

ANAIIS



Departamento de Matemática

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Londrina





Expediente

Reitoria

Profa. Dra. Berenice Quinzani Jordão
Prof. Dr. Ludoviko Carnasciali dos Santos

Pró-Reitoria de Extensão

Gilberto Hildebrando

Direção de Centro

Profa. Dra. Suely Mayumi Obara Doi
Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa
Trindade Cyrino

Chefia de Departamento

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Profa. Dra. Neuza Teramon

Coordenadoria de Colegiado

Profa. Dra. Pamela E. Alves Ferreira
Prof. Dr. Ricardo Cezar Ferreira

Direção da Gráfica UEL

Profa. Dra. Cristianne Cordeiro Nascimento

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S471a Semana da Matemática UEL 2016 (31. : 2016: Londrina, PR)
Anais da 31ª Semana da Matemática UEL 2016 [recurso eletrônico] / comissão organizadora: Ana Lucia da Silva (coordenadora geral); Paulo Antonio Liboni Filho (organizador dos anais)...[et al.]
Londrina : UEL, 2016.
254 p.

Disponível em: www.uel.br/cce/mat

ISBN 978-85-7846-405-9

1. Matemática – Pesquisa – Ensino. 2. Divulgação Científica. 3. Congresso I. Silva, Ana Lucia da. II. Liboni Filho, Paulo Antonio. III. Universidade Estadual de Londrina. IV. Título.

CDU 51

Ficha elaborada pelo Bibliotecário Walison A. Oliveira CRB-9/1871

Todos os artigos publicados foram reproduzidos de cópias fornecidas pelos autores e o conteúdo dos artigos é de exclusiva responsabilidade dos mesmos.

REALIZAÇÃO

Departamento de Matemática
Centro de Ciências Exatas



31ª Semana da Matemática

Londrina - PR

Outubro

2016

Comissão Organizadora

Profa. Dra. Ana Lucia da Silva (Coordenadora/UEL)

Prof. Dr. José Henrique Rodrigues (UEL)

Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho (Preparação e Revisão/UEL)

Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini (UEL)

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi (UFF)

Profa. Dra. Suely Druck (UFF)

Júlia R. Oliveira (Discente/Matemática/UEL)

Luciana Mayumi Umakoshi (Discente/PROFMAT/UEL)

Comissão Científica

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves (UEL)

Profa. Ms. Marilda Trecenti Gomes (UEL)

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires (UEL)

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti (UEL)

Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo (UEL)

Profa. Dra. Pamela E. Alves Ferreira (UEL)

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandez (UEM)

Prof. Dr. Francisco Braun (UFSCar)

Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto (UFSCar)

Fomento



Apoio



Pessoal de Apoio

Administrativo

Paulo Rogério Corso

Agência de Radiojornalismo UEL Sonora

Matheus Zampieri

Diagramação (folders e cartazes)

Letícia Fernanda Corrêa

Diretoria de Acompanhamento Administrativo

Profa. Ms. Lisiane Freitas de Freitas

Regina Mara

Samanta Vieira

Informática

Eduardo Pereira Campos

Secretaria Executiva da Semana da Matemática

Grupo PET Matemática

Tutora: Profa. Dra. Angela Marta P. das Dores Savioli

TV UEL

Soraia Barros

Nathalia Lainetti

*Dedicado a quem conhece a dor e a delícia
de ser matemático*

A Semana da Matemática

A Semana da Matemática é um evento realizado pelo Departamento de Matemática há trinta e uma edições e em todas elas tem demonstrado a importância de sua realização. Particularmente, a 31ª edição foi um evento de abrangência nacional que propiciou aos participantes o contato com a pesquisa, o ensino e a extensão tanto da UEL quanto de outras IES.

Historicamente, este evento tem envolvido diferentes públicos pertencentes aos cursos e projetos que o Departamento de Matemática possui, além de professores da Educação Básica e estudantes de cursos de áreas afins à Matemática. A Semana é capaz de aproximar o saber acadêmico do saber construído por meio de experiências advindas da sala de aula veiculados ou produzidos pelos professores que ensinam Matemática, tanto no ensino básico como no superior.

Oportunizamos esta aproximação, não somente pelo público alvo a que se destina o evento, mas, sobretudo, pelo espaço na programação onde qualquer participante pôde submeter trabalhos, na forma de minicursos, comunicações científicas ou relatos de experiência. Os resultados destas submissões se encontram nestes anais.

No campo científico temos pesquisadores que colaboraram com minicursos acessíveis, difundindo suas pesquisas junto ao público alvo, o que permitiu o entrelaçamento entre pesquisa e ensino. Este ano o evento contou com a participação de professores da Rede Pública de Educação dos estados do Paraná e de São Paulo.

A 31ª Semana da Matemática teve por objetivo promover reflexões, debates e análises sobre a formação de professores de Matemática. O evento articulou o princípio da indissociabilidade das atividades de ensino, pesquisa e extensão no fazer acadêmico, tendo em vista que o público-alvo modifica sua prática pedagógica pois, estudantes e professores constituem-se em sujeitos do ato de aprender. Ao mesmo tempo possibilitou a democratização do conhecimento, por meio de discussões, debates, palestras, minicursos e interação entre academia e escolas.

Maiores informações em <https://www.facebook.com/events/1413474552293440/>



Sumário

31a SEMANA DA MATEMÁTICA	1
Cartaz	15
Folder	16
Concurso de Logotipo	18
Logotipo Vencedor	18
Honra ao Mérito	19
Honra ao Mérito	20
Gincana Acadêmica	21
Discentes Premiados	22
ARTIGOS E RESUMOS EXPANDIDOS	23
A MONITORIA E ALGUMAS DE SUAS IMPLICAÇÕES NA DISCIPLINA DE CÁLCULO 1	24
Introdução	24
Resultados e Discussões	24
Conclusões	25
Agradecimentos	25
Referências	25
A TRANSCENDÊNCIA DA CONSTANTE DE THUE-MORSE	28
Resumo	28
Introdução	28
Agradecimentos	29
Referências	29
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS RACIONAIS	32
Introdução	32
Referências	34
APLICAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL NO CINEMA	36
Objetivo	36
Melhor fileira para assistir o filme	37
Referências	37
CINECLUBE DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - EXPLORANDO NARRATIVAS NA ESCOLA	39
Resumo	39
Planolândia: o filme	39
A coelha e o cervo	39
Homer ³	40
Romanos	40
CÔNICAS - HISTÓRICO E APLICAÇÕES NO DIA A DIA	42
Introdução	43
Elementos históricos sobre as cônicas	44
Elementos gerais	46
Curvas cônicas	48
Aplicações da Parábola	49
Aplicações da elipse	52
Aplicações da circunferência	55
Aplicações da Hipérbole	58
Referências	59
CONJUNTO DE CANTOR E DIMENSÃO DE CONTAGEM DE CAIXAS	63
Resumo	63

Introdução	63
Enumerabilidade e Medida	64
Métrica de Hamming	64
Dimensão de Contagem de Caixas	66
Dimensão de Hausdorff	67
O mapa do padeiro	69
Agradecimentos	71
Referências	71
CONJUNTOS FINITOS, INFINITOS, ENUMERÁVEIS E CONTÁVEIS	74
Resumo	74
Conjuntos e Funções	74
Indução Matemática	79
Conjuntos Finitos e Infinitos	80
Agradecimentos	88
Referências	88
DANDO VOZ AOS ALUNOS - UMA EXPERIÊNCIA COM POLIEDROS, CANUDOS E JUJUBAS	91
Resumo	91
Introdução	91
Metodologia	92
Resultados	92
Considerações Finais	92
Agradecimentos	93
Bibliografia	93
GESTÃO DE ESTOQUES - ESTUDO DE CASO EM UMA EMPRESA	96
Resumo	96
Introdução	96
Metodologia Matemática	97
Curva ABC	98
Modelo LEC	99
Base de Dados e Resultados Preliminares	100
Considerações Finais	102
Agradecimentos	103
Referências	103
IMPRESSÕES DE EGRESSOS DO CURSO DE MATEMÁTICA A RESPEITO DE MATEMÁTICA	105
Resumo	105
Introdução	105
Fundamentação Teórica	105
Procedimentos Metodológicos	106
Resultados e Discussão	106
Agradecimentos	107
Referências	107
INTRODUÇÃO ÀS PARTIÇÕES DOS NATURAIS	110
Resumo	110
Introdução	110
Partições de Inteiros Positivos	110
Funções Geradoras	110
Agradecimentos	111
Referências	111
MICROSOFT MATHEMATICS PARA ALUNOS E EDUCADORES	113
Objetivo	113
Público alvo	113

O programa Microsoft MATHEMATICS	113
O espaço de trabalho do Microsoft MATHEMATICS	114
O Microsoft MATHEMATICS	115
MODELOS GENERALIZADOS NA ANÁLISE DE DADOS DE SOBREVIVÊNCIA	118
Resumo	118
Introdução	118
Conceitos básicos em análise de sobrevivência	119
Principais modelos probabilísticos em análise de sobrevivência	122
Métodos de generalização de modelos	127
Aplicação	129
Considerações Finais	135
Referências	135
O GETOM - FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA ..	
.....	139
Resumo	139
Referências	140
O PAPEL DO PIBID MATEMÁTICA JUNTO A ALUNOS COM SÍNDROME DE DOWN	142
Resumo	142
Referências	143
O PROBLEMA DE DIRICHLET NO DISCO UNITÁRIO	146
Resumo	146
Introdução	146
Separação de Variáveis	147
Resultados	148
Conclusão	149
Agradecimentos	149
Referências	149
O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA EQUAÇÃO DE LAPLACE NO RETÂNGULO	152
Resumo	152
Introdução	152
Séries de Fourier	153
Resultados	154
Conclusão	155
Agradecimentos	155
Referências	155
OBMEP 2016 - CRIANDO OPORTUNIDADES, DISSEMINANDO MAIS TALENTOS	158
Resumo	158
Introdução	158
Metodologia	159
Considerações Finais	160
Agradecimentos	161
Referências	161
OFICINAS DE TRIGONOMETRIA ESFÉRICA	163
Resumo	163
Introdução	163
Oficinas	163
Agradecimentos	164
Referências	164
PRINCÍPIO DE INDUÇÃO	166
Introdução	166
Resultados e discussão	166

Referências	167
Agradecimentos	167
PROBLEMA DE TRANSMISSÃO DE CALOR	169
Resumo	169
Introdução	169
Separação de Variáveis	169
Resultados	170
Conclusão	172
Agradecimentos	172
Referências	172
PROFMAT NA UEL	175
Resumo	175
Introdução	175
Objetivos	176
Resultados	176
Considerações Finais	177
Agradecimentos	177
Referências	177
PROJETO DE ENSINO - ESTATÍSTICA BÁSICA COM APLICAÇÃO NO SOFTWARE R	179
Resumo	179
Introdução	179
Objetivos	180
Metodologia	180
Resultados	185
Considerações Finais	185
Referências	185
SEQUÊNCIA DE CAUCHY E OS ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS	188
Resumo	188
Introdução	188
Desenvolvimento	188
Considerações Finais	193
Agradecimentos	193
Referências	194
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DA DIFUSÃO EM SISTEMAS PPREDADOR-PRESA	196
Resumo	196
Introdução	196
Procedimentos metodológicos	197
Conclusões	202
Agradecimentos	202
Referências	202
TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO E SUAS APLICAÇÕES	204
Resumo	204
Introdução	204
Objetivos	205
Resultados	205
Aplicações	207
Considerações Finais	208
Agradecimentos	209
Referências	209
TEORIAS DE APRENDIZAGEM - SKINNER E GAGNÉ	211
Resumo	211

Agradecimentos	212
Referências	212
TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM - UMA QUESTÃO DA OBMEP	214
Resumo	214
Agradecimentos	214
Introdução	214
Elementos Teóricos	215
Apresentação da Trajetória	222
Considerações Finais	228
Referências	229
UMA TAREFA DE AVALIAÇÃO FORMATIVA NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	232
Introdução	232
Referências	233
CADERNO DE RESUMOS	235
A Criatividade Nossa de Cada Dia	236
A Equação do Calor com Condição de Neumann	237
Aplicações da Matemática ao Meio Empresarial	238
As Catástrofes de Thom	239
Assimilação Contínua de Dados para Modelos da Dinâmica de Fluidos	240
Bolas e Esferas em Espaços Métricos	241
Controlador Fuzzy de Iluminação	242
Discretização de Equações Diferenciais	243
O Número de Euler e a Função Exponencial	244
O Papel do Professor de Matemática em uma Aula na Perspectiva do Ensino Exploratório	245
O que uma Língua Glacial tem a ver com uma Aplicação Injetora?	246
Por que a Densidade dos Racionais (e dos Irracionais) no Conjunto dos Reais é uma Propriedade tão Importante para a Análise Real?	247
Princípio das Gavetas: um Exemplo de Matemática Simples e Atraente	248
OFICINAS	250
Modelagem Matemática e Temas Transversais: sugestões para a Educação Básica	251
Resolução de Problemas e Investigações Matemáticas: sugestões para a Educação Básica	252
Simetria: a história de um conceito e suas implicações no contexto escolar	253

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
APRESENTA:

31ª SEMANA
DA
MATEMÁTICA
UEL-2016



$$A+B=C$$

COMISSÃO ORGANIZADORA

Profa. Dra. Ana Lucia da Silva (Coordenadora)
Prof. Dr. José Henrique Rodrigues (UEL)
Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho (UEL)
Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini (UEL)
Prof. Dr. Humberto José Bortolossi (UFF)
Profa. Dra. Suely Druck (UFF)
Júlia R. Oliveira (discente de Matemática/UEL)
Luciana Mayumi Umakoshi (PROFMAT/UEL)



$$2+2=4$$

COMISSÃO CIENTÍFICA

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves (UEL)
Profa. Ms. Marilda Trecenti Gomes (UEL)
Profa. Dra. Magna Natália Marin Pires (UEL)
Prof. Dr. Paulo Laerte Natti (UEL)
Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo (UEL)
Profa. Dra. Pamela E. Alves Ferreira (UEL)
Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandez (UEM)
Prof. Dr. Francisco Braun (UFSCar)
Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto (UFSCar)



19 a 22 de Outubro de 2016

Londrina - Paraná

Local:

Universidade Estadual de Londrina

Mais informações:



Realização:



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Patrocínio:



Apoio:



Folder



COMISSÃO ORGANIZADORA

Profª. Dra. Ana Lucia da Silva (Coordenadora)
Prof. Dr. José Henrique Rodrigues (UEL)
Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho (UEL)
Profª. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini (UEL)
Prof. Dr. Humberto José Bortolossi (UFF)
Profª. Dra. Suely Druck (UFF)
Júlia R. Oliveira (discente de Matemática/UEL)
Luciana Mayumi Umakoshi (PROFMAT/UEL)

COMISSÃO CIENTÍFICA

Profª. Dra. Michele de Oliveira Alves (UEL)
Profª. Ms. Marilda Trecenti Gomes (UEL)
Profª. Dra. Magna Natália Marin Pires (UEL)
Prof. Dr. Paulo Laerte Natti (UEL)
Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo (UEL)
Profª. Dra. Pamela E. Alves Ferreira (UEL)
Prof. Dr. Marcelo Escudero Hernandes (UEM)
Prof. Dr. Francisco Braun (UFSCar)
Profª. Dra. Bruna Oréfice Okamoto (UFSCar)

REALIZAÇÃO



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PATROCÍNIO



APOIO



Impresso em: graf₂EE

Prof. Dr. José Henrique Rodrigues (UEL)
Prof. Dr. Marcio Antônio Jorge da Silva (UEL)
Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho (UEL)

• T24: "As Perspectivas do Profissional em Ensino da Matemática"

Profª. Dra. Karina A. Pessoa da Silva (UTFPR)
Prof. José Hermano Teixeira Jr. (Colégio MAXI)
Profª. Dra. Márcia C. da C. Trindade Cyrino (UEL)

GINCANA ACADÊMICA

• Haverá premiação. Informações no primeiro dia do evento.

SUBMISSÃO DE TRABALHOS

Deverá ser realizada junto à inscrição, até 5 de outubro.

INSCRIÇÕES

De 19 de Setembro a 19 de Outubro de 2016
As inscrições deverão ser realizadas pelo site:



Após a inscrição, será emitido um boleto que deverá ser pago em qualquer agência bancária ou Casa Lotérica.

INFORMAÇÕES:

Departamento de Matemática:

Telefones (0XX43) 3371 - 4236 ou 3371 - 4236 - 5868

e-mail: semat@uel.br

site: <http://www.uel.br/ecc/mat/portal/>



Folder

APRESENTAÇÃO

A 31ª Semana da Matemática é um evento nacional promovido pelo Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), na qual pesquisadores, professores, profissionais e estudantes se reúnem para debates, reflexões, análises de suas práticas possibilitando um efeito cíclico entre os saberes de cada um. O evento pretende articular o princípio da indissociabilidade das atividades de ensino, pesquisa e extensão no fazer acadêmico.

PROGRAMAÇÃO

Horário	Quinta (VIGILIA)	Sexta (DIDATICA)	Sábado (ZELARIO)
08:00 - 08:20	CREDECIAMENTO	POSTERS	POSTERS
08:20 - 08:50	P 11	P21	P31
08:50 - 09:20		P22	P41
09:30 - 10:00	P 12		
10:00 - 10:30	CAFÉ	CAFÉ	CAFÉ
10:30 - 11:00		P23	
11:00 - 12:00	T13		V22
14:00 - 15:00	M1	M1	P34/P35
15:00 - 16:00	M1	M1	M2
16:00 - 17:00			M2
17:00 - 18:00			CAFÉ
19:00 - 19:30	CREDECIAMENTO	POSTERS	POSTERS
19:30 - 20:30	ABERTURA	T24	P26
20:30 - 21:00	CAFÉ	CAFÉ	CAFÉ
21:00 - 22:20	P16	P25	C37

PALESTRAS

Anfiteatro PDE - (Pij com i=1,...,4 e j=1,...,6)

- **P16:** "Matemática da Licenciatura e da Escola: mão dupla em pista única."
Prof.ª. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares (UFPR)
- **P21:** "Modelos generalizados na análise de dados de sobrevivência."
Prof. MS. Tiago Viana Flor de Santana (UEL)
- **P22:** "Aplicações da Matemática ao Meio Empresarial."
Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo (UEL)

- **P23:** "Discretização de Equações Diferenciais."
Prof.ª. Dra. Neyva Maria Lopes Romairo (UEL)

- **P25:** "Pipas, fotografia, mágica e outros temas para projetos interdisciplinares."
Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol (UEM)

- **P31:** "Como ficar rico utilizando números complexos."
Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Fernandes (UEM)

- **P32:** "Princípio das gavetas: um exemplo de matemática simples e atraente."
Prof.ª. Dra. Luci Harue Fatori (UEL)

- **P36:** "Por uma Matemática para todos."
Prof.ª. Dra. Suely Druck (UFF)

- **P41:** "Problemas teóricos ou contextualizados?"
Prof.ª. Dra. Suely Druck (UFF)

Central de salas do CCE - (Pij com i = 3 e j = 4 e 5)

- **P12:** "O que uma língua glacial tem a ver com uma aplicação injetora."
Prof. Dr. Francisco Braun (UFSCAR)

- **P11:** "As Catástrofes de Thom."
Prof.ª. Dra. Bruna Oréfice Okamoto (UFSCAR)
Sala de Multimídia do CCE

- **P34:** "Assimilação contínua de dados para modelos da dinâmica de fluídos."
Prof.ª. Dra. Débora A. F. Albanex (UTFPR)
Sala 05 – Departamento de Matemática

- **P35:** "O número de Euler e a função exponencial."
Prof. Dr. Thiago P. de Andrade (UTFPR)
Sala 03 – Central de Salas do CCE

MINI-CURSO (MI)

- MI:** "Matex: uma introdução"
Prof. Dr. Ulysses Sodré (UEL)
Prof. Ms. Andriehel da Silva Oliveira (UEL)
Prof.ª. Dra. Bruna Oréfice Okamoto (UFSCAR)
Prof. Dr. Francisco Braun (UFSCAR)
Laboratório da Matemática (20 vagas)

- M2:** "A criatividade nossa de cada dia"
Prof.ª. Dra. Ana Márcia Tucci de Carvalho
Sala 03 – Central de Salas do CCE (20 vagas)

ANFITEATRO PDE SESSÃO DE COMUNICAÇÕES (Cij)

Espaço reservado para alunos apresentarem resultados de suas pesquisas e relatos de experiências em forma de comunicação oral ou painéis.

VÍDEO CLUB

- **V42:** "Videoteca: exibição e discussão de curtas metragens". Exibição de filme ou documentário com discussão.
Coord: Prof. Dr. Humberto J. Bortolossi (UFF)

OFICINAS

- **OF1:** "Simetria: a história de um conceito e suas implicações no contexto escolar."
Prof. Dr. Humberto José Bortolossi (UFF)
Prof.ª. Regina Célia Guapo Pasquini (UEL)

- **OF2:** "Resoluções de Problemas e Investigações Matemáticas: sugestões para a Educação Básica."
Prof.ª. Dra. Magna Natália Marin Pires (UEL)

- **OF3:** "Modelagem Matemática e temas transversais: sugestões para a Educação Básica."
Prof. MS. Gabriel dos Santos e Silva (UEL)

MESAS REDONDAS (T)

- T13:** "As trajetórias e as descontinuidades do profissional em Matemática."
Participantes:
Prof.ª. Dra. Ana Lucia da Silva (UEL)
Prof.ª. Dra. Bruna Oréfice Okamoto (UFSCAR)
Prof. Dr. Francisco Braun (UFSCAR)

Concurso de Logotipo

Logotipo Vencedor



Autores

Cleyton Vinicius Mendonça Lima (Discente/Matemática/UEL)

Luana Rafaela Grecco (Discente/Matemática/UEL)

Concurso de Logotipo

Honra ao Mérito



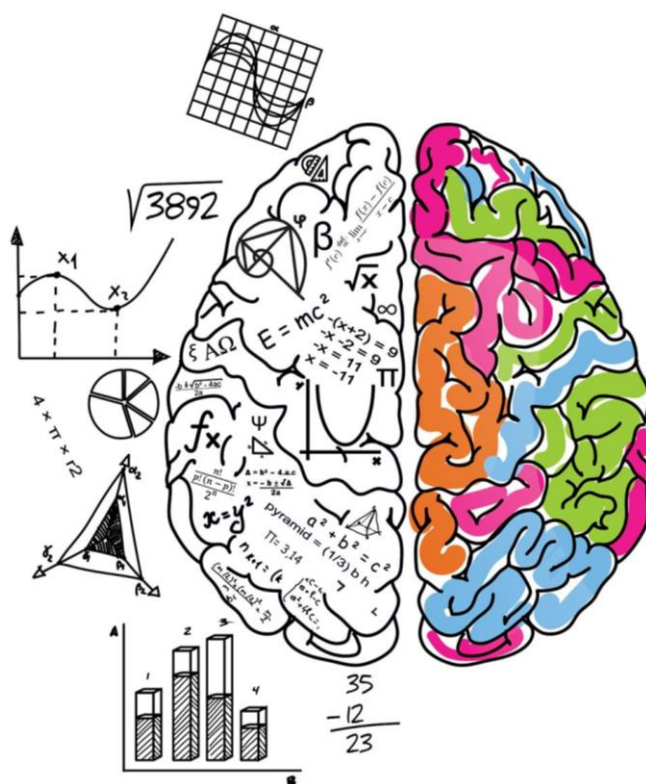
Autores

Pedro H. Takemura Feitosa da Silva (Discente/Matemática/UEL)

Caio Takemura Feitosa da Silva (Público Externo)

Concurso de Logotipo

Honra ao Mérito



XXXI SEMANA DA MATEMÁTICA

Autora

Isabella Pereira Rico (Discente/Arquitetura e Urbanismo/UEL)

Gincana Acadêmica

Primeira colocação: até 2 alunos. Segunda colocação: até 2 alunos. Terceira colocação: até 3 alunos. Prazo para entrega: até dia 20/outubro, 12h, na secretaria do evento. Todos os desafios devem ser entregues, mesmo que parcialmente.

Desafio 1. Uma função polinomial de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} é uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^k a_{ij} x^i y^j,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $a_{ij} \in \mathbb{R}$ são fixos. Vamos definir o pseudo-polígono de Newton de f por $N(f) := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : a_{ij} \neq 0\}$. Dados $w_1, w_2, d \in \mathbb{N}$, diremos que f é quase homogênea do tipo $(w_1, w_2; d)$ quando $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow w_1 i + w_2 j = d$.

(1) Prove que se f é quase homogênea do tipo $(w_1, w_2; d)$, então quaisquer que sejam $t, x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$f(t^{w_1} x, t^{w_2} y) = t^d f(x, y).$$

(2) Prove que f é quase homogênea se, e somente se, $N(f)$ está contido em uma reta em \mathbb{R}^2 .

Desafio 2. Dados a_0, a_1, \dots, a_N números reais, defina o polinômio

$$p(t) = \sum_{i=0}^N a_i (2(i+1)t + 2i+1) t^i.$$

Prove que se $p(t) \geq 0$ para todos os números reais t , então $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.

Dica: Pense por contradição. Defina $f(t) = \sum_{i=0}^N a_i t^i$ e prove que

$$p(t) = \frac{((t+t^2)f(t)^2)'}{f(t)}.$$

Daí prove que no intervalo aberto formado por dois zeros consecutivos de $g(t) = (t+t^2)f(t)^2$, a derivada de $g(t)$ necessariamente muda de sinal.

Desafio 3. Uma pessoa escrevendo a sucessão dos números naturais, começando pelo zero, interrompeu seu trabalho em um certo número. Qual é esse número se, até parar, a pessoa escreveu 7350 algarismos?

Discentes do Curso de Matemática da UEL Premiados na Gincana Acadêmica

Primeiro Lugar

João Paulo da Silva e
Sandro Bernardes Pinheiro

Segundo Lugar

Pedro Henrique Takemura Feitosa da Silva

Terceiro Lugar

Guilherme Rocha Ortega

ARTIGOS & RESUMOS EXPANDIDOS



A monitoria e algumas de suas implicações na disciplina de Cálculo 1

Luiza Camile Rosa da Silva

Orientação: Prof. Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho

Universidade Estadual de Londrina (UEL), Centro de Ciências Exatas

E-mail: luiza.camile2@hotmail.com, anatuccicarvalho@gmail.com,

20 de agosto de 2016

1 Introdução

A palavra Cálculo, segundo o Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa, tem origem latina representada pelo verbete "calculus", que quer dizer estimativa ou contagem. Já do grego, para o mesmo Dicionário, Cálculo origina da palavra "khalix" que significa "pedra pequena". Na Grécia antiga, essas pedrinhas eram responsáveis pelo sistema de contagem e elas foram consideradas como uma calculadora primitiva.

No século XVII, o matemático inglês Isaac Newton, com um problema de cálculo para fluxões, precisou a formulação do cálculo diferencial e integral que, respectivamente, atendia o problema da reta tangente e da área (Stewart, 2015). Também no mesmo século, outro contribuidor para o aprimoramento do Cálculo foi o alemão Gottfried Leibniz, que formalizou as notações usuais. Boyer (1992) explica a diferença do trabalho deles: "o trabalho de Leibniz ajustava-se mais à aritmetização da análise, ao passo que o de Newton, muitas vezes, se expressava na linguagem da geometria sintética".

O desenvolvimento deste trabalho é a respeito de uma das aplicações, a Otimização, que o Cálculo proporciona para o aproveitamento de várias disciplinas. Em Nível Superior, o foco desse assunto é relacionar vários tipos de equações e, finalmente, utilizar o Cálculo Diferencial para a resolução dessas. Nesse contexto, tem-se como objetivo analisar dois exercícios, um de cada graduando que recorreu à monitoria do Programa de Educação Tutorial (PET), para verificar a adequação ou não de suas respostas.

2 Resultados e Discussões

O PET Matemática da UEL tem como objetivo fortalecer os cursos de graduação, que se utilizam da Matemática, mostrando aos graduandos o interesse que cada

petiano tem em auxiliá-los a ter um bom rendimento nas disciplinas, como o Cálculo I, por meio da monitoria, entendida como "atividade discente de preparação para o exercício da docência" (UEL).

Com dois alunos de um curso de primeiro ano de licenciatura, estudante A e estudante C, foram ensinados em como resolver os exercícios de Otimização para seu rendimento tanto nas aulas quanto nas avaliações.

O primeiro exercício, realizado na monitoria foi: "Se 1200cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa" (STEWART,2014, p. 300). Neste exercício, ambos os estudantes seguiram um mesmo raciocínio, pois eles já haviam visto um exercício análogo a este tanto na monitoria quanto na sala de aula. Porém, como a monitoria é realizada em grupo, os estudantes conseguiam discutir suas ideias um com o outro e, como consequência, eles obtiveram alguns acertos e outros erros de formalismo matemático, como o conceito de módulo, conectivos e manipulações algébricas.

Já no segundo exercício proposto na avaliação da professora, que dizia "Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100m cuja área seja a maior possível" (STEWART,2014, p. 299), tanto o estudante A como o estudante C obtiveram resultados divergentes um do outro. O estudante A realizou um raciocínio análogo aos exercícios propostos na monitoria e, buscando corrigir seus erros durante o semestre, o exercício da avaliação estava bem realizado. O estudante C buscou outro caminho, todavia, não atingiu o objetivo final da questão, apresentando algumas falhas no conceito de perímetro e área.

Podemos justificar esses rendimentos com a seguinte inferência: atualmente, vários estudantes conseguem aprender Matemática a partir da resolução de exercícios, porém este procedimento vem contribuindo para o insucesso deles, pois os exercícios propostos em sala acabam se repetindo, o que não estimula o raciocínio. A importância da resolução leva em conta a capacidade de cada estudante gerenciar as informações que estão na área da sala de aula e do cotidiano deles, por isso, Lachini (2001, p. 78) afirma que há uma "rede de relações entre os sujeitos e destes com o conteúdo" onde cada estudante deve mostrar a relação do dia-a-dia deles com a Otimização, conteúdo em questão. Com o raciocínio sendo desenvolvido, a autoconfiança dos alunos também é estimulada, fazendo com que eles se interessem por várias resoluções. Fazer com que o aluno tenha vontade de resolver atividades, no entanto, é uma tarefa difícil, pois há carência por parte dos estudantes, em Matemática Elementar.

3 Conclusões

As considerações, aqui expostas, têm ressaltado a resolução de problemas, a fim de analisar o benefício da monitoria com o conteúdo presente em sala de aula e nas avaliações. Além disso, desenvolver a capacidade dos alunos em resolver problemas visa construir um posicionamento crítico deles em questionar o exercício, ensinando a eles também como estudar, tratando de uma turma de

primeiro ano de Cálculo I.

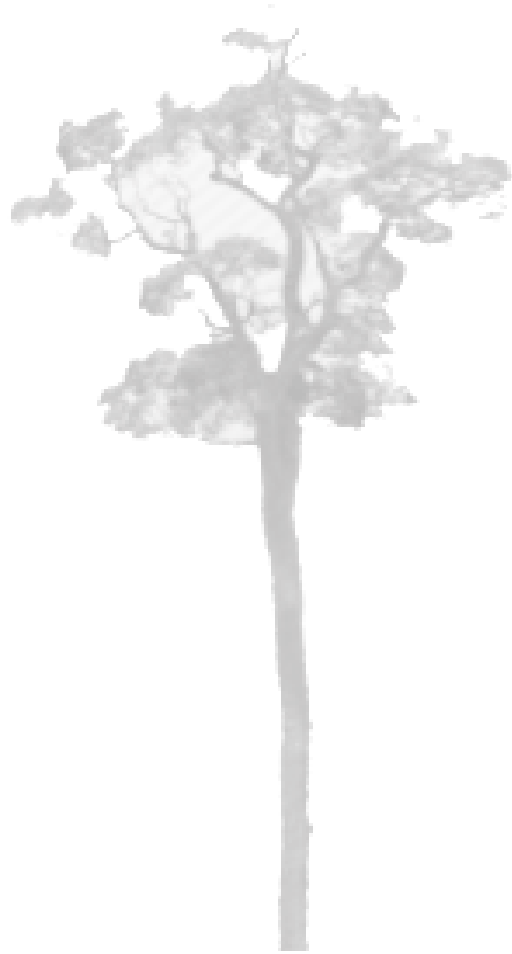
Para o jovem monitor, as experiências da monitoria acadêmica são marcas que ficarão no intelecto de quem a vivenciou. Associa o ensino e a aprendizagem contribuindo assim para a formação inicial, pois exige paciência, domínio, ótima relação entre pessoas, obrigações e responsabilidades. Com essas qualidades, o monitor obtém longos horizontes no ensino e grande perspectiva acadêmica.

4 Agradecimentos

Agradeço ao apoio financeiro do MEC-SESU através do PET.

5 Referências

1. Boyer, C. B. *História do Cálculo. Cálculo*. In: Boyer, Carl B. Cálculo. Trad Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992 (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v.6)p. 1-28
2. Lachini, J. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo. Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo/organizadores: Jonas Lachini, João Bosco Laudares.-Belo Horizonte: FUMARC, 2001.
3. Stewart, James. Cálculo, volume I, Cengage learning, 2014.
4. Universidade Estadual de Londrina. Monitoria acadêmica. Disponível em: <http://www.uel.br/col/lem/portal/pages/portal-do-aluno/monitoria-academica.php>.



A Transcendência da Constante de Thue-Morse

Weberty Domingos Silva
w.domingos@hotmail.com
Túlio Oliveira de Carvalho
tcarvalho@uel.br

Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Londrina
CP 10.011, CEP 86057-970, Londrina - PR

RESUMO

O estudo de números transcendentos é o foco deste trabalho. Liouville, em 1844, publicou o primeiro resultado caracterizando uma classe de números transcendentos: os números de Liouville. A transcendência da constante de Thue-Morse foi estabelecida por Mahler em 1929. A transcendência da fração contínua de Thue-Morse foi estabelecida em 1998 por Queffélec, e mais recentemente como consequência do Teorema de Subespaços de Schmidt.

Palavras-chave: teoria de números; transcendência; Thue-Morse.

Introdução: a Sequência de Thue-Morse

O estudo e qualificação de aproximações diofantinas e números transcendentos ainda tem vários problemas em aberto. A história da compreensão da comunidade matemática a respeito do tema é comparativamente curta, de menos que 200 anos. Neste trabalho são apresentados alguns estudos iniciais que descrevem parte da compreensão dos autores a respeito do tema.

Seja $\mathcal{A} = \{a, b\}$ um conjunto formado por dois símbolos, e \mathcal{A}^* o conjunto de palavras finitas em \mathcal{A} . Define-se um morfismo $\xi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ por $\xi(a) = ab$ e $\xi(b) = ba$, estendido por concatenação: $\xi(uv) = \xi(u)\xi(v)$, $u, v \in \mathcal{A}^*$. Em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, introduz-se a métrica produto da métrica discreta. Observe que

$$\xi(a) = ab, \quad \xi^2(a) = \xi \circ \xi(a) = abba, \quad \xi^3(a) = abbabaab \dots$$

Claramente $\xi^n(a)$ é prefixo de $\xi^{n+1}(a)$, de modo que existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi^n(a) = abbabaabbaababbabaababba \dots =: \tau$$

$\tau = (t_n)_{n \geq 0}$ é chamada *sequência de Thue-Morse*. Esta sequência não é periódica, nem pré-periódica.

Quando $a = 0$ e $b = 1$, a sequência de Thue-Morse se identifica com a expansão na base 2 de um número, chamado *constante de Thue-Morse*:

$$s_t := \sum_{n=1}^{\infty} t_n 2^{-n} = 0 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + 0 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \dots$$

A sequência de Thue-Morse também pode ser definida por $t_n =$ soma, módulo 2, dos algarismos de $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ na sua expansão binária, $t_0 = 0$, $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 0$, $t_{2n} = t_n$ e $t_{2n+1} = 1 - t_n$. Esta sequência aparece em diversos problemas, em áreas distintas da Matemática, como sistemas dinâmicos, combinatória, teoria de números, entre outros [2].

A constante de Thue-Morse

Pode-se perguntar sobre as propriedades da constante de Thue-Morse: existe um polinômio p com coeficientes inteiros tal que $p(s_t) = 0$? O valor de s_t é aproximadamente dado, na expansão decimal [5], por

$$s_t = 0.412454033640 \dots$$

E, em verdade, este número não é algébrico, e sua transcendência foi provada por Mahler em 1929 [4, 3].

Seja $F(z)$ a função geradora da sequência t_n :

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} t_n z^n .$$

Pode-se provar que F satisfaz a seguinte equação funcional: $F(z) = (1 - z)F(z^2)$. Desta relação, obtemos iterativamente

$$F(z) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (1 - z^{2^i}) \right) F(z^{2^k})$$

A prova de que F não é uma função racional, ou seja, não é uma razão de polinômios que $Q[z]$, se faz por contradição [3, 2].

A Fração Contínua de Thue-Morse

Outra abordagem que gera um número distinto, sobre o qual há trabalhos mais recentes [1] é a fração contínua de Thue-Morse. Se $a = 1$ e $b = 2$, definimos a seguinte fração contínua

$$r := [t_0, t_1, \dots] = \frac{1}{t_0 + \frac{1}{t_1 + \frac{1}{t_2 + \frac{1}{t_3 + \dots}}}}$$

Pode-se demonstrar que r também é transcendente, resultado inicialmente provado por Queffélec (veja [2], p. 394). Adamczewski e Bugeaud, numa abordagem que usa o Teorema dos Subespaços de Schmidt, no contexto de aproximações diofantinas, conseguiram uma prova mais curta [1].

O ponto central do argumento é estabelecer, analogamente ao que fez Liouville, que r pode ser bem aproximado por números algébricos. Esta é uma propriedade interessante dos números transcendentos: grosso modo, eles se aninham em torno de infinitos números algébricos de grau relativamente baixo. Seja α um número algébrico e $H(\alpha)$ a *altura* do polinômio que p minimal mônico em $Q[z]$ que anula α , ou seja, o máximo do módulo dos coeficientes de p . Mostra-se que $|r - \alpha| < H(\alpha)^{-\omega}$ para infinitos α algébricos de grau 2, com $\omega > 3$. Isto é razão suficiente para provar a transcendência de r .

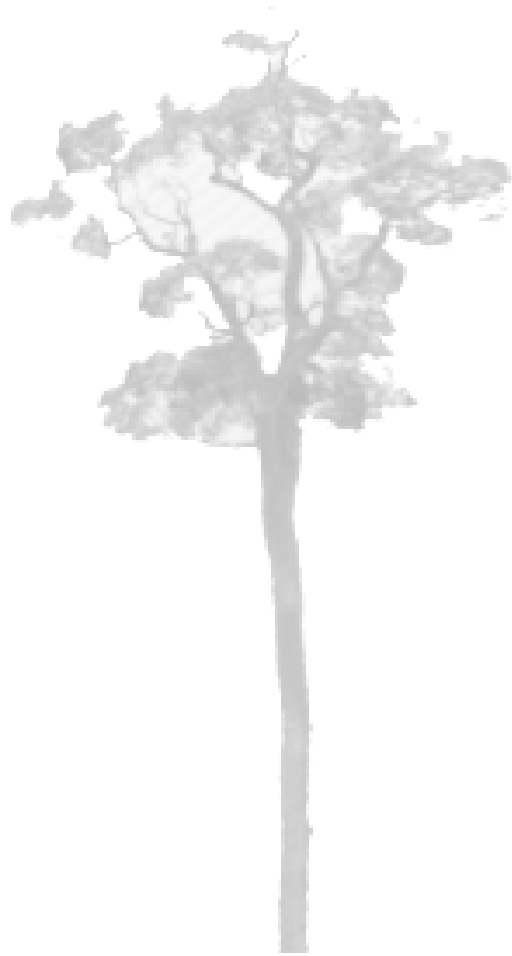
Por fim, há a alternativa de provar a desigualdade: $\max\{|r - \frac{p}{q}|, |r^2 - \frac{n}{q}|\} < \frac{1}{|q|^\omega}$. para $\omega > 3/2$ e infinitas triplas (n, p, q) de inteiros não nulos. Segue dos trabalhos de Schmidt em aproximações diofantinas que r é transcendente.

AGRADECIMENTOS

Ao Governo do Estado do Paraná, à Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, à Fundação Araucária, à CAPES, à Universidade Estadual de Londrina e ao Departamento de Matemática/UUEL. Weberty Domingos é bolsista da CAPES.

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMCZEWSKI B., BUGEAUD Y. *A Short Proof of the Transcendence of Thue-Morse Continued Fractions*, Amer. Math. Monthly, **114**, pp. 536–540, 2007.
- [2] ALLOUCHE J-P., SHALLIT J. **Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [3] NISHIOKA K., **Mahler Functions and Transcendence**, *Lect. Notes in Math.*, v. **1631**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [4] MAHLER K. **P-adic Numbers and Their Functions**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [5] HAZEWINKEL, M. (ed.) **Encyclopaedia of Mathematics**, Sup. Vol. III, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 2001.



ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS RACIONAIS

Cristiane Costa Soutier
cryscoستا03@hotmail.com

Dr^a. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
anatuccicarvalho@gmail.com

UEL - Universidade Estadual De Londrina

Introdução

Este trabalho apresenta os principais resultados da monografia de graduação, onde o objeto matemático constituiu-se pelos números racionais e o objeto didático-pedagógico fundamentou-se na metodologia da resolução de problemas. Estudamos a teoria formal sobre números racionais abordando, também, outros assuntos correlatos, tais como: números irracionais, números reais e aproximações de irracionais por racionais; além de questões de enumerabilidade e transcendência. Elaboramos e aplicamos atividades referentes aos números racionais junto a professores da rede pública de ensino dos níveis fundamental e médio da região de Foz do Iguaçu. Durante a aplicação das atividades, utilizamos a metodologia da resolução de problemas, os professores puderam rever os conceitos matemáticos relacionados ao conjunto dos números racionais e analisar a possibilidade de aplicarem esta metodologia em sala de aula.

Os números racionais são assim chamados por serem razão de números inteiros. Formalmente falando, um número é dito *racional* (ou *fração ordinária*) se puder ser colocado na forma $\frac{a}{b}$ (a sobre b) onde *a* e *b* são inteiros e *b* não é zero. (NIVEN, 1984).

Segundo CAVALCANTI (2004), a construção do conceito de número racional é permeada por diversas dificuldades. Por exemplo, quando este conteúdo é apresentado pelo modelo parte-todo, acaba fazendo com que os alunos vejam as frações como sendo dois números inteiros, um sobre o outro. Geralmente é apresentada uma figura dividida em partes iguais e com algumas partes pintadas, na qual o denominador é o número de partes em que a figura

está dividida e o numerador é o número de partes pintadas, isto dificulta a construção de um conceito significativo para estes números.

Pretendendo investigar estas dificuldades, após realizarmos um estudo sistemático da teoria matemática que elegemos como tema de trabalho, elaboramos atividades sobre o conteúdo matemático “números racionais” para os níveis fundamental e médio, que foram aplicadas através da metodologia da resolução de problemas.

Quando baseamos nossa aula na metodologia da resolução de problemas não começamos explicando o conteúdo, *partimos* de problemas (ONUHCIC & ALLEVATO, 2004); exatamente o oposto do que geralmente é o enredo de uma aula tradicional de determinado conteúdo matemático, onde praticamente não há espaço para reflexão, quer seja por parte do aluno ou mesmo pelo professor. Durante uma aula pautada nesta metodologia o professor que aplica as atividades assume, em um primeiro momento, o papel de observador e avalia a produção dos participantes, sem interferir no andamento das resoluções. Assim, cria-se a oportunidade de explorar conteúdos matemáticos através de questionamentos. Depois, em um segundo momento, as dúvidas são resolvidas e o conteúdo formalizado.

Ao utilizarmos esta metodologia junto aos professores da rede pública, achamos interessante dividi-los em grupos, para que discutissem os problemas com os colegas e propusessem soluções. Um dos problemas que propomos foi o de classificar a seguinte afirmação em verdadeira ou falsa: *“O conjunto dos números racionais é formado por todos os números decimais finitos e todas as dízimas periódicas”*.

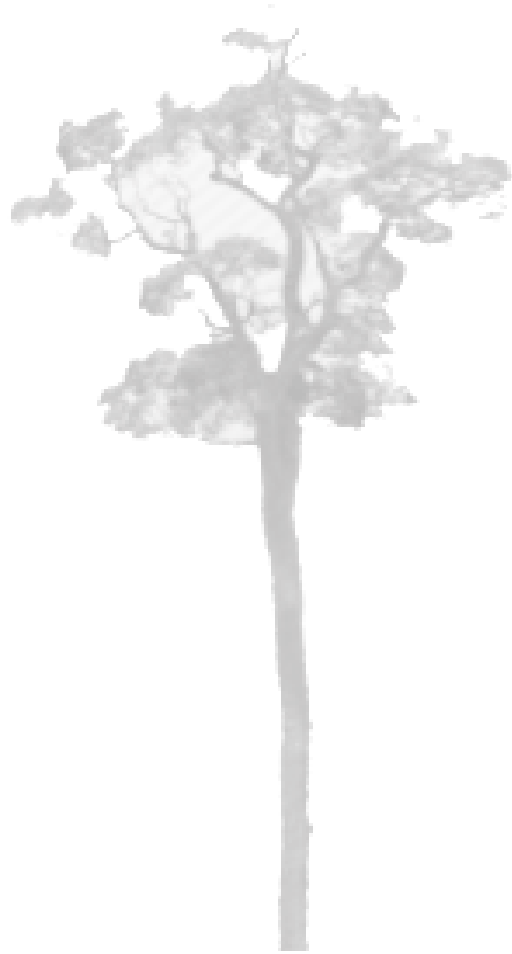
Houve uma discussão sobre a seguinte questão: Os números inteiros são decimais finitos, dízimas periódicas ou nenhuma destas coisas? Para iniciarmos perguntamos se 6 é diferente de 6,0. Um professor que, além de aulas de matemática, também dá aulas de física disse que é diferente quando estamos trabalhando com física. Então uma professora falou que naquele momento estávamos falando de matemática, acrescentando que se o professor de uma disciplina diz alguma coisa que contradiz algum outro, os alunos ficam perdidos e que para eles é difícil aceitar que para responder a uma pergunta corretamente precisemos analisar em qual contexto estamos, isto é, pode

haver respostas diferentes para uma mesma pergunta sem que uma delas seja, necessariamente, incorreta. Acabamos por concordar todos que os números inteiros estão incluídos nesta afirmação, pois podem ser vistos como um decimal finito, sendo assim a afirmação é verdadeira. Em um grupo de professores, discutia-se o que é dízima periódica quando um dos integrantes declarou aos colegas que 0,6387387 ... não é uma dízima periódica, o motivo seria o algarismo 6 que aparece antes da repetição. Em outro momento, percebemos que o período de uma dízima pode gerar equívocos, um dos professores afirmou que a fração $\frac{9}{14}$ não representava um número racional, pois havia efetuado apenas algumas interações no algoritmo da divisão e ainda não tinha encontrado repetição, continuamos a conta e logo em seguida encontramos um valor que se repetia, então, sem mais argumentos, ele me finalizou peremptoriamente “*Eu sei que você está certa, mas eu não acredito que $\frac{9}{14}$ é racional*”.

Insistimos que nosso objetivo não foi o de constranger os professores, ou constatar ignorância, confundindo-os com palavras imprecisas ou obscuras. Nosso principal alvo é o de não ficarmos apenas diagnosticando problemas sem agir de alguma forma.

Referências

- Cavalcanti, J.D.B. *Concepções sobre fração de professores da 1ª fase do ensino fundamental do município de Tupatininga*. Monografia de especialização não publicada. Orientador Dr. Marcelo Câmara dos Santos. Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 101p. 2004
- Costa, C. Considerações sobre Números Racionais na sala de aula. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Não publicado. UNIOESTE, Campus de Foz do Iguaçu. 2008.
- Niven I. (1984), Números: racionais e irracionais, Rio de Janeiro, SBM.
- Onuchic, L.R.; Allevato, N.S.G. (2004) “Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas”, In: *Educação Matemática – pesquisa em movimento*. Maria A. V. Bicudo & Marcelo Borba (Org.). São Paulo: Cortez, pp. 213-231.



Aplicação do Cálculo Diferencial no Cinema

Carlos Roberto Takaessu Junior

Orientação: Prof. Me. Rodrigo Vinícius da Costa

Departamento de Matemática, CCE, UEL,

Londrina, PR

E-mail: carlostakaessu@hotmail.com, rodrigocosta@uel.br,

O objetivo desse trabalho é achar a melhor fileira para se sentar em uma sala de cinema hipotética (figura 1), isto é, a fileira que maximiza o ângulo de visão (θ) do espectador. Primeiramente, definiremos como será a sala de cinema analisada. Nesta sala de cinema hipotética, a tela apresenta 10 metros de altura, situada a 3 metros acima do chão. As fileiras começam a 3 metros de distância da parede onde está situada a tela e cada fileira tem 1 metro de distância da outra, contendo 20 fileiras, sendo que a partir da primeira fileira, o chão possui uma inclinação de 20° . Consideraremos também que a pessoa sentada na poltrona ficará a 1,2 metros acima do chão. Adotaremos θ como o ângulo de visão do espectador para a tela e x como a distância da poltrona utilizada, sendo que $20 \geq x \geq 0$ devido ao número de fileiras. A figura 1 representa um esquema do cinema hipotético. Este problema foi retirado do livro Stewart ¹.

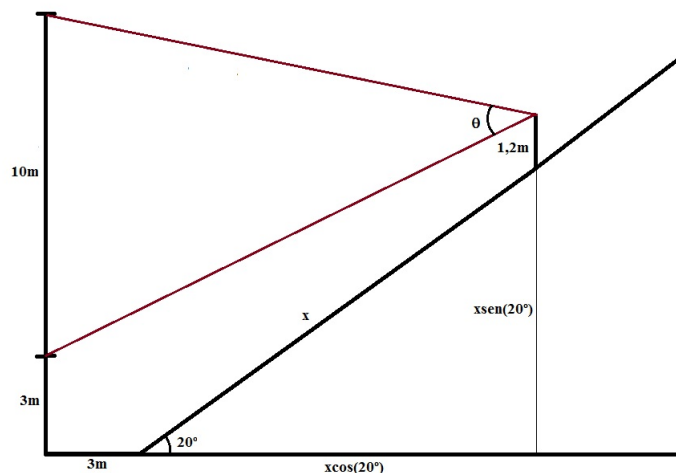


Figura 1: Sala de Cinema

Visto a sala de cinema, devemos achar o valor de θ em função de x . Realizando alguns cálculos, é possível achar que o valor do $\cos(\theta)$ é:

$$\cos(\theta) = \frac{(a^2 + b^2 - 100)}{2ab} \quad (1)$$

e portanto:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(a^2 + b^2 - 100)}{2ab}\right) \quad (2)$$

Sendo:

$$a^2 = (10 - c)^2 + (3 + x\cos(20^\circ))^2 \quad (3)$$

$$b^2 = c^2 + (3 + x\cos(20^\circ))^2 \quad (4)$$

Assim, encontramos o valor de θ em função de x , pois a e b estão em função de x . Encontrada a função de θ , podemos obter seu gráfico utilizando o Geogebra.

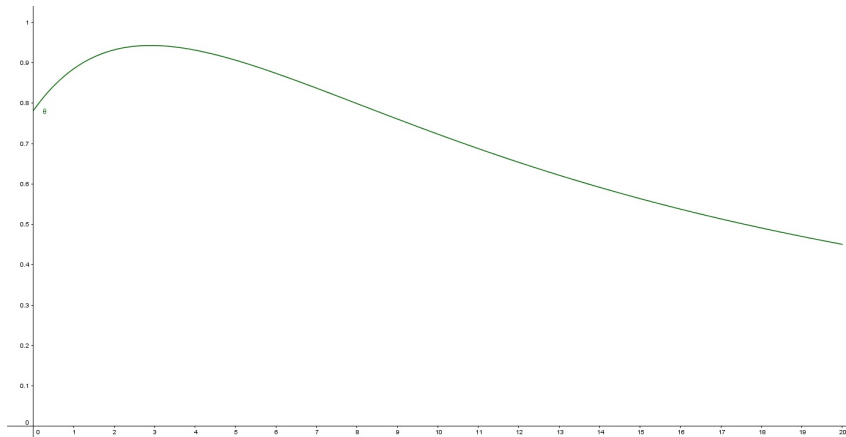


Figura 2: Gráfico de θ em relação a x

Como não podemos ver com clareza qual o valor de x que maximiza θ , iremos olhar o gráfico de sua derivada θ' e ver qual sua raiz, pois será o valor que maximizará θ .

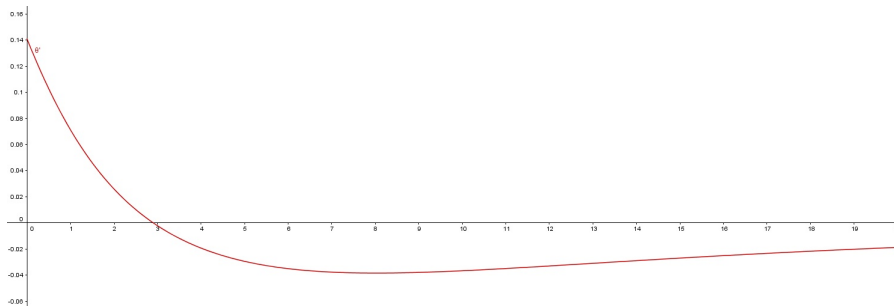
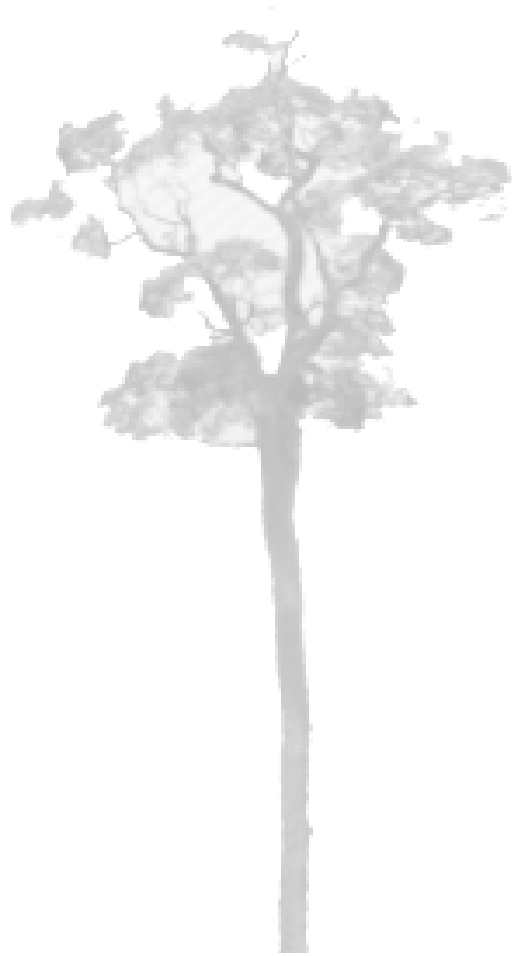


Figura 3: Derivada de θ

Olhando para o gráfico 2, obtemos que a raiz da função θ' é aproximadamente $x = 2,9$, ou seja, quando x é $2,9$ o ângulo é maximizado, com valor $\theta = 0,943 \text{ rad} = 54,03^\circ$. Como x é a distância, temos que a fileira que mais se aproxima desse valor de x é a 4ª fileira, onde $x = 3$. Assim, nesta sala de cinema, a melhor fileira para assistir o filme é a 4ª fileira.

REFERÊNCIAS

- [1] Stewart, J. *Cálculo, Volume I*, Cengage learning (2014). no. 7, p. 413.



CINECLUBE DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA: EXPLORANDO NARRATIVAS NA ESCOLA

*Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
hjbortol@vm.uff.br*

*André de Carvalho Rapozo
PROFMAT/UFF*

*Karla Waack Nogueira
PROFMAT/UFF*

*Oswaldo dos Santos
Azeredo Coutinho
PROFMAT/UFF*

*Fabiana Silva de Miranda
PROFMAT/UFF*

*Keyla Lins Bruck Thedin
PROFMAT/UFF*

*Rodrigo Pessanha da
Cunha
PROFMAT/UFF*

*Hamanda de Aguiar Pereira
PROFMAT/UFF*

*Luis Edmundo Carlos Pinto
Dantas
PROFMAT/UFF*

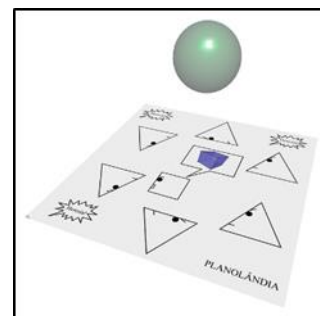
Resumo:

Esta oficina será dividida em duas etapas: na primeira parte, faremos uma breve apresentação dos referenciais teóricos (em Educação, Psicologia e Neurociência) que suportam o uso de narrativas no ensino e na aprendizagem. Na segunda parte, de caráter mais prático, mostraremos como vídeos podem ser usados na Escola para abordar conceitos em Matemática e Estatística por meio da exibição de quatro vídeos e da realização de atividades que podem ser exploradas a partir daí. Os vídeos exibidos serão: “Planolândia: O Filme”, “A Coelha e O Cervo”, “Homer3” e “Romanos”, cujas sinopses são descritas a seguir.

Palavras-chave: Narrativas no Ensino e na Aprendizagem de Matemática e Estatística, Documentário, Animação, Vídeo.

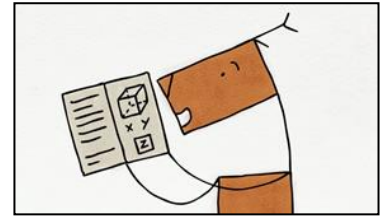
1. Planolândia: o filme

Imagine viver em um mundo bidimensional onde os habitantes são polígonos que acreditam não haver nada além de seu mundo plano. Como mostrar que existe algo além: uma terceira dimensão? Como explicar essas noções para alguém que só sabe o que é direita e esquerda? Nesta animação você conhecerá a jornada de Artur Quadrado e sua neta Hex para convencer os planolandeses que seu universo é muito maior do que imaginavam.



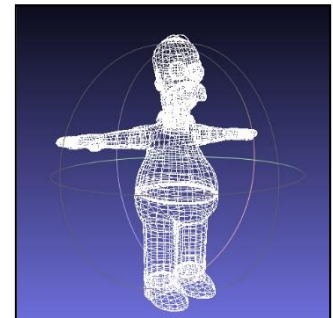
2. A coelha e o cervo

A coelha e o cervo vivem felizes até que sua amizade é posta à prova pela obsessão do cervo em encontrar um caminho para a terceira dimensão. Depois de um acidente, o cervo se depara com um mundo até então desconhecido para ele. A partir daí, os dois personagens se veem separados, em diferentes dimensões. Como esta amizade resistirá?



3. Homer³

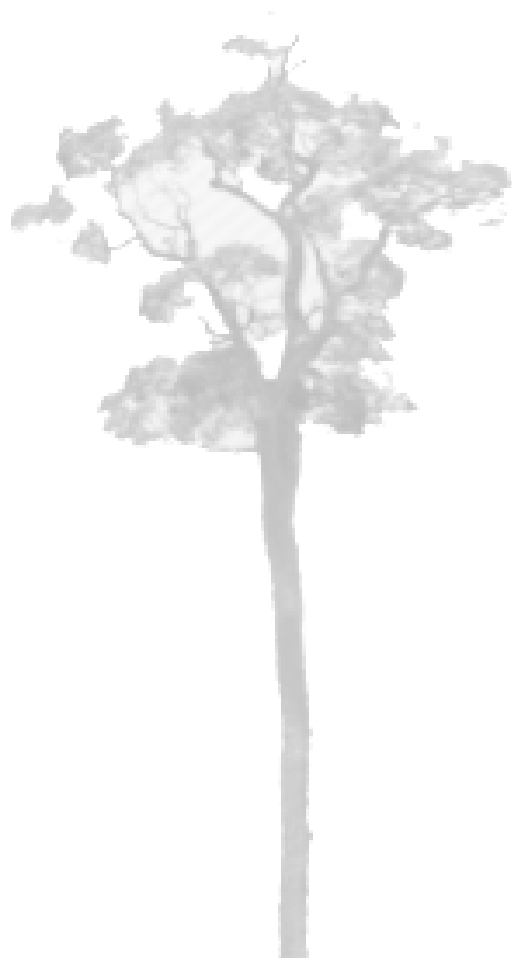
Neste divertido episódio dos Simpsons, Homer atravessa um portal que o transporta do seu “mundo bidimensional” para o misterioso “mundo tridimensional”. Que objetos do imaginário matemático ele encontrará lá? Como ele fará para voltar? Junte-se a essa aventura e descubra!

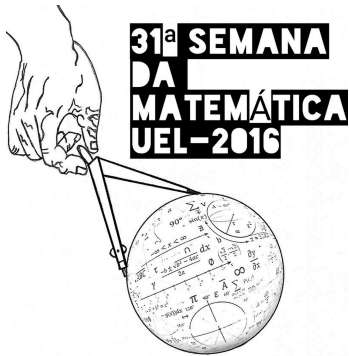


4. Romanos

Neste curta-metragem divertido, Fábio Porchat interpreta um professor de matemática da Roma Antiga que tenta ensinar aos seus alunos como resolver uma equação matemática escrita com algarismos romanos.

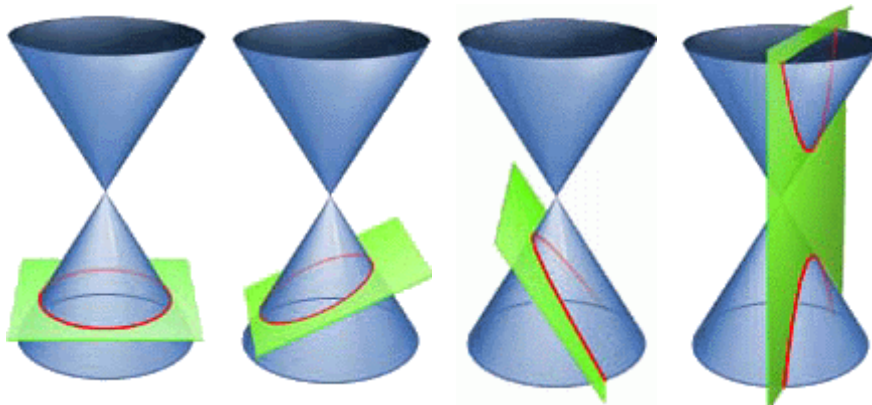






UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

Cônicas: Histórico e Aplicações no dia a dia



Letícia Cuginotti Milani

Prof. Ulysses Sodré

email: leticia_milc@hotmail.com

email: ulysses@uel.br

Londrina-PR, 20 de outubro de 2016.



Introdução

No Capítulo 1, mostramos como o conceito de curva quadrática aparece no âmbito do Ensino Fundamental.

No Capítulo 2, estão alguns elementos históricos sobre as Cônicas, mostrando como Apolônio apresentou seu trabalho *Sobre as cônicas* que teve um papel decisivo no século XVII, quando Kepler estudou as órbitas celestes.

No Capítulo 3, introduzimos objetos gerais que são utilizados em todo o trabalho, como o Lugar Geométrico de pontos.

No capítulo 4, exibimos aplicações da parábola, como: Lançamento de projéteis, Parábola de segurança, Ponte pênsil, Farol de carro, Aquecedor elétrico, Antena parabólica, Radar aéreo, Telescópio parabólico.

No capítulo 5, existem aplicações da elipse, como: Rotas de naves espaciais, Óptica e Clínicas odontológicas, Acústica, Lançamentos de projéteis, Construção de aviões, Estudo de cálculos renais, Órbitas de planetas e de cometas, Meridianos e Paralelos, Sons emitidos em um foco e Arquitetura

No capítulo 6, estão aplicações da circunferência, como: Utensílios nas cozinhas, Materiais para mídias eletrônicas, Objetos nos banheiros, Invólucros de vidros de perfumes e Ferramentas de mecânica e uso em relógios.

No capítulo 7, estão aplicações da hipérbole na arquitetura, na Engenharia Civil e em Navegação Aérea e Marítima LORAN.

A bibliografia é grande, exatamente para mostrar que existem muitos livros sobre este assunto com aplicações diversificadas. Não espere as coisas prontas em suas mãos!



1 Elementos históricos sobre as cônicas

O estudo das seções cônicas e das suas propriedades geométricas começou na Grécia, como parte da busca pela solução do problema da duplicação do cubo. O problema consiste em determinar a aresta de um cubo de forma que este tenha o dobro do volume de um outro cubo dado. A complexidade do problema se deve ao fato que os gregos procuravam uma solução geométrica com régua (sem escala) e compasso.

Menaecmo (400 a.C.), famoso pela descoberta das seções cônicas, usou-as fortemente na pesquisa do problema da duplicação do cubo, obtendo geometricamente o ponto de interseção de uma parábola com uma hipérbole.

Menaecmo não inventou as palavras *parábola* e *hipérbole*, pois elas foram apresentadas mais tarde por Apolônio, mas existem trabalhos recentes mostrando que os nomes *parabola* e *hipérbole* são bem mais velhos do que Apolônio.

Apolônio, *O Grande Geometra*, foi um famoso membro da escola matemática, nasceu em Perga, cidade ao sul da Turquia atual, entre 246 a.C. e 221 a.C.

Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes e, junto com Euclides, formam a tríade considerada como os maiores matemáticos gregos da antiguidade. Apolônio estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria e foi astrônomo notável.

A obra prima de Apolônio é *Seções Cônicas*, composta por 8 volumes. A maior parte das obras de Apolônio desapareceu. Da obra original sobreviveram 7 volumes, sendo 4 escritos em grego e 3 traduzidos para o árabe por *Thabit Ibn Qurra*, no século IX. Os três primeiros volumes são baseados em trabalhos de Euclides e o oitavo volume, infelizmente, ficou perdido.

Em 1710, Edmund Halley traduziu os sete volumes sobreviventes de *Seções Cônicas* para o latim e todas as demais traduções para as línguas modernas foram feitas a partir da tradução de Halley.

Os precursores de Apolônio no estudo das cônicas foram Menaecmo,



Aristeu e o próprio Euclides.

Nesse período, elas eram obtidas pelo seccionamento de um cone circular reto de uma folha com um plano perpendicular a uma geratriz do cone, obtendo três tipos distintos de curvas, conforme a seção meridiana do cone fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso. Apolônio foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as seções cônicas na antiguidade. Suas contribuições foram:

- ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção;
- ter introduzido os nomes parábola, elipse e hipérbole, e
- ter estudado as retas tangentes e normais a uma cônica.

A importância do estudo de Apolônio sobre as cônicas dificilmente pode ser questionada.

Temos a inegável influência dele sobre os estudos de Ptolomeu, Kepler, Galileu e Newton.

desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola.
(Galileu)

os planetas descrevem órbitas em torno do Sol, sendo que o Sol ocupa um dos focos. (Kepler)

A importância do trabalho de Apolônio foi gerar todas as curvas cônicas por meio de um cone circular reto de duas folhas, permitindo à Matemática ser um tipo de conhecimento mais geral e de maior amplitude de aplicação do que tinha sido antes.

Apolônio lançou os fundamentos algo que viria a assumir grande importância para os matemáticos da Europa no século XVII.



2 Elementos gerais

Lugar geométrico (LG) é o conjunto de todos os pontos de uma região linear, plana ou espacial, que satisfazem a uma ou mais condições geométricas dadas. Em geral, tais condições geométricas podem ser descritas por proposições matemáticas muito bem definidas.

2.1 Conjuntos e Curvas especiais

1. **Circunferência em um plano:** Uma circunferência é o LG dos pontos $P = (x, y)$ de um plano Π que estão a uma mesma distância r de um ponto fixado de Π .

Quando $r > 0$ é o raio da circunferência e o ponto (a, b) é o centro da circunferência. Este conjunto é descrito por:

$$C = \{(x, y) \in \Pi : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

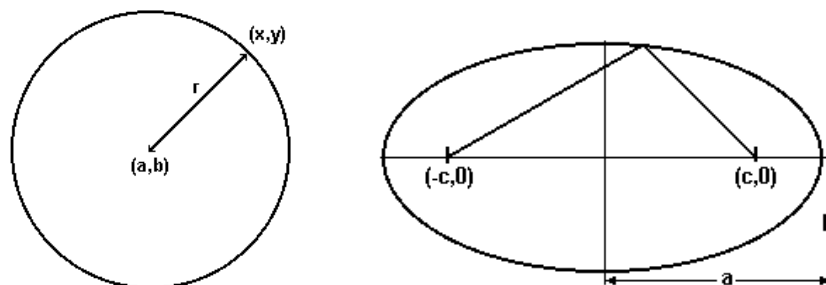


Figura 1: Circunferência e Elipse

2. **Elipse em um plano:** Uma Elipse é o LG dos pontos $P = (x, y)$ de um plano Π cuja soma das distâncias destes pontos a dois pontos fixos (focos) é constante.

Quando os focos são $(-c, 0) \in \Pi$ e $(c, 0) \in \Pi$, a distância focal é $2c > 0$. As medidas $a > 0$ e $b > 0$ representam as medidas dos semi-eixos sobre os eixos $y = 0$ e $x = 0$ e vale a relação pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$. Este conjunto de pontos é dado por:

$$C = \{(x, y) \in \Pi : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$



3. **Parábola em um plano:** Uma parábola é o LG dos pontos $P=(x, y)$ de um plano Π que estão à mesma distância de um ponto fixado (foco) e de uma reta fixada no plano (diretriz). Quando o foco é $(c, 0)$, a medida $c > 0$ é o parâmetro focal e a reta fixada é $y = -c$. Este conjunto de pontos pode ser descrito por:

$$C = \{(x, y) \in \Pi : 4cx = y^2\}$$

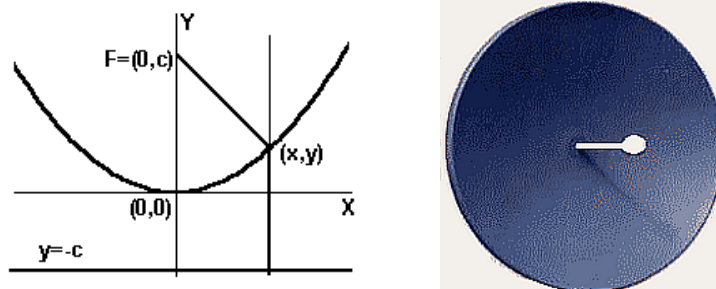


Figura 2: Parábola e antena parabólica

4. **Hipérbole em um plano:** Uma hipérbole é o LG dos pontos $P = (x, y)$ de um plano cuja diferença das distâncias destes pontos a dois pontos fixos (focos) é constante. Se os focos da hipérbole são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ e a distância focal (entre os focos) é $2c > 0$, este conjunto de pontos pode ser descrito por:

$$C = \{(x, y) \in \Pi : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = b^2 + c^2\}$$

a e b são, respectivamente, os semi-eixos sobre os eixos $y = 0$ e $x = 0$.

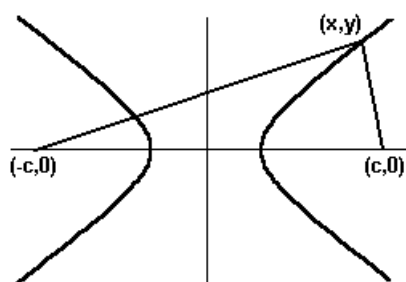
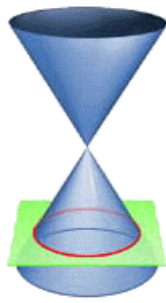
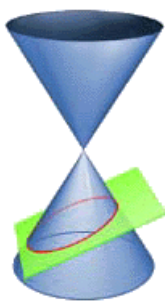
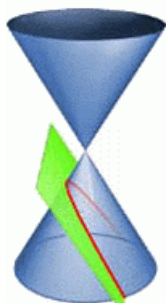
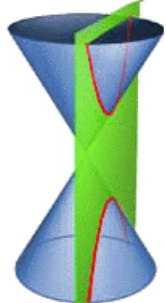


Figura 3: Hipérbole

3 Curvas cônicas

3.1 A origem dos termos: Elipse, Parábola e Hipérbole

As palavras gregas *elipse*, *parábola* e *hipérbole* significam, respectivamente, *falta*, *igualdade* e *excesso*. A nomenclatura adotada por Apolônio remete ao trabalho dos pitagóricos de aplicação de retângulos a segmentos de reta de tal forma que, caso a base do retângulo seja menor, igual ou maior que o segmento de reta, definiríamos uma elipse, parábola ou hipérbole.

Circunferência	Elipse	Parábola	Hipérbole
			
Plano perpendicular ao eixo de simetria do cone.	Plano oblíquo ao eixo de simetria, não paralelo a uma geratriz.	Plano paralelo a uma geratriz do cone.	Plano paralelo ao eixo de simetria do cone.
Plano corta uma folha do cone.	Plano corta uma folha do cone.	Plano corta uma folha do cone.	Plano corta duas folhas do cone.



4 Aplicações da Parábola

4.1 Lançamento de projéteis e Parábola de segurança

Ao lançar um projétil, como exemplo, um dardo, alguns detalhes chamam a nossa atenção: o ângulo de lançamento do projétil, a velocidade inicial e um objeto importante que fica escondido, a aceleração da gravidade.

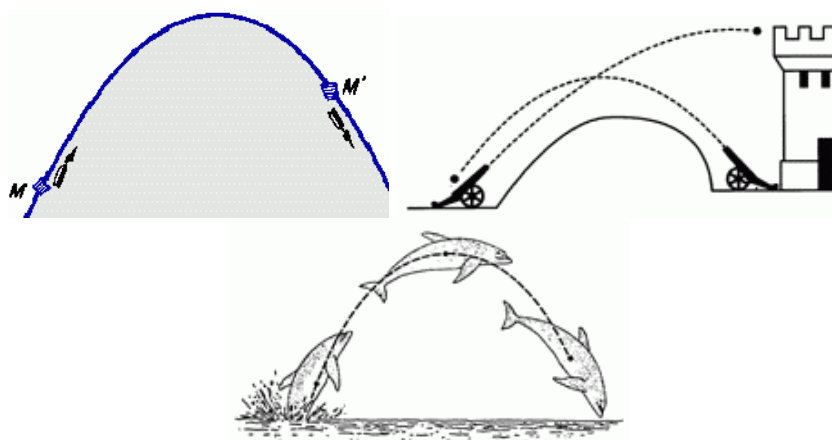


Figura 4: Projéteis: Dardo, bala de canhão e peixe

Projéteis têm trajetórias *próximas* às de uma parábola, pois existe atrito devido à resistência do ar.

A componente quadrática no trajeto se deve à aceleração da gravidade, que determina a forma do deslocamento na sua projeção vertical, mas no deslocamento da projeção horizontal o deslocamento é um movimento uniforme.

Ver **La Envolvente**, V. G. Boltianski [9]

Considere uma situação em que são lançados projéteis de um canhão posto em local O da superfície terrestre, v_0 a velocidade inicial e α é o ângulo de inclinação que cada projétil faz com o plano do chão (eixo OX).

A trajetória de cada projétil será uma parábola que depende dos elementos referidos mas a altura depende da aceleração da gravidade g .

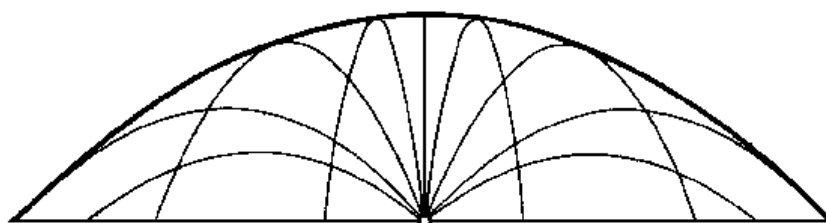


Figura 5: Parábola de segurança

A questão é: Onde pode ficar uma pessoa para que esteja segura, de modo que qualquer projétil lançado nunca atinja esta pessoa?

A resposta é a *Parábola de segurança*. Ver **La Envolvente**, V. G. Boltianski [9]

4.2 Farol de carro e Aquecedor elétrico

No caso do farol de um carro a fonte luminosa (e também no caso do aquecedor, a fonte de calor) estão localizadas no ponto conhecido como foco e quando as *ondas* emitidas *batem* na lâmina parabólica, fazem a reflexão dirigida de modo a refletir sempre raios paralelos ao eixo de simetria da parábola. Ver o livro **Mais Actividades Matemáticas**, Brian Bolt [7].

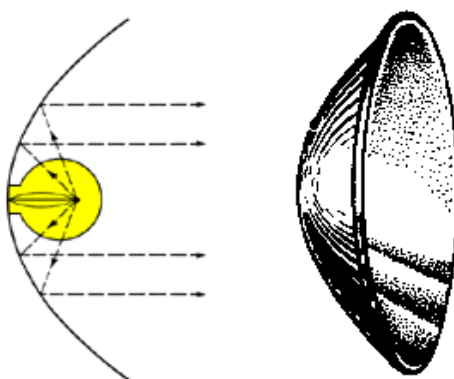


Figura 6: Farol de um carro



4.3 Ponte pênsil sobre um rio

Durante muito tempo se pensou que a curva realizada pelo cabo de aço que mantém uma ponte pênsil, era uma catenária (cosseno hiperbólico).



Figura 7: Ponte pênsil Akashi Kai-kyo, Japão

Mas, esta curva é uma parábola, pois ocorre a distribuição uniforme da massa da ponte a cada distância estabelecida entre os diversos pórticos que sustentam o peso da ponte. Ver **Mais Atividades Matemáticas**, Brian Bolt [7].

4.4 Radar aéreo, Antena e Telescópio parabólicos

Consideremos que um satélite emita ondas eletromagnéticas e que você tenha em sua casa uma antena parabólica.

As ondas refletem sobre o *espelho* e se projetam no *foco* do espelho parabólico, onde existe um equipamento que captura estas ondas e as transformam em pulsos (demodulam) de tal modo que seu equipamento de televisão *entenda* tais sinais.

Se o espelho da antena não fosse parabólico, isto não seria possível.

Ver o livro **Mais Atividades Matemáticas**, Brian Bolt[7].



5 Aplicações da elipse

5.1 Rotas de naves espaciais

Rotas seguidas por naves espaciais e satélites artificiais são governadas pelas mesmas leis que governam as órbitas dos planetas. Para uma viagem de um ponto a outro no espaço, pelo menos por enquanto, usamos as leis de Kepler, e Isaac Newton explicou porque as leis de Kepler funcionam, portanto, os navegadores espaciais usam as leis de Newton e as leis de Kepler como princípios operacionais.

As Leis de Kepler são essenciais para o estudo de fenômenos astronômicos, como as eclipses, movimento e período das órbitas de cometas, eventos de alinhamento dos planetas e assim por diante. A primeira lei de Kepler do movimento planetário: A órbita de cada planeta é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Com os dados observados por Tycho Brahe, Johannes Kepler concluiu que os planetas orbitam em *elipses*.

5.2 Óptica e Clínicas odontológicas

Uma aplicação óptica aparece no dispositivo de iluminação dos dentistas, contendo um espelho na forma de *elipse* e uma lâmpada posta no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, de modo a ajustar o dispositivo para iluminar o ponto desejado.

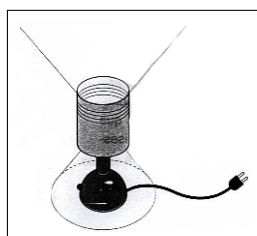


Figura 8: Abajur com uma sombra elíptica e outro com uma sombra hiperbólica

Certas lâmpadas em um abajur, possuem uma abertura circular, e projetam na parede uma hipérbole e no teto uma elipse. Especialistas de iluminação usam isso para construir lâmpadas e lanternas.



5.3 Lançamentos de projéteis

Trajетórias de projéteis, sob a ação da gravidade e sem o atrito de qualquer natureza, são parábolas.

Como na terra existe a resistência do ar, tais trajetórias são *arcos de elipses*.

Quase não percebemos a diferença entre trajetórias elípticas e parabólicas, na análise de um jato de água de uma mangueira, cuja abertura está inclinada para cima. A balística (estuda as trajetórias de projéteis) usa este fato para determinar o local da queda de um projétil.

5.4 Construção de aviões

As extremidades das asas do avião britânico *Spitfire*, usado na II grande Guerra, eram *arcos de elipses*. A escolha se devia à otimização de espaço para transportar mais munições. O tipo de asa reduzia a resistência do ar, com melhor performance para o avião em voo.

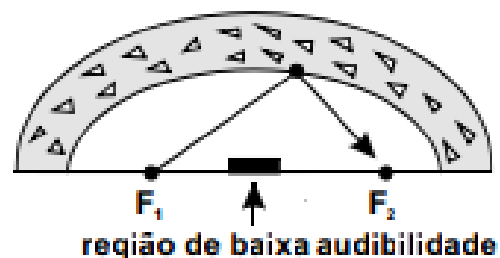


Figura 9: Avião com asas em formato elíptico e uma Abóboda elíptica

5.5 Sons emitidos em um foco

Sob uma abóboda *elíptica*, sons emitidos em um foco são melhor ouvidos em pontos próximos ao outro foco, apesar de quase não se ouvir os mesmos na região intermediária entre os focos da *elipse* que serve de referência para a construção da abóboda.



5.6 Estudo de cálculos renais

No campo da saúde, existe um procedimento usado para eliminar cálculos renais, denominado *litotripsia extracorpórea*.

No processo, como no esquema seguinte, ondas de choque criadas fora do corpo do paciente passam pela pele e tecidos até encontrarem os cálculos mais densos, pulverizando-os.

O litotriptor possui um espelho elíptico que concentra os raios emitidos em um certo ponto com grande precisão.

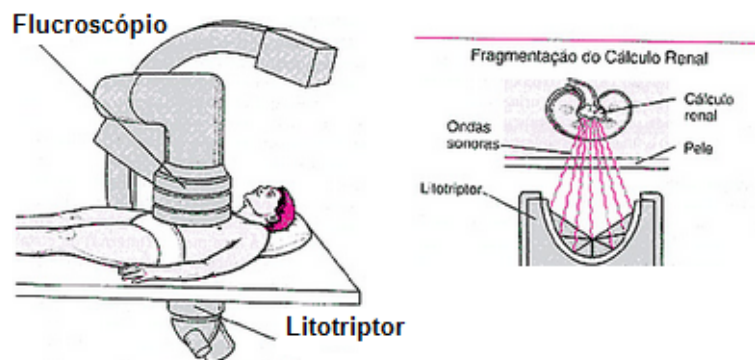


Figura 10: Equipamento para tratar cálculos renais

Ver: <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/04/conicas-nocoos-intuitivas-e-aplicacoes.html>

5.7 Arquitetura

Um famoso monumento arquitetônico da Roma antiga foi o Coliseu. A planta baixa tinha a forma *elíptica*, com eixo maior tinha 188m e o menor 156m.

