa como instrumento de gestão do sistema de ensino: a adesão e os impasses para a busca de melhoria na educação. **ANPED – RBE (Rio de Janeiro).** 27 Reunião Anual da Anped, GT05, 2004.

NASCIMENTO, Mari Clair Moro; BARBOSA, Raquel Lazzari Leite.; OLIVEIRA, Anelise Martinelli Borges de. Formação docente: contribuições da diversificação dos instrumentos avaliativos. **Comunicações** (Piracicaba), v.24 n.1, 2017.

OHAYON, Pierre et al. Iniciação científica: uma metodologia de avaliação. **Ensaio: aval.pol.públ.Educ.**, Rio de Janeiro , v. 15, n. 54, p. 127-144, Mar. 2007.

PEQUENO, Paulo André Lima; BARROSO, Natália Maria Cordeiro; SOARES, José Marques; FRANÇA, Allyson Bonetti. Uma ferramenta de apoio à análise e ao acompanhamento de práticas interativas como instrumento metodológico para o ensino de disciplinas de matemática. **Renote** (Rio Grande do Sul), v.10, n.3, 2012.

REYS, José Aravena. SANTOS, Núbia Schaper. O portfólio como instrumento de avaliação a partir de uma experiência em um curso a distância. **Instrumento – Revista em Estudo e Pesquisa em Educação** (Juiz de Fora), v. 13, n. 2, p. 46, 2011.

ROCHA, Nívea Maria Fraga. Auto-avaliação de centros de pós-graduação: uma proposta em ação. **Ensaio: aval.pol.públ.Educ.**, Rio de Janeiro , v. 14, n. 53, p. 487-506, dez. 2006.

RODRIGUES, Claudia M. Cruz; RIBEIRO, José Luiz Duarte.; CORTIMIGLIA, Marcelo; BÜNDCHEN, Cristiane. Uma Proposta de Instrumento para Avaliação da Educação a Distância. **Ensaio** (Rio de Janeiro) v.22, n. 83, p. 321-354, abr./jun. 2014.

RODRIGUES, Rodrigo Lins; RAMOS, Jorge Luis Cavalcanti; SILVA, João Carlos Sedraz.; GOMES, Alex Sandro; FONSECA, José Alexandro Viana; SOUZA, Fernando da Fonseca de. Validação de um instrumento de mensuração de autorregulação da aprendizagem em contexto brasileiro usando análise fatorial confirmatória. **Renote** (Rio Grande do Sul), v.14, n.1, 2013.

SALES, Gilvandenys Leite.; BARROSO, Giovanni Cordeiro.; SOARES, José Marques.Learning Vectors (LVs) um Instrumento Automatizado de Avaliação para Suporte a Aprendizagem em EaD. **Renote** (Rio Grande do Sul) v.6, n.2, 2008.

SANTO, Eniel Espírito. LUZ, Luiz Carlos Sacramento da Luz. Avaliação das Aprendizagens no Nível Superior: Avaliar Para Quê? **Dialogia** (São Paulo), n. 16, p. 149-152, 2012.

SOUZA, Nádia Aparecida de. Avaliando o mapa conceitual como instrumento avaliativo. **ANPED – RBE (Rio de Janeiro).** 31 Reunião Anual da Anped, GT-04: Didática, 2008.

SOUZA, Nadia Aparecida de; BORUCHOVITCH, Evely. Mapa conceitual: seu potencial como instrumento avaliativo. **Pro-Posições**, Campinas, v. 21, n. 3, p. 173-192, Dec. 2010.

TREVISAN, André Luis; AMARAL, Roseli Gall do. A Taxionomia revisada de Bloom aplicada à avaliação: um estudo de provas escritas de Matemática. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 451-464, jun. 2016.

TREVISAN, André Luis. MENDES, Marcele Tavares. SOUZA, Thamires da Silva. Quando a Avaliação Torna-se uma Ação de Investigação e Intervenção: produções matemáticas de estudantes do 7º ano em uma prova em fases. **REVISTA PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** (Campo Mourão), v. 4, n. 6, p. 104-115, 2015.

WERLANG, Rafhael Brum. Mapas conceituais esqueletos: instrumento para avaliar o processo de ensino-aprendizagem. **Experiências em Ensino de Ciências**, v.8, n.2, 2013.