A cobertura móvel, à altura de 85m, era sustentada por um sistema de tirantes, adicionada em caso de chuva para proteger seus 40.000 espectadores.



Figura 11: O coliseu romano

5.8 Órbitas de planetas e de cometas; Meridianos e Paralelos

A órbita do cometa Halley ao redor do Sol não é circular mas *elíptica*, com o Sol em um foco, sem considerar o deslocamento do sistema solar. Kepler (1571-1630) desenvolveu esta teoria. Para o planeta Terra, os semi-eixos são $a = 1.53493E9$ km e $b = 1.53454E9$ km. Pela excentricidade da órbita, a curva quase é uma circunferência. O eixo maior tem o *periélio* (janeiro) e o *afélio* (julho), indicando as distâncias mínima e máxima da Terra ao Sol.

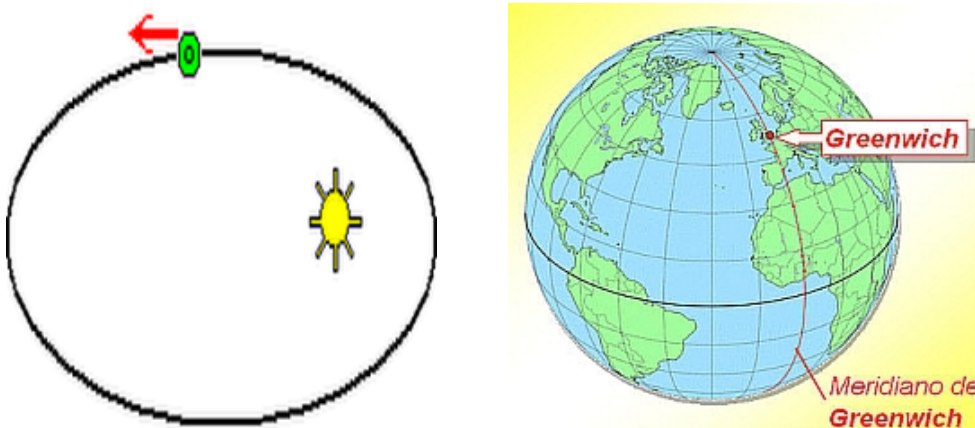


Figura 12: Órbitas planetárias elípticas, meridianos e a linha do equador

No globo terrestre, a linha do equador se aproxima de uma circunferência (*elipse degenerada*) e cada meridiano tem a forma similar à de uma *elipse*.



6 Aplicações da circunferência

No cotidiano, muitas vezes nos deparamos com vários objetos e nem percebemos que estes objetos são construídos com formatos de circunferências.

6.1 Utensílios nas cozinhas

A circunferência está em nossas cozinhas, como por exemplo, nas panelas: permitindo um aquecimento uniforme da comida.



Figura 13: Panela, boca de fogão, prato, copo e tigela com base circular

A maioria dos utensílios na cozinha de uma casa possui base circular.

Se as panelas tivessem quinas isto impossibilitaria um aquecimento uniforme podendo aquecer mais uma área do que outra.

O fogão possui *bocas* circulares, para melhor distribuir o calor para as panelas. Botões de acendimento são circulares.

6.2 Materiais para mídias eletrônicas

Em nossas casas identificamos aplicações da circunferência, como CD e DVD.



6.3 Objetos nos banheiros

No Banheiro existem chuveiros, ralos e banheiras com base circular:



Figura 14: Chuveiro, ralo de banheiro e DVD com base circular com base circular

6.4 Vidros de perfumes, Ferramentas de mecânica e Relógios

Vidros de perfumes e de vasos possuem bases circulares. Também existem circunferências na rodas, nas engrenagens, polias e nos volantes de carros: Um exemplo comum em nosso cotidiano é o relógio com base cir-



Figura 15: Roda, volante de carro e Relógio com base circular

cular. Os ponteiros são como raios de circunferências concêntricas que fecham o ciclo a cada 12 horas, a cada 60 minutos e a cada 60 segundos.

<http://www.mat.uel.br/geometrica/> acessado em 10/08/13, 15:00 h.



7 Aplicações da Hipérbole

7.1 A hipérbole na arquitetura e na Engenharia Civil

As *hipérboles* também são usadas na arquitetura como se observa na catedral de Brasília e no Planetário do St. Louis Science Center (USA).



Figura 16: Catedral de Brasília, Planetário do St. Louis Science Center (USA) e Usina nuclear construída em forma de hiperbolóide

O hiperbolóide de revolução de uma hipérbole em torno de um eixo fixado é usado para construir torres de refrigeração de usinas nucleares. Isso se deve ao fato de que o hiperbolóide é uma superfície duplamente regrada, ou seja, para cada um dos seus pontos existem duas retas distintas que se interceptam na superfície. Assim, as torres podem ser construídas com vigas de aço retas, permitindo assim a minimização dos ventos transversais e mantendo a integridade estrutural com um mínimo uso de materiais de construção.

Ver: Ávila, G. *A Hipérbole e os telescópios*. Revista do Professor de Matemática, n. 34, p. 22-27, SBM, São Paulo, 1997.

7.2 Navegação Aérea e Marítima LORAN

Um importante uso das *hipérboles* é no sistema de localização em navegação LORAN (Navegação de Longa Distância), que permite a um navegante de um navio ou avião obter a sua posição sem confiar em marcos visíveis.



O sistema LORAN usa *hipérboles* com um dos focos em comum, onde estão os radares emitindo sinais. Cada dois radares produz uma hipérbole com a posição do navio ou avião, e a sua posição exata é o ponto onde as três hipérboles interceptam-se. A posição é obtida pela interseção dos gráficos das hipérboles.

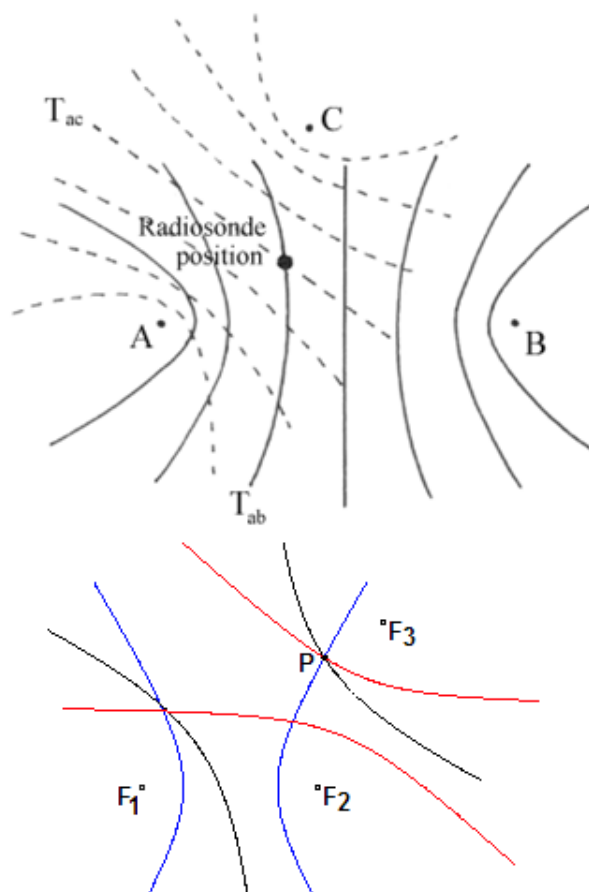


Figura 17: Visão geométrica de hipérboles em um mapa e Estações de rádio situadas em posições F_1, F_2, F_3 emitem sinais recebidos pelo navegante situado na posição P .

A técnica foi usada na II grande Guerra, para detectar barcos japoneses. Basta a diferença entre os instantes que os sinais foram recebidos para determinar que o navio está em algum ponto P da hipérbole (ver figura seguinte), usando para isso o conceito de lugar geométrico que define a hipérbole.

Ver mais informações nas páginas: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node18.html> e <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/> Acessado: 14/08/2013.



Referências bibliográficas

- [1] AAboe, A. **Episódios da História Antiga da Matemática**, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, Rio, 1984.
- [2] Barbosa, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, S.B.M., Rio de Janeiro, 1985.
- [3] Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. **Equações Diferenciais com aplicações**, Editora Harbra Ltda., São Paulo, 1988.
- [4] Batschelet, E. **Introdução à Matemática para Biocientistas**, Editora Interciência e EDUSP, São Paulo, 1978.
- [5] Bergamini, D. **As Matemáticas**, Biblioteca Científica Life, Livraria José Olympio Editora, Rio de Janeiro, 1965.
- [6] Bolt, B. **Actividades Matemáticas**, Gradiva, Lisboa, 1991.
- [7] Bolt, B. **Mais Actividades Matemáticas**, Gradiva, Lisboa, 1985.
- [8] Bolt, B. **Matemáquinas**, Gradiva, Lisboa, 1994.
- [9] Boltianski, V. G. **La envolvente**, Edit.Mir, Moscú, 1977.
- [10] Eves, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria**, Edit.Atual, São Paulo, 1992.
- [11] Eves, H. **Introdução à História da Matemática**, Editora Unicamp, 3a. edição, Campinas-SP, Brasil, 2002.
- [12] Gamow, G. **Um, Dois, Três... Infinito**, Zahar Editores, Rio, 1962.
- [13] Glenn, W. H. e Johnson, D. A. **Invitation to Mathematics**, Dover Publ. Inc, New York, 1973.
- [14] Heath, T. L. **History of Greek Mathematics**, New York, Dover Publ., 1981.
- [15] Hogben, L. **Maravilhas da Matemática**, Ed.Globo, Porto Alegre, 1970.
- [16] Hoffmann, L. D. **Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações**, vol.1, LTC Editora, 2a. edição, Rio de Janeiro, 1994.
- [17] Ignátiev, E. I. **En el reino del ingenio**, Edit. Mir, Moscú, 1986.
- [18] Kostovski, A. N. **Construcciones Geométricas mediante un compás**, Edit.Mir, Moscú, 1980.
- [19] Langue, V. N. **Problemas experimentales ingeniosos de Física**, Edit.Mir, Moscú, 1984.
- [20] Lawrence, J. D. **A Catalog of Special Plane Curves**, Dover Publications, Inc, New York, 1972.



- [21] Lipschutz, M. M. **Theory and Problems of Differential Geometry**, Schaum's Outline Series, New York, 1969.
- [22] Liustérnik, L. A. **Líneas más cortas - Problemas de variaciones**, Edit.Mir, Moscú, 1979.
- [23] Maiztegui, A. P. e Sabato, J. A. **Física, vol. 1 e 2**, Ed.Globo, Porto Alegre, 1972.
- [24] Markushévich, A. I. **Curvas Maravilhosas**, 2a.ed, Ed.Mir, Moscú, 1977.
- [25] Oliva, W. M. **Vetores e Geometria**, Editora Edgard Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1971.
- [26] Perelmán, Ya. I. **Problemas y experimentos recreativos**, Edit. Mir, Moscú, 1983.
- [27] Perelmán, Ya. I. **Brincando com Astronomia**, Ed.Fulgor, S.Paulo, 1983.
- [28] Perelmán, Ya. I. **Algebra Recreativa**, Edit. Mir, Moscú, 1986.
- [29] Perelmán, Ya. I. **Matemáticas Recreativas**, Ed.Mir, Moscú, 1985.
- [30] Ronan, C. A. **História Ilustrada da Ciência**, Vol.I, Das origens à Grécia, Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 1987.
- [31] Santos, N. M., **Vetores e Matrizes**, Ao Livro Técnico S.A. IMPA, Rio de Janeiro, 1972.
- [32] Shervátov, V. G. **Funciones Hiperbolicas**, Edit.Mir, Moscú, 1975.
- [33] Stewart, I. **Jogos, Conjuntos e Matemática**, Gradiva, Lisboa, 1994.
- [34] Tahan, M. **As Maravilhas da Matemática**, Edições Bloch, 2a. edição, Rio de Janeiro, 1973.
- [35] Uspensky, V. A. **Certain Applications of Mechanics to Mathematics**, Mir Publishers, Moscow, 1976.
- [36] Wagner, E. **Por que as antenas são parabólicas**, in *Revista do Professor de Matemática*, vol. 33, SBM, Rio, 1o. quadrimestre 1997.
- [37] Walter, J. **O Grande Circo da Física**, Gradiva, Lisboa, 1990.





Conjunto de Cantor e Dimensão de Contagem de Caixas

Lucas Yudi Hataishi

lucas.hataishi@gmail.com

Túlio Oliveira de Carvalho

tcarvalho@uel.br

Departamento de Matemática

Universidade Estadual de Londrina

CP 10.011, CEP 86057-970, Londrina - PR

Resumo

Apresentamos a construção do conjunto de Cantor dos terços médios, algumas de suas propriedades e computamos a sua dimensão de contagem de caixas. Mostramos também a medida de Hausdorff e, por fim, o mapa do padeiro.

Palavras-chave: conjunto de Cantor; fractal; dimensão de contagem de caixas.

INTRODUÇÃO

Uma exposição sobre o conjunto de Cantor dos terços médios pode ser encontrada em [1]. Apresentamos abaixo as suas principais propriedades.

A **construção** do conjunto de Cantor dos terços médios, denotado por \mathbb{K} , é feita de modo indutivo. Considere o intervalo $[0, 1]$. A primeira etapa do processo consiste em retirar o seu terço médio aberto: $(1/3, 2/3)$, restando os intervalos $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Na segunda etapa retira-se o terço médio dos intervalos que restaram na primeira etapa, e assim se procede indefinidamente.

Começamos pelas suas propriedades topológicas.

Compacidade: Se $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ são os intervalos abertos retirados, então $\mathbb{F} = \mathbb{R} - \cup I_n$ é um conjunto fechado (pois seu complementar é aberto), o que faz de $\mathbb{K} = [0, 1] \cap \mathbb{F}$ um conjunto compacto.

Desconexo: Após a n -ésima etapa da construção de \mathbb{K} sobraram apenas intervalos de comprimento $1/3^n$. Logo, qualquer intervalo $J \subset [0, 1]$ de comprimento c será mutilado em alguma etapa m da construção. Basta tomar m tal que $1/3^m < c$. Segue então que \mathbb{K} é totalmente desconexo, ou seja, não contém intervalos.

Todos os pontos são **pontos de acumulação**: Seja E o conjunto dos pontos que são extremos dos intervalos retirados durante a construção do conjunto de Cantor. Se (c, b) é algum intervalo retirado de $[0, 1]$ para construir \mathbb{K} na n -ésima etapa, então restou um certo intervalo $[a_n, c]$. Nas etapas seguintes, restarão terços finais de intervalos do tipo $[b_n, c]$, cujo comprimento tende a zero quando o número de

etapas vai para infinito. Portanto $\lim b_n = c$. Vemos então que todos os pontos de E são pontos de acumulação. Se $c \in \mathbb{K}$ não é extremo de algum intervalo, então ele é interior a algum intervalo $[x_n, y_n]$ que restou após a n -ésima etapa de construção. Como $\lim (y_n - x_n) = 0$, segue que $\lim x_n = \lim y_n = c$. Isto prova que todos os pontos do conjunto de Cantor são pontos de acumulação.

Note que $\frac{1}{4} \in \mathbb{K}$ não é um extremo de qualquer dos intervalos retirados, porque os extremos destes são todos pontos da forma $\frac{a}{3^n}$, para algum $a \in \mathbb{N}$. O Teorema dos intervalos encaixantes, que enunciaremos a seguir, equivale ao axioma do supremo e ao princípio de Dedekind, de que toda sequência monótona limitada de números reais converge.

Teorema 1. *Dada uma sequência decrescente $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \dots$ de conjuntos compactos não vazios, existe pelo menos um número real que pertence a todos os A_n .*

ENUMERABILIDADE E MEDIDA

O conjunto de Cantor é não-enumerável. Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{K}$ um conjunto enumerável. Com centro num ponto de \mathbb{K} , tomemos um intervalo compacto não degenerado I_1 de tal forma que $x_1 \notin I_1$. Como qualquer ponto do conjunto de Cantor é ponto de acumulação, segue que $I_1 \cap \mathbb{K}$ é um conjunto infinito e compacto. Agora, com centro num ponto de \mathbb{K} interior a I_1 , tomemos um outro intervalo compacto não degenerado $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Seguindo esta construção, criamos uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \dots$ de conjuntos compactos não-vazios, tais que a interseção $\{x_1, \dots, x_n\} \cap I_n$ é vazia. Pelo Teorema 1, existe um número c que pertence a todos os I_n . Tomando cada I_n de forma que seu comprimento seja menor que $1/n$, e escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$ um número $y_n \in I_n \cap \mathbb{K}$, temos $|y_n - c| < 1/n$ e então $\lim y_n = c$. Como \mathbb{K} é fechado, segue que $c \in \mathbb{K}$, e como $c \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}, c \neq x_n$. Vemos então que, para qualquer conjunto enumerável contido em \mathbb{K} , é possível encontrar um ponto em \mathbb{K} que não pertence a ele. Logo o conjunto de Cantor é não enumerável. (Repare que o argumento tem certa semelhança com a prova da não-enumerabilidade dos reais pela *diagonal de Cantor*.)

Expandir um número $x \in [0, 1]$ na base 3 (expansão ternária) significa escrevê-lo na forma $0.x_1x_2x_3\dots$, onde cada x_i pertence ao conjunto $\{0, 1, 2\}$, de tal forma que

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x_i}{3^i} \quad (1)$$

(Trocando-se 3 por 2 na expressão acima, temos uma expansão de x na base 2).

Para os números no intervalo $[0, 1]$, sua representação na base 3 terá a forma $0.x_1x_2x_3\dots$

Considere a expansão ternária de um número arbitrário $x \in [0, 1]$. Na primeira etapa da construção do Conjunto de Cantor, retiramos o aberto $(1/3, 2/3)$, que continha todos os números x para os quais $x_1 = 1$. Na segunda etapa, retira-se de $[0, 1/3]$ o aberto $(1/9, 2/9)$, e de $[2/3, 1]$ o aberto $(7/9, 8/9)$, que são precisamente todos os números para os quais $x_2 = 1$. De forma geral, na n -ésima etapa retira-se todos os números do intervalo $[0, 1]$ cuja representação na base 3 tem $x_n = 1$. Então o Conjunto de Cantor contém todos os pontos de $[0, 1]$ cuja representação na base 3 não contém o dígito 1, exceto aqueles que têm o 1 como último algarismo significativo. Notando que $0,1 = 0,02222\dots$, podemos substituir o dígito 1 pela sequência $02222\dots$. Assim, podemos dizer que \mathbb{K} é o conjunto dos pontos do intervalo $[0, 1]$ que possuem uma representação na base 3 que não contém o dígito 1, sem exceções.

MÉTRICA DE HAMMING

Sejam \mathcal{A} um conjunto finito, ou *alfabeto*, e $u, v \in \mathcal{A}$. Seja d a aplicação definida a seguir:

$$d(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \neq v \\ 0, & \text{se } u = v \end{cases}$$

chamada *métrica discreta* em \mathcal{A} .

Considere dois pontos $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. A Métrica de Hamming ρ é dada por

$$\rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \quad (2)$$

Podemos mostrar que ρ satisfaz a todas as condições de uma métrica.

- $\rho(x, x) = 0$: Em qualquer termo do somatório, o numerador é do tipo $d(x_n, x_n) = 0$.
- $x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) > 0$: se $x \neq y$, então pelo menos um termo do somatório é maior que zero.
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- (Desigualdade Triangular) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$: A demonstração está apresentada logo abaixo.

Provaremos que, para qualquer natural n , $d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$. De fato, temos três possibilidades:

(1) $x_n = y_n = z_n \Rightarrow d(x_n, z_n) = d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) = 0$

(2) Dois valores iguais. Primeiro, se $x_n \neq y_n = z_n$, então $d(x_n, z_n) = 1 = d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$. Segundo, se $x_n = y_n \neq z_n$, então $d(x_n, z_n) = 1 = d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$. Por fim, se $x_n = z_n \neq y_n$, então $d(x_n, z_n) = 0 < 2 = d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$.

(3) Se os três valores são diferentes entre si, então $d(x_n, z_n) = 1 < d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) = 2$.

Vemos então que a aplicação ρ definida em (2) satisfaz a todas as condições de uma métrica. Note que a métrica ρ não depende do alfabeto, no qual utilizamos a métrica discreta.

HOMEOMORFISMO ENTRE O CONJUNTO DE CANTOR E O INTERVALO $[0, 1]$

Denotamos por ρ_1 a métrica de Hamming em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e por ρ_2 a métrica de Hamming em $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$.

Todo número no intervalo $[0, 1]$ tem uma representação na base 2 da forma $0, x_1 x_2 x_3 \dots$, onde cada $x_i \in \{0, 1\}$. Considere a aplicação $\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, dada por:

$$[\Phi(x)]_i = 2x_i \quad (3)$$

Esta aplicação transforma cada ponto de $[0, 1]$ em um ponto de \mathbb{K} e é claramente injetora.

Seja agora $\Psi : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dada por:

$$[\Psi(y)]_i = \frac{1}{2}y_i \quad (4)$$

Observe que $\Psi = \Phi^{-1}$, ou seja, $\Psi(\mathbb{K}) \subset [0, 1]$.

Considerando dois alfabetos \mathcal{A} e \mathcal{B} , usando a métrica de Hamming em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ e em $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$, faz sentido estudar a continuidade de aplicações entre tais espaços. Seja $f : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ uma aplicação, dizemos que f é contínua em $x_0 \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ se dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$, que só depende de ϵ , tal que

$$\rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon \quad (5)$$

Com isto, Φ e Ψ são imersões isométricas de um conjunto em outro. De fato, tomando $\delta = \epsilon$ mostramos que essas duas aplicações são contínuas em todo o seus respectivos domínios. Φ é uma aplicação contínua e bijetora que transforma $[0, 1]$ em \mathbb{K} , com inversa Ψ também contínua. Dizemos então que $[0, 1]$ e \mathbb{K} são *homeomorfos*.

DIMENSÃO DE CONTAGEM DE CAIXAS

Em \mathbb{R}^n considere cubos de aresta $\epsilon > 0$ (para $n = 1$, os cubos são intervalos, para $n = 2$ são quadrados, e assim por diante). A seguinte definição é extraída de [2].

Definição 1. *Seja $A \subset U$, U um aberto limitado, um subconjunto do espaço \mathbb{R}^n . Considere uma cobertura de U por cubos de aresta ϵ . Seja $N_A(\epsilon)$ o número de cubos desta cobertura que intersectam A . A dimensão de contagem de caixas de A é dada pelo seguinte limite, se existir,*

$$D_0(A) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log[N_A(\epsilon)]}{\log(\epsilon)} \quad (6)$$

O número de cubos necessário para cobrir o conjunto cresce, em função de ϵ , com uma potência igual a $-D_0$, isto é, $N(\epsilon) \approx C\epsilon^{-D_0}$.

Para calcular a dimensão de contagem de caixas de \mathbb{K} , notamos primeiro que na n -ésima etapa de sua construção existem 2^n intervalos, cada um de comprimento $(1/3)^n$. Considere uma sequência numérica $\epsilon_n = (1/3)^n$. Tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ e

$$D_0(\mathbb{K}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log[N(\epsilon)]}{\log(\epsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63. \quad (7)$$

Conjuntos cuja dimensão de contagem de caixas não é um número inteiro (mas é maior que zero) são chamados de fractais, por alguns autores. Tais conjuntos podem apresentar uma característica chamada auto-similaridade, o que significa grosso modo que cada parte repete o todo, após uma transformação de escala. Considerando o conjunto de Cantor, expandindo um intervalo que restou após a n -ésima etapa de sua construção por um fator de 3^n , o resultado é um intervalo com o mesmo comprimento que o intervalo original $[0, 1]$. Além disso, na $(n + 1)$ -ésima etapa, a construção atua em cada um dos 2^n intervalos da mesma forma que na primeira etapa atuou no intervalo $[0, 1]$.

A construção do conjunto de Cantor dos terços médios pode parecer artificial, apropriada para o cálculo da dimensão de contagem de caixas, mas de fato serve de modelo para situações bastante frequentes nos fractais obtidos como conjuntos invariantes sob aplicações f de um intervalo sobre si mesmo.

Entretanto, a dimensão de contagem de caixas não é sempre apropriada para dar uma indicação sobre os conjuntos fractais. Considere o conjunto $A = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$. Observe que se $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$,

e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, é tal que

$$\frac{1}{k(k-1)} > \epsilon \geq \frac{1}{k(k+1)},$$

então um intervalo aberto U de diâmetro menor que ϵ pode cobrir no máximo um dos pontos $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\}$, pois $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{(k-1)k} > \epsilon$. Portanto pelo menos k conjuntos de diâmetro ϵ são necessários para cobrir A , donde $N(\epsilon) \geq k$ e daí

$$\frac{\log N_A(\epsilon)}{\log 1/\epsilon} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}.$$

Por outro lado, $(k+1)$ intervalos de comprimento ϵ cobrem $[0, 1/k]$, restando $k-1$ pontos de A que podem ser cobertos por outros $k-1$ intervalos. Portanto $N(\epsilon) \leq 2k$, o que justifica a desigualdade à esquerda:

$$\frac{\log(2k)}{\log k(k-1)} \geq \frac{\log N_A(\epsilon)}{\log 1/\epsilon} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}.$$

Tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$, concluímos que $D_0(A) = \frac{1}{2}$.

Sendo A um conjunto enumerável, o fato de $D_0(A) = 1/2 \neq 0$ é uma estimativa muito generosa.

DIMENSÃO DE HAUSDORFF

Nesta seção definimos a dimensão de Hausdorff, que em muitos casos é equivalente à dimensão de contagem de caixas, mas que dá zero para conjuntos enumeráveis. Sua definição leva a cálculos pouco práticos, quando não se pode usar o limite que define a dimensão de contagem de caixas.

Seja X um espaço métrico compacto. Dado um conjunto compacto U num espaço métrico, o seu diâmetro é definido como segue:

$$\text{diam}(U) = \max_{x,y \in U} d(x,y)$$

Considere agora partições finitas $\{S_i\}$ de X , de tal forma que $X \subseteq \bigcup_i S_i$ e, para cada i ,

$$0 < \text{diam}(S_i) := \varepsilon_i \leq \delta.$$

Seja a quantidade

$$\Gamma_H^d(\delta) := \inf_{\{S_i\}} \sum_i \varepsilon_i^d, \quad (8)$$

em que o ínfimo é tomado sobre todas as partições com diâmetro menor ou igual a δ . A *medida de Hausdorff* de dimensão d é definida por

$$\Gamma_H^d(X) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \Gamma_H^d(\delta) \quad (9)$$

Proposição 1: Se X tem medida de Hausdorff finita em uma dimensão D_H , então X tem medida de Hausdorff nula para dimensões $d > D_H$ e medida de Hausdorff infinita para $d < D_H$. Chamamos D_H de *dimensão de Hausdorff* de X .

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $\{S_i\}$ tal que

$$0 \leq \sum_i \varepsilon_i^{D_H} < \Gamma_H^{D_H}(\mathbf{X}) + \epsilon < \infty .$$

Assim,

$$d > D_H \implies \sum_i \varepsilon_i^d = \sum_i \varepsilon_i^{d-D_H} \varepsilon_i^{D_H} \leq \delta^{d-D_H} \sum_i \varepsilon_i^{D_H},$$

o que dá

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i \varepsilon_i^d = 0 \quad ,$$

para toda partição com diâmetro menor que δ .

Se $D_H > 0$, podemos tomar $d < D_H$ e deduzir que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i \varepsilon_i^d = \infty \quad ,$$

para toda partição com diâmetro menor que δ . □

A medida de Haudorff é uma *medida exterior*, no sentido de que a união dos elementos das partições $\{S_i\}$, que são compactos, contém o conjunto \mathbf{X} .

Mostraremos agora uma relação entre a dimensão de Hausdorff e a dimensão de contagem de caixas. Seja \mathbf{X} um compacto contido num espaço cartesiano N -dimensional. Particionamos \mathbf{X} em cubos de aresta ε , de modo que se representarmos os cubos por S_i , então $\text{diam}(S_i) = \varepsilon_i = \varepsilon\sqrt{N}$, implicando que

$$\sum_i \varepsilon_i^d = N(\varepsilon)\varepsilon^d N^{\frac{d}{2}},$$

onde $N(\varepsilon)$ é o número de cubos da partição. Perceba que, dessa vez, não tomamos o ínfimo sobre as partições.

Sabemos que $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D_0}$, onde D_0 é a dimensão de contagem de caixas. Logo,

$$\sum_i \varepsilon_i^d = N(\varepsilon)\varepsilon^d N^{\frac{d}{2}} \approx \varepsilon^{d-D_0} N^{\frac{d}{2}} := \bar{\Gamma}_H^d(\delta) \quad ,$$

em que $\delta = \varepsilon N^{\frac{1}{2}}$.

Se tomarmos o limite de $\bar{\Gamma}_H^d(\delta)$ com $\delta \rightarrow 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{\Gamma}_H^d(\delta) = \bar{\Gamma}_H^d(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \text{se } d > D_0 \\ \infty, & \text{se } d < D_0 \end{cases}$$

Como não tomamos o ínfimo sobre as partições, resulta que

$$\bar{\Gamma}_H^d(\mathbf{X}) \geq \Gamma_H^d(\mathbf{X}) \implies D_0 \geq D_H. \tag{10}$$

O MAPA DO PADEIRO

Esta aplicação foi introduzido em Sistemas Dinâmicos como um modelo para o estudo de atratores. É definido como uma transformação do quadrado unitário sobre si mesmo, $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ dada por

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} \lambda_a x, & \text{se } y < \alpha \\ (1 - \lambda_b) + \lambda_b x, & \text{se } y > \alpha \end{cases}$$

$$\varphi_2(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{\alpha}, & \text{se } y < \alpha \\ \frac{y - \alpha}{\beta}, & \text{se } y > \alpha \end{cases}$$

onde $\beta = 1 - \alpha$, $0 < \alpha, \lambda_a, \lambda_b < 1$, e $\lambda_a + \lambda_b \leq 1$. Tomando um ponto inicial $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$, temos uma órbita gerada pela recorrência $(x_n, y_n) = \varphi(x_{n-1}, y_{n-1})$.

A ação do mapa do padeiro sobre o quadrado unitário pode ser visualizada na figura abaixo, retirada de [2]:

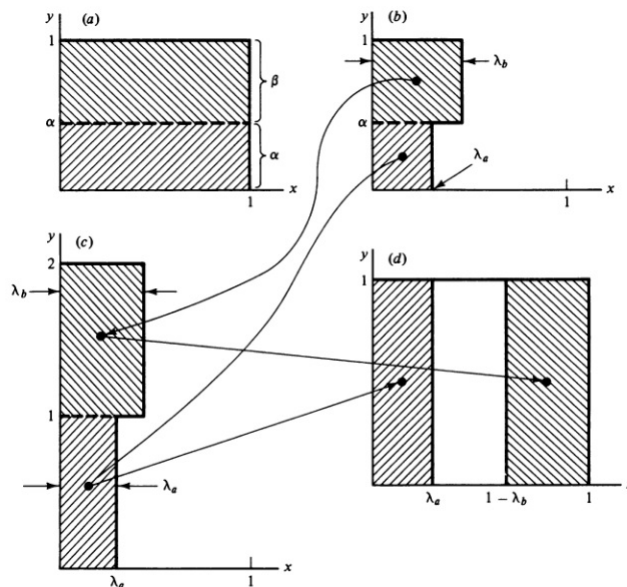


Figura 1: Ação do mapa do padeiro

Em primeiro lugar, a largura da parte do quadrado abaixo da reta $y = \alpha$ é reduzida por um fator λ_a , enquanto a parte acima da mesma reta é reduzida por um fator de λ_b . Em seguida, cada uma das partes é esticada até que tenham altura 1 (a parte inferior tem a altura aumentada por um fator de $1/\alpha$ e parte superior por um fator de $1/\beta$), e, por fim, a parte superior é transladada de forma que seu vértice inferior direito coincida com o ponto $x = 1$. Se aplicarmos a transformação mais uma vez, cada uma das faixas sombreadas na Figura (d) sofre uma deformação semelhante à deformação do quadrado unitário na primeira aplicação do mapa (veja a Figura , também retirada de [2]):

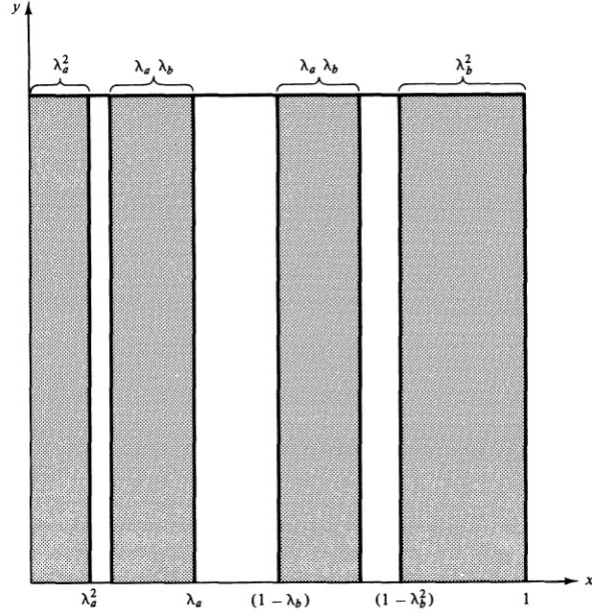


Figura 2: Segunda iteração do mapa do padeiro

Se permitirmos que o número de iterações do mapa do padeiro vá para infinito, as faixas sombreadas tenderão a um conjunto limite, chamado atrator, que recebe esse nome porque quase toda condição inicial tomada em $[0, 1] \times [0, 1]$ convergirá para pontos desse conjunto.

Calculemos a dimensão de contagem de caixas para o atrator, e posteriormente sua dimensão de Hausdorff. Seja A a área do atrator. O número de quadrados de tamanho ε necessários para cobri-lo será A/ε^2 , mas

$$\frac{A}{\varepsilon^2} = \frac{Lh}{\varepsilon^2} = \frac{L}{\varepsilon^2},$$

em que L é o comprimento da interseção do atrator com o eixo x e h é a altura do quadrado unitário ($h = 1$). Assim,

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(L/\varepsilon^2)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\log(L/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} + \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \right] = 1 + \widehat{D}_0, \quad (11)$$

onde \widehat{D}_0 é a dimensão de contagem de caixas da interseção do atrator com o eixo x .

Para calcular \widehat{D}_0 , utilizaremos a propriedade de auto-similaridade do atrator: se tomarmos, na Figura , a porção do quadrado contida no intervalo $[0, \lambda_a]$ e aumentarmos a sua largura por um fator de λ_a^{-1} , a Figura (d) é reproduzida. O mesmo acontece se tomarmos a porção contida em $[1 - \lambda_b, 1]$ e aumentarmos a sua largura por um fator de λ_b^{-1} .

Se $\widehat{N}(\varepsilon)$ é o número de intervalos de tamanho ε necessários para cobrir a interseção do atrator com o eixo x , $\widehat{N}_a(\varepsilon)$ é número de intervalos necessários para cobrir a porção $[0, \lambda_a]$ do mesmo e $\widehat{N}_b(\varepsilon)$ a porção $[1 - \lambda_b, 1]$, então

$$\widehat{N}(\varepsilon) = \widehat{N}_a(\varepsilon) + \widehat{N}_b(\varepsilon).$$

Mas, de acordo com a nossa discussão sobre a auto-similaridade do atrator, $\widehat{N}_a(\varepsilon) = \widehat{N}(\varepsilon/\lambda_a)$ e $\widehat{N}_b(\varepsilon) = \widehat{N}(\varepsilon/\lambda_b)$. Como $\widehat{N}(\varepsilon) \approx K\varepsilon^{-\widehat{D}_0}$,

$$K\varepsilon^{-\widehat{D}_0} = K\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_a}\right)^{-\widehat{D}_0} + K\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_b}\right)^{-\widehat{D}_0} \implies \lambda_a^{\widehat{D}_0} + \lambda_b^{\widehat{D}_0} = 1. \quad (12)$$

Temos então uma equação para \widehat{D}_0 em função dos parâmetros λ_a e λ_b . Se $\lambda_a = \lambda_b = 1/3$, então a interseção do atrator com o eixo x é o conjunto de Cantor dos terços médios, como é fácil verificar. Nesse caso $\widehat{D}_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$, o que dá para a dimensão do atrator

$$D_0 = 1 + \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Finalmente, vamos calcular a dimensão de Hausdorff para o mesmo atrator. A relação obtida em (11) continua válida para D_H , pelo mesmo motivo, ou seja,

$$D_H = 1 + \widehat{D}_H. \quad (13)$$

A medida de Hausdorff de todo o atrator, $\Gamma_H^d(\delta)$, é a soma da medida da porção contida em $[0, \lambda_a]$, $\Gamma_{Ha}^d(\delta)$ com a medida de porção contida em $[1 - \lambda_b, \lambda_b]$, $\Gamma_{Hb}^d(\delta)$:

$$\Gamma_H^d(\delta) = \Gamma_{Ha}^d(\delta) + \Gamma_{Hb}^d(\delta).$$

Usando novamente a propriedade de auto-similaridade, concluímos que

$$\Gamma_{Ha}^d(\delta) = \lambda_a^d \Gamma_H^d(\delta/\lambda_a) \quad e \quad \Gamma_{Hb}^d(\delta) = \lambda_b^d \Gamma_H^d(\delta/\lambda_b).$$

Como $\Gamma_H^d(\delta)$, com $\delta \rightarrow 0$, tende a zero para $d > \widehat{D}_H$ e tende a infinito para $d < \widehat{D}_H$, podemos escrever

$$\Gamma_H^d(\delta) \approx K\delta^{d-\widehat{D}_H},$$

quando δ é suficientemente pequeno. Então

$$\begin{aligned} \Gamma_H^d(\delta) &= \lambda_a^d \Gamma_H^d(\delta/\lambda_a) + \lambda_b^d \Gamma_H^d(\delta/\lambda_b) = \lambda_a^d K \left(\frac{\delta}{\lambda_a}\right)^{d-\widehat{D}_H} + \lambda_b^d K \left(\frac{\delta}{\lambda_b}\right)^{d-\widehat{D}_H} = K\delta^{d-\widehat{D}_H} \\ \implies 1 &= \lambda_a^{\widehat{D}_H} + \lambda_b^{\widehat{D}_H}, \end{aligned}$$

e, portanto, neste caso,

$$D_0 = D_H.$$

AGRADECIMENTOS

Este trabalho tem o apoio do MEC, através da bolsa de Lucas Hataishi que é aluno do PET-Física-UEL.

REFERÊNCIAS

- [1] LIMA, E. L. **Análise Real**, Volume 1, 5^a ed., IMPA, Rio de Janeiro. 2001.
- [2] OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. Cambridge Univ. Press, New York. 1983.



CONJUNTOS FINITOS, INFINITOS, ENUMERÁVEIS E CONTÁVEIS †

Pedro Henrique Takemura‡
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Londrina
pedrohtak@hotmail.com

Prof. Dr. Paulo Liboni
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Londrina
liboni@uel.br

Outubro de 2016

Resumo

George Cantor foi o matemático responsável por precisar conceitos até então tratados de maneira intuitiva pela comunidade científica. Entre estes conceitos, estão o de conjuntos finitos e infinitos. Dentre aqueles que são infinitos, Cantor estabeleceu um critério para classificar e organizar os conjuntos baseados em quão vasto seu infinito é. A ideia central empenhada por Cantor foi sistematizar a vastidão de um conjunto através do uso de bijeções.

Motivados por este pequeno histórico do problema, o propósito deste trabalho é apresentar a base da classificação dos conjuntos apresentadas por Cantor: os conjuntos finitos e infinitos. Além disso, nos preocuparemos com o primeiro tipo de infinito, o enumerável, representado por Cantor pela letra \aleph_0 . Também apresentaremos neste trabalho exemplos e consequências das definições.

Resultados e Discussão

1 Conjuntos e Funções

1.1 Conjuntos

Definição 1.1. Sejam A e B conjuntos:

- (a) Se x é um elemento de A , dizemos que x pertence a A e denotaremos por:

$$x \in A$$

†Este trabalho contou com o apoio financeiro do programa PET, vinculado ao Ministério da Educação.

‡Aluno do curso de graduação em Matemática, modalidade bacharelado.

(b) Analogamente, se x não é um elemento de A , dizemos que x não pertence a A :

$$x \notin A$$

(c) Se todos os elementos de A pertencem a B , então A é um subconjunto de B e dizemos que A está contido em B :

$$A \subseteq B$$

Observe que A e B podem ser o mesmo conjunto, ou seja, todo conjunto está contido nele próprio.

(d) Dizemos que A é um subconjunto próprio de B se A está contido em B e se existe pelo menos um elemento de B que não pertença a A :

$$A \subset B$$

Definição 1.2. Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais se A está contido em B e vice-versa. Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

Podemos definir um conjunto C qualquer citando seus elementos, ou ainda especificando uma propriedade que o define. Se P é uma propriedade a qual elementos de um conjunto S satisfaz, então definimos C como

$$\{x \in S : P(x)\}.$$

Isto significa que o conjunto C é definido pelos elementos x de S tal que P é verdade.

Conjuntos especiais (usaremos o símbolo “ $:=$ ” para denotar como o conjunto será definido):

1. Conjunto dos naturais: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
2. Conjunto dos inteiros: $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
3. Conjunto dos racionais: $\mathbb{Q} := \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$
4. Conjunto dos reais: \mathbb{R}

1.2 Operações com Conjuntos

Definição 1.3. Consideremos os conjuntos A e B ,

(a) A **união** de A e B é dada por:

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

(b) A **intersecção** de A e B é dada por:

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

(c) O **complemento de B em relação a A** é dado por:

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Definição 1.4. O conjunto que não possui elemento algum é chamado de **conjunto vazio** representado por \emptyset . Se A e B não possuem em comum, então são chamados de **conjuntos disjuntos** além disso, temos

$$A \cap B = \emptyset$$

Teorema 1.5. (*Leis de DeMorgan*) Se A, B, C são conjuntos, então:

$$(a) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$(b) A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Demonstração:

(a) Tomemos $x \in A \setminus (B \cup C)$. Segue que $x \in A$ e $x \notin (B \cup C)$. Se $x \notin (B \cup C)$, então $x \notin B$ e $x \notin C$. Temos que $x \in A$ e $x \notin B$ e, além disso, $x \in A$ e $x \notin C$, ou seja $x \in (A \setminus B)$ e $x \in (A \setminus C)$, o que mostra que $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Agora, tomemos $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Segue que $x \in (A \setminus B)$ e $x \in (A \setminus C)$, isto é $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$. Sendo assim, temos $x \in A$ e $x \notin (B \cup C)$, ou seja, $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Portanto, concluímos que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(b) Tomemos $x \in A \setminus (B \cap C)$. Segue que $x \in A$ e $x \notin (B \cap C)$. Se $x \notin (B \cap C)$, então $x \notin B$ ou $x \notin C$. Deste modo, temos $x \in A$ e $x \notin B$ ou $x \in A$ e $x \notin C$, isto é $x \in (A \setminus B)$ ou $x \in (A \setminus C)$, o que mostra que $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Agora, tomemos $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Segue que, $x \in (A \setminus B)$ ou $x \in (A \setminus C)$. Temos que, $x \in A$ e $x \notin B$ ou $x \notin C$. Se $x \notin B$ ou $x \notin C$, então $x \notin (B \cap C)$. Sendo assim, $x \in A$ e $x \notin (B \cap C)$, ou seja, $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Portanto, concluímos que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

c.q.d.

Definição 1.6. Consideremos uma coleção finita de conjuntos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ (a) Dizemos que união deles é o conjunto A que é formado por todos os elementos de pelo menos um dos conjuntos A_k . Em símbolos:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k := \{x : x \in A_k, \text{ para algum } k \leq n \text{ e } k, n \in \mathbb{N}\}$$

(b) Dizemos que a intersecção deles é o conjunto A que é formado pelos elementos que pertencem a todos os conjuntos A_k .

$$\bigcap_{k=1}^n A_k := \{x : x \in A_k, \text{ para todo } k \leq n \text{ e } k, n \in \mathbb{N}\}$$

Obs: Esta definição pode ser estendida para uma coleção infinita de conjuntos.

1.3 Produto Cartesiano e Funções

Antes de falarmos sobre função, primeiro definiremos um produto cartesiano.

Definição 1.7. Se A e B são conjuntos não-vazios, então o **produto cartesiano** $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tal que $a \in A$ e $b \in B$.

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Observe que o conjunto $A \times B$ é um conjunto cujos elementos são pontos de coordenadas (a, b) .

Uma vez que produto cartesiano está definido, definiremos agora função.

Definição 1.8. Sejam A e B conjuntos. Uma **função** f de A para B ($f : A \rightarrow B$) é um conjunto f dos pares ordenados de $A \times B$ tal que para todo $a \in A$ existe somente um $b \in B$ com $(a, b) \in f$. Perceba que f é um subconjunto de $A \times B$.

Chama-se **domínio** de f o conjunto A , denotado por $Dom(f) = A$. O **contradomínio** de f é o conjunto B , denotado por $CD(f) = B$. A **imagem** de f , denotado por $Im(f)$, são elementos de B que foram associados a elementos de $Dom(f)$. Em símbolos:

$$y \in Im(f) \Leftrightarrow \exists x \in Dom(f) \text{ tal que } (x, y) \in f$$

Note que $Im(f) \subseteq CD(f)$.

Geralmente, se (a, b) é elemento de f , então escrevemos

$$f(a) = b \text{ ou } a \mapsto b$$

Isto é, b é o valor que f assume em a , ou ainda, diremos que b é a imagem de a em f .

1.4 Imagem direta e Imagem inversa

Consideremos uma função $f : A \rightarrow B$

Definição 1.9. Se $E \subseteq A$, dizemos que a **imagem direta** de E é o subconjunto $f(E)$ de B dado por:

$$f(E) := \{f(x) : x \in E\}, \text{ isto é } y \in f(E) \Leftrightarrow \exists x \in E : f(x) = y$$

Seja $H \subseteq B$, dizemos que a **imagem inversa** de H é o subconjunto $f^{-1}(H)$ de A dado por:

$$f^{-1}(H) := \{x : f(x) \in H\}, \text{ isto é } x \in f^{-1}(H) \Leftrightarrow f(x) \in H.$$

1.5 Tipos especiais de função

Definição 1.10. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função, então diremos que:

(a) A função f é **injetora** se para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in A$, temos que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

. O que é equivalente a $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

- (b) A função f é **sobrejetora** se para todo $y \in CD(f)$, existir $x \in D(f)$ tal que $y = f(x)$.
(c) Se a função f for simultaneamente injetora e sobrejetora, então dizemos que f é **bijetora**.

1.6 Função inversa

Sabe-se que sendo f é uma função de A para B , então f é um subconjunto do pares ordenados (a, b) de $A \times B$. Só que, se pegarmos g , obtida de f , como sendo subconjunto dos pares (b, a) de $B \times A$ nem sempre g é uma função. Pois poderíamos ter elementos do domínio da g que não possuem imagem em A , ou ainda, ter um elemento do domínio da g que está sendo associado a mais de um elemento do contradomínio.

Definição 1.11. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função bijetora, então

$$g := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$$

é uma função g de B para A que é chamada de **função inversa** de f e é denotada por $f^{-1} = g$. Uma vez que f é bijetora temos que f^{-1} também é, e ainda devemos perceber as relações entre os domínios e contradomínios da f e da f^{-1} . Note que $D(f) = Im(f^{-1}) = CD(f^{-1})$ e que $D(f^{-1}) = Im(f) = CD(f)$.

1.7 Composição de Função

Segue agora uma definição para a obtenção de uma nova função fazendo a interação de duas funções compatíveis. Esta função é chamada de função composta. Formalmente temos:

Definição 1.12. Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, com $Im(f) \subseteq D(g)$, então a **função composta** $g \circ f$ é a função $g \circ f : A \rightarrow C$, definida por:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \forall x \in A.$$

Teorema 1.13. *Sejam as funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ e considere $H \subseteq C$, nestas condições:*

$$(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$$

Demonstração: Tomemos $x \in (g \circ f)^{-1}(H)$. Segue da definição de imagem inversa que $(g \circ f)(x) \in H$. Sabemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, então $g(f(x)) \in H$. Usando a definição de imagem inversa novamente, temos que $f(x) \in g^{-1}(H)$. Analogamente temos que $x \in f^{-1}(g^{-1}(H))$. Reciprocamente, seja $x \in f^{-1}(g^{-1}(H))$, então $f(x) \in g^{-1}(H)$. Assim, temos que $g(f(x)) \in H$, isto é, $(g \circ f)(x) \in H$. O que implica que $x \in (g \circ f)^{-1}(H)$.

c.q.d.

1.8 Restrição

Definiremos agora uma operação, chamada restrição, que nos permite obter uma função a partir de outro dada.

Definição 1.14. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função e $A_1 \subseteq A$, então definimos a função $f_1 : A_1 \rightarrow B$ como:

$$f_1(x) := f(x) \quad \forall x \in A_1.$$

A função f_1 é chamada de restrição de f para A_1 .

A restrição é muito importante quando tratamos de funções inversas. Uma vez que se uma função não é bijetora, então através de restrições esta função possui inversa.

2 Indução Matemática

A indução matemática é uma ferramenta muito utilizada para mostrar a veracidade de uma proposição sobre os números naturais.

2.1 Princípio da Boa Ordenação

O **Princípio da Boa Ordenação** nos diz que todo subconjunto não-vazio dos números naturais possui um elemento mínimo. Ou seja, se $S \subseteq \mathbb{N}$ e $S \neq \emptyset$, então existe $m \in S$ tal que $m \leq k$ para todo $k \in S$.

Teorema 2.1. (Princípio da Indução Matemática)

Seja S um subconjunto de \mathbb{N} tal que:

- (a) $1 \in S$;
- (b) para todo $k \in \mathbb{N}$, se $k \in S$, então $(k + 1) \in S$.

Nestas condições, $S = \mathbb{N}$.

Demonstração: Suponha por absurdo que $S \neq \mathbb{N}$. Segue que o conjunto $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$. Sendo assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $m \in \mathbb{N} \setminus S$ tal que $m \leq k$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus S$. Isto é, m é elemento mínimo de $\mathbb{N} \setminus S$. Por hipótese, $1 \in S$ e sabemos que $1 \in \mathbb{N}$. Como $m \in \mathbb{N} \setminus S$ e $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$, então $m \neq 1$, o que implica que $m > 1$. Uma vez que $m - 1 \in \mathbb{N}$ e $m - 1 < m$, temos que $m - 1 \in S$, pois se $m - 1 \notin S$ teríamos $m - 1 \in \mathbb{N} \setminus S$ e m não seria elemento mínimo. Dito isto, aplicamos a hipótese (b), que nos diz que se $k = m - 1 \in S$, então $k + 1 = (m - 1) + 1 = m \in S$. Um absurdo, pois quando $m \in \mathbb{N} \setminus S$, temos $m \in \mathbb{N}$ e $m \notin S$. Portanto, concluímos que $S = \mathbb{N}$

c.q.d

O Princípio de Indução é geralmente usado pra mostrar que certas proposições referentes aos números naturais são válidas. Dito isto, podemos reformular o princípio com relação a essas proposições.

Teorema 2.2. (Princípio de Indução Matemática - Reformulação)

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma proposição referente a n . Se:

- (a') $P(1)$ é verdade, e
 - (b') para todo $k \in \mathbb{N}$, se $P(k)$ é verdade, então $P(k + 1)$ é verdade
- então $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos a equivalência entre este princípio e o citado em 2.2. Para isto, chamamos de S o conjunto formado pelos naturais tais que $P(n)$ é verdade, ou seja, $S := \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdade}\}$.

Sendo S definido desta forma, temos que (a) equivale a (a'), assim como (b) equivale a (b'). Concluindo-se $P(n)$ ser verdade para todo $n \in \mathbb{N}$ é o mesmo que concluir que $S = \mathbb{N}$.

Em alguns casos, teremos proposições que são verdadeiras a partir de um certo número natural. Enunciaremos agora a 2ª versão do princípio de indução.

Teorema 2.3. (Princípio de Indução Matemática - 2ª versão)

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma proposição referente aos naturais $n \geq n_0$. Se:

(a) $P(n_0)$ é verdade, e

(b) para todo $k \geq n_0$, se $P(k)$ é verdade, então $P(k+1)$ é verdade
então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$.

Demonstração: Seja A o conjunto definido pelos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ e $P(n)$ é falso. Como queremos mostrar que $P(n)$ é verdade para todo n natural, mostremos por absurdo que $A = \emptyset$. Suponha que $A \neq \emptyset$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $m \in A$ tal que $m \leq k$ para todo $k \in A$. Ou seja m é elemento mínimo de A . Como $m \in A$ é elemento mínimo e $n_0 \notin A$, pois $P(n_0)$ é verdade (por hipótese), temos que $m > n_0$, e conseqüentemente $m-1 \geq n_0$. Uma vez que $m-1 \leq m$, $m-1 \notin A$, caso contrário $m-1$ seria elemento mínimo. Sendo assim, $P(m-1)$ é verdade. Agora, por (b), como $P(m-1)$ é verdade, então $P((m-1)+1) = P(m)$ é verdade. Concluindo assim que $m \notin A$, o que é um absurdo, pois m é elemento mínimo de A . Portanto mostramos que $A = \emptyset$. Concluimos então que $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$.

c.q.d.

Teorema 2.4. (Princípio Forte de Indução)

Seja S um subconjunto de \mathbb{N} tal que

(a'') $1 \in S$;

(b'') para todo $k \in \mathbb{N}$, se $\{1, 2, 3, \dots, k\} \subset S$, então $k+1 \in S$.

Nestas condições $S = \mathbb{N}$.

Observemos a equivalência com o Princípio de Indução de 2.2. De fato, as primeiras condições são equivalentes. Vejamos agora a segunda condição. Supondo que $k \in S$, temos que se $m \leq k$ com $m \in \mathbb{N}$ então $m \in S$. Ou seja, $m = 1, 2, 3, \dots, k$. Sendo assim, $\{1, 2, 3, \dots, k\} \subset S$. Daí, mostramos que $k+1 \in S$ e, portanto, concluimos que $S = \mathbb{N}$.

3 Conjuntos Finitos e Infinitos

Definição 3.1. Consideremos um conjunto S

(a) O conjunto vazio é dito que não possui elementos.

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que S possui n elementos se há uma bijeção de \mathbb{N}_n em S , onde $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

(c) O conjunto S é **finito** se ele for vazio ou se possui n elementos, para algum $n \in \mathbb{N}$.

(d) O conjunto S é **infinito** se ele não for finito.

Teorema 3.2. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Então não existe uma injeção de \mathbb{N}_m em \mathbb{N}_n .

Demonstração: Mostraremos por indução em n .

Assim, seja $n = 1$ e $m > 1$. É fácil observar que $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_1$ é não injetora, pois $f(1) = f(2) = \dots = f(m) = 1$.

Agora, suponha $1 < k < m$ e além disso que $g : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_k$ é não injetora. Mostremos que se $k + 1 < m$, então $h : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_{k+1}$ é não injetora.

Caso 1: Se $h(\mathbb{N}_m) \subseteq \mathbb{N}_k \subset \mathbb{N}_{k+1}$, a hipótese de indução implica que h é não injetora de \mathbb{N}_m em \mathbb{N}_k , e portanto não é em \mathbb{N}_{k+1} .

Caso 2: Suponha $h(\mathbb{N}_m)$ não contido em \mathbb{N}_k . Então, se existem $c_i \in \mathbb{N}_m$ com $i = 1, \dots, n$, tais que $h(c_i) = k + 1$, então h não é uma injeção. Por isso, suponha que somente um $p \in \mathbb{N}_m$ é tal que $h(p) = k + 1$. Seja $h_1 : \mathbb{N}_{m-1} \rightarrow \mathbb{N}_k$ definida por:

$$h_1(q) = \begin{cases} h(q) & \text{se } q = 1, \dots, p-1 \\ h(q+1) & \text{se } q = p, \dots, m-1 \end{cases}$$

Uma vez que $k + 1 < m \Leftrightarrow k < m - 1$, temos que a hipótese de indução implica que h_1 não é injetora. E conseqüentemente h também não é injetora.

c.q.d

Lema 3.1. Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ são bijeções, então $g \circ f : A \rightarrow C$ é uma bijeção.

Demonstração: Devemos mostrar que $g \circ f$ é sobrejetora e injetora.

Tomemos $c \in C$. Como g é sobrejetora, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Como f é sobrejetora, se $b \in B$, então existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Logo, $g \circ f = g(f(a)) = c$, o que mostra que $g \circ f$ é sobrejetora.

Agora, sejam $p, q \in \text{Dom}(g \circ f)$ e suponha $g \circ f(p) = g \circ f(q)$. Segue que $g(f(p)) = g(f(q))$, como g injetora, temos que $f(p) = f(q)$. E como f é injetora, então $p = q$. Logo, $g \circ f$ é injetora.

c.q.d.

Lema 3.2. Se $f : A \rightarrow B$ é bijetora, então $f^{-1}(f(A)) = A$ e $f(f^{-1}(B)) = B$.

Demonstração: Seja $x \in f^{-1}(f(A))$, então $f(x) \in f(A)$. Ou seja, existe $x_0 \in A$ tal que $f(x) = f(x_0)$. E como f é injetora, segue que $x = x_0$. Agora seja $x \in A$, assim $f(x) \in f(A)$, e conseqüentemente $x \in f^{-1}(f(A))$. Logo $f^{-1}(f(A)) = A$.

Agora, tomemos $y \in f(f^{-1}(B))$. Segue que existe $x \in f^{-1}(B)$ tal que $f^{-1}(y) = x$. Deste modo, $f^{-1}(y) \in f^{-1}(B)$, o que implica em $y \in B$. Reciprocamente, se $y \in B$, temos que $f^{-1}(y) \in f^{-1}(B)$, e conseqüentemente $y \in f(f^{-1}(B))$. Logo $f(f^{-1}(B)) = B$.

c.q.d.

Lema 3.3. : Se $f : A \rightarrow B$ é uma bijeção, então $g = f^{-1} : B \rightarrow A$ também é.

Demonstração: Sejam $y_1, y_2 \in B$, como f é sobrejetora, existe $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Assim, suponha $g(y_1) = g(y_2)$, o que equivale a $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$. Isto é, $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$, o que implica em $x_1 = x_2$. Logo, f^{-1} é injetora.

Agora, mostremos que f^{-1} é sobrejetora. Assim, tome $x \in A$. Como f é função, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$. Logo, $x = f^{-1}(y) = g(y)$, o que mostra que f^{-1} é sobrejetora.

c.q.d.

Teorema 3.3. (Teorema da Unicidade) Se S é um conjunto finito não vazio, então o número de elementos $n \in \mathbb{N}$ é único.

Demonstração: Sejam $f_1 : S \rightarrow \mathbb{N}_m$ e $f_2 : S \rightarrow \mathbb{N}_n$ bijeções. Vejamos agora os seguintes casos:

Caso 1: Suponha $m > n$. Pelo Lema 3.1 e 3.3, temos que $f_2 \circ f_1^{-1} : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$ é uma bijeção, porém isto contraria o Teorema 3.1.

Caso 2: Suponha $n > m$. Pelo Lema 3.1 e 3.3, temos que $f_1 \circ f_2^{-1} : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_m$ é uma bijeção, porém isto também contraria o Teorema 3.1.

Logo, concluímos que $m = n$.

c.q.d.

Teorema 3.4. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então não existe uma injeção de \mathbb{N} em \mathbb{N}_n .

Demonstração: Suponha que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_n$ é injetora, e seja $m = n + 1$.

Como $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}$, podemos fazer uma restrição de f como sendo $f_1 : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$, que também é injetora. Porém, isto contrário o Teorema 3.1. Portanto, não existe uma injeção de \mathbb{N} em \mathbb{N}_n .

c.q.d.

Teorema 3.5. : O conjunto \mathbb{N} dos números naturais é infinito.

Demonstração: Suponha \mathbb{N} finito. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}$ é bijetora. Assim, pelo Lema 3.3, $f^{-1}\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_n$ também é bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora. O que contraria o teorema anterior.

c.q.d.

Teorema 3.6. (a) Se A é um conjunto com m elementos e B um conjunto com n elementos e, além disso, $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B$ tem $m + n$ elementos.

(b) Se A é um conjunto com m elementos e C um subconjunto unitário de A , então $A \setminus C$ possui $m - 1$ elementos.

(c) Se C é um conjunto infinito e B um conjunto finito, então $C \setminus B$ é infinito.

Demonstração:

(a) Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{N}_m$ e $g : B \rightarrow \mathbb{N}_n$ bijeções. Mostremos que $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}_{m+n}$ é uma bijeção, onde h é definida por:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se } i \in A \\ g(i) + m & \text{se } i \in B \end{cases}$$

Para mostrar que h é sobrejetora, vamos supor $j \in \mathbb{N}_{m+n}$

Caso 1: Se $1 \leq j \leq m$, então $j \in \mathbb{N}_m$. Como f é sobrejetora, existe $a \in A$ tal que $f(a) = j$. Observe que $h(a) = f(a) = j$.

Caso 2: Se $m < j \leq m + n \Leftrightarrow 0 < j - m \leq n$, então $j - m \in \mathbb{N}_n$. E como g é sobrejetora, existe $b \in B$ tal que $g(b) = j - m$.

Assim, $h(b) = g(b) + m = (j - m) + m = j$. E portanto h é sobrejetora.

Agora, vamos mostrar que h é injetora. Sejam $i_1, i_2 \in \text{Dom}(h)$ e suponhamos $h(i_1) = h(i_2)$. Desta suposição, seguem os seguintes casos.

Caso 1: $f(i_1) = f(i_2)$, e como f é injetora, temos que $i_1 = i_2$.

Caso 2: $f(i_1) = g(i_2) + m$. Observe que $f(i_1) \in \mathbb{N}_m$ e $g(i_2) + m \notin \mathbb{N}_m$. Deste modo temos que este caso não ocorre.

Caso 3: $g(i_1) + m = f(i_2)$. Caso análogo ao anterior.

Caso 4: $g(i_1) + m = g(i_2) + m \Leftrightarrow g(i_1) = g(i_2)$, e como g é injetora, temos que $i_1 = i_2$.

Portanto, h é injetora. O que h é bijetora.

- (b) Por hipótese, o conjunto A possui m elementos, e $C \subset A$ possui 1 elemento. Seja x a quantidade de elementos de $A \setminus C$.

Note que $(A \setminus C) \cup C = A$, e além disso, $(A \setminus C) \cap C = \emptyset$. Assim, por (a), quando $(A \setminus C) \cap C = \emptyset$, o número de elementos de $(A \setminus C) \cup C$ é $x + 1$. Mas $(A \setminus C) \cup C = A$, então $x + 1 = m$ o que implica que $x = m - 1$. Portanto a quantidade de elementos de $A \setminus C$ é $m - 1$.

- (c) Vejamos os seguintes casos:

Caso 1: Se $B = \emptyset$, então $C \setminus B = C$, que é infinito;

Caso 2: Se $C \cap B = \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, então $C \setminus B = C$, que é infinito;

Caso 3: Se $C \cap B \neq \emptyset$ e $B \subset C$. Observe que $(C \setminus B) \cup B = C$ e $(C \setminus B) \cap B = \emptyset$. Assim, suponha que $(C \setminus B)$ é finito, então possui m elementos. Seja B com n elementos. Como $(C \setminus B) \cap B = \emptyset$, por (a), temos que $(C \setminus B) \cup B$ possui $m + n$ elementos, um absurdo pois $(C \setminus B) \cup B = C$ é infinito. Logo $C \setminus B$ é infinito

Caso 4: Se $C \cap B \neq \emptyset$ e B não contido em C . Seja $C \cap B = B'$. Note que $B' \subset C$. Assim, pelo caso anterior, $C \setminus B'$ é infinito, e conseqüentemente $C \setminus B$ também é.

c.q.d.

Teorema 3.7. *Sejam S e T conjuntos e $T \subseteq S$:*

- (a) *Se S é um conjunto finito, então T é finito;*
(b) *Se T é um conjunto infinito, então S é infinito.*

Demonstração:

- (a) Se $T = \emptyset$, então T é finito. Por isso, suponha $T \neq \emptyset$ e seja n a quantidade de elementos de S .

Se $n = 1$, então o único subconjunto T não vazio de S é o próprio S . Logo, T é finito.

Agora, suponha que todo subconjunto de um conjunto com k elementos é finito. Mostraremos que todo subconjunto de um conjunto S com $k + 1$ elementos é finito. Se S possui $k + 1$ elementos, existe uma bijeção $f : \mathbb{N}_{k+1} \rightarrow S$. Por hipótese, $T \subseteq S$. Note que se $f(k + 1) \in T$, então o conjunto T coincide com o conjunto S , que é finito. Assim, se $f(k + 1) \notin T$, então T é subconjunto de $S_1 = S \setminus \{f(k + 1)\}$ que possui k elementos. Logo, T é finito.

- (b) Uma vez que são proposições equivalentes, a proposição (b) fica provado por (a).

c.q.d.

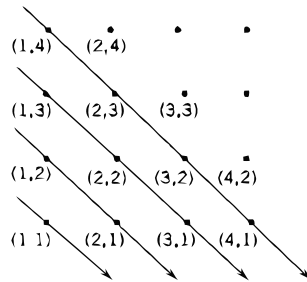
3.1 Conjuntos Contáveis

Definição 3.8. Seja S um conjunto, então:

- (a) Dizemos que S é **enumerável** (ou infinito contável) se existe uma bijeção de \mathbb{N} em S ;
- (b) O conjunto S é dito **contável** se ele for finito ou enumerável;
- (c) Se S não for contável, então ele é **não-contável**.

Teorema 3.9. O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração: Devemos mostrar que existe uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em \mathbb{N} . Primeiramente observemos o seguinte esquema.



Pela figura acima podemos definir uma função ψ que nos dá a quantidade total de pontos até a k -ésima diagonal.

$$\psi(k) = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k}{2}(k + 1)$$

É fácil mostrar que $\psi(k) < \psi(k + 1)$, para qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, isto é ψ é crescente. E ainda temos que

$$\psi(k) = \psi(k - 1) + k$$

Note ainda que o ponto (m, n) pertence a k -ésima diagonal quando $k = m + n - 1$. Além disso m é o m -ésimo ponto da diagonal. Agora precisamos definir uma função que associa a cada par ordenado a um número natural. Isto significa que precisamos de uma maneira para contar cada par ordenado. Deste modo, para contarmos o ponto (m, n) , nós primeiro achamos a quantidade de total de pontos até a diagonal $k - 1 = m + n - 2$, isto é $\psi(k - 1)$, e em seguida somamos m . Assim, temos a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$h(m, n) = \psi(m + n - 2) + m$$

Agora, para mostrarmos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, basta mostrar que h é bijetora.

Provemos que h é injetora. Assim, suponha $(m, n) \neq (m', n')$. Então $m + n \neq m' + n'$ (diagonais distintas) ou $m + n = m' + n'$ com $m \neq m'$ (mesma diagonal). Seguem os seguintes casos:

Caso 1: Se $m + n \neq m' + n'$ então $m + n < m' + n'$ ou $m + n > m' + n'$. Sem perda de generalidade, suponha $m + n < m' + n'$. Sabendo que ψ é crescente e usando o fato de

$\psi(k) = \psi(k-1) + k$, temos:

$$\begin{aligned} h(m, n) &= \psi(m+n-2) + m \\ &\leq \psi(m+n-2) + (m+n-1) \\ &= \psi(m+n-1) \leq \psi(m'+n'-2) \\ &< \psi(m'+n'-2) + m' = h(m', n') \end{aligned}$$

Logo $h(m, n) < h(m', n')$.

Caso 2: Se $m+n = m'+n'$ com $m \neq m'$, então pertencem a mesma diagonal k . Assim, $m+n-1 = m'+n'-1 \Leftrightarrow m+n-2 = m'+n'-2$. Segue então:

$$\psi(m+n-2) = \psi(m'+n'-2) \Rightarrow h(m, n) - m = h(m', n') - m'.$$

E como $m \neq m'$ temos que $h(m, n) \neq h(m', n')$. Portanto, h é injetora.

Provemos que h é sobrejetora. É fácil de ver que $h(1, 1) = 1$. Assim, seja $p \in \mathbb{N}$ com $p \geq 2$. Devemos achar $(m_p, n_p) \in \mathbb{N}$ de tal forma $h(m_p, n_p) = p$. Uma vez que $p < \psi(p)$, temos que $E_p = \{k \in \mathbb{N} : p \leq \psi(k)\}$ é não vazio (pois $p \in E_p$). Pelo Princípio da Boa Ordem, seja $k_p > 1$ elemento mínimo de E_p (k_p representa a diagonal que contém p). Como $p \geq 2$, segue que:

$$\psi(k_p - 1) < p \leq \psi(k_p) \Leftrightarrow \psi(k_p - 1) < p \leq \psi(k_p - 1) + k_p \Leftrightarrow 1 \leq p - \psi(k_p - 1) \leq k_p.$$

Veja que $k_p = m_p + n_p - 1$, pois (m_p, n_p) pertence a diagonal k_p . Definamos:

$$\begin{aligned} m_p &:= p - \psi(k_p - 1) \quad \text{tal que} \quad 1 \leq m_p \leq k_p, \\ n_p &:= k_p - m_p + 1 \quad \text{tal que} \quad 1 \leq n_p \leq k_p \end{aligned}$$

Veja que $(m_p, n_p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim, no que segue, temos que

$$h(m_p, n_p) = \psi(m_p + n_p - 2) + m_p = \psi((m_p + n_p - 1) - 1) + m_p = \psi(k_p - 1) + m_p = p.$$

O que mostra que h é sobrejetora. E portanto, uma vez mostrado que h é uma bijeção, concluímos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável

c.q.d.

Teorema 3.10. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$ e A é infinito, então existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, φ é uma bijeção.*

Demonstração: Definamos φ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma vez que A é infinito, temos que $A \neq \emptyset$. Pelo Princípio da Boa Ordem, definiremos $\varphi(1)$ como elemento mínimo de A . Então, $\varphi(1) \geq 1$. Como A é infinito, o conjunto $A_1 = A \setminus \{\varphi(1)\}$ é não vazio. Definiremos $\varphi(2)$ como elemento mínimo de A_1 . Segue que $\varphi(2) > \varphi(1) \geq 1$. Sendo assim, $\varphi(2) \geq 2$.

Agora, suponha que φ esteja definido para satisfazer $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ com $n = 1, \dots, k-1$. Então, $\varphi(k) > \varphi(k-1) \geq k-1$, ou seja, $\varphi(k) \geq k$. Por A ser infinito, temos que $A_k = A \setminus \{\varphi(1), \dots, \varphi(k)\}$ é não vazio. Definiremos $\varphi(k+1)$ como elemento mínimo de A_k . Então $\varphi(k+1) > \varphi(k) \geq k$, e conseqüentemente $\varphi(k+1) \geq k+1$.

Portanto φ está definido para todo $n \in \mathbb{N}$ e satisfaz a desigualdade desejada.

Provemos que φ é injetora. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$. Então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m = r + n$. Se $r = 1$, então $\varphi(m) = \varphi(1 + n) > \varphi(n)$. Agora, suponha $\varphi(k + n) > \varphi(n)$. Vamos mostrar que $\varphi((k + 1) + n) > \varphi(n)$. De fato, observe que $\varphi((k + 1) + n) = \varphi((k + n) + 1) > \varphi(k + n) > \varphi(n)$. Sendo assim, $\varphi(m) > \varphi(n)$ para qualquer que seja $m > n$. Logo, φ é injetora.

Provemos agora que φ é sobrejetora. Deste modo, suponha φ não sobrejetora. Então o conjunto $\bar{A} = A \setminus \varphi(\mathbb{N})$ é não vazio. Seja p elemento mínimo de \bar{A} e suponha $p \in \{\varphi(1), \dots, \varphi(p)\}$. De fato, se $p \notin \{\varphi(1), \dots, \varphi(k)\}$, então $p \in A \setminus \{\varphi(1), \dots, \varphi(p)\} = A_p$. E para que $\varphi(p + 1)$ seja elemento mínimo de A_p , teríamos $\varphi(p + 1) \leq p$. Porém isto contraria o fato de $\varphi(p + 1) > \varphi(p) \geq p$. Logo, o conjunto $\bar{A} = \emptyset$ e φ é sobrejetora.

Portanto, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ é bijetora.

c.q.d.

Teorema 3.11. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$, então A é contável.*

Demonstração: Se A é finito, então A é contável. Assim, suponha A infinito. Pelo teorema anterior segue que existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ bijetora. Logo, A é enumerável e consequentemente contável.

c.q.d.

Lema 3.4. *Se $\psi : T \rightarrow S$ é uma bijeção e S é contável, então T é contável.*

Demonstração: Analisemos os seguintes casos:

Caso 1: Se S for finito, então existe $\psi_1 : S \rightarrow \mathbb{N}_n$ bijetora para algum $n \in \mathbb{N}$. Observe que $\psi_1 \circ \psi : T \rightarrow \mathbb{N}_n$ é uma bijeção (pelo Lema 3.1). Logo T é finito.

Caso 2: Se S for enumerável, existe $\psi_2 : S \rightarrow \mathbb{N}$ bijetora. Observe que $\psi_2 \circ \psi : T \rightarrow \mathbb{N}$ é uma bijeção (pelo Lema 3.1). Logo T é enumerável.

Portanto, pelos casos 1 e 2, temos que T é contável.

c.q.d.

Lema 3.5. *Se $\psi : S \rightarrow T$ é injetora e $S_1 \subseteq S$, então existe $\psi_1 : S_1 \rightarrow \psi(S_1)$ bijetora.*

Demonstração: Definiremos ψ_1 por $\psi_1(s) = \psi(s)$. Mostremos que ψ_1 é bijetora.

Sejam, $p, q \in S_1$ e suponha $\psi_1(p) = \psi_1(q)$. Note que $\psi_1(p) = \psi(p)$ e $\psi_1(q) = \psi(q)$, temos $\psi(p) = \psi(q)$. Como ψ é injetora, temos $p = q$. Logo, ψ_1 é injetora.

Agora, tome $t \in \psi(S_1)$. Segue que existe $s \in S_1$ tal que $\psi(s) = t$. Observe que $\psi_1(s) = \psi(s) = t$. Logo, ψ_1 é sobrejetora.

c.q.d.

Teorema 3.12. *Sejam S e T conjuntos e $T \subseteq S$.*

(a) *Se S é contável, então T é contável;*

(b) *Se T é não contável, então S é não contável.*

Demonstração:

- (a) Se S for finito, segue do Teorema 3.6 que T também é finito. Assim, suponha S enumerável. Então existe um bijeção $\psi : S \rightarrow \mathbb{N}$. Como $\psi(S) \subseteq \mathbb{N}$, segue do Teorema 3.9 que $\psi(S)$ é contável. Note que $\psi(T)$ é contável, pois $\psi(T) \subset \psi(S) \subseteq \mathbb{N}$. Aplicando o Lema 3.5, temos que existe $\psi_1 : T \rightarrow \psi(T)$ bijetora. Logo, aplicando o Lema 3.4 temos que T é contável.
- (b) Observe que esta proposição é equivalente a (a), assim fica provado que se T é não contável, então S também é não contável.

Teorema 3.13. *São equivalentes as seguintes proposições:*

- (a) S é um conjunto contável
 (b) Existe uma sobrejeção de \mathbb{N} em S
 (c) Existe uma injeção de S em \mathbb{N}

Demonstração:

- (a) \Rightarrow (b) Se S for finito, então existe $h : \mathbb{N}_n \rightarrow S$ bijetora, para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, definiremos $H : \mathbb{N} \rightarrow S$ por:

$$H(i) = \begin{cases} h(i) & \text{se } i = 1, \dots, n \\ h(n) & \text{se } i > n \end{cases}$$

Note que H é sobrejetora. De fato, seja $s \in S$. Como h bijetora, existe $i \in \mathbb{N}_n \subseteq \mathbb{N}$ tal que $h(i) = s$. Logo, H é sobrejetora.

Agora, se S for enumerável, então existe uma bijeção de \mathbb{N} em S . Ou seja, existe uma sobrejeção.

- (b) \Rightarrow (c) Seja $H : \mathbb{N} \rightarrow S$ sobrejetora. Definiremos $H_1 : S \rightarrow \mathbb{N}$ como sendo $H_1(s)$ elemento mínimo do conjunto $H^{-1}(s) = \{n \in \mathbb{N} : H(n) = s\}$. Mostremos que H_1 é injetora. Assim, sejam $s, t \in S$ e suponha $H_1(s) = H_1(t) = n_{st}$. Observe que quando $n_{st} \in H^{-1}(s)$ temos $H(n_{st}) = s$, e quando $n_{st} \in H^{-1}(t)$ temos $H(n_{st}) = t$. Logo, $s = t$, ou seja, H_1 é injetora.

- (c) \Rightarrow (a) Se $H_1 : S \rightarrow \mathbb{N}$ é uma injeção, pelo Lema 3.5 existe $\bar{H}_1 : S \rightarrow H_1(S)$ é uma bijetora. Note que $H_1(S)$ é contável, pois $H_1(S) \subseteq \mathbb{N}$. Logo, pelo Lema 3.4, temos que S é contável.

c.q.d.

Teorema 3.14. *Se A e B são conjuntos contáveis, então $A \times B$ é contável.*

Demonstração: Se A e B são contáveis, pelo Teorema anterior existem $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ e $g : \mathbb{N} \rightarrow B$ sobrejetora. Definiremos $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A \times B$ por:

$$h(m, n) = (f(m), g(n)).$$

Note que h é sobrejetora. De fato, sejam $a \in A$ e $b \in B$. Como f e g são sobrejeções, segue que existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $f(m) = a$ e $g(n) = b$. Assim, observe que $h(m, n) = (f(m), g(n)) = (a, b)$, o que mostra que h é sobrejetora.

Sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável, então existe $\bar{h} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobrejetora.

Deste modo, $h \circ \bar{h} : \mathbb{N} \rightarrow A \times B$ é sobrejetora. Logo, $A \times B$ é contável.

c.q.d.

Teorema 3.15. *Se A_m é um conjunto contável para cada $m \in \mathbb{N}$, então $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ é contável.*

Demonstração: Seja $\varphi_m : \mathbb{N} \rightarrow A_m$ sobrejetora (pelo Teorema 3.11) para cada $m \in \mathbb{N}$. Definiremos $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A$ por $\psi(m, n) = \varphi_m(n)$.

Mostremos que ψ é sobrejetora. De fato, se $a \in A$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_m$. E como φ_m é sobrejetora, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = \varphi_m(n)$. Assim, $\psi(m, n) = a$. Logo, ψ é sobrejetora.

Sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável. Deste modo, pelo Teorema 3.11 existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobrejetora.

Uma vez que $\psi \circ f : \mathbb{N} \rightarrow A$ é sobrejetora, concluímos que $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ é contável.

c.q.d.

Corolário 3.1. *Se A_i é contável para cada $i \in \mathbb{N}_n$, então $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ é contável.*

Demonstração: Seja $A_j = \emptyset$ para $j > n$. Notemos que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Assim, pelo Teorema anterior temos que A é contável.

c.q.d.

Teorema 3.16. *O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é enumerável.*

Demonstração: Mostremos que \mathbb{Q}^+ é contável. Sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável. Assim, existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobrejetora (pelo Teorema 3.11). Definiremos $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ por $g(m, n) = \frac{m}{n}$. É fácil de ver que g é sobrejetora. Assim $g \circ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ é sobrejetora. Logo, \mathbb{Q}^+ é contável. Segue de forma análoga que \mathbb{Q}^- é contável. Deste modo, pelo Corolário 3.1, $\mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}$ é contável.

c.q.d.

Teorema 3.17. *(Teorema de Cantor) Se A é um conjunto qualquer, então não existe $\varphi : A \rightarrow P(A)$ sobrejetora, onde $P(A)$ é o conjunto das partes de A .*

Demonstração: Suponha $\varphi : A \rightarrow P(A)$ sobrejetora. Uma vez que $\varphi(a) \subseteq A$, é fácil de ver que a pertence ou não a $\varphi(a)$. Seja o conjunto $D = \{a \in A : a \notin \varphi(a)\}$. Observe que $D \subset A$, temos que $D = \varphi(a_0)$ para algum $a_0 \in A$. Assim, $a_0 \in D$ ou $a_0 \notin D$.

Se $a_0 \in D$, pela definição de D , temos que $a_0 \notin \varphi(a_0)$. Mas $D = \varphi(a_0)$, uma contradição.

Se $a_0 \notin D$, pela definição de D , temos que $a_0 \in \varphi(a_0)$. Mas $D = \varphi(a_0)$, o que também é uma contradição.

Logo, φ não é sobrejetora.

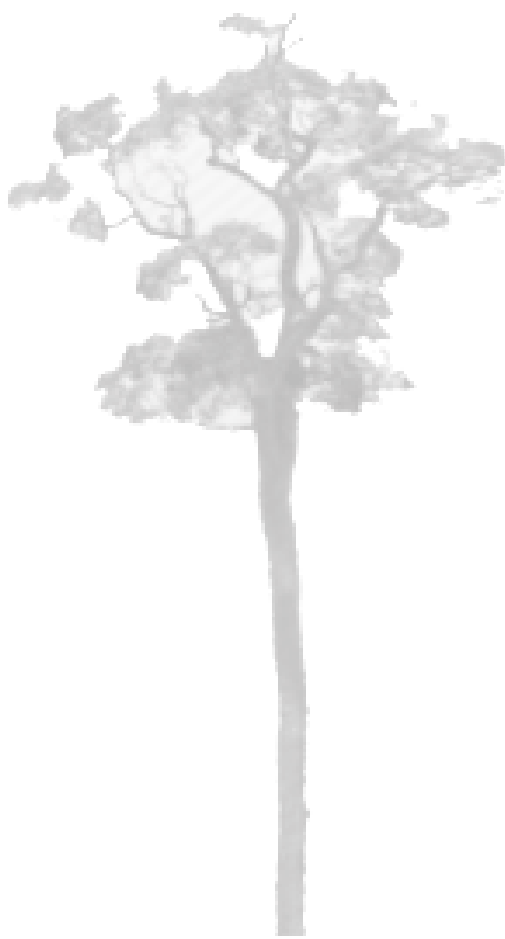
c.q.d.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Prof. Dr. Paulo Liboni por todo apoio e incentivo que tem dado a mim. Agradeço ao grupo PET de Matemática que participei e que contribui com meu aprendizado. \square

Referências

- [1] Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach, A History of Mathematics, 3rd ed., John Wiley and Sons, Inc. 2011
- [2] Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert, Introduction to real analysis, 3rd ed., John Wiley and Sons, Inc. 2000
- [3] Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill Education, Inc. 1976



DANDO VOZ AOS ALUNOS: UMA EXPERIÊNCIA COM POLIEDROS, CANUDOS E JUJUBAS.

Wesley Vicentin Eduardo
Rede Pública
wesley_vicentin@hotmail.com

Resumo:

Este trabalho apresenta uma experiência de ensino e de aprendizagem que foi inspirada no desenvolvimento do conteúdo de Geometria na turma do 3º Ano A, do Ensino Médio, no período matutino do Colégio Estadual José Alexandre Chiarelli, na cidade de Rolândia, Estado do Paraná. O Conteúdo Estruturante abordado é Geometria, e os Conteúdos Básicos são Geometria Plana e Geometria Espacial. A estratégia utilizada foi a Investigação Matemática e a utilização de materiais manipuláveis, de modo a "dar voz aos alunos" durante a aula para enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem.

Palavras-chave: Geometria Espacial. Representações de sólidos. Investigação Matemática e Educação Matemática.

1. Introdução

Este trabalho apresenta uma atividade com geometria e a construção de representações de sólidos geométricos, com materiais de fácil acesso e baixo custo, que foi desenvolvido na sala de aula, com o intuito de que os alunos manipulassem e fizessem suas próprias construções geométricas, direcionando a aprendizagem para a investigação da geometria.

Figura 1: Estruturas feitas pelos alunos.



Fonte: Autor

1. Objetivos

Ampliar a visão espacial dos alunos por meio de construções manipuláveis;

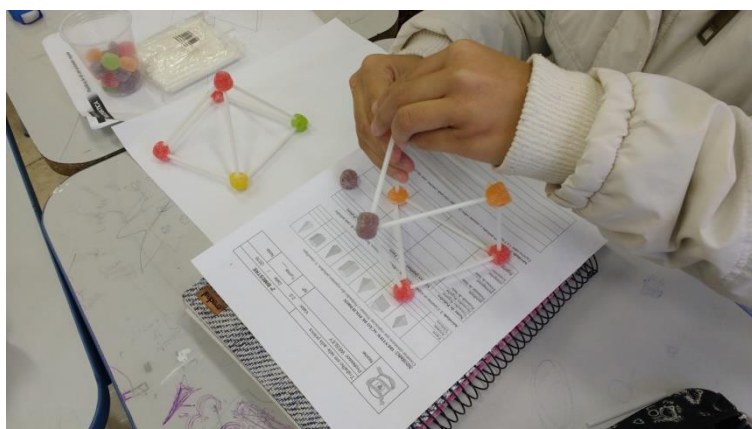
- Construir, reconhecer e nomear os principais poliedros;
- Identificar os elementos dos poliedros: vértices, faces e arestas;
- Utilizar a Relação de Euler na resolução de problemas;
- Ampliar e aprofundar os conhecimentos de Geometria Plana e Geometria

Espacial

2. Metodologia

A atividade iniciou-se com a entrega de materiais: (canudos plásticos e bala de goma), juntamente com uma proposta de atividades para os grupos, onde foram listados: a construção de estruturas geométricas e o reconhecimento das mesmas, (figuras 1 e 2).

Figura 2: Construção da estrutura.



Fonte: Autor

3. Resultados

Possivelmente algumas das dificuldades que os alunos apresentam pode estar associada à deficiência na interpretação das atividades, isto se deve as exigências do imediatismo moderno. Muitos alunos ainda se perdem no tempo e no espaço, pela pressa com que vivem o que prejudica e retarda o seu amadurecimento. O que fazer então? Explorar a interpretação, resgatar os pré-requisitos necessários, oportunizá-los com novas práticas e parar de culpar apenas o sistema. Foi possível observar o envolvimento deles durante a investigação das estruturas, a discussão gerada nos grupos frente às construções, bem como o reconhecimento das classificações das suas estruturas, como: pirâmides e prismas gerou um resultado que ultrapassou as expectativas iniciais.

4. Considerações Finais

Com a realização desse trabalho, foi possível perceber que as dúvidas a respeito dos conteúdos não foram mais as mesmas, o que o que causa ainda mais inquietação. Portanto agora, é possível perceber que a causa dessas dúvidas terem mudado, se deva ao fato de que os alunos tenham ampliado horizontes, referente ao assunto tratado, pois houve uma compreensão real por meio da manipulação dos materiais. E a reflexão que inquieta é que “para planejar aulas atrativas é necessário não só conhecer definições e estratégias elaboradas por meio de muita leitura, mas acima de tudo, uma preocupação do professor com o aluno que apresenta dificuldades, e que tem todo o direito de aprender.”

5. Agradecimentos

Agradeço aos colaboradores (a toda equipe e direção da escola onde foi realizado o trabalho. E os motivadores principais a realizar esse trabalho, aos meus alunos que participaram, com toda vontade, para isso se tornar um bem maior), agradeço também a toda equipe da Semana da Matemática da UEL, que contribuíram para a redação, e financiamento do desenvolvimento do trabalho.

6. Bibliografia

ANDRADE, Fabiana Chagas de. **Jujubas e palitos de dente: um método lúdico para ensinar Geometria Espacial**. Monografia. 43 p. Duque de Caxias, RJ. Unigranrio, 2010

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão**. Educação em Revista, Belo Horizonte, n.36, p.255-264, dez.2002.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para Educação Básica**. Curitiba: SEED, 2008.

OLIVEIRA, H., SEGURADO, M. I., PONTE, J. P. **Tarefas de investigação em matemática: Histórias da sala de aula.** In G. Cebola & M. Pinheiro (Eds.), *Desenvolvimento curricular em Matemática* (pp. 107-125). Lisboa: SEM-SPCE, 1998.



GESTÃO DE ESTOQUES: ESTUDO DE CASO EM UMA EMPRESA

Cainan Kobo Oliveira
Universidade Estadual de Londrina
cainan_ko@hotmail.com

Henrique Gonçalves Menck
Universidade Estadual de Londrina
hmenck@hotmail.com

Pedro Yoshiaki Takito
Universidade Estadual de Londrina
takitopedro@gmail.com

Eliandro Rodrigues Cirilo
Dep. Matemática/UEL
ercirilo@uel.br

Paulo Laerte Natti
Supervisor Docente – Dep. Matemática/UEL
plnatti@uel.br

Resumo:

O projeto está voltado ao estudo da otimização e gestão de estoques em uma empresa localizada no norte do Paraná. A empresa estudada neste projeto apresenta necessidade de melhorias na sua gestão de estoque. Verifica-se no cenário atual uma necessidade de localização eficiente dos produtos dentro da indústria além de um monitoramento e controle da entrada e saída de insumos para a produção. O objetivo do trabalho é realizar uma análise do estoque, focada nas curvas ABC dos materiais para determinar, por exemplo, através do Modelo de Lote Econômico de Compra (LEC) o tamanho do lote de compra e a periodicidade que minimizem os custos totais de estocagem. Alguns resultados serão mostrados e discutidos juntamente com objetivos futuros.

Palavras-chave: otimização; gestão de estoque; curvas ABC; Modelo LEC.

1. Introdução

Existe uma grande necessidade de se estocar materiais para a produção, porém estocar materiais tem um custo, portanto, a falta de organização pode resultar em um custo muito alto para o produto final, e a má gestão do estoque pode gerar outros problemas na cadeia de produção. Então para evitar tais custos, esse trabalho tem por objetivo trazer uma solução

inteligente e otimizada para os problemas do estoque da empresa, por meios de modelos matemáticos e simulações numéricas.

Dificuldades e problemas são comuns em qualquer meio empresarial, em geral dentro de um estoque identificamos que são comuns problemas relacionados a controle e organização dos materiais. Os problemas de organização, dimensionamento e níveis de estoque têm papel importante dentro de uma indústria, e na maioria dos casos estes problemas são tratados somente pela parte de logística. De acordo com Ching, 2010, o estoque tem que ser eficiente, pois está integrado na cadeia de produção da empresa com uma função de grande importância. Nosso foco será a utilização da Matemática para descrever a performance de estoque e deixá-los na sua melhor forma organizacional, funcional e rentável possível.

Alguns dos principais problemas clássicos que identificamos são:

A) Desorganização e falta de controle.

- Dificuldade de acesso ao produto (espaço/noção)
- Atraso na produção devido à demora em encontrar o produto no estoque
- Acúmulo de materiais inutilizados (lixos)
- Acúmulo de produtos prontos parados no estoque

B) Gestão de estoque

- Discordância entre estoque físico e contábil
- Falta ou excesso de material no estoque
- Atraso no recebimento em relação ao fornecedor
- Incompatibilidade entre pedidos e demanda

A empresa estudada apresenta necessidade de uma melhor gestão de seu estoque, um dos principais problemas que possuem atualmente, é a discordância entre o estoque físico e contábil.

2. Metodologia Matemática

A análise e classificação dos dados sobre o estoque será realizada com base na curva ABC, que é focada na importância dos materiais, considerando suas quantidades e seus valores, ordenando-os pelo grau de importância para a empresa. Depois, durante a

organização do estoque, serão usados princípios de controle e política de estoque, que consistem em ordenar os aspectos que receberão prioridade durante o armazenamento. Já para a otimização do estoque, serão usadas algumas técnicas de modelagem matemática: o ajuste de curvas, que permite transformar problemas reais em equações matemáticas; a metodologia de multiplicadores de Lagrange, que usa derivadas para encontrar pontos de máximos e mínimos de funções; problemas de programação linear, que visam encontrar os maiores ou menores valores dentro da função considerando as equações que restringem o problema e o objetivo da modelagem. A simulação numérica computacional será feita por meio de softwares livres conhecidos no meio matemático, sendo eles escolhidos conforme as necessidades da simulação.

Inicialmente é preciso realizar uma análise do estoque, focada nas curvas ABC dos materiais, para identificar quais são os itens mais relevantes no estoque, assim para trabalhar com o Modelo LEC em cima desses itens. Neste trabalho abordamos com prioridade a curva ABC e o modelo LEC para o estoque estudado.

2.1. Curva ABC

A análise ABC é uma forma eficiente de entender o tamanho do investimento no estoque. Ela basicamente classifica os materiais em 3 classes, classe A de maior importância, classe B e classe C de menor importância, levando em consideração o valor monetário de cada material. O valor monetário seria o preço unitário do produto multiplicado pelo consumo médio mensal, ou seja, quanto maior este valor, o item possui maior importância dentro daquele estoque. Suas classificações são feitas da seguinte forma:

- Classe A: 0% ~ 70%
- Classe B: 71% ~ 90%
- Classe C: 91% ~ 100%

As porcentagens são em relação ao valor monetário total somados de todos os itens. Reforçando, os produtos de classe A possuem maiores prioridades de controles rígidos, já que se trata dos itens mais caros e com maiores rotatividades dentro do estoque. Como o estoque possui uma quantidade muito grande de tipos de itens a priori em nosso estudo iremos levar em consideração os itens da classe A, já que são mais importantes, e eventualmente aplicando para os itens de classe B e C.

2.2. Modelo LEC

O Modelo do Lote Econômico de Compra (LEC) é um modelo básico de controle de estoque, permite determinar uma quantidade ótima de pedido de compra para um item do estoque, tendo em vista minimizar os custos totais de estocagem (por isso a denominação de Lote Econômico). Dentro desse modelo, utilizam-se abordagens gráficas e matemáticas (formulas) com variáveis do tipo custo de manter estoque, demanda do item, custo de pedir, quantidade do pedido e custo total.

O modelo LEC considera os seguintes custos:

- Custos de manutenção:

Termo: $(Q/2) * cm$

São os custos diretamente proporcionais à quantidade estocada. Incluem os custos de armazenagem, propriamente dita, os custos de seguro, os custos de transporte e manuseio, os custos de obsolescência, etc.

- Custo de pedido:

Termo: $(D/Q) * cp$

São os custos inversamente proporcionais à quantidade estocada. Custo associado ao trabalho de efetuar o pedido de determinado lote de produtos. Engloba custos de mão de obra, de transporte de pedido, controle do recebimento do produto, controle de qualidade do pedido recebido, entre outros. No caso de itens fabricados são chamados de custos de preparação.

- Custos de aquisição:

Termo: $D * P$

Correspondem aos custos de compra de materiais que serão estocados. Esses custos independem do tamanho do lote.

O objetivo do modelo LEC é determinar o tamanho do lote de compra e a periodicidade ou ponto do pedido, de forma a minimizar os custos totais de estocagem. A função objetivo pode ser expressa como:

$$\min z = f(Q) = (Q/2) * cm + (D/Q) * cp + D * P$$

em que:

- Q: tamanho do lote de compra.
D: demanda anual do produto.
P: Preço de compra unitária.
Cm: Custo unitário de manutenção do estoque (anual)
Cp: Custo unitário do pedido

O comportamento do nível de estoque ao longo do tempo no modelo do lote econômico de compra está representado na Figura 2.1. Pode se dizer que este seria um comportamento de movimentação ideal para um item dentro do estoque.

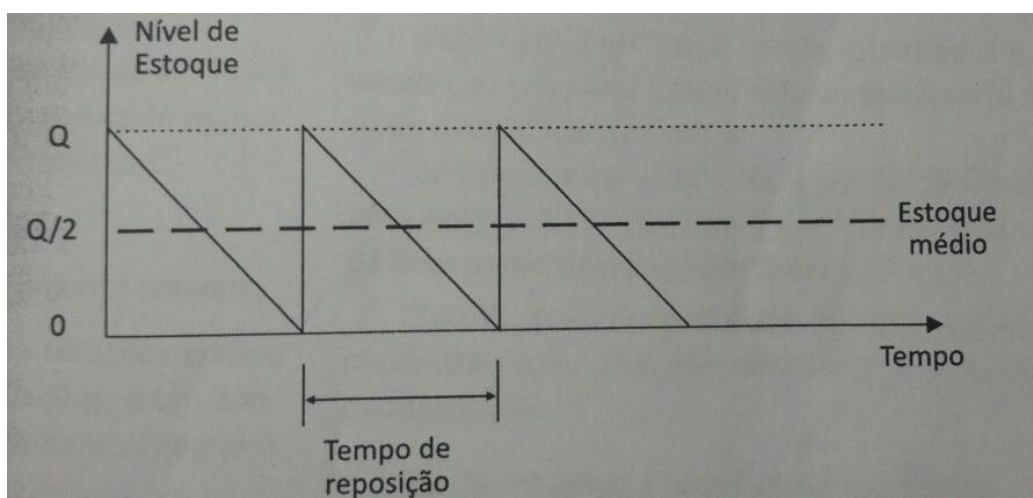


Figura 2.1: Nível de estoque de um item ao longo do tempo

3. Base de Dados e Resultados Preliminares

Os dados da empresa que contem históricos de entradas e saídas de todos os tipos de itens desde 2009 até agosto de 2016 são conhecidos. Essas tabelas possuem colunas que informam: Nome do item; tipo do movimento (“E” se entrou, “S” se saiu); Data do movimento; Quantidade (em unidade); Quantidade (em KG, positiva se entrou negativa se saiu). Na tabela 5.1 segue um exemplo de um trecho de como é esta tabela.

Nome	Movimento	Data	Qtd.	Saldo KG
item A	E	10/01/2011	200	22,8
item A	S	24/09/2011	-300	-34,2
item B	E	10/01/2011	734	88,08
item B	E	31/03/2011	3352	402,24
Item C	E	17/08/2011	1500	265,5
item C	E	20/10/2011	300	531
item C	S	30/08/2011	-692	-122,484
item C	S	31/08/2011	-682	-120,714
item D	E	14/01/2011	400	12
item D	S	05/01/2011	-60	-1,8

Tabela 5.1: Exemplo de um trecho do dado fornecido

Sabemos que os preços dos materiais são referentes a cada Quilograma do material então basta agora identificarmos os preços por quilo de cada material para a classificação dos materiais pela curva ABC.

A partir dos históricos de entradas e saídas é possível extrair diversas informações, por exemplo: número total de tipos de itens, quais itens possuem maiores frequências de entradas e saídas, quais itens possuem maiores demandas em quesito quantidade, quais itens possuem maiores demandas em quesito quilogramas. E também construir gráficos que representam as movimentações de cada item.

Então construímos algumas listas para identificar quais são os itens com maiores demandas. A partir desses dados construímos gráficos que representam a movimentação desse item nos últimos anos para observar se o item possui frequências de rotatividade estável, se é periódica, como é o tipo de movimentação do material, suas quantidades máximas de lote de compra e se é gerenciado de forma eficiente. Seguem alguns exemplos de gráficos construídos:

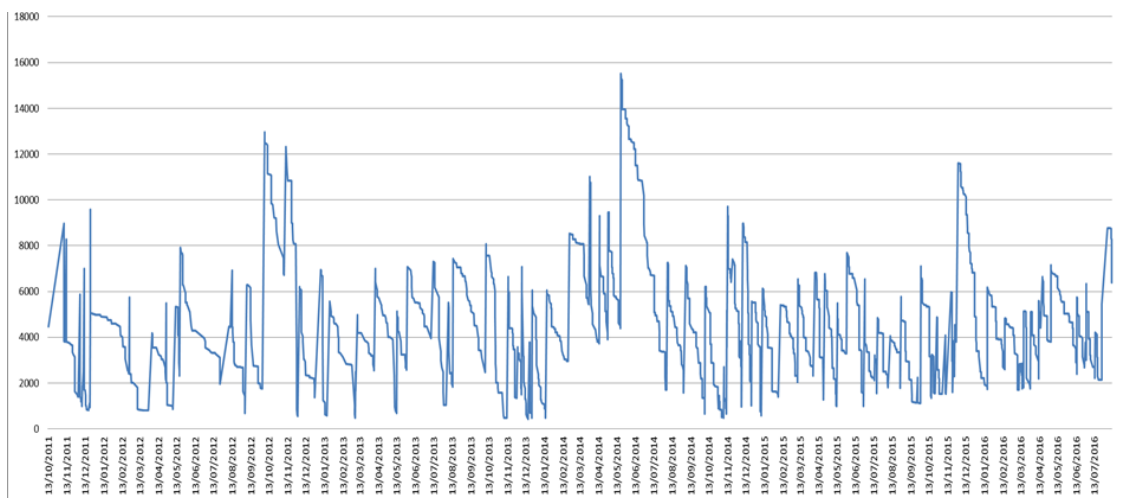


Figura 5.1: Gráfico do item A

Na Figura 5.1 vemos um exemplo de gráfico cujo resultado é satisfatório, pois não possui grandes picos e flutuações e aparentemente as movimentações são periódicas.

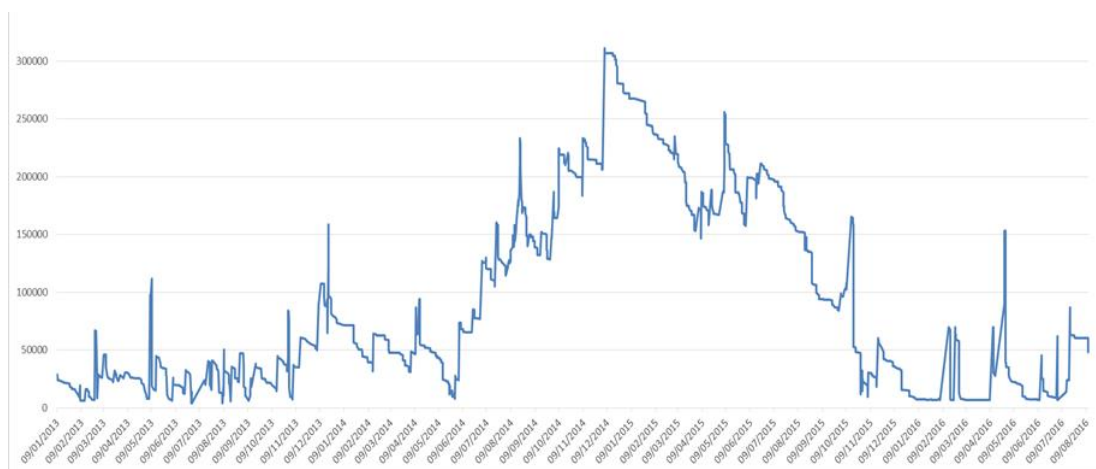


Figura 5.2: Gráfico do item B

Já na Figura 5.2 podemos observar que existe uma certa flutuação no período entre maio de 2014 a outubro de 2015, isso mostra que durante esse período uma certa quantidade de materiais esteve parada no estoque e mesmo com itens ainda estocados continuou entrando mais materiais acrescentando desnecessariamente. O que deixa evidente a possibilidade na melhoria da gestão do estoque.

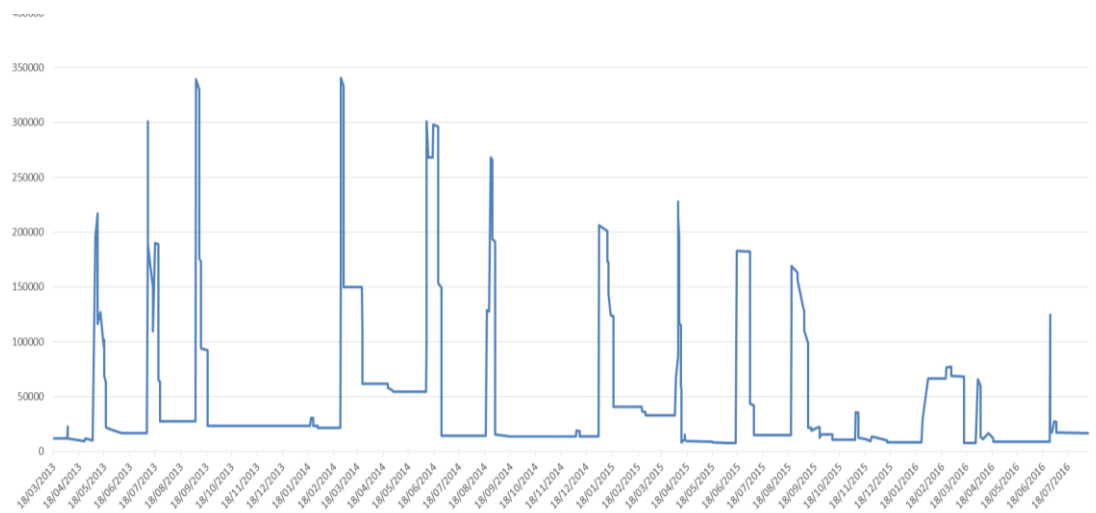


Figura 5.3: Gráfico do item C

Também existem casos de itens com gráficos como na Figura 5.3, podemos observar que os itens são comprados e já utilizados logo em seguida, fazendo com que os itens fiquem menos tempo parado no estoque, o que é bom.

4. Considerações Finais

Analisando os gráficos concluímos que de fato a maioria dos itens não possuem frequências periódicas, ou seja, aparentemente as movimentações são aleatórias e difíceis de serem previstas, e que existe uma possibilidade de melhoria na sua gestão por meio das metodologias estudadas. A quantidade e tipos de itens no estoque são grandes e variadas, porém tendo os valores de demanda e o custo por quilo de cada item, é possível classificar utilizando a curva ABC, tendo classificados quais os produtos mais importantes, e tendo coletados todos os dados necessários para a função objetivo do modelo LEC podemos identificar as variáveis que irão otimizar o tamanho do lote para cada item e minimizar os custos gerados dentro do estoque. Assim os gráficos de movimentações dos itens que agora são praticamente aleatórias poderão se aproximar para um modelo ideal citado neste trabalho.

5. Agradecimentos

Agradecemos ao Governo do Estado do Paraná, a Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, a Fundação Araucária, a CAPES, a Universidade Estadual de Londrina e o Departamento de Matemática/UEL. Os autores C.K. Oliveira, H.G. Menck e P.Y. Takito agradecem ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC/UEL pelo apoio financeiro fornecido no período de agosto/2015 a julho/2016.

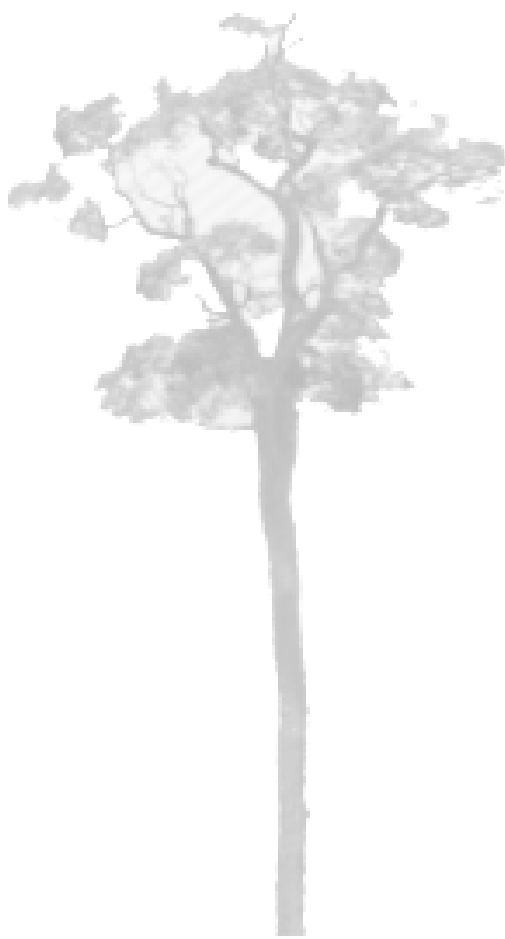
6. Referências

CHING, H. Y.; Gestão de Estoque na Cadeia de Logística Integrada: Supply chain. São Paulo: Ed. Atlas, 2010.

COELHO, Leandro C. Entendendo o Lote Econômico de Compras. Disponível em: <<http://www.logisticadescomplicada.com/entendendo-o-lote-economico-de-compras-lec-ou-eoq/>> Acesso em 20 out 2016.

MOURA, C. E.; Gestão de Estoque: Ação e Monitoramento na Cadeia de Logística Integrada. Rio de Janeiro: Ciências Moderna, 2004.

TAHA, Hamdy A. Pesquisa operacional: uma visão geral. Tradução Arlete Simille Marques. Revisão Rodrigo Arnaldo Scarpel. 8. Ed. São Paulo: person Prentice Hall, 2008.



IMPRESSÕES DE EGRESSOS DO CURSO DE MATEMÁTICA A RESPEITO DE MATEMÁTICA¹

Ana Carolina Bardaçon²
Universidade Estadual de Londrina
aninha_barda@yahoo.com.br

Gabriel dos Santos e Silva³
Universidade Estadual de Londrina
gabriel.santos22@gmail.com

Resumo:

Este artigo tem por objetivo analisar as falas de estudantes recém-formados do curso de Matemática, na habilitação de Bacharelado ou Licenciatura, com relação às suas impressões sobre o que eles aprenderam de matemática durante a graduação. Foram realizadas entrevistas e, a partir de uma análise dos áudios, pudemos fazer algumas inferências sobre a noção dos estudantes a respeito de matemática e as relações que estabelecem entre a Educação Básica e o Ensino Superior.

Palavras-chave: Educação Matemática; Educação Matemática Realística; Matemática; Matematização.

1. Introdução

Um dos itens do planejamento anual do PET⁴ Matemática UEL é a participação em eventos com a apresentação de trabalho. Essa característica do PET e o interesse pessoal por Educação Matemática levaram a primeira autora deste texto buscar investigar o que recém-formados do curso de Matemática, tanto na habilitação de Bacharelado, quanto na de Licenciatura, pensam a respeito do que aprenderam sobre matemática no período na graduação. Apresentaremos neste resumo expandido o referencial teórico utilizado, seguido dos procedimentos metodológicos, dos resultados e das nossas considerações finais.

2. Fundamentação Teórica

¹ Comunicação científica submetida para a apresentação na 31ª Semana da Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

² Graduanda em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e integrante do Programa de Educação Tutorial (PET) - Matemática, Londrina – PR. E-mail: aninha_barda@yahoo.com.br.

³ Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR. E-mail: gabriel.santos22@gmail.com.

⁴ Programa de Educação Tutorial.

A Educação Matemática Realística (RME)⁵ é uma abordagem de ensino de Matemática que se originou na Holanda ao final da década de 60 em contrapartida às abordagens de educacionais existentes.

Hans Freudenthal, precursor da RME, acredita que a matemática é uma atividade humana e não é um conjunto de conhecimentos prontos que deve ser transmitido do professor para o aluno, ou seja, matemática é uma ação. Além disso, ela deve ser fundamental na constituição da humanidade do indivíduo e relevante para a sociedade na qual ele está inserido (SILVA, 2015).

Esta ação de “fazer matemática” é chamada de matematização. De acordo com Treffers e Goffree (1985, p. 109), matematizar é “uma atividade de organização e estruturação pela qual se recorre a conhecimentos e habilidades adquiridos para descobrir regularidades, conexões e estruturas ainda desconhecidas”.

São atividades requeridas pela matematização: • identificar as especificidades matemáticas no contexto geral; • esquematizar; • formular e visualizar o problema; • descobrir relações e regularidades; • reconhecer similaridades em diferentes problemas; • representar uma relação em uma fórmula; • provar regularidades; • refinar e ajustar modelos; • combinar e integrar modelos; • generalizar (DE LANGE, 1999).

3. Procedimentos Metodológicos

Esta pesquisa tem caráter qualitativo, cujos dados foram coletados por meio de contato direto com os recém-formados em Matemática, utilizando o recurso de áudio. Durante o mês de outubro, entrevistamos estudantes do programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional (PGMAC) do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina fazendo a seguinte pergunta: “O que você aprendeu de matemática durante seu curso de graduação?”. As respostas foram gravadas em áudio e transcritas para posteriormente serem analisadas.

4. Resultados e Discussão

Para discussão, elaboramos um quadro contendo o significado dado à matemática e as relações entre matemática da Educação Básica e do Ensino Superior apontadas pelos estudantes.

⁵ Sigla para o termo em inglês *Realistic Mathematics Education*.

Quadro 1 – Inferências a partir das falas dos estudantes.

<i>Alunos</i>	<i>O que é matemática</i>	<i>Relações entre a Matemática da Educação Básica e do Ensino Superior</i>
<i>A</i>	Conjunto de conteúdos formais que têm aplicações.	A do Ensino Superior é mais “avançada” e possui mais aplicações que a Educação Básica, além de explicar o que está por trás da matemática da Educação Básica.
<i>B</i>	É uma linguagem; um meio para que o cidadão se torne crítico e rigoroso com informações do seu dia-a-dia, das ciências e da própria matemática.	A da Educação Básica consiste em somente aplicar conteúdos em exercícios e problemas e da do Ensino Superior ensina-o a ser crítico com as informações.
<i>C</i>	É um meio para que o cidadão se torne crítico e rigoroso com informações do seu dia-a-dia.	A do Ensino Superior o tornou mais maduro e crítico, além de ser mais abrangente que a da Educação Básica.
<i>D</i>	É uma ferramenta para resolver problemas.	A da Educação Básica é pura aplicação de valores em fórmulas e não se questiona de onde vieram e porque servem. Tais questionamentos são ensinados no Ensino Superior, além de novos conteúdos.
<i>E</i>	É um meio para que o cidadão se torne crítico e rigoroso com informações do seu dia-a-dia.	A da Educação Básica era pura memorização e a do Ensino Superior envolve o raciocínio, organização de ideias e interpretação de resultados.
<i>F</i>	Possui diversos sentidos, mas, em todos eles, ela está sempre relacionada a alguma realidade.	Na do Ensino Superior estão presentes as estruturas formais da matemática, que mostram como funciona o que aprendeu na Educação Básica.

Fonte: os autores.

5. Agradecimentos

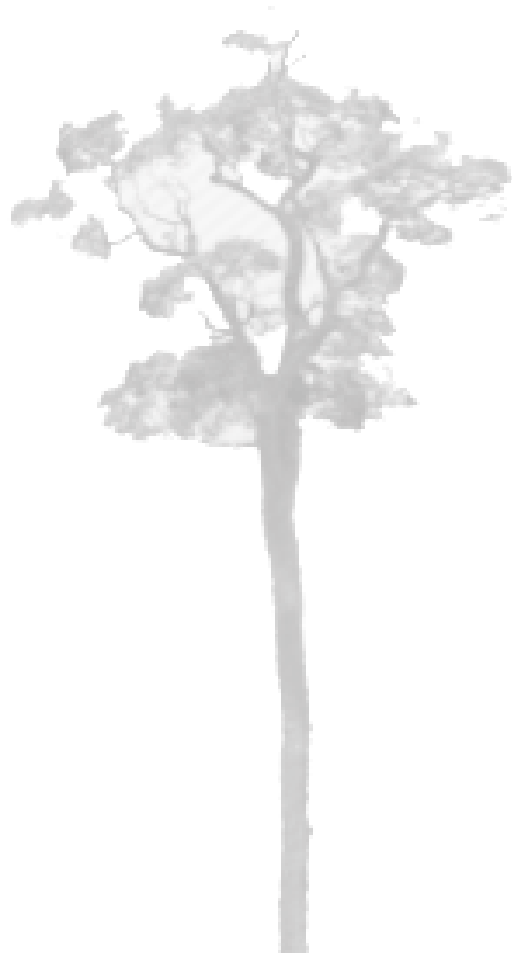
Ao Governo do Estado do Paraná, a Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, a Fundação Araucária, a CAPES, a Universidade Estadual de Londrina, ao Departamento de Matemática/UEL, que foram fundamentais na realização do evento, ao meu orientador Gabriel pela ajuda em todas as etapas na elaboração do trabalho e ao meu amigo Paulo que colaborou na escrita do resumo expandido.

6. Referências

DE LANGE, Jan. Assessment: No change without problems. In: T. A. Romberg (Ed.), **Reform in School Mathematics and Authentic Assessment**. New York: SUNY Press, 87-172, 1995.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

TREFFERS, Adri; GOFFREE, Fred. Rational analysis of realistic mathematics education. In: STREEFLAND, L. (ed.). **Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht, The Netherlands: OW&OC. v. 2, p. 97-123, 1985.



Introdução às Partições dos Naturais

Nilton Lucas Luciano Serafim

niltonllserafim@gmail.com

Túlio Oliveira de Carvalho

tcarvalho@uel.br

Departamento de Matemática

Universidade Estadual de Londrina

CP 10.011, CEP 86057-970, Londrina - PR

RESUMO

Este trabalho trata de forma introdutória do problema de partições de inteiros positivos e das funções geradoras, entendidas como séries formais de potências numa variável. Aprentamos uma de suas aplicações com um teorema.

Palavras-chave: Partições; funções geradoras; combinatória.

INTRODUÇÃO

Nosso trabalho visa mostrar parte dos conteúdos estudados na iniciação científica, sobre Partições de Inteiros positivos. Utilizamos as referências [1, 2].

Este problema tem implicações bastante profundas em combinatória, ou problemas enumerativos em geometria, como na determinação do número de soluções inteiras não-negativas de equações como

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 .$$

PARTIÇÕES DE INTEIROS POSITIVOS

Dado um número natural n , pergunta-se de quantas formas ele pode ser escrito como soma de números naturais. Abaixo listamos as possibilidades para $n = 4, 5$ e 6 :

4	5	6
3+1	4+1	5+1
2+2	3+2	4+2
2+1+1	3+1+1	4+1+1
1+1+1+1	2+2+1	3+3
	2+1+1+1	3+2+1
	1+1+1+1+1	3+1+1+1
		2+2+2
		2+2+1+1
		2+1+1+1+1
		1+1+1+1+1+1

Uma partição de um número natural n é uma *forma de escrevê-lo como soma de números naturais*. A fim de não contar uma partição duas vezes, convencionou-se escrever a soma com os termos em ordem não-crescente. Nos exemplos, quando se escreve $5 = 3 + 1 + 1$ tem-se que 3, 1 e 1 são as *partes* em que 5 se decompôs. Uma questão natural é sobre quantas partições há para cada natural n . Isto define a função $p(n)$: *o número de partições de um número natural n* . Evidentemente, $p(n)$ é uma função estritamente crescente. Dos exemplos acima vemos que $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ e $p(6) = 11$.

Destes exemplos vemos que o crescimento de $p(n)$ é irregular. Os valores $p(20) = 627$ e $p(100) = 190569292$ mostram ainda que $p(n)$ cresce muito rápido. Isto sugere a questão sobre se existe uma fórmula que permite calcular $p(n)$ para qualquer n , mas não a trataremos neste espaço.

FUNÇÕES GERADORAS

Associada à função $p(n)$, definimos a função geradora pela série formal:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}.$$

Observe que os coeficientes de x^n no membro direito são exatamente iguais ao número de decomposições possíveis de n como soma de números naturais.

Podemos considerar outras funções geradoras, que permitem *contar* partições com determinada característica. A função geradora acima responde à questão sobre quantas partições existem para cada n . Entretanto através de manipulação algébrica podemos obter diversas funções geradoras com características distintas como, por exemplo, a da quantidade de partições de n com apenas partes pares, dada por $(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2j}})$. A função geradora com partições com apenas partes ímpares é análoga.

Algumas dessas características das partições de n se relacionam de maneira surpreendentes.

Teorema 1 (Teorema de Euler). *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

A demonstração deste fato pode ser obtida construindo-se uma correspondência 1-1 entre os conjuntos I de partições ímpares e D de partições em partes distintas.

Outra forma de se fazer esta demonstração é utilizando as funções geradoras, uma vez que a função geradora de partições com apenas partes ímpares de n é dada por

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}$$

e a de partições de n em partes distintas é

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k).$$

O seguinte argumento, baseado em manipulações algébricas, demonstra o teorema:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+x^k)(1-x^k)}{(1-x^k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x^{2k})}{(1-x^k)} = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\dots} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} \implies \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} \end{aligned}$$

Pode-se atribuir a Euler os primeiros estudos sobre partições dos números naturais. O Teorema dos Números Pentagonais é outro exemplo de aplicação desta teoria.

AGRADECIMENTOS

Nilton Serafim é bolsista do CNPq, através do PICME-PGMAC. Túlio Carvalho é bolsista da CAPES, como coordenador de área do PIBID-Matemática-UEL.

REFERÊNCIAS

- [1] SANTOS, J. P. O. **Introdução à teoria dos números**. 3ª ed. IMPA, Rio de Janeiro. 2015.
- [2] SAMPAIO, C. A. A. **Funções geradoras e aplicações em partições**. Dissertação de Mestrado. Unicamp, Campinas. 1998.



Microsoft **MATHEMATICS**

Para alunos e educadores

Prof. Dr. Ulysses Sodré

Bruno Beloni Damas

Eduardo Lima

Cleyton Vinícios Mendonça Lima

Objetivo: O Microsoft Mathematics oferece uma calculadora gráfica capaz de plotar em 2D e 3D, soluções passo a passo de equações e ferramentas úteis para ajudar alunos em estudos de matemática e ciências. O grande ponto do programa é capacidade de mostrar soluções passo a passo dos mais variados problemas de matemática, o que também conta com uma interface bem interativa e simples, mas com um alto grau de desenvolvimento e gratuito. O objetivo do trabalho é levar essa ferramenta para o dia a dia do aluno e do professor.

Público alvo: alunos e docentes de ciências exatas, pois o programa tem grandes recursos para facilitar o estudo de ambos, o que também favorece no entendimento de determinados assuntos e a praticidade de determinados cálculos.

1. O programa Microsoft MATHEMATICS
2. O espaço de trabalho do Microsoft
3. Procedência de operadores

1. O programa Microsoft MATHEMATICS

Mathematics deve ser lido como mæte-mætiks, de acordo com: An English-Reader's Dictionary (Brazilian Edition for Yázigi Schools). London. Oxford University Press. 1969. Esta pronúncia é similar à das palavras: ædes ægypti (edes egipti).

O Microsoft MATHEMATICS fornece um conjunto de ferramentas matemáticas que ajudam os estudantes a fazer os deveres escolares de forma rápida e fácil.

Com o Microsoft Mathematics, os estudantes podem aprender a resolver equações passo a passo, ao mesmo tempo em que obtém uma melhor compreensão dos conceitos fundamentais de pré-álgebra, álgebra, trigonometria, física, química e cálculo.

O Microsoft MATHEMATICS inclui uma calculadora gráfica completa projetada para funcionar como uma calculadora de mão. Ferramentas matemáticas adicionais ajudam a avaliar triângulos, converter de um sistema de unidades para outro e resolver sistemas de equações.

O Microsoft MATHEMATICS pode ajudá-lo em muitas tarefas, incluindo:

- calcular valores de funções como raízes e logaritmos.
- resolver equações e inequações.
- resolver triângulos.
- converter medidas de uma unidade em outra.
- calcular valores de funções trigonométricas, como seno, cosseno tangente.
- efetuar operações com matrizes e vetores como inversas e produtos cruzados.
- calcular estatísticas básicas, como média e desvio padrão.
- efetuar operações em números complexos.
- Plotar gráficos 2D e 3D em coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas e esféricas.
- obter derivadas, integrais, limites, somas e produtos de sequências.
- obter, plotar e resolver equações e usar fórmulas comuns.

2. O espaço de trabalho do Microsoft MATHEMATICS

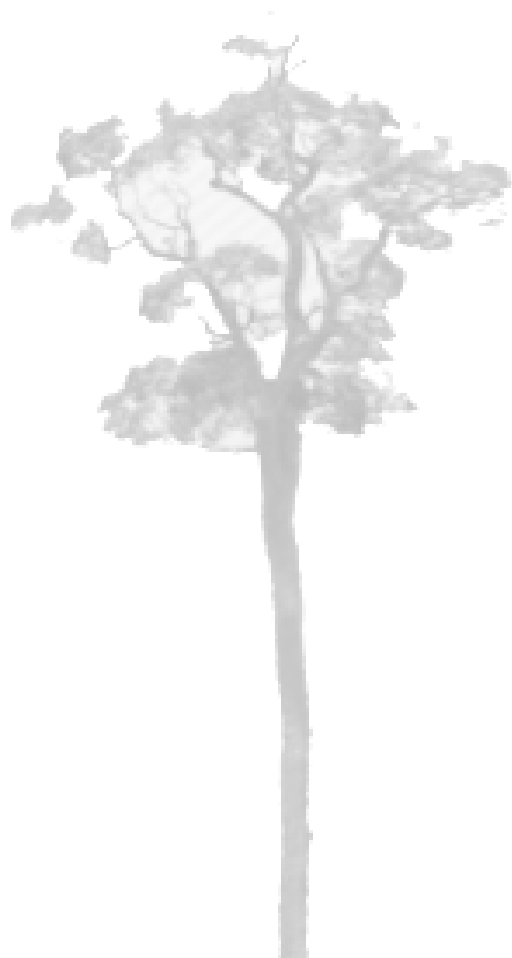
Quando o Microsoft MATHEMATICS é aberto, os seguintes elementos são exibidos:

- **Teclado da calculadora:** O teclado da calculadora inclui um teclado numérico com os seguintes grupos de botões: Números Complexos, Cálculo, Estatística, Trigonometria, Álgebra Linear, Padrão e Botões Favoritos.
- **Guia Planilha:** Esta guia padrão, é o lugar onde realizamos a maior parte do cálculo numérico. Essa guia inclui um painel de entrada e um painel de saída. Você pode usar expressões matemáticas de entrada com o teclado, com o mouse ou a entrada de tinta (escrita na tela). Quando você encerra uma expressão, o Microsoft MATHEMATICS avalia de modo simbólico e numérico (caso aplicável) e, depois, exibe os resultados no painel de saída. Em alguns casos, a saída pode incluir soluções passo a passo ou informações adicionais sobre a solução.
- **Guia Representação Gráfica:** Esta guia pode ser usada para criar a maioria dos gráficos matemáticos. Essa guia inclui um painel de entrada para a inserção da função, equação, inequação, conjunto de dados ou equação paramétrica. Para trabalhar com o gráfico após plotá-lo, a guia Representação Gráfica também inclui um painel que descreve o que é plotado no gráfico e um painel gráfico que exibe o gráfico.
- **Faixa de Opções:** Foi projetada para ajudar a localizar rapidamente os comandos necessários para concluir uma tarefa. Os comandos são organizados em grupos lógicos, reunidos em guias. Cada guia está relacionada a um tipo de atividade, como inserção de dados. Para reduzir o número de itens na tela, algumas guias são mostradas só quando necessário. Por exemplo, a guia Ferramentas de Representação gráfica só é mostrada quando você está plotando gráficos.

3. O Microsoft MATHEMATICS avalia as operações digitadas, em uma ordem de ação. Operadores na mesma linha têm a mesma precedência, sendo avaliados da esquerda para a direita, a menos que usemos parênteses para agrupar operações.

Abaixo o quadro de operações lógicas.

Precedência	Operador	Função realizada
1	!!	Fatorial duplo
2	!	Fatorial
3	{ }	Agrupamento, definição de lista
4	^	Expoente
5	+ -	Mais unário, menos unário
6	/ * %	Divisão, multiplicação, resto
7	+ -	Adição, subtração
8	= > >= < <= <>	Comparações
9	not	Não lógico
10	and	E lógico
11	xor	Ou exclusivo
12	or	Ou lógico



MODELOS GENERALIZADOS NA ANÁLISE DE DADOS DE SOBREVIVÊNCIA

Tiago V. F. Santana
Universidade Estadual de Londrina - Departamento de Estatística
tiagodesantana@uel.br

Resumo:

Neste trabalho é discutido as técnicas de generalização de modelos probabilísticos aplicados ao estudo de dados de sobrevivência. Dados de sobrevivência referem-se ao tempo até a ocorrência de um evento de interesse, denominado tempo de falha. Uma função muito importante para a caracterização e ajuste desses dados é a função taxa de falha que é interpretada como a probabilidade de que a falha ocorra no instante t dada que não ocorreu antes de t . O gráfico da taxa de falha pode apresentar algumas das seguintes formas: constante, unimodal, crescente, decrescente e forma de U, todas com diferentes interpretações práticas. A vantagem na generalização de modelos está na possibilidade em obter todas as formas para a função taxa de falha em um único modelo. Os modelos generalizados beta Weibull e Kumaraswamy log-logístico são discutidos e considerados no ajuste de dois conjunto de dados reais na área da saúde e engenharia.

Palavras-chave: Generalização de modelos probabilísticos; Análise de sobrevivência; distribuição beta Weibull; distribuição Kumaraswamy log-logística; Função taxa de falha.

1. Introdução

A análise de sobrevivência é uma das áreas da estatística que mais cresceu nas últimas décadas. A razão deste crescimento é o desenvolvimento e aprimoramento de técnicas estatísticas combinadas com computadores cada vez mais velozes, (Colosimo, 2006). Uma evidência quantitativa desse sucesso é o número de aplicações em campos diversos, como medicina, biologia, saúde pública, epidemiologia, engenharia, economia, estudos demográficos, entre outros.

Os dados em análise de sobrevivência referem-se ao tempo até a ocorrência de um evento de interesse. Este tempo é denominado tempo de falha, e apresenta algumas características especiais. A primeira é que a variável resposta, geralmente, apresenta distribuição assimétrica positiva, não sendo portanto, adequado assumir que tenha distribuição normal. A segunda característica é a presença de dados censurados, isto é, para alguns elementos em estudo não se conhece o tempo de interesse exato sabe-se, apenas que o tempo de falha ocorreu à direita ou à esquerda do valor registrado. Em geral, dados censurados ocorrem, uma vez que nem sempre é possível que o evento de interesse ocorra para todas as observações em teste.

Por outro lado, nos últimos anos tem crescido muito a generalização ou a modificação de alguns modelos probabilísticos (distribuições de probabilidade) utilizados na análise de sobrevivência, com a finalidade de melhorar o ajuste do modelo aos dados observados. Existem diferentes formas de se modificar uma distribuição de probabilidade, sendo que algumas das classes de generalizações mais trabalhadas são as famílias de distribuições obtidas pelo método desenvolvido por Marshall e Olkin (1997), as distribuições exponenciadas apresentada inicialmente por Mudholkar e Srivastava (1995), as distribuições estendidas discutidas por Barros (2008) e as distribuições betas que receberam maior atenção após o trabalho de Eugene et al. (2002).

Em particular, Cordeiro e Castro (2010) apresentaram uma classe de generalização baseada na distribuição Kumaraswamy. A classe modela a maioria das formas de risco básicas, ou seja, formas crescente, decrescente, unimodal e forma de U ou de banheira, como também é conhecida.

Esse trabalho apresenta uma breve introdução as metodologia utilizadas no estudo de dados de sobrevivência, assim como a nova distribuição de probabilidade proposta por SANTANA (2012) denominada Kumaraswamy Log-logística.

O objetivo principal desse trabalho é apresentar ao aluno de matemático (licenciatura, bacharelado e empresarial) a aplicação estatística nas diversas áreas de estudo. Os conceitos aqui abordados vão além do conteúdo visto em sala de aula e portanto, alguns métodos são apresentados sem maiores detalhes e explicação.

O trabalho está dividido em quatro partes: Conceitos básicos em análise de sobrevivência (seção 2), onde os dados, objeto de estudo em sobrevivência, são caracterizados e as principais funções utilizadas definidas; Principais modelos probabilísticos em análise de sobrevivência (seção 3), onde as distribuições mais utilizadas são apresentadas e suas características e propriedades discutidas; Métodos de generalização de modelos (seção 4), onde os principais métodos de generalização de distribuições de probabilidade propostos recentemente são apresentados; e por fim, a seção de aplicação (seção 5), onde duas distribuições generalizadas (beta Weibull e Kumaraswamy log-logística) e dois conjuntos de dados na área de engenharia e na área de saúde são utilizados para ilustrar o ganho no ajuste dos dois modelos.

2. Conceitos básicos em análise de sobrevivência

A análise de sobrevivência é caracterizada pelo fato que a variável resposta é composta de dois fatores, o tempo até a ocorrência de um evento de interesse e frequentemente pelas censuras, Colosimo e Giolo (2006). O evento em estudo é denominado falha e o tempo até a ocorrência da falha é chamado de tempo de falha. A censura é o registro parcial do tempo de falha, devido a perda ou retirada de um elemento do estudo.

A censura é dita ser do tipo I quando ocorre devido ao término do estudo após um período de tempo pré-determinado e, do tipo II quando ocorre devido ao término do estudo após um número de falhas fixado previamente e censura aleatória, sendo a mais comum em situações práticas, quando um elemento deixa o estudo sem que o evento de interesse tenha ocorrido.

As censuras previamente citadas são conhecidas como censura à direita, pois a falha ocorre sempre à direita do tempo registrado. Existem ainda outros mecanismos de censura, como por exemplo, as censuras à esquerda, onde o tempo registrado é maior que o tempo de falha; e censura intervalar, onde não se sabe o tempo exato de falha, e a única informação disponível é que o tempo de falha ocorreu em um certo intervalo de tempo. Neste trabalho, entretanto, será discutido apenas o mecanismo de censura aleatória à direita que será denominada simplesmente por censura.

Seja T uma variável aleatória não negativa que representa o tempo de falha de um elemento, e seja C uma variável aleatória, independente de T , que representa o tempo de censura associado a este elemento. Assim, os dados observados são representados por $t = \min(T, C)$ e δ o indicador de censura, dado por:

$$\delta = \begin{cases} 1, & T \leq C \\ 0, & T > C \end{cases},$$

em que $\delta = 0$ indica censura e $\delta = 1$ indica falha.

A distribuição de probabilidade da variável aleatória T pode ser especificada por meio da função densidade de probabilidade, função sobrevivência ou função taxa de falha, sendo as três formas equivalentes. A função de sobrevivência quantifica a probabilidade do tempo de falha de uma observação ser maior que t e é dada por

$$S(t) = P(T \geq t),$$

de onde segue que $S(t) = 1 - F(t)$. A função sobrevivência pode ser interpretada como a probabilidade de uma observação não falhar até o tempo t .

A função taxa de falha é obtida por meio da seguinte expressão

$$h(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{P(t \leq T \leq t + h | T \geq t)}{h} = \frac{f(t)}{S(t)},$$

em que $f(t)$ é a função densidade de probabilidade da variável aleatória T . A função taxa de falha é interpretada como a probabilidade de que a falha ocorra no instante t dada que não ocorreu antes de t . O gráfico da função taxa de falha pode apresentar algumas formas básicas conforme pode ser visualizado na Figura 1 (no gráfico a esquerda), com diferentes interpretações práticas. O gráfico pode ser crescente ou decrescente conforme indicado por $h_1(t)$ e $h_2(t)$ respectivamente, constante representado por $h_3(t)$, ou alternar entre intervalos decrescentes, constantes e crescentes, como por exemplo $h_4(t)$, que é uma forma da função taxa de falha conhecida por forma de U ou forma de banheira e $h_5(t)$ conhecida por forma unimodal, que inicia com um intervalo crescente até atingir um máximo e então decresce.

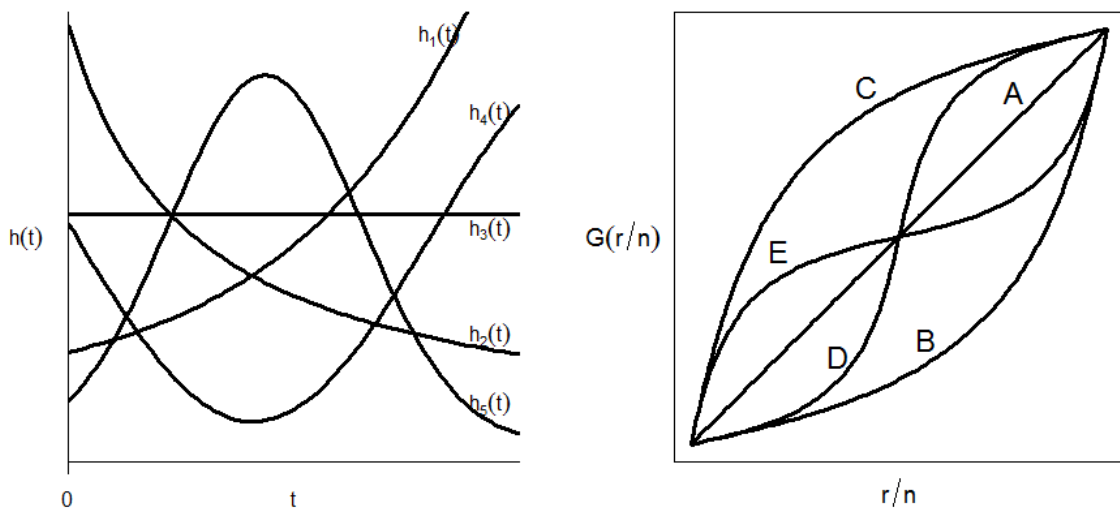


Figura 1: A esquerda: Exemplo das possíveis formas para a taxa de falha: $h_1(t)$ - crescente, $h_2(t)$ - decrescente, $h_3(t)$ - constante, $h_4(t)$ - forma de U e $h_5(t)$ - unimodal. A direita: As diferentes formas que o gráfico TTT pode assumir: Curva A - constante, curva B - decrescente, curva C - crescente, curva D - forma de U, curva E - unimodal.

A função taxa de falha é mais informativa do que a função sobrevivência, pois diferentes funções sobrevivência podem ter formas parecidas e funções taxa de falha totalmente diferentes. Portanto, a modelagem da função taxa de falha é um importante método de análise para dados de tempo de falha, conforme explana Colosimo e Giolo (2006).

Devido ao fato da existência de diversas distribuições que podem ser associadas ao tempo de falha, é necessário adotar uma metodologia para selecionar um modelo adequado. Os dados amostrais possuem informações qualitativas sobre a função taxa de falha que podem ser obtidas a partir de uma análise gráfica, como descreve Silva (2008). Assim, o método gráfico proposto por Aarset (1987), denominado gráfico do tempo total em teste (gráfico TTT), é uma metodologia válida de seleção de modelos. O gráfico TTT é obtido plotando os pares $(r/n, G(r/n))$ obtidos a partir da expressão

$$G(r/n) = \frac{(n-r)T_{r:n} + \sum_{i=1}^r T_{i:n}}{\sum_{i=1}^n T_{i:n}}$$

em que $r = 1, \dots, n$ e $T_{i:n}, i = 1, \dots, n$ é a estatística de ordem da amostra.

A Figura 1 (no gráfico a direita), apresenta as diferentes formas que o gráfico TTT pode assumir. Quando a curva, obtida do gráfico TTT, é uma reta diagonal (curva A), a função taxa de falha é constante; quando a curva é convexa (curva B) ou côncava (curva C), a função taxa de falha é monotonicamente decrescente ou crescente, respectivamente; quando a curva é convexa e então côncava (curva D), a função taxa de falha tem forma de U, e no caso reverso (curva E) é unimodal.

3. Principais modelos probabilísticos em análise de sobrevivência

Existem alguns modelos probabilísticos, que devido a natureza dos dados, são largamente adotados para ajuste de conjunto de dados de tempo de falha. Os mais conhecidos e utilizados são os modelos: Exponencial, Weibull, log-normal e log-logística. Nesta seção será apresentado as principais característica de cada modelo e suas respectivas funções sobrevivência e taxa de falha.

3.1. Modelo exponencial

O modelo de probabilidade exponencial é o modelo de tratamento matemático mais simples em sobrevivência sua função sobrevivência e taxa de falha são expressas por

$$S(t) = e^{-t/\alpha} \quad \text{e} \quad h(t) = 1/\alpha$$

em que $\alpha > 0$ é o tempo de vida médio de sobrevivência ($E(T) = \alpha$). Na Figura 2 os gráficos para as funções sobrevivência e taxa de falha são apresentados.

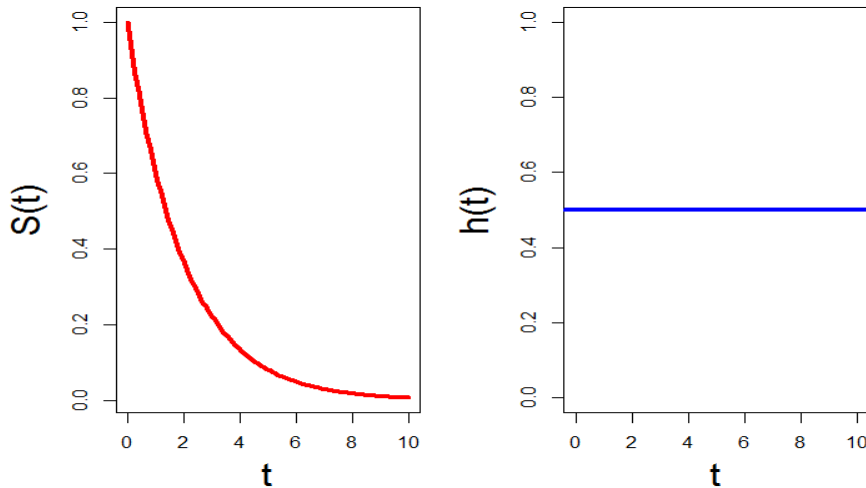


Figura 2: Exemplo de gráficos das funções sobrevivência ($S(t)$) e taxa de falha ($h(t)$) do modelo exponencial

Observa-se que a função taxa de falha é sempre constante, indicando que o risco de uma falha ocorrer em qualquer instante permanece inalterado, esse é o único modelo que apresenta essa característica. A distribuição exponencial é muito utilizada para descrever o tempo de falha de óleos isolantes e dielétricos e alguns estudos clínicos, como por exemplo para dados de tempo de vida de pacientes com leucemia (Colosimo e Giolo, 2006).

3.2. Modelo Weibull

O modelo Weibull foi proposto por Waloddi Weibull em 1939 e desde então vem sendo amplamente utilizado em estudos biomédicos, como por exemplo em estudo do tempo até a ocorrência de tumores em humanos ou em animais em laboratórios. Em estudos industriais na análise de dados de tempo de vida e durabilidade de produtos manufaturados, no ajuste de dados de rolamentos de esferas, componentes automotivos e isolantes elétricos (Lawless, 2003).

Sua grande popularidade em aplicações práticas deve-se a capacidade de acomodar uma grande variedade de formas, todas com uma propriedade básica: a sua função taxa de falha é monótona, ou seja, apresenta formas crescente, decrescente e constante.

A expressão para a função sobrevivência e taxa de falha é

$$S(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\phi} \quad \text{e} \quad h(t) = \frac{\phi}{\alpha^\phi} t^{\phi-1}$$

em que $t > 0$ é o tempo de falha e $\alpha > 0$ e $\phi > 0$ são chamados parâmetros de escala e forma respectivamente. As formas para as funções sobrevivência e taxa de falha são apresentadas na Figura 3.

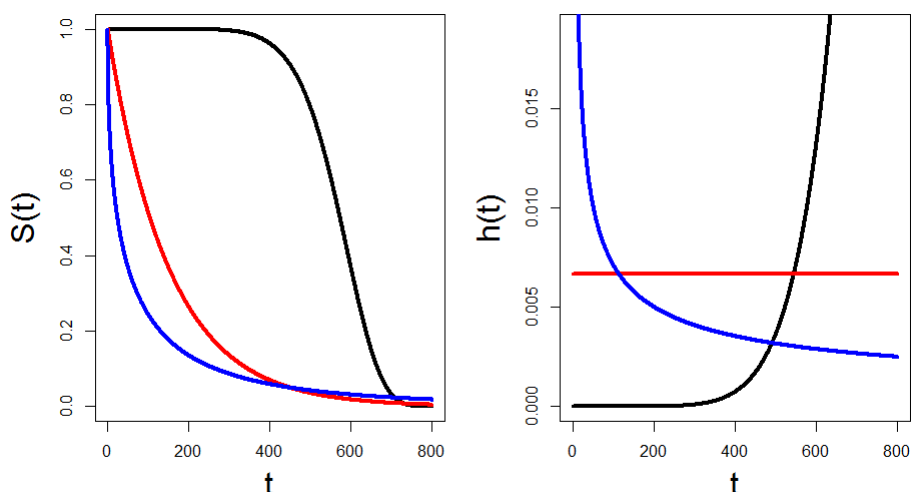


Figura 3: Exemplo de gráficos das funções sobrevivência ($S(t)$) e taxa de falha ($h(t)$) do modelo Weibull

Uma característica importante da distribuição Weibull é que ela possui submodelos como caso particulares, por exemplo, fazendo $\phi = 1$ obtém-se o modelo exponencial, como caso particular. Essa característica é bastante útil para realizar comparação de ajuste de modelos.

3.3. Modelo log-normal

A distribuição log-normal tem sido utilizada como modelo em diversas aplicações em engenharia, medicina e outras áreas (Lawless, 2003). O tempo de falha T é dito ter distribuição log-normal se $Y = \log(T)$ tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 , ou seja, a distribuição log-normal é obtida da transformação $T = e^Y$ de uma variável normalmente distribuída. Sua função sobrevivência é

$$S(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{-\ln(t) + \mu}{\sigma}\right)^2\right\} dt = \Phi\left(\frac{-\ln(t) + \mu}{\sigma}\right)$$

em que $t > 0$ é o tempo de falha, $\mu > 0$ é a média do logaritmo do tempo de falha, $\sigma > 0$ é o desvio padrão do logaritmo do tempo de falha e $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição acumulada de uma normal com média 0 e variância 1, conhecida por normal padrão. E sua função taxa de falha apresenta expressão

$$h(t) = \frac{\frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{-\ln(t) + \mu}{\sigma}\right)^2\right\}}{S(t)}.$$

Note que devido a relação da log-normal com a normal tanto a função sobrevivência, quanto a taxa de falha dependem de $\Phi(\cdot)$, que não tem forma analítica, sendo necessário procedimentos de computação numérica para obtenção dos valores para essas funções o que dificulta o uso desse modelo. A Figura 4 apresenta os gráficos da sobrevivência e da taxa de falha quando fixado os parâmetros μ e σ .

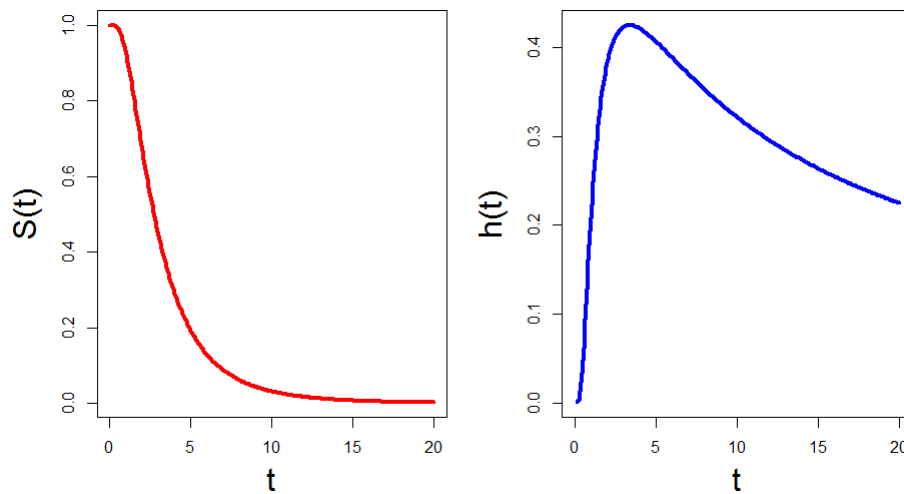


Figura 4: Exemplo de gráficos das funções sobrevivência ($S(t)$) e taxa de falha ($h(t)$) do modelo log-normal

O gráfico da taxa de falha da log-normal apresenta a forma unimodal, ou seja inicia-se em zero em $t=0$ em seguida cresce atingindo um máximo e então decresce tendendo a zero novamente. Este tipo de forma ocorre em muitas situações, por exemplo, quando a população em estudo consiste de uma mistura de indivíduos que tende a ter longos e curtos tempo de vida, respectivamente. Por exemplo, o tempo de cura após o tratamento de algumas formas de câncer ou a duração do matrimônio, onde após um certo período de anos o risco da dissolução do casamento devido a divórcio tende a diminuir (Lawless, 2003).

3.4. Modelo log-logístico

Outro modelo probabilístico muito utilizado na área de sobrevivência é o modelo log-logístico, que também é conhecido como distribuição Fisk em economia, e ajusta-se a dados de distribuição de riqueza e renda e em hidrologia é utilizado para modelar escoamento fluvial (Santana, 2010). A Figura 5 apresenta os gráficos para as funções sobrevivência e taxa de falha, cuja expressões são

$$S(t) = \frac{1}{1+(t/\alpha)^\gamma} \quad \text{e} \quad h(t) = \frac{\gamma(t/\alpha)^{\gamma-1}}{\alpha[1+(t/\alpha)^\gamma]}$$

em que $t > 0$ é o tempo de falha, $\alpha > 0$ é o parâmetro de escala e $\gamma > 0$ é o parâmetro de forma.

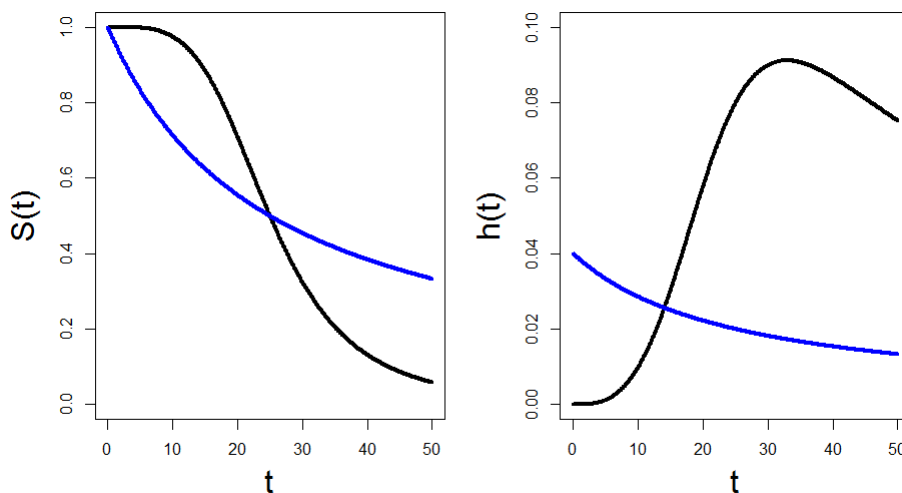


Figura 5: Exemplo de gráficos das funções sobrevivência ($S(t)$) e taxa de falha ($h(t)$) do modelo log-logístico

Sua taxa de falha apresenta duas formas básicas unimodal e decrescente que associado as formas analíticas das funções sobrevivência e taxa de falha fazem desse modelo, em muitas situações práticas, uma alternativa às distribuições de Weibull e a log-normal. Da mesma forma que o modelo log-normal o modelo log-logístico é obtido da transformação $Y = \ln(T)$, em que Y tem distribuição logística, com função densidade de probabilidade dada por

$$f(y) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-2}$$

em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$ são os parâmetros chamados de locação e escala respectivamente e $\alpha = \exp(\mu)$ e $\gamma = 1/\sigma$. Esse tipo de transformação é uma característica muito importante em um modelo de probabilístico, pois pode-se inserir covariáveis no modelo obtendo os modelos de regressão, para mais detalhes consulte (Colosimo e Giolo, 2006).

4. Métodos de generalização de modelos

Diversos autores nos últimos anos tem concentrado seus esforços na generalização de família de distribuições de probabilidade, obtendo maior flexibilidade da função densidade de probabilidade e conseqüentemente, ganho na modelagem de dados e a capacidade de incorporar um grande número de submodelos nas distribuições generalizadas, além da capacidade de modelar formas unimodais, crescente, decrescente, constante e forma de U para taxa de falha.

Algumas classes de generalizações mais estudadas nos últimos anos são as famílias de distribuições obtidas pelo método desenvolvido por Marshall e Olkin (1997); as distribuições exponenciadas apresentada inicialmente por Mudholkar et al. (1995); as distribuições estendidas discutidas por Barros (2008); as distribuições betas que receberam maior atenção após o trabalho de Eugene et al. (2002) e as distribuição Kumaraswamy, desenvolvida por Cordeiro e Castro (2010).

Nas próximas duas seções, será discutido algumas característica dos métodos propostos por Eugene et. al. (2002), para obtenção das distribuições betas e a proposta de generalização de Cordeiro e Castro (2010) para obtenção dos modelos generalizados Kumaraswamy.

4.1 Classe de distribuições betas

A classe de distribuições betas, é uma generalização baseada na distribuição beta, e que considera $G(t)$ para definir a função distribuição acumulada dessa família de modelos, a qual é expressa por

$$F(t) = \frac{1}{B(\delta, b)} \int_0^{G(t)} w^{\delta-1} (1-w)^{b-1} dw, \quad (1)$$

em que $\delta > 0$ e $b > 0$ são os dois novos parâmetros de forma e $B(\delta, b)$ é a função beta, definida por $B(\delta, b) = \Gamma(\delta)\Gamma(b)/\Gamma(\delta + b)$, em que $\Gamma(x) = \int_0^\infty w^{x-1}e^{-w}dw$ é a função gama e $G(t)$ a função distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua, como por exemplo a exponencial, Weibull ou log-logística. Alguns modelos pertencentes a classe de distribuições betas são: Beta logística e beta log-logística, propostos por George e Ojo (1980); Beta Gumbel, proposto por Nadarajah e Kotz (2004); Beta exponencial, proposto por Nadarajah e Kotz (2005); Beta generalizada semi-normal, proposto por Pescim et al. (2010) e Beta Burr XII, proposto por Paraniba et al. (2011).

Existem vantagens e desvantagens na obtenção de um modelo generalizado por meio da classe beta de distribuições. Como vantagens pode-se citar: A existência de um número maior de submodelos envolvidos; a possibilidade de testar a eficiência do ajuste dos submodelos; a maior flexibilidade, devido a adição dos parâmetros δ e b e a possibilidade de modelar formas monótonas e não monótonas da função taxa de falha.

As desvantagens dessa classe são: As funções obtidas não tem forma analítica. É necessários procedimentos numéricos para obtenção das funções de sobrevivência e taxa de falha, por exemplo; O modelo é mais complexo, pode ser de difícil tratamento matemático; Perda da interpretação de parâmetros. Com o aumento do número de parâmetros a interpretação prática desses parâmetros torna-se difícil ou sem significado; Dificuldades computacional para estimação dos parâmetros. Devido a complexidade do modelo a estimação dos parâmetros envolvidos pode ser complicada e necessitar de procedimentos de estimação computacionais mais complexos; Falta de identificabilidade. O modelo pode apresentar vários pontos de máximo global o que implica em falta de unicidade para a estimativa dos parâmetros.

4.2 Classe de distribuições Kumaraswamy

A classe de distribuições Kumaraswamy, proposta por Cordeiro e Castro, (2010), baseia-se na generalização da distribuição Kumaraswamy proposta por Kumaraswamy (1980) para variáveis assumindo valores em um intervalo fechado. A distribuição acumulada de probabilidade dessa classe é obtida por meio da expressão

$$F(t) = 1 - [1 - G(t)^a]^b, \quad (2)$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são os novos parâmetros de forma e $G(t)$ é a função distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua, como por exemplo a exponencial, Weibull, log-normal ou log-logística.

Nota-se que em comparação a classe beta a classe de modelos Kumaraswamy apresenta expressão matemática mais simples e não depende de nenhuma função especial, o que é uma característica bastante importante em procedimentos computacionais. Alguns modelos pertencentes a classe de distribuições Kumaraswamy são: Kw-gama, Kw-gumbel, Kw-gaussiana inversa, Kw-normal e Kw-Weibull, proposta por Cordeiro e Castro (2010); Kumaraswamy Weibull, proposta por Cordeiro et al. (2010); Kumaraswamy-gama-generalizada, proposta por Pascoa et al. (2011) e Kumaraswamy log-logística e Kumaraswamy logística, proposta por Santana et al. (2012).

Da mesma forma que a classe beta a classe Kumaraswamy apresenta vantagens e desvantagens. As vantagens dessa classe são: Existem vários submodelos envolvidos; Possibilita testar a eficiência do ajuste dos submodelos; O modelo é mais flexível, devido a adição dos parâmetros a e b ; A função taxa de falha apresenta formas monótonas e não monótonas, em geral; Possui forma analítica. O tratamento matemático e computacional dessa classe é mais tratável.

As desvantagens são: O modelo é mais complexo do que os modelos usuais; Devido a complexidade do modelo existe a perda de interpretação dos parâmetros envolvidos; Ainda que essa classe seja mais tratável que a classe beta, ainda existe dificuldades computacional para estimação dos parâmetros e Falta de identificabilidade.

5. Aplicação

Para ilustrar a aplicação dos dois modelos obtidos a partir das classes betas e Kumaraswamy, dois conjuntos de dados reais foram utilizados.

O primeiro conjunto, na área de engenharia, é referente a tempos até a falha de filme de tereftalato de polietileno (PET) usado como isolante elétrico em transformadores. Para esse conjunto foi considerado a distribuição beta Weibull, obtida da classe de distribuições betas quando considerado em (1) $G(t) = 1 - S(t)$, em que $S(t)$ é a função sobrevivência da Weibull.

O segundo conjunto é referente ao tempo até a soro-reversão de 143 crianças expostas ao HIV por via vertical (ainda na gestação) e para o ajuste desse conjunto de dados a distribuição considerada foi a Kumaraswamy log-logística, que pertence a classe de distribuições Kumaraswamy e obtida a partir de (2) substituindo $G(t)$ por $1 - S(t)$, em que $S(t)$ é a função sobrevivência do modelo log-logístico.

5.1 Distribuição beta Weibull

A distribuição beta Weibull foi proposta por Famoye, Lee e Olumolade (2005) como alternativa a distribuição Weibull, para ajustar-se a dados cuja taxa de falha apresenta as formas não monótona, ou seja unimodal e forma de U. Sua função densidade de probabilidade apresenta a seguinte expressão

$$f(t) = \frac{\phi}{B(\alpha, b)} t^{-1} \exp \left[-b \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\phi \right] \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\phi \right] \right\}^{\delta-1},$$

com $t, \alpha, \phi, \delta, b > 0$.

Portanto, a distribuição beta Weibull apresenta quatro parâmetros sendo α o parâmetro de escala e ϕ, δ e b os parâmetros de forma. Fixando alguns desses parâmetros obtém-se outras distribuições já conhecidas na literatura, como submodelos. Por exemplo têm-se que: Se $b = 1$ obtém-se a distribuição Weibull exponenciada; Se $\phi = 1$ obtém-se a distribuição beta exponencial; se $\phi = b = 1$ obtém-se a distribuição exponencial exponenciada; se $\phi = \delta = 1$ obtém-se a distribuição exponencial; se $\delta = b = 1$ obtém-se a distribuição Weibull; se $\phi = 2$ e $b = 1$ obtém-se a distribuição Burr tipo X e se $\phi = 2$ e $\delta = b = 1$ obtém-se a distribuição Rayleigh.

A taxa de falha do modelo beta Weibull apresenta as formas monótonas e não monótonas e podem ser determinadas a partir de quatro regiões do espaço paramétrico determinado pelas equações $\phi = 1$ e $\phi\delta = 1$ com ilustrado na Figura 6 (no gráfico a esquerda). Na Figura 6 (no gráfico a direita) as formas para a taxa de falha, fixando $b = 1$ e variando os demais parâmetros da distribuição são apresentadas.

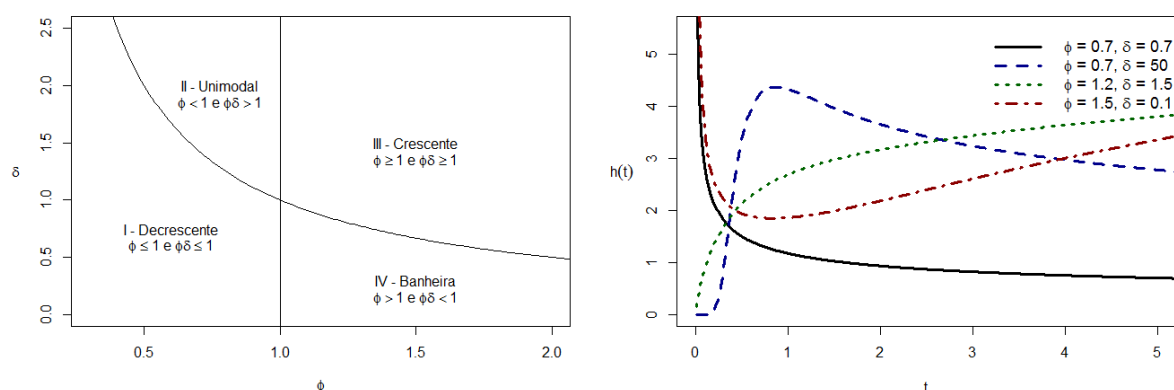


Figura 6: A esquerda: As quatro regiões do espaço paramétrico, com $b=1$, do modelo beta Weibull com as respectivas descrições das formas da função taxa de falha; A direita: Exemplos de curvas de taxa de falha para valores atribuídos aos parâmetros e mantendo $b=1$.

5.3 Aplicação: Filmes de tereftalato de polietileno

Para essa aplicação foi utilizado um conjunto real de dados na área de engenharia elétrica sobre o tempo de falha de filmes de tereftalato de polietileno (PET) em transformadores isolados com gás SF₆. Os dados foram publicados por Hirose (1993) o qual utilizou dados de teste de vida acelerado para estimar o tempo de vida médio de filmes de PET submetidos a stress. O objetivo do estudo é relacionar o tempo até o filme PET (usado como isolante elétrico) falhar com o nível de voltagem submetido.

Considerou-se os tempos em horas até os filmes de PET falharem e quatro níveis de voltagens 5, 7, 10 e 15 medidos em quilovolt (kV) foi considerado. Totalizando uma amostra de $n = 41$ observações e a covariável x_i , nível de voltagem.

O gráfico TTT, Figura 7, apresenta curva convexa e então côncava (curva D) indicando que a taxa de falha empírica tem forma de U, e portanto o modelo beta Weibull é adequado para ajustar-se aos dados em comparação ao modelo Weibull que não modela forma de U.

A Tabela 1 apresenta as estimativas dos parâmetros para os modelos Weibull e beta Weibull e os respectivos valores das estatísticas Critério de Informação Akaike (AIC), Critério Akaike de Informação Consistente (CAIC) e Critério de Informação Bayesiano (BIC) que compara o ajuste de modelos encaixados (submodelos). Quanto menor o valor dessas estatísticas melhor será o modelo.

Observa-se da Tabela 1 que os valores de AIC, CAIC e BIC para o modelo beta Weibull foram os menores valores quando comparados ao modelo Weibull dando indicativo que o ajuste do primeiro modelo é o mais adequado. O modelo final, portanto, é dado por

$$y_i = e^{5,3860-0,5743x_i} = 211,8757 \times 0,5631^{x_i}.$$

E portanto, têm-se que aumentando o nível de voltagem em 1 kV o tempo de falha dos filmes de PET diminuem em 43,7%.

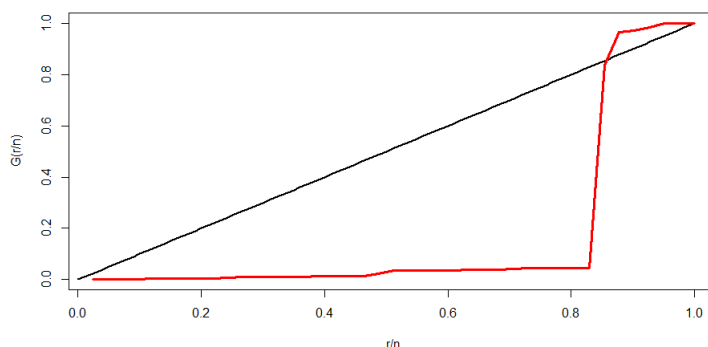


Figura 7: Gráfico TTT para os dados de tempo de falha de tereftalato de polietileno. Observa-se uma curva inicialmente convexa e então côncava (curva D) o que indicando que a taxa de falha empírica tem forma de U.

Tabela 1: Estimativas dos parâmetros para os modelos Weibull e beta Weibull (BW)

Modelo	b	δ	ϕ	β_0	β_1
BW	0,2007	100,3800	0,4115	5,3860	-0,5743
			AIC = 486,4	CAIC = 488,2	BIC = 495,0
Modelo	-	-	ϕ	β_0	β_1
Weibull	-	-	0,8252	11,7694	-0,6881
			AIC = 501,4	CAIC = 502	BIC = 506,6

5.4 Distribuição Kumaraswamy log-logística

A distribuição Kumaraswamy log-logística foi proposta por Santana et al. (2012), como alternativa a distribuição beta log-logística proposta por George e Ojo (1980), devido ao modelo possui forma analítica e consequentemente o tratamento matemático e computacional simplificado e por ajustar-se a dados que apresentam taxa de falha com formas monótonas e não monótonas.

O modelo Kumaraswamy log-logístico é obtido substituindo $G(t)$ na equação (2) por $1 - S(t)$, em que $S(t)$ é a função sobrevivência da distribuição log-logística. A sobrevivência desse modelo apresenta expressão

$$S(t) = \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{-\gamma} \right]^{-a} \right\}^b$$

e taxa de falha

$$h(t) = ab \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{-\gamma-1} \left[1 + \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{-\gamma} \right]^{-a-1} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{-\gamma} \right] \right\}^{-1},$$

em que, $a, b, \alpha, \gamma > 0$ são os parâmetros do modelo e $t > 0$ o tempo de falha.

A Figura 8 apresenta as formas da taxa de falha para alguns valores fixados dos parâmetros. Note que todas as formas básicas são modeladas pela distribuição (unimodal, crescente, decrescente e forma de U).

O modelo Kumaraswamy log-logístico apresenta vários submodelos como casos particulares. Por exemplo: Se $b = 1$ obtém-se a distribuição log-logística exponenciada; Se $a = 1$ obtém-se a distribuição log-logística estendida; Se $a = 1$ e $b = 1$ obtém-se a distribuição Log-logística; Se $a = 1, \alpha = 1$ e $\gamma < 0$ obtém-se a distribuição Burr XII; Se $a = 1, b = 1, \alpha = 1$ e $\gamma = 1$ obtém-se a distribuição Log-logística padrão; E se $Y = \ln(T)$, em que T tem distribuição Kumaraswamy log-logística, obtém-se a distribuição Kumaraswamy logística.

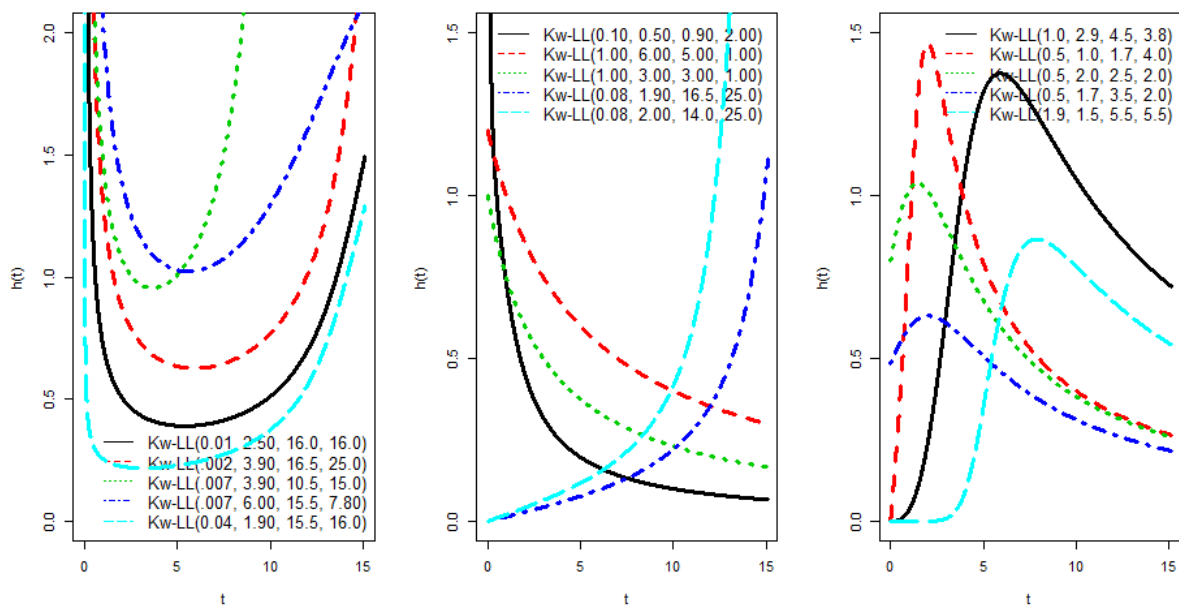


Figura 8: Formas da taxa de falha do modelo Kumaraswamy log-logístico.

5.5 Aplicação: Soro-reversão em crianças expostas ao HIV por via vertical

Para essa aplicação considerou-se um conjunto de dados referente ao tempo até a soro-reversão de 143 crianças expostas ao Vírus da Imunodeficiência Humana (HIV) por via vertical, nascidas no hospital das clínicas da faculdade de medicina de Ribeirão Preto, entre 1995 a 2001, onde as mães não foram tratadas, Silva (2004) e Perdoná (2006).

A soro-reversão é o processo de desaparecimento dos anticorpos anti-HIV do sangue em um indivíduo que anteriormente apresentava sorologia anti-HIV positivo. Com o passar dos meses os anticorpos maternos vão sendo eliminados e a sorologia anti-HIV deixa de ser positiva, tornando-se negativa. Foi administrada a droga Zidovudina, conhecida como AZT nas primeiras 24h de vida sendo administrado por 6 semanas (42 dias).

O gráfico TTT, apresentado na Figura 9, indica que a forma empírica da taxa de falha é unimodal, forma que a distribuição log-logística não ajusta. As estatísticas AIC, CAIC e BIC apresentaram os menores valores para o modelo Kumaraswamy log-logístico (AIC=1616,5, CAIC=1616,8 e BIC=1628,4) em comparação ao modelo log-logístico (AIC=1650,4, CAIC=1650,5 e BIC=1656,4), indicando o melhor ajuste por parte do modelo mais geral. O gráfico apresentando o ajuste da curva de sobrevivência para os dois modelos em comparação a sobrevivência empírica (kaplan-Meier) é apresentado na Figura 9.

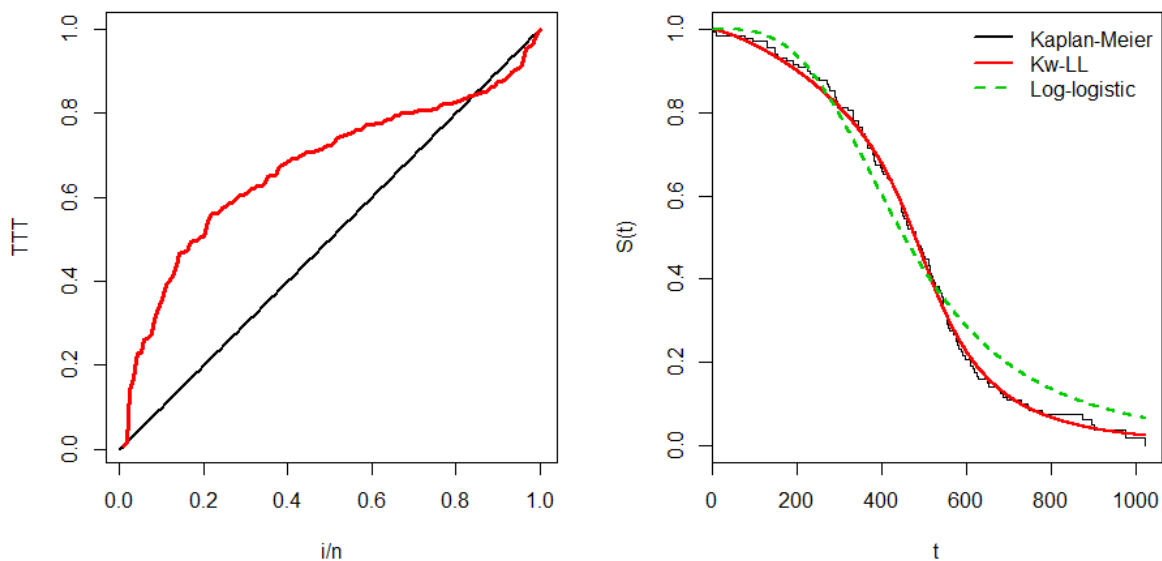


Figura 9

Da informação gráfica do ajuste dos modelos e dos valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC têm-se que o melhor ajuste aos dados ocorre quando considera-se o modelo Kumaraswamy log-logístico.

6. Considerações Finais

A técnica de generalização de modelos, em geral, traz ganho no ajuste de conjuntos de dados de sobrevivência, pois possibilita um mesmo modelo ajustar várias formas da função taxa de falha, característica muito importante no ajuste desse tipo de dados. Em contrapartida o modelo obtido é mais complexo, pois possui dois parâmetros adicionais no caso das classes beta e Kumaraswamy o que pode implicar em dificuldades computacionais na estimação dos parâmetros. Destaca-se que a classe Kumaraswamy, em geral, apresenta forma analítica e não depende de nenhuma função especial o que não ocorre com a classe beta. Para as aplicações apresentadas os modelos generalizados foram mais eficientes que os modelos já estabelecidos na literatura (Weibull e log-logístico), demonstrando a utilidade e ganho dessa metodologia.

7. Referências

AARSET, M. V. How to identify bathtub rate. **Transactions on Reliability**, New York, v. 36, p. 106-108, 1987.

BARROS, A. A. A. **Distribuições Exponencializadas e Estendidas**, 2008. 75p. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco, 2008.

COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. **Análise de sobrevivência aplicada**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. 370p.

CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, 2010.

CORDEIROa, G. M. ; Ortega, Edwin M.M. ; Nadarajah, Saralees . The Kumaraswamy Weibull distribution with application to failure data. **Journal of the Franklin Institute**, v. 347, p. 1399-1429, 2010.

EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-Normal distribution and its applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, New York, v.31, p.497-512, 2002.

FAMOYE, F.; LEE, C.; OLUMOLADE, O. The Beta-Weibull Distribution. **Journal of Statistical Theory and Applications**, Lawrenceville, v. 4, p. 121-136, 2005.

GEORGE, E. O.; OJO, M. O. On a generalization of the logistic distribution. **Annals of Statistical Mathematics**, Hayward, v.32, n.2, p.161-169, 1980.

HIROSE, H. Estimation of threshold stress in accelerated life-testing. **IEEE Transactions on Reliability** Dallas, v. 42, p. 650-657, 1993.

KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. **Journal of Hydrology**, New York, 46, , n.46, p.79-88, 1980.

LAWLESS, J. F. **Statistical models and methods for lifetime data**. New York: Wiley, p. 630, 2003.

MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. **Biometrika**, London, v.3, n.84, p. 641 - 652, 1997.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; FREIMER, M. The Exponentiated Weibull Family: A Reanalysis of the Bus-Motor-Failure Data. **Technometrics**, Alexandria, v.37, p.436-445, 1995.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta Gumbel distribution. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v.10, p.323-332, 2004.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The Beta Exponential distribution. **Reliability Engineering and System Safety**, Barking, v.91, p.689-697, 2005.

PARANAÍBA, P.F. ; ORTEGA, E. M. M. ; CORDEIRO, G. M.; Pescim, R. R. **The Beta Burr XII Distribution with Application to Lifetime Data**. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2011.

PASCOA, M. A. R.; ORTEGA, E. M. M.; CORDEIRO, G. M. The Kumaraswamy-Generalized Gamma Distribution with Application in Survival Analysis. **Statistical Methodology**, Oxford, 2010.

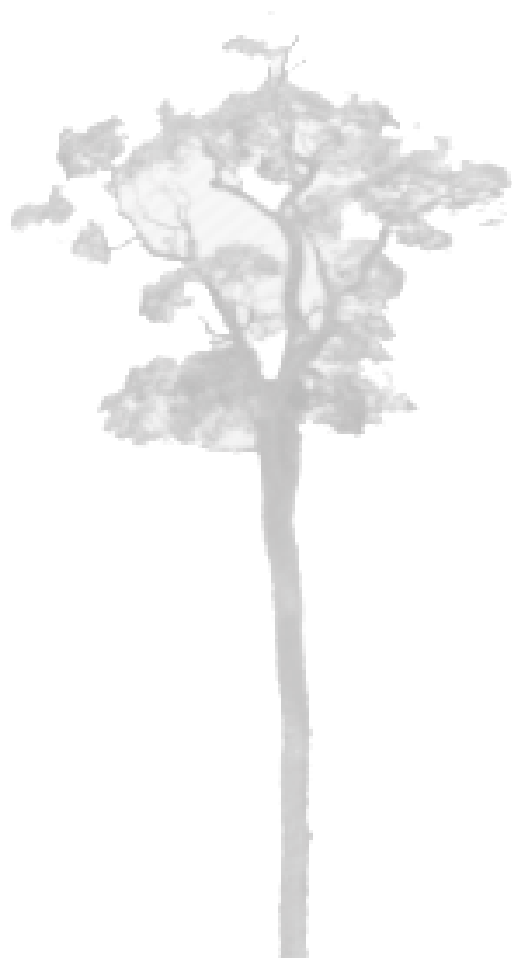
PERDONÁ, G. S. C. **Modelos de riscos aplicados à análise de sobrevivência**, 2006. 148p. Tese (Doutorado em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemática e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

PESCIM, R. R.; DEMÉTRIO, C. G. B.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. M.; URBANO, M. R. **The Beta Generalized Half-Normal Distribuiton**. Computational Statistics and Data Analysis, New York, 2010.

SANTANA, T.V.F; ORTEGA, E.M.M; CORDEIRO, G.M; SILVA, G.O. The Kumaraswamy-Log-Logistic distribution, **Journal of Statistical Theory and Application**, Volume 11, Number 3, 2012, pp. 265--291.

SILVA, A. N. F. **Estudo Evolutivo das Crianças Expostas ao HIV e Notificadas pelo Núcleo de Vigilância Epidemiológica do HCFMRP-USP**. Ribeirão Preto, 2004. Dissertação de mestrado - Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo.

SILVA, G. O. **Modelos de regressão quando a função de taxa de falha não é monótona e o modelo probabilístico betaWeibull modificado**, 2008. 207p. Tese (Doutorado em Agronomia - Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2008.



O GETOM: FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Gabriel Alencar de Almeida
gabrielalmeida_8@hotmail.com
Ana Lucia da Silva
Regina Célia Guapo Pasquini

Resumo:

Este trabalho tem como objetivo relatar a experiência obtida em um grupo de trabalho com professores da Educação Básica – o GETOM (Grupo de Estudos e Trabalho das Olimpíadas de Matemática). O grupo existe há oito anos e é constituído por professores da Educação Básica que ensinam Matemática, professores do Departamento de Matemática desta Universidade Estadual de Londrina (UEL) e estudantes da graduação dos cursos de Matemática, Economia e Engenharia Civil. Esta atividade é uma ação desenvolvida por meio de um projeto de extensão vinculado à Pró-Reitoria de Extensão da UEL cujo público alvo são professores da Educação Básica (EB) que participam voluntariamente do projeto. O grupo reúne-se mensalmente com o objetivo de discutir a Matemática presente na sua prática docente subsidiando o seu trabalho em sala de aula. Este grupo surgiu por iniciativa da professora Ana Lucia da Silva coordenadora regional da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e dos professores da EB que demonstraram interesse em realizar estudos referentes às questões das olimpíadas, motivando a criação do grupo. As atividades do grupo são desenvolvidas a partir de problemas e dos materiais que subsidiam o PIC – Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Tomamos como base os problemas, que a princípio podem ser considerados básicos e de fácil resolução, do ponto de vista do Ensino superior, mas proporcionam o estudo de diferentes conceitos e ideias necessários para o ensino de Matemática. Os problemas, junto às suas resoluções, são capazes de trazer à tona uma discussão de alto nível matemático, remetendo-nos aos conhecimentos relativos a áreas da Matemática que por vezes são questionadas por pertencer à formação inicial dos professores que ensinam Matemática, como a Análise, por exemplo. Como estratégia para o desenvolvimento do trabalho nos encontros mensais

utilizamos a Resolução de Problemas (RP) na perspectiva de Onuchic & Allevato (2011) ao colocar um problema como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (p. 81). Dessa forma, trazemos a RP como estratégia de ensino em que o problema é ponto de partida para que conhecimentos matemáticos sejam construídos e, o conteúdo em si, que desejamos abordar, seja sistematizado a partir da resolução de um, ou de mais problemas. Nossa experiência mostra que na formação inicial daqueles professores existem lacunas que são percebidas ao longo de suas práticas e o GETOM tem sido uma oportunidade para que possam aprender constantemente. A dinâmica de trabalho segue as etapas da Resolução de Problemas, onde um ou mais problemas são escolhidos pelas docentes coordenadoras do grupo previamente, os professores resolvem o problema em grupo e na lousa uma ou mais soluções, quando construídas são apresentadas. A partir desta apresentação é estabelecida uma plenária. Conhecimentos são veiculados e sistematizados e geram uma discussão capaz de emergir as lacunas citadas anteriormente. Entendemos que não somente os professores da EB, que são o público alvo do projeto, mas todos os que participam dos encontros são beneficiados com o trabalho desenvolvido. Neste sentido, nosso fazer vem colaborar com a formação continuada do professor no que diz respeito à exploração de problemas e exercícios desafiadores como metodologia diferenciada na sala de aula; ao estimular o uso de problemas desafiadores como material didático na sala de aula, já que constantemente em contato com material especializado; com isso oportunizamos o desenvolvimento de uma cultura entre os professores que situe os problemas como elementos importantes para as aulas de matemática; além de oferecer um ambiente acadêmico e orientado para que possam se expor e manifestar frente às dificuldades de sua prática e que permita realizar discussões sobre assuntos veiculados na sua prática tanto do ponto de vista matemático quanto do metodológico e mais ainda, podemos utilizar os "erros" que possivelmente são cometidos como instrumento de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.. *Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas*. BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v.25, n.41, p.73-98. 2011

Material utilizado no PIC OBMEP.



O PAPEL DO PIBID MATEMÁTICA JUNTO A ALUNOS COM SÍNDROME DE DOWN

André Lima Rodrigues
Universidade Estadual de Londrina
andrelr1@hotmail.com

Ana Márcia F. Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina
anatuccicarvalho@gmail.com

Maria A. da Silva de Carvalho
Colégio Estadual Vicente Rijo
marryya@gmail.com

Resumo

No ano de 2015, entre as atividades realizadas pela equipe de alunos do Pibid Matemática no Colégio Estadual Vicente Rijo em Londrina, destacou-se a intervenção com um sujeito portador da Síndrome de Down, que culminou neste trabalho.

Ao longo dos anos em que o PIBID Matemática tem se desenvolvido, suas ações se ampliaram e, atualmente, a temática de inclusão está sendo contemplada, abarcando pibidianos que procuram realizar atividades junto a alunos com necessidades especiais, particularmente, destacamos o acompanhamento deste aluno com Síndrome de Down.

Etiologicamente a Síndrome de Down (SD) resulta da triplicação do material genético referente ao cromossomo 21. Pesquisas apontam a frequência de ocorrência desta alteração como 1:750 nascidos vivos, compreendendo cerca de 18% do total de deficientes mentais frequentando instituições especializadas (BISSOTO, 2005; LUIZ et.al., 2008). Muitas vezes o diagnóstico ocorre logo após ao nascimento, já que há características físicas típicas (fenotípicas) que podem ser observadas. As causas biológicas desta trissomia são multifatoriais, mas é comum a associação com gestações em mulheres acima dos 40 anos, onde a prevalência chega a 35% dos casos (NAKADONARI e SOARES, 2006).

Embora textos sobre a educação inclusiva apontem a necessidade de adaptações e adequações, bem como modificações, no processo de ensino e avaliações, na prática do cotidiano escolar isso não acontece. Os alunos com necessidades especiais são aprovados independentemente de saberes curriculares adquiridos ou não.

Permanecem questões nestes contextos: qual o papel da escola com relação à aprendizagem formal destes alunos? Deveria ser a escola apenas um espaço de socialização,

sem preocupação como os conteúdos curriculares? No fundo estas questões trazem à baila a própria concepção de educação inclusiva que se pretende.

A valorização contínua dos processos de produção do saber docente a partir da prática cotidiana é uma das metas do PIBID – Matemática. Assim existe a intencionalidade de enfatizar a cooperação e a troca de experiências entre o profissional professor: tanto o futuro professor, hoje licenciando em matemática, na formação inicial que não dispõe da prática e experiência do docente da Educação Básica; quanto o praticante, professor de matemática em exercício, da educação básica, formação continuada, que pode, assim, retomar conhecimentos do ambiente universitário. A base que alicerça esta valorização é a troca de experiências entre estes participantes (CARVALHO, 2010).

Foram realizadas intervenções diretas por um bolsista de iniciação à docência pibidiano, sob a supervisão da professora regular do aluno, com o desenvolvimento de algumas atividades direcionadas para este aluno, cuja metodologia pautou-se numa aprendizagem dialogada, com respeito às necessidades especiais que se apresentavam na situação.

Nossos objetivos foram defender que a escola pública regular não é apenas um espaço de socialização para o aluno com deficiência, mas lugar para que conhecimentos específicos, particularmente, matemáticos, sejam trabalhos; e destacar a valorização do programa Pibid na formação do aluno de licenciatura.

Nossos resultados apontam que é possível ao portador da Síndrome de Down aprender matemática também no Ensino Médio.

Referências

BISSOTO, M. L. Desenvolvimento c3ognito e o processo de aprendizagem do portador de s3ndrome de Down: revendo concep33es e perspectivas educacionais. **Ci3ncia e Cogni333o**. v. 4, p. 80 – 88, 2005.

CARVALHO, A. M. F. T. Oprojeto PIBID-Matem3tica da UEL: troca de experi3ncias. (Relato de Experi3ncia). V Congresso Internacional de Ensino de Matem3tica, V CIEM, 20 – 23 outubro de 2010, Canoas, RS. In: **Anais.....**, 2010.

LUIZ, F. M. R.; BORTOLI, P.S; FLORIA-SANTOS, M.; NASCIMENTO, L. C. A inclus3o da crian3a com S3ndrome de Down na rede regular de ensino: desafios e possibilidades. **Revista Brasileira de Educa33o Especial**. Mar3lia , v. 14, n. 3, p. 497-508, Dec. 2008 .



Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-65382008000300011&lng=en&nrm=iso>. Acesso em 28/03/16.

NAKADONARI, E.K; SOARES, A. A. Síndrome de Down: considerações gerais sobre a influência da idade materna avançada. **Arq Mudi**. N.10, vol. 2, p.5-9, 2006.



O PROBLEMA DE DIRICHLET NO DISCO UNITÁRIO

Barbara Almeida Monteiro
Universidade Estadual de Londrina
monteirobarbaraa@gmail.com

Marcio A. Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina
marcioajs@uel.br

Resumo

Neste trabalho usamos as ideias apresentadas em [2, 3] para determinar uma solução explícita de um problema de fronteira envolvendo a equação de Laplace com condições não homogêneas no bordo de um disco unitário em \mathbb{R}^2 . O método utilizado foi separação de variáveis e séries de Fourier.

Palavras-chave: Séries de Fourier; equação de Laplace; separação de variáveis.

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é resolver o seguinte problema de Dirichlet para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde Ω é o disco unitário dado por

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\},$$

$f \in C(\partial\Omega)$ será uma função contínua dada sobre $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ e $\Delta := \partial_{xx} + \partial_{yy}$ é o operador Laplaciano no caso bidimensional. Mais precisamente, vamos mostrar que o problema (1.1) possui uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Para isto, consideramos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \\ v(r, \theta) &= u(x, y), \end{aligned}$$

com $r \in [0, 1)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e definimos $g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$ no conjunto das funções contínuas e periódicas $C_{per}(2\pi)$, a fim de converter o problema (1.1) no seguinte problema de Dirichlet na variável $v = v(r, \theta)$

$$\begin{cases} r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\theta\theta} = 0; & r \in [0, 1), \theta \in \mathbb{R}, \\ v(1, \theta) = g(\theta). \end{cases} \quad (1.2)$$

Usando separação de variáveis, mostraremos que existe uma função em séries de Fourier que é candidata à solução de (1.2). Em seguida, usando resultados teóricos de análise, mostraremos que tal candidata pertence à seguinte classe de funções

$$\begin{aligned} v &\in C^2([0, 1) \times \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times \mathbb{R}), \\ v(r, \theta + 2\pi) &= v(r, \theta); \quad r \in [0, 1], \theta \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

e é, de fato, a solução de (1.2). Como consequência, usando novamente a relação $v(r, \theta) = u(x, y)$, então concluímos que a função $u = u(x, y)$ é a solução de (1.1).

2 Separação de Variáveis

Vamos resolver o problema (1.2) pelo método de separação de variáveis, procurando soluções da forma

$$v(r, \theta) = \varphi(r)\psi(\theta). \quad (2.4)$$

Substituindo esta expressão na EDP (1.2), segue que

$$\frac{r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda := \text{constante},$$

de onde obtemos as seguintes EDO's na variáveis ψ e φ :

$$\begin{aligned} \psi''(\theta) + \lambda \psi(\theta) &= 0, \\ \psi(\theta + 2\pi) &= \psi(\theta), \\ r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r) - \lambda \varphi(r) &= 0. \end{aligned}$$

No que segue, devemos determinar uma solução geral não identicamente nula φ para a seguinte da EDO

$$r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r) - \lambda \varphi(r) = 0, \quad (2.5)$$

e uma solução não identicamente nula ψ para o PVI

$$\begin{cases} \psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0, \\ \psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta). \end{cases} \quad (2.6)$$

Um valor de λ para o qual o problema (2.6) possui uma solução não trivial (ou seja, que não é identicamente nula) é chamado um autovalor e as soluções não triviais correspondentes são as autofunções associadas ao autovalor λ .

Neste caso, para os valores de $\lambda > 0$, pode-se resolver diretamente o PVI (2.6) e concluir que a solução $\psi(\theta)$ é da forma

$$\psi_k(\theta) = A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta); \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.7)$$

E que a solução geral da EDO (2.5) é da forma

$$\begin{aligned} \varphi_k(r) &= C_k r^k + D_k r^{-k}; \quad k \in \mathbb{N}, \\ \varphi_0(r) &= C_0 + D_0 \ln r. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como estamos procurando uma solução de (1.2) que esteja na classe (1.3), vamos considerar apenas as soluções da forma $\varphi_k(r)$ com $k \neq 0$. Usando as expressões (2.4), (2.7), (2.8) e o princípio da superposição, concluímos que

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)] r^k$$

é um candidato a solução de (1.2).

Vamos usar a forma complexa de $v(r, \theta)$ dada por

$$v(r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta} r^{|k|}.$$

Seja o núcleo de Poisson definido por

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} r^{|k|}. \quad (2.9)$$

Observe que, se $0 \leq r < 1$, a série (2.9) converge e

$$P_r(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{it})^k + \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{-it})^k = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}; \quad r \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Juntamente com a condição $v(1, \theta) = g(\theta)$, chegamos à seguinte expressão para a solução $v(r, \theta)$

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt e^{ik\theta} r^{|k|} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt \\ &:= (g * P_r)(\theta). \end{aligned} \tag{2.11}$$

3 Resultados

O Teorema a seguir mostra que $v(r, \theta)$ dada em (2.11) é solução do problema.

Teorema 3.1. *Seja P_r o núcleo de Poisson definido por (2.10). Então, a função $v(r, \theta)$ dada por*

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt := (g * P_r)(\theta)$$

satisfaz (1.2)-(1.3). Além disso, definindo $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u(x, y) = \begin{cases} v(r, \theta) & \text{se } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}, \\ f(x, y) & \text{se } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

então u é a solução de (1.1).

Ideia da prova. Para uma demonstração completa do Teorema 3.1 indicamos as seguintes referências [1, 2, 3]. No que segue, apresentamos uma sequência de lemas que apresentam uma ideia da demonstração em alguns passos. ■

Lema 3.1. *Seja $P(r, t) = P_r(t)$, $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$. Então, para cada $r \in [0, 1)$ fixo, $P(r, \cdot) \in C_{per}(2\pi)$, $P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$ e*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Lema 3.2. *Sob as notações acima, tem-se que $v \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R})$ e satisfaz*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Lema 3.3. *Quaisquer que sejam $r \in [0, 1)$ e $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se que*

$$P(r, \theta - t) = \frac{1 - r^2}{|re^{i\theta} - e^{it}|^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \theta') d\theta' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1.$$

Em particular, $P(r, t) > 0$ para $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$.

■

Lema 3.4. *Sob as notações acima, a função $v(r, \theta)$ converge uniformemente a $g(\theta)$ quando $r \rightarrow 1^-$.*

■

4 Conclusão

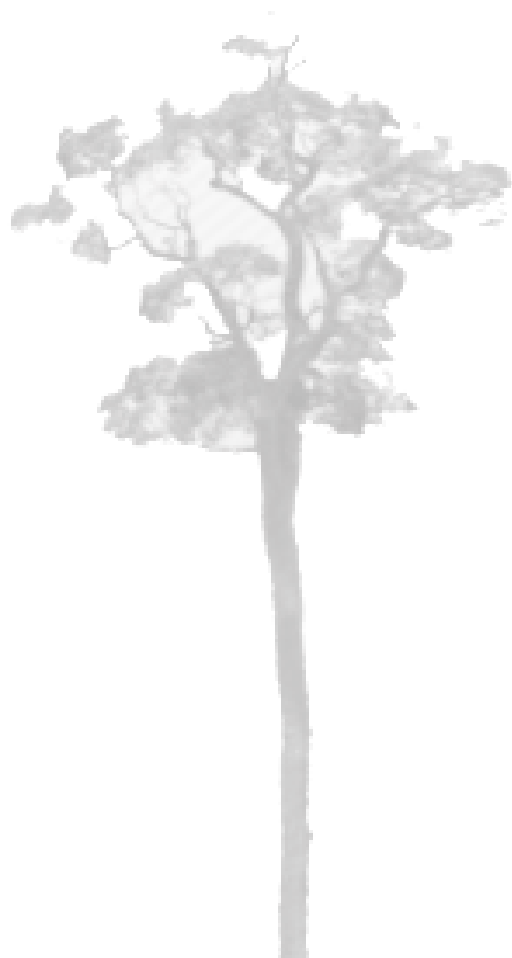
Concluimos que o método de separação de variáveis nos dá um “bom” candidato a solução em séries de potência para o problema de Dirichlet envolvendo a equação de Laplace e que tal método é apropriado para resolver EDPs lineares de segunda ordem.

5 Agradecimentos

Os autores gostariam de expressar seus agradecimentos ao Governo do Estado do Paraná, à Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, à Fundação Araucária, à CAPES, à Universidade Estadual de Londrina e ao Departamento de Matemática/UEL.

Referências

- [1] EVANS, LAWRENCE C., “*Partial differential equations.*”, American Mathematical Society, Providence , 1998.
- [2] FIGUEIREDO, DJAIRO G., “*Análise de Fourier e equação diferenciais.*”, Impa, Brasília , 1977.
- [3] IÓRIO, VALÉRIA, “*EDP Um Curso de Graduação*”, Impa, Rio de Janeiro , 2005.



O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA EQUAÇÃO DE LAPLACE NO RETÂNGULO

Nágela Faustino

Universidade Estadual de Londrina

nagelafasutino134@gmail.com

Marcio A. Jorge da Silva

Universidade Estadual de Londrina

marcioajs@uel.br

Resumo

Neste trabalho usamos as ideias apresentadas em [2, 3] para determinar uma solução explícita de um problema de fronteira envolvendo a equação de Laplace com condições na fronteira de um retângulo em \mathbb{R}^2 . O método utilizado foi separação de variáveis e séries de Fourier.

Palavras-chave: Séries de Fourier; equação de Laplace; separação de variáveis.

1 Introdução

Uma equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo uma função desconhecida (variável dependente) de duas ou mais variáveis independentes e suas derivadas parciais. A equação de Laplace é uma EDP que descreve fenômenos estacionários e problemas relacionados à equação de Laplace são denominados problemas de contorno ou problemas de Dirichlet.

A equação de Laplace, embora tenha aparecido pela primeira vez em um artigo de Euler sobre hidrodinâmica em 1752, ficou com o nome de Laplace em honra a Pierre-Simon Laplace (1749-1827) que, a partir de 1782, estudou suas soluções enquanto investigava a atração gravitacional entre corpos no espaço. A equação de Laplace aparece em muitos problemas da Física-Matemática. Neste trabalho, para resolver o problema de Dirichlet envolvendo a equação de Laplace no interior de um retângulo será utilizado o método de separação de variáveis e séries de Fourier.

Mais precisamente, abordaremos no presente trabalho o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{em } (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, & x \in [0, a], \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y), & y \in [0, b], \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $a, b > 0$ e $f \in C([0, b])$ é uma função contínua dada satisfazendo determinadas hipóteses.

2 Séries de Fourier

Nesta seção vamos resolver o problema (1.1) pelo método de separação de variáveis. Procuramos soluções da forma

$$u(x, y) = w(x)v(y), \quad x \in [0, a], y \in [0, b]. \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (1.1) obtemos

$$\frac{w''(x)}{w(x)} = -\frac{v''(y)}{v(y)} = \alpha := \text{constante}. \quad (2.3)$$

Impondo as condições de contorno homogêneas em (1.1) e por (2.3) obtemos as seguintes EDO's

$$w'' = \alpha w \quad \text{em} \quad (0, a), \quad w(0) = 0, \quad (2.4)$$

e

$$-v'' = \alpha v \quad \text{em} \quad (0, b), \quad v(0) = 0 = v(b). \quad (2.5)$$

O problema (2.5) só tem solução não trivial se

$$\alpha = \alpha_n = \frac{\pi^2 n^2}{b^2}. \quad (2.6)$$

Nesse caso, as soluções são da forma

$$v(y) = v_n(y) = a_n \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right), \quad n \in \mathbb{N}, y \in [0, b]. \quad (2.7)$$

Além disso, a solução geral da equação (2.4) para $\alpha = \alpha_n$ é dada por

$$w(x) = w_n(x) = c_n \left[\exp\left(\frac{\pi n x}{b}\right) - \exp\left(-\frac{\pi n x}{b}\right) \right] = 2c_n \sinh\left(\frac{\pi n x}{b}\right). \quad (2.8)$$

Logo, usando (2.2), (2.7) e (2.8) e aplicando o princípio da superposição, um candidato à solução do problema (1.1) é da forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh\left(\frac{\pi n x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right). \quad (2.9)$$

Impondo a condição de contorno em (1.1), obtemos

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right), \quad y \in [0, b].$$

E pelos coeficientes de Fourier tem-se

$$d_n \sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right) = b_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde

$$b_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{\pi nt}{b}\right) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh\left(\frac{\pi nx}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right), \quad (2.10)$$

onde $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$. E pela expressão para b_n acima, podemos reescrever (2.10) como

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{\pi nt}{b}\right) dt \frac{\sinh\left(\frac{\pi nx}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right), \quad (2.11)$$

para $(x, y) \in (0, a) \times (0, b)$.

3 Resultados

Nesta seção vamos mostrar que a função dada em (2.10) é a solução de (1.1). Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Seja $f \in C([0, b])$ satisfazendo $f(0) = 0 = f(b)$ e diferenciável em $(0, b)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC([0, b])$. Então a série em (2.10) converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$ para uma função*

$$u \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^\infty((0, a) \times (0, b)),$$

a qual é a solução de (1.1).

A demonstração do Teorema 3.1 é baseada na seguinte sequência de resultados.

Lema 3.1. *A função K definida por*

$$K(x, y, t) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{\pi nx}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi nt}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right)$$

pertence ao espaço $C^\infty([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e satisfaz a equação $K_{xx} + K_{yy} = 0$.

Demonstração: A prova é análoga à apresentada em [3, Lema 1.2].

■

Lema 3.2. *Seja $f \in C([0, b])$ como no Teorema 3.1. Então a série em (2.10) converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$. Além disso,*

$$u(x, y) = \int_0^b f(t)K(x, y, t) dt, \quad \forall (x, y) \in [0, a] \times [0, b]. \quad (3.12)$$

Demonstração: A prova é análoga à apresentada em [3, Lema 1.3].

■

Teorema 3.2. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo (finito ou infinito) e suponha que $F \in C([a, b] \times I)$ é tal que a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe e é contínua em $[a, b] \times I$. Seja*

$$f(y) = \int_a^b F(x, y) dx, \quad y \in I.$$

Então f é continuamente diferenciável em I com $f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} dx$, $y \in I$.

Demonstração: Ver [3, Teorema 1.4].

■

Ideia da Demonstração do Teorema 3.1: Pelo Lema 2, a série em (2.10) converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$ com $u \in C([0, a] \times [0, b])$. Pelo Lema 1, $K \in C^\infty([0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $K_{xx} + K_{yy} = 0$. Sendo assim, aplicando o Teorema 2, a expressão (3.12) e indução, obtemos que $u \in C^\infty([0, a] \times [0, b])$ e

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = \int_0^b f(t)[K_{xx}(x, y, t) + K_{yy}(x, y, t)]dt = 0$$

sempre que $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$. Além disso, como

$$K_k(x, 0, t) = 0, \quad K_k(x, b, t) = 0 \text{ e } K_k(0, y, t) = 0,$$

para todos $k \in \mathbb{N}$, $x, y, t \in \mathbb{R}$, então u satisfaz as condições de contorno. Finalmente, como a série de Fourier de f converge uniformemente em $[0, b]$ e $u(a, y) = f(y)$ para todo $y \in [0, b]$, então concluímos que a função u dada em (2.10) é a solução de (1.1).

■

4 Conclusão

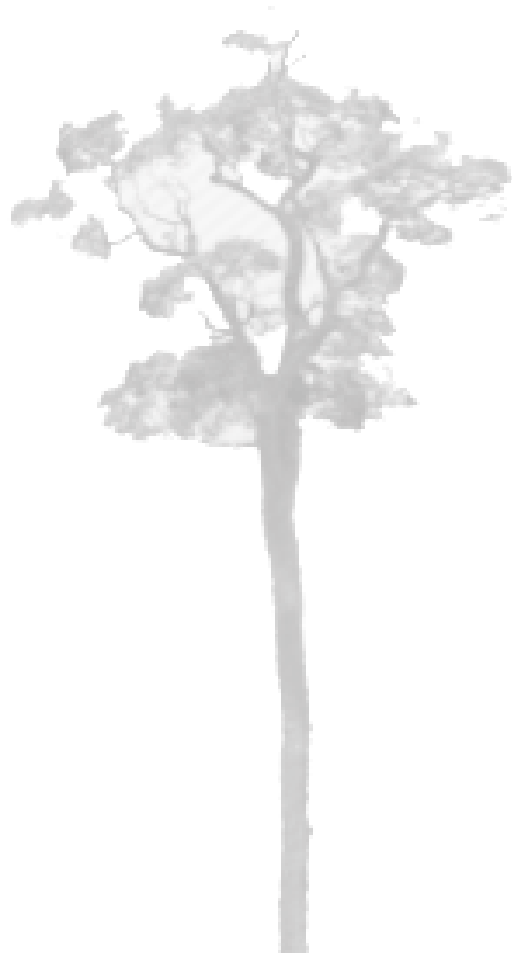
Concluímos que o método de Séries de Fourier constitui uma ferramenta eficaz na resolução da Equação de Laplace, bem como na resolução de EDPs lineares de segunda ordem, nos fornecendo uma solução explícita para o problema de forma analítica.

5 Agradecimentos

Os autores gostariam de expressar seus agradecimentos ao Governo do Estado do Paraná, à Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, à Fundação Araucária, à CAPES, à Universidade Estadual de Londrina e ao Departamento de Matemática/UEL.

Referências

- [1] L. C. Evans, Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [2] D. G. Figueiredo, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [3] V. Iório. EDP - Um curso de Graduação, 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.



OBMEP/2016 - CRIANDO OPORTUNIDADES, DISSEMINANDO MAIS TALENTOS

Profa. Dra. Ana Lucia da Silva
UEL
analucia@uel.br

Profa. Luciana Mayumi Umakoshi
UEL
lumakoshi@hotmail.com

Resumo:

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas encontra-se em sua 11ª edição e desenvolve o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) para atender os alunos medalhistas da OBMEP. Atualmente, o PIC está ligado ao programa OBMEP NA ESCOLA que tem como objetivo a melhoria do ensino de Matemática no país. Nesse trabalho, fazemos um relato do desenvolvimento do PIC na região PR-01 que engloba norte, norte velho, noroeste do Paraná e está vinculado a um projeto cadastrado na pró-reitora de extensão da Universidade Estadual de Londrina.

Palavras-chave: OBMEP; Matemática; PIC/OBMEP.

1. Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas encontra-se em sua 11ª edição e desenvolve o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) para atender os alunos medalhistas da OBMEP. Atualmente, o PIC está ligado ao programa [OBMEP NA ESCOLA](#) que tem como objetivo a melhoria do ensino de Matemática no país. O PIC/OBMEP NA ESCOLA é realizado por meio de uma rede nacional de professores orientadores e coordenadores distribuídos por todo o país, em escolas e universidades. Os professores orientadores pertencem às escolas públicas de educação básica, ou são alunos de cursos de licenciatura em Matemática, e são orientados por coordenadores, que são professores de universidades brasileiras ligados aos cursos de formação de professores de Matemática.

Dentro desse programa, os alunos do PIC têm encontros presenciais semanais com esses professores orientadores e também têm acesso a um fórum virtual, elaborado pela OBMEP, no qual, com ajuda de moderadores, realizam tarefas complementares às aulas presenciais. O material didático é preparado especialmente para os alunos nos diferentes níveis de participação e tem como objetivos:

- Despertar nos alunos o gosto pela Matemática e pela ciência em geral;

-
- Motivar os alunos na escolha profissional pelas carreiras científicas e tecnológicas;
 - Aprofundar o conhecimento matemático dos alunos, por meio de resolução e redação de soluções de problemas, leitura e interpretação de textos matemáticos e estudo de temas de modo mais aprofundado e com maior rigor matemático;
 - Desenvolver nos alunos algumas habilidades tais como: sistematização, generalização, analogia e capacidade de aprender por conta própria ou em colaboração com os demais colegas;
 - Incentivar o aprimoramento matemático dos professores, em especial dos professores dos alunos bolsistas;
 - Estimular uma articulação entre as escolas e as universidades.

1. Metodologia

O PIC consta das seguintes atividades:

- Encontros presenciais (ou virtuais, dependendo da situação do aluno);
- Discussões virtuais no fórum da OBMEP - denominado Hotel de Hilbert;
- Tarefas para serem executadas em casa e no Fórum Hotel de Hilbert;
- Outras atividades virtuais a serem executadas no Portal da Matemática.

Os encontros presenciais são dirigidos por Professores orientadores. Nesses encontros os alunos recebem o material de estudo, orientação e o cronograma sobre os temas a serem abordados. Esse material é discutido no fórum, entre os alunos, sob orientação dos Moderadores do Fórum.

A equipe responsável pelo PIC é composta por:

- Professores - atuam nas escolas da rede pública de ensino, apoiando e orientando os alunos sobre seu desenvolvimento e a participação no programa nos encontros presenciais.
- Moderadores de fórum - acompanham e estimulam as discussões e resolução de problemas entre os alunos em suas salas virtuais no fórum HH.

- Coordenadores de fórum - articulam os moderadores de fórum em relação à qualidade das intervenções realizadas nas discussões e acompanham a frequência e o cumprimento das regras estabelecidas pela Coordenação Acadêmica para o fórum.
- Coordenadores Orientadores - orientam e acompanham todas as atividades realizadas pelos professores de sua região.

2. Considerações Finais

Participam este ano 12 professores de diferentes cidades da região Norte e Noroeste do Paraná, selecionados por meio de um subprojeto da OBMEP, “OBMEP na Escola”. Todos os professores orientadores recebem bolsa da CAPES. O programa tem sido um sucesso e nesses 11 anos de existência, mais de 1500 estudantes participaram do PIC cuja coordenação está vinculada a um projeto cadastrado na pro-reitoria de extensão da Universidade Estadual de Londrina. A seguir um resumo do PIC/OBMEP/2016.

Nomes	Locais	Cidades de atuação	Nº de alunos	Níveis	Situação
Profa. Dra. Ana Lucia da Silva (coord.) Profa. Luciana Mayumi Umakoshi	Universidade Estadual de Londrina – Escritório da OBMEP		Todos da Região		
Prof. Arlei Ubiratan da Rocha Layra Rayane de Almeida Maximiano-Discente/Matemática/Licenciatura/UEL	Colégio Estadual José de Anchieta	Londrina	14	2	Presencial
Profa. Carmem Lucia Dionísio Rocha Navoscani	Colégio Aplicação Pedagógica da UEM	Maringá	23	2	Presencial
Prof. Cleiton Sofientini dos Santos	Instituto de Educação Estadual de Maringá	Maringá	23	3	Presencial
Profa. Eliete Shirley Gregório Pacci	Colégio Estadual Adaile Maria Leite	Maringá	24	1	Presencial
Fernanda Nataly Preisner – Discente/Matemática/Licenciatura/UEM	Universidade Estadual de Maringá	Maringá	5	3	Presencial
Profa.Ms. Greyce Contini Pilati	Colégio Estadual Marechal Costa e Silva	Cidade Gaúcha	25	3	Presencial
Prof. Ms.João Paulo Chiarotti	Colégio Estadual Professor Joaquim Adrega de Moura - E.F.M.P.N	Ribeirão Claro	25	1	Presencial
Prof. Ms. Julio Cezar Rodrigues de Oliveira	Colégio Estadual Professor Anesio Alves de Azevedo	Arapongas	24	2	Presencial
Prof. Ms. Rodrigo de Oliveira	Colégio Estadual Primo Manfrinato	Cianorte	22	3	Presencial
Profa. Sandra Cristina Torres Fernandes da Silva	Colégio Estadual Branca da Mota Fernandes	Maringá	17	1	Presencial
Brunna Leonardi Caciolato - Discente/Matemática/Licenciatura/UEL	Universidade Estadual de Londrina	Londrina	7	1	Virtual

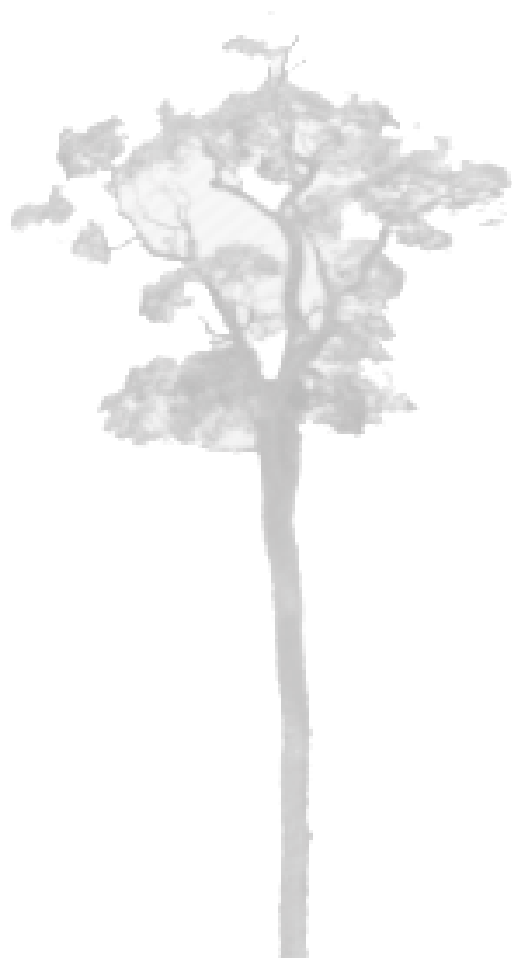
Michael Felipe Koga – Discente/Matemática/Licenciatura/UEL	Universidade Estadual de Londrina	Londrina	9	3	Virtual
---	--------------------------------------	----------	---	---	---------

3. Agradecimentos

Governo do Estado do Paraná, Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, Fundação Araucária, CAPES, OBMEP, Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática/UEL, Comissão Organizadora do Evento.

Referências

- Eduardo Wagner - Uma Introdução às Construções Geométricas
- Luciana Cadar e Francisco Dutenhfner - Encontros de Aritmética
- Luciana Cadar e Francisco Dutenhfner -Encontros de Geometria
- Paulo Cezar Pinto Carvalho - Métodos de Contagem e Probabilidade
- Vídeos da OBMEP
- Banco de Questões OBMEP



Oficinas de Trigonometria Esférica

Túlio Oliveira de Carvalho
tcarvalho@uel.br

Maria Aparecida da Silva de Carvalho
marryyaa@gmail.com

Matheus Grigio da Silva
grigio.matheus@gmail.com

Gustavo José Wurmeister Ferreira
gustavojwf@gmail.com

Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Londrina
CP 10.011, CEP 86057-970, Londrina - PR

RESUMO

O presente trabalho traz uma breve discussão sobre as vantagens, para o aprendizado, da aplicação de oficinas de trigonometria esférica, dentro do grande tema de Geometria. Notamos a ausência da recomendação explícita do ensino das Geometrias Não-Euclidianas no Ensino Básico nos documentos oficiais. Apontamos o suporte da Metodologia de Modelagem Matemática para justificar o desafio de inserir o tema em atividades de ensino.

Palavras-chave: geometrias não-euclidianas; geometria esférica; trigonometria.

INTRODUÇÃO

As habilidades ligadas à forma, espaço e percepção de distância estão ligadas ao ensino da Geometria. No entanto, o conceito de distância mínima, realizado pelas *geodésicas*, carece de maior contextualização. Na Geometria Euclidiana, as geodésicas são retas, enquanto que nas tarefas cotidianas não dispomos de caminhos retilíneos, em geral, para nos deslocarmos.

Encontra-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Fundamental [2], a seguinte referência, que consideramos discreta, ao tema das Geometrias:

Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998)

Destacamos na citação acima a palavra “*modelar*”. De fato, são muito mais numerosas, nos documentos oficiais [6], as referências à necessidade de praticar a Modelagem como metodologia de ensino na Educação Básica. Este trabalho tem esta perspectiva para propor oficinas de trigonometria esférica.

OFICINAS

Baseamos nossas oficinas nos trabalhos de Coutinho [3, 4], Lénárt [5], Antunes [1] e Silva [7].

Algumas propriedades dos triângulos na superfície esférica chamam a atenção, pelo contraste com a geometria euclidiana. A soma dos ângulos internos de um triângulo é, em geral, maior do que 180° . A área é, em geral, maior do que a de um triângulo plano que tenha os lados com as mesmas medidas. Estas comparações são bastante frutíferas do ponto de vista do aprendizado do aluno, porque favorecem a percepção de um contexto.

Por outro lado, não se teve o objetivo de usar as fórmulas para a área de triângulos esféricos, encontradas por exemplo em [4]. Restringimo-nos a algumas propriedades importantes, tais como o fato de que os grandes círculos, que contêm as geodésicas, ou caminhos que realizam a distância mínima, entre dois pontos dados, se intersectarem após uma distância finita ser percorrida.

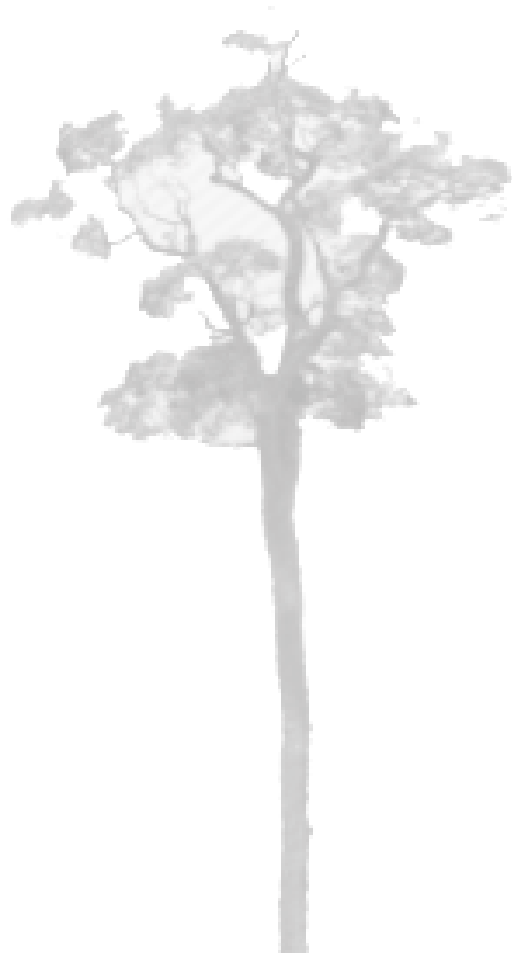
A mais, a exposição de problemas em que a esfera é o ambiente natural, como nos grandes deslocamentos sobre a superfície da terra (aproximada por uma superfície esférica), incita *naturalmente* a formulação do tão necessário “e se...” ao aluno da Educação Básica (veja o problema do pescador em [1]). Muitas vezes, o aluno é levado a pensar que, em Matemática, há uma única explicação correta para os problemas, propriedade que a despega do cotidiano.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho tem o apoio da CAPES, sendo os autores bolsistas do PIBID.

REFERENCIAS

- [1] ANTUNES, M.C. **Uma Possível Inserção das Geometrias Não-Euclidianas no Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática. UFRGS. 2009.
- [2] BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília. 1998.
- [3] COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Ed. Interciência, Rio de Janeiro. 2001.
- [4] COUTINHO, L. **Trigonometria Esférica: a Matemática de um Espaço Curvo**. Ed. Interciência, Rio de Janeiro. 2015.
- [5] LÉNÁRT, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere – activities comparing planar and spherical geometry**. USA: Key Curriculum Press. 1996.
- [6] PARANÁ, SEED. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública da Educação Básica do Estado do Paraná – Matemática**. Curitiba, 2008.
- [7] SILVA, W. D. **Uma Introdução à Geometria Esférica**. Dissertação de Mestrado. Profmat. Unesp, Rio Claro. 2015.



Princípio de Indução

Luiza Camile Rosa da Silva

Orientação: Prof. Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho

Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina

Londrina, PR

E-mail: luiza.camile2@hotmail.com, anacarvalho@gmail.com,

2 de outubro de 2016

Introdução

O próprio desenvolvimentos histórico relacionado ao conceito de número, sugere que, embora as considerações sobre as técnicas de calcular dependessem dos sistemas numéricos sugere que, embora as considerações sobre as técnicas de calcular dependessem dos sistemas numéricos utilizados e das necessidades práticas existentes, a mera utilização e manipulação dos números engendra certa abstração (ROQUE e CARVALHO, 2012). Quando consideramos os números naturais e nos deparamos com o fato de que este conjunto tem um número infinito de elementos, encontramos um problema prático: como assegurar que certa propriedade vale para qualquer elemento do conjunto, uma vez que se torna impossível verificá-la para cada um deles (pois sendo um conjunto infinito, teríamos que verificar a propriedade um número infinito de vezes). O Princípio da Indução Finita fornece ferramentas necessárias para lidarmos com este problema do infinito, quando as sentenças matemáticas que nos interessam envolvem os números naturais. Foi Giuseppe Peano (1858 – 1932) que estabeleceu um conjunto de axiomas, como modelo matemático, para tratarmos com sentenças de números naturais. O quarto destes axiomas é o Princípio da Indução.

Resultados e discussão

O Princípio da Indução Finita (PIF) é um método de demonstração muito poderoso, para estudar e estabelecer a validade de proposições que envolvem números naturais. Consideraremos, aqui, apenas este conjunto número como foco, com as propriedades operacionais usuais.

Pode-se estabelecer que o Princípio da Indução Finita é equivalente ao Princípio da Boa Ordenação. Assim, se tomarmos como ponto de partida o Princípio da Boa Ordenação, podemos obter o PIF.

Axioma 0.1. *Princípio da Boa Ordem: Seja X um subconjunto não vazio dos \mathbb{N} . Então existe $n_0 \in X$ tal que $n_0 < n$ para todo $n \in X$. Neste caso, n_0 é chamado de elemento mínimo de X .*

Ou seja, todo o subconjunto não vazio formado por números naturais possui um menor elemento.

Teorema 0.1. *Princípio da Indução Matemática*

Seja S um subconjunto de \mathbb{N} que possui as seguintes propriedades:

- *O número $1 \in S$.*
- *Para todo $k \in \mathbb{N}$, se $k \in S$, então $k + 1 \in S$.*

Então temos que $S = \mathbb{N}$

Demonstração. Supondo que $S \neq \mathbb{N}$. Então o conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ não é vazia, então pelo Princípio da Boa Ordem, ele tem pelo menos m elementos. Se $1 \in S$, sabemos que $m > 1$, mas isso implica que $m - 1$ é um número natural. Desde que $m > m - 1$ e desde que m é o menor elemento de \mathbb{N} , tal que $m \notin S$, concluímos que $m - 1 \in S$. Agora, aplicando o item 2 no elemento $k := \{m - 1\}$ em S , isso interfere que $\{k + 1 = (m - 1) + 1 = m\} \in S$. Mas nós tínhamos dito que $m \notin S$. Como m foi obtido de uma suposição de $\mathbb{N} \setminus S$ não fosse vazia. Temos que chegamos em uma contradição. Portanto $S = \mathbb{N}$. \square

Exemplo 0.1. Prove que $2n - 3 \leq 2^n - 2$ para todo $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$

Demonstração. Primeiramente, precisamos mostrar a existência de um $P(n_0)$, com $n_0 = 5$.

- $2 \cdot 5 - 3 = 7$
- $2^5 - 2 = 2^3 = 8$

Temos que $7 \leq 8$. Isso implica que $P(n_0)$ é verdade.

Hipótese de Indução: Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $P(k)$ é verdade, com $k \geq 5$.

$$P(k): 2k - 3 \leq 2^k - 2$$

Agora temos que provar que $P(k + 1)$ é verdade, ou seja:

$$2(k + 1) - 3 \leq 2^{k+1} - 2 \iff 2(k + 1) - 3 \leq 2^k + 1 = (2^k/2)$$

Utilizando do primeiro membro desta última igualdade, temos:

$$2k + 2 - 3 = 2k - 3 + 2 \leq 2^k - 2 + 2 = (2^k/2^2) + 2 \leq (2^k/2)$$

Assim, provamos que $P(k + 1)$ é verdade.

Então, $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5)(2n - 3 \leq 2^n - 2)$. \square

Teorema 0.2. Princípio de Indução Matemática (segunda versão)

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e seja $P(n)$ ser uma proposição para cada número natural $n \geq n_0$. Supondo que:

- A proposição $P(n_0)$ é verdadeira.
- Para todo $k \geq n_0$, a verdade de $P(k)$ implica na verdade de $P(k + 1)$.

Então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$.

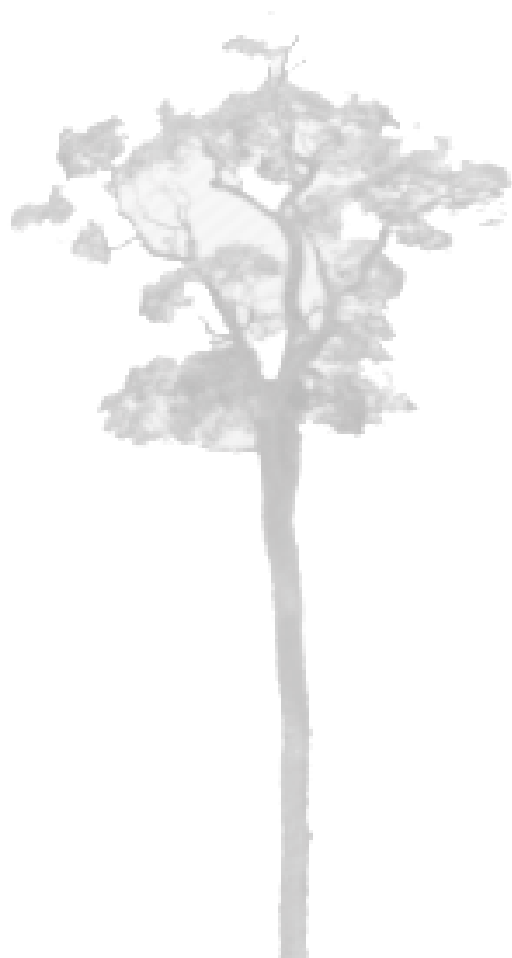
Provar a veracidade de uma sentença, lançando mão do Princípio da Indução Finita, quando comparada com a situação das peças de um dominó dispostas em fileiras, significa que todas as peças da sequência caem, se uma primeira cair.

Agradecimentos

Agradeço ao apoio financeiro do MEC-SESU através do Programa de Educação Tutorial(PET). Agradeço também à minha orientadora, Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho, pelas dicas e por tanto me ensinar.

REFERÊNCIAS

- [1] Domingues. H. H.; Iezzi, Gelson. *Álgebra Moderna*, São Paulo: Atual, 2003
- [2] Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert, *Introduction to real analysis*, 3rd ed., John Wiley and Sons, Inc. 2000
- [3] ROQUE, T. ; CARVALHO, J.B. P. Tópicos de História da Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.



PROBLEMA DE TRANSMISSÃO DE CALOR

Sandro Bernardes Pinheiro
Universidade Estadual de Londrina
sandrobernardespineiro@gmail.com

Marcio A. Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina
marcioajs@uel.br

Resumo

Neste trabalho usamos as ideias apresentadas em [2, 3] para determinar uma solução explícita de um problema de valor inicial e de fronteira envolvendo a equação do calor com condições de Dirichlet na fronteira. O método utilizado foi separação de variáveis e séries de Fourier.

Palavras-chave: Séries de Fourier; equação do calor; separação de variáveis.

1 Introdução

Neste trabalho, estudamos uma equação diferencial parcial conhecida como Equação do Calor. Tal equação modela o fenômeno físico da condução de calor em uma barra de seção reta uniforme de comprimento L (com área muito pequena com relação ao comprimento), com difusividade térmica igual a α^2 e colocado em um reservatório térmico à temperatura constante igual a zero nas extremidades da barra. Através do método proposto por Joseph Fourier, em seu ensaio *Théorie analytique de la chaleur*, publicado em 1822, determinaremos a solução do problema por meio de Séries de Fourier, obtendo inicialmente um candidato a solução. Em seguida, usaremos os resultados de Séries de Fourier para provar que a “solução” encontrada é, de fato, uma solução do problema proposto.

Mais precisamente, vamos estudar o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $f \in C([0, L])$ é uma função dada e $L > 0$.

2 Separação de Variáveis

Para resolver o problema (1.1), vamos usar o método de separação de variáveis e procurar uma solução da forma

$$u(x, t) = \beta(x)\gamma(t).$$

Isto nos leva a duas EDOs como segue

$$\begin{cases} \beta'(x) + \lambda\beta(x) = 0, \\ \beta(0) = 0 = \beta(L), \end{cases} \quad (2.2)$$

e

$$\gamma_t(t) = -\alpha^2\lambda\gamma(t). \quad (2.3)$$

Além disso, considerando a existência de autofunções reais para nosso problema, devemos considerar o caso $\lambda > 0$. Logo, resolvendo diretamente a EDO (2.2), determinamos que a solução geral é

$$\beta(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad (2.4)$$

de onde obtemos, impondo as condições de contorno, as seguintes soluções

$$\beta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in [0, L],$$

as quais, para cada $n \in \mathbb{N}$, são as autofunções associadas (ver [3]). A EDO (2.3), por sua vez, nos leva a seguinte solução geral

$$\gamma(t) = ke^{-\alpha^2\lambda t},$$

onde k é uma constante arbitrária. Com as notações acima, obtém-se a seguinte sequência de soluções de (1.1)

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Além disso, aplicando o Princípio das superposições, obtemos o candidato a solução do problema (1.1), a saber,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.7)$$

com f sendo dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in [0, L]. \quad (2.8)$$

3 Resultados

Iniciamos esta seção com o seguinte resultado de existência.

Teorema 3.1 (Existência). *Seja $f \in C([0, L])$ satisfazendo $f(0) = 0 = f(L)$ e suponha que f é diferenciável em $[0, L]$ a menos de um número finito de pontos com f' seccionalmente contínua em $[0, L]$. Então a série (2.6) converge uniformemente em $[0, L] \times [0, +\infty)$ para uma função $u \in C([0, L] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$ que é a solução de (1.1).*

Ideia da Prova. Como $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \in C_{per}(2L)$, se a série (2.8) convergir em $[0, L]$, então convergirá em toda a reta a uma função ímpar e periódica de período $2L$ e, portanto, será a série de Fourier de F , onde F é a extensão ímpar e periódica de período $2L$ de f .

Quanto à série em (2.6), pelo Lema de Riemann-Lebesgue, a sequência b_n dos coeficientes de Fourier de F converge a zero, ou seja, é limitada. Logo, existe, $M > 0$ tal que $|b_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde vem que

$$\left| b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \right| \leq \left| M e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \right| = M \left| e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \right|, \quad (3.9)$$

para todo $x \in [0, L]$ e para todo $t > 0$. Em suma, a série em (2.6) converge uniformemente em $[0, L] \times [\epsilon, +\infty)$ para qualquer $\epsilon > 0$. Por conseguinte, no caso em que $t > 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \\ &= \int_0^L f(y) \left[\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \right] dy \\ &= \int_0^L f(y) k(x, y, t) dy, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$k(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

é chamado de *núcleo do calor* para o problema (1.1). Note que $k \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty))$.

Analogamente ao que foi obtido em (3.9), concluímos que a série (3.10) converge uniformemente em $\mathbb{R} \times [\epsilon, +\infty)$, qualquer que seja $\epsilon > 0$. Como as funções do tipo $\sin x$ e e^x

são de classe C^∞ e a série em (3.10) é uniformemente convergente em $[0, L] \times (0, \infty)$, então $u \in C^\infty([0, L] \times (0, \infty))$. Para o caso $t = 0$, admitimos que f é diferenciável a menos de um número finito de pontos em $[0, L]$, com $f \in SC[0, L]$. Então a série de Fourier em f converge uniformemente e, portanto, a série em (2.6) converge uniformemente em $[0, L] \times [0, +\infty)$. Isto mostra que u é contínua também no segmento de reta $t = 0$, com $0 \leq x \leq L$, ou seja, acabamos de mostrar que $u \in C([0, L] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$. Além disso, um cálculo direto mostra que u dada em (2.6) satisfaz (1.1). ■

A seguir, veremos um resultado de unicidade para a solução do problema (1.1).

Teorema 3.2 (Unicidade). *Se $u \in C([0, L] \times [0, \infty)) \cap C^2((0, L) \times (0, \infty))$ é uma solução do problema (1.1), então ela é única.*

Ideia da Prova. Uma prova da unicidade de solução para o problema (1.1) pode ser dada através da integral de energia, conforme em [3]. Com efeito, suponhamos que $u, v \in C^2((0, L) \times (0, +\infty)) \cap C([0, L] \times [0, +\infty))$ sejam soluções de (1.1). Então, a função $w = u - v$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ w(0, t) = 0 = w(L, t), & t \geq 0, \\ w(x, 0) = 0, & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (3.11)$$

Considere o funcional energia

$$E_w(t) = \int_0^L (w(x, t))^2 dx, \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Derivando (3.12), usando (3.11) e integrando por partes, obtemos $E'_w(t) \leq 0$, o que significa que $E_w(t)$ é uma função decrescente. Logo, para $t \geq 0$ obtemos

$$0 \leq \int_0^L (w(x, t))^2 dx = E_w(t) \leq E_w(0) = \int_0^L (w(x, 0))^2 dx = 0. \quad (3.13)$$

Isso nos permite concluir que $w \equiv 0$, ou seja, $u \equiv v$ em $C^2((0, L) \times (0, +\infty)) \cap C([0, L] \times [0, +\infty))$. ■

4 Conclusão

Concluimos que o método de Séries de Fourier é eficaz na obtenção de solução para a Equação do Calor. Além disso, este método também pode ser empregado para EDP's lineares de segunda ordem.

5 Agradecimentos

Os autores gostariam de expressar seus agradecimentos ao Governo do Estado do Paraná, à Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, à Fundação Araucária, à CAPES, à Universidade Estadual de Londrina e ao Departamento de Matemática/UEL.

Referências

- [1] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (AMS), 2003.
- [2] FIGUEIREDO, D. G. DE, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [3] IÓRIO, V., *EDP - Um curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, 4a ed. IMPA, 2016.





PROFMAT NA UEL

Profa. Dra. Ana Lucia da Silva
UEL
analucia@uel.br

Gabriel Alencar de Almeida
UEL
gabrielalmeida_8@hotmail.com

Resumo:

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional é um curso semipresencial, com oferta nacional, realizado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil, e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática. O programa é coordenado pela Comissão Acadêmica Nacional, que opera sob a égide da Diretoria da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e foi avaliado pela CAPES com nota 5, que é a nota máxima para um programa de mestrado. Cada Instituição de Ensino Superior que integra a Rede Nacional, é denominada Instituição Associada. A Universidade Estadual de Londrina (UEL) é instituição associada desde o início do programa.

Palavras-chave: PROFMAT; Matemática, Mestrado Profissional.

1. Introdução

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional é um curso semipresencial, com oferta nacional, realizado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil, e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

O programa foi recomendado pelo Conselho Técnico-Científico da Educação Superior – CTC-ES da CAPES, em outubro de 2010. O reconhecimento do PROFMAT pelo CNE (Conselho Nacional de Educação) foi concebido através da Portaria nº 1325 de 22/9/2011.

O PROFMAT é coordenado pela Comissão Acadêmica Nacional, que opera sob a égide da Diretoria da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e foi avaliado pela CAPES com nota cinco, que é a nota máxima para um programa de mestrado.

É um curso semipresencial realizado por Instituições de Ensino Superior associadas em uma Rede Nacional, no âmbito do Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB).



Cada Instituição de Ensino Superior que integra a Rede Nacional, é denominada Instituição Associada.

A Universidade Estadual de Londrina (UEL) é instituição associada desde o início do programa.

2. Objetivos

O PROFMAT visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente. O Programa opera em ampla escala, com o objetivo de, a médio prazo, ter impacto substantivo na formação matemática do professor em todo o território nacional. A seguir os docentes vinculados ao programa na Universidade Estadual de Londrina, que possuem formação diversificada, oportunizando o público alvo a trabalhar com assuntos dos mais variados em suas dissertações:

- Prof. Dr. em Matemática/Análise - Adeval Lino Ferreira – Matemática
- Prof. Dra. em Matemática/Geometria e Topologia - Ana Lucia da Silva
- Profa. Dra. em Educação Matemática -Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
- Prof. Ms. em Matemática - Andrielber da Silva Oliveira
- Prof. Dr. em Engenharia de Materiais - Jacques Duílio Brancher
- Profa. Dra. em Educação Matemática - Magna Natália Marin Pires
- Profa. Dra. em Matemática/Análise - Michele de Oliveira Alves
- Profa. Dra. em Engenharia Mecânica - Neuza Teramon
- Profa. Dra. em Educação Matemática - Pamela Emanuelli Alves Ferreira
- Prof. Dr. em Matemática/Análise - Paulo Antonio Liboni Filho
- Profa. Dra. em Educação Matemática - Regina Celia Guapo Pasquini
- Prof. Dr. em Engenharia - Mecânica Ricardo Cezar Ferreira
- Prof. Dr. em Física Túlio Oliveira de Carvalho
- Prof. Dr. em Matemática/Análise Ulysses Sodré

3. Resultados

A tabela a seguir mostra, em números, o desempenho de nossa instituição. São 35 defesas em 3 turmas e várias em andamento.

ANO	ENTRADAS	BOLSISTAS	DEFESAS
2011	30	-	21
2012	15	3	6
2013	20	4	8
2014	20	7	EM ANDAMENTO
2015	20	10	EM ANDAMENTO
2016	26	7	EM ANDAMENTO
2017	25	-	ENA (22/10/2016)
TOTAL	156	31	35

4. Considerações Finais

Os professores formados no PROFMAT vêm atuando em escolas de nível básico e superior.

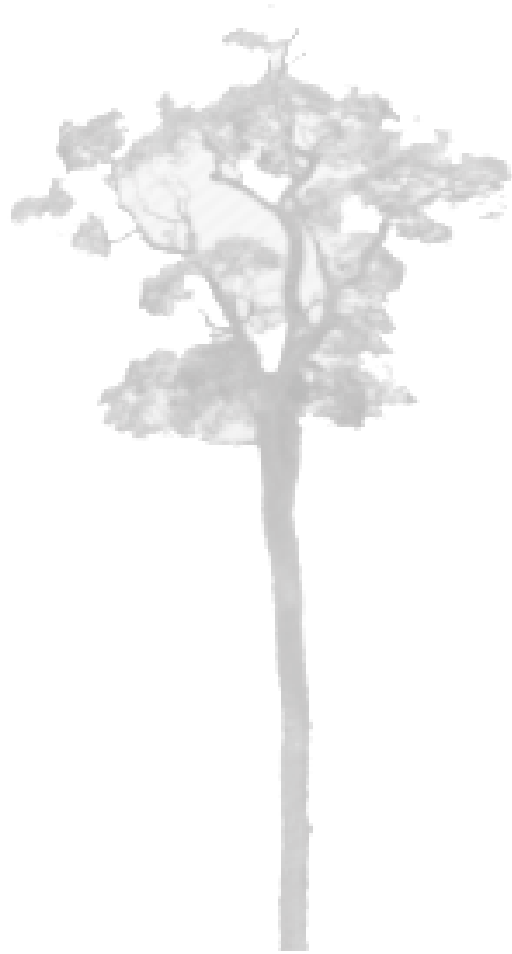
Um diferencial substancial é que vários professores do PROFMAT/UEL atuando como professores orientadores no Programa “OBMEP NA ESCOLA”, outro programa a nível nacional. Neste programa os docentes trabalham iniciação científica tipo júnior com alunos do ensino básico, utilizando um material diferenciado.

5. Agradecimentos

Universidade Estadual de Londrina, CAPES, PROFMAT, Departamento de Matemática/UEL, Comissão Organizadora do Evento.

6. Referências

- HEFEZ, A. *Aritmética*. Coleção PROFMAT, SBM, 2016.
- NETO, A. C. M. *Geometria*. Coleção PROFMAT, SBM, 2016.
- MORGADO, A. C., CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. Coleção PROFMAT, SBM, 2016.
- LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT, SBM, 2016.



PROJETO DE ENSINO: ESTATÍSTICA BÁSICA COM APLICAÇÃO NO SOFTWARE R

Pedro Y. Takito
Universidade Estadual de Londrina - Departamento de Matemática
takitopedro@gmail.com

Prof. Dr. Tiago V. F. Santana
Universidade Estadual de Londrina - Departamento de Estatística
tiagodesantana@uel.br

Resumo:

O projeto consistirá na construção de material de apoio as aulas de estatística, com enfoque aos cursos de matemática. O material complementar as aulas teóricas com aplicações dos conceitos aprendidos no software R. O R é um software livre projetado para a computação estatística e gráfica muito difundido, principalmente no meio acadêmico. O material será divulgado por meio de um endereço eletrônico na internet, disponibilizado pela Universidade Estadual de Londrina. O conteúdo abordado cobrirá os principais temas de um curso de Estatística Básica, a saber: Resumo dos dados; Medidas de posição e dispersão; Análise bidimensional; Probabilidade; Variáveis aleatórias; Simulação; Inferência; Estimação; Teste de hipóteses; Análise de aderência e associação e regressão linear simples. Ao fim do projeto espera-se a melhoria na qualidade das aulas de estatística, a disseminação da estatística e o domínio do software R nos procedimentos de análise estatística por parte dos alunos.

Palavras-chave: Estatística básica; Software R; Material de apoio.

1. Introdução

Para a aplicação da estatística faz-se necessário a utilização de algum software computacional, devido ao grande volume de dados que envolvem a maioria dos estudos nas diversas áreas do conhecimento. A utilização de programas estatísticos do tipo "caixa preta" no qual não se sabe exatamente o método estatístico utilizado e se é aplicável a situação em estudo, pode levar a conclusões equivocadas.

Os livros didáticos em estatística, nem sempre apresentam a utilização de ferramentas computacionais ou não priorizam o uso de algum software específico no estudo dos conteúdos, abrangendo a utilização dessas ferramentas de forma superficial. O material disponível na internet tem aplicações vagas ou muito específicas, não cobrindo todo o conteúdo de um curso de estatística básica.

Com base no explanado acima, a proposta do projeto é desenvolver material instrucional utilizando um software estatístico que necessite o conhecimento da metodologia estatística para a aplicação no estudo de casos, minimizando possíveis conclusões equivocadas e maximizando a fixação do conteúdo.

2. Objetivos

O objetivo principal com esse projeto é a construção de material de apoio para as aulas de estatística básica, com enfoque nas habilitações do curso de Matemática, utilizando como ferramenta o software R (R Core Team, 2016a), permitindo que o conhecimento teórico adquirido em aula seja aplicado não somente no ambiente acadêmico mas levado para a vida profissional do aluno.

3. Metodologia

O método adotado na elaboração do projeto é constituído primeiramente do levantamento teórico dos conteúdos abordados na disciplina e em seguida na aplicação desses conceitos utilizando o R.

O R é um software livre projetado para a computação estatística e gráfica, muito difundido no meio acadêmico devido a sua abordagem construtiva, ou seja, as análises estatísticas não são realizadas com um simples clicar de um ícone, é necessário construir, por meio de linhas de comando, os procedimentos da análise. Sendo fundamental o conhecimento teórico e construtivo de cada metodologia empregada para que a análise possa ser realizada.

A Figura 1 apresenta a visualização do ambiente R. A esquerda da figura observa-se o console (similar ao Linux) por onde se insere as instruções ao programa e a direita uma janela gráfica apresentando os resultados da sequência de códigos digitados.

Como exemplo do uso do ambiente, segue abaixo a sequência de códigos necessários para construção do gráfico, apresentado na Figura 2, que ilustra a distribuição da mediana amostral proveniente de 200 amostras de tamanho $n=5$ simuladas de uma população Normal com média 167 e variância 25. Note a necessidade de ter conhecimento teórico antes da obtenção dos resultados.


```
> set.seed(1)
> round(rnorm(n=5,mean=167,sd=5),0)
> 164 168 163 175 169
> amostras=matrix(0,200,5)
> medianas.amostras=matrix(0,200,1)
> set.seed(1)
> for(i in 1:200){
+ amostras[i,]=rnorm(n=5,mean=167,sd=5)
+ medianas.amostras[i,1]=median(amostras[i,])
+ }
>
```

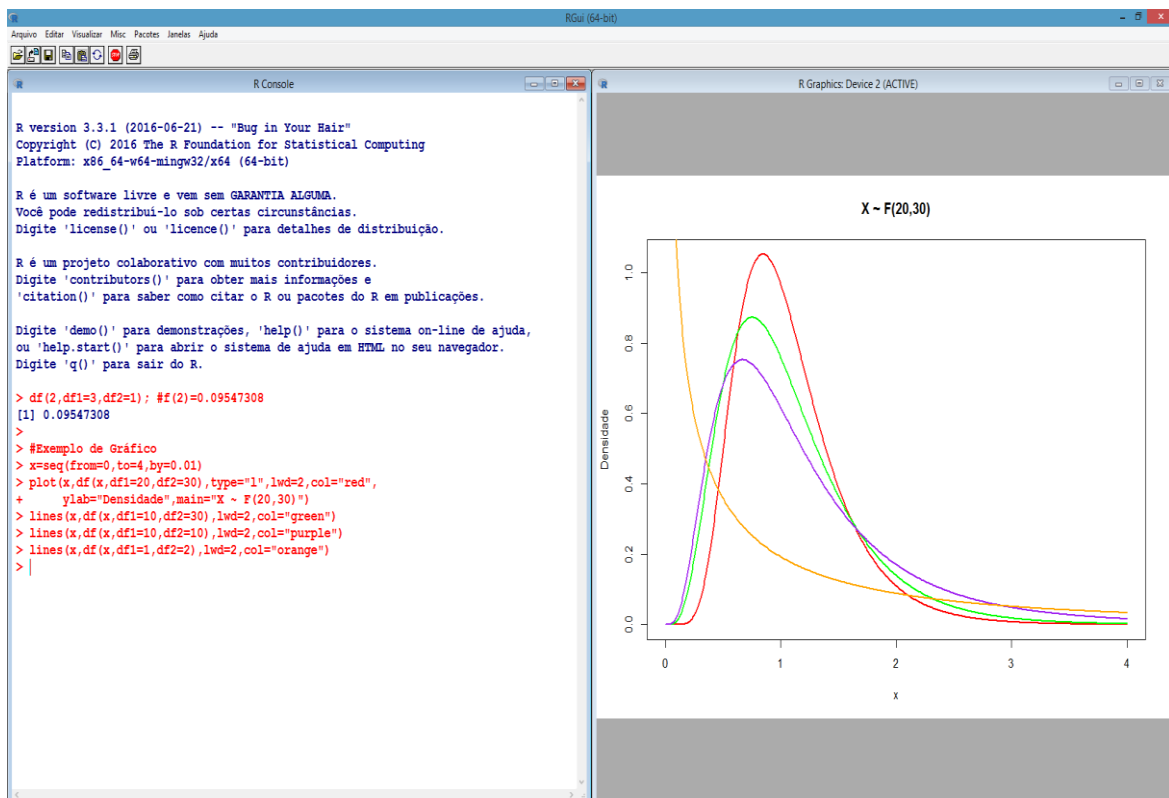


Figura 1 - Ilustração do ambiente R. A esquerda observa-se o console, por onde se insere as instruções ao programa e a direita uma janela gráfica apresentando os resultados da sequência de códigos destacados em vermelho.

Outra característica importante na utilização do R é sua flexibilidade na construção de gráficos, pois permite personalizar várias variáveis na apresentação de uma janela gráfica, podendo inserir legendas, alterar tipos de pontos de plotagem, personalizar eixos, concatenar

vários figuras em uma única janela gráfica e exportar gráficos em diversos formatos de arquivos, vide Figuras 2, 3 e 4.

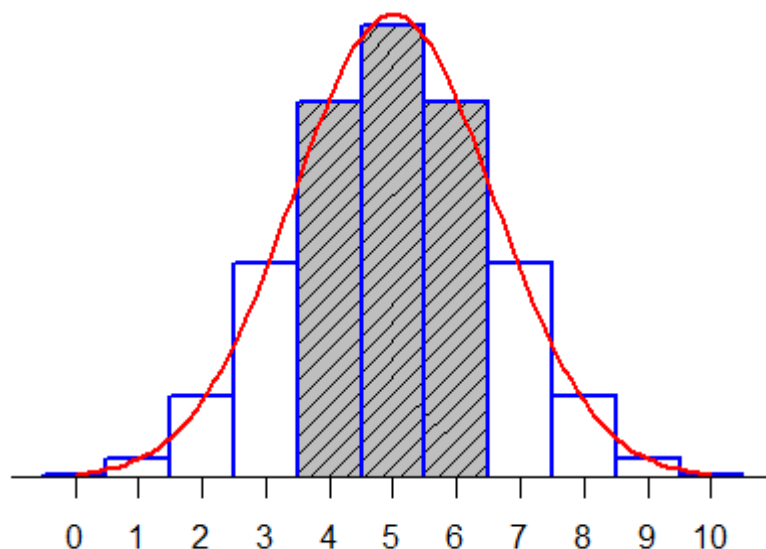


Figura 2 - Distribuição da mediana amostral proveniente de 200 amostras de tamanho $n=5$ simuladas uma população Normal com média 167 e variância 25.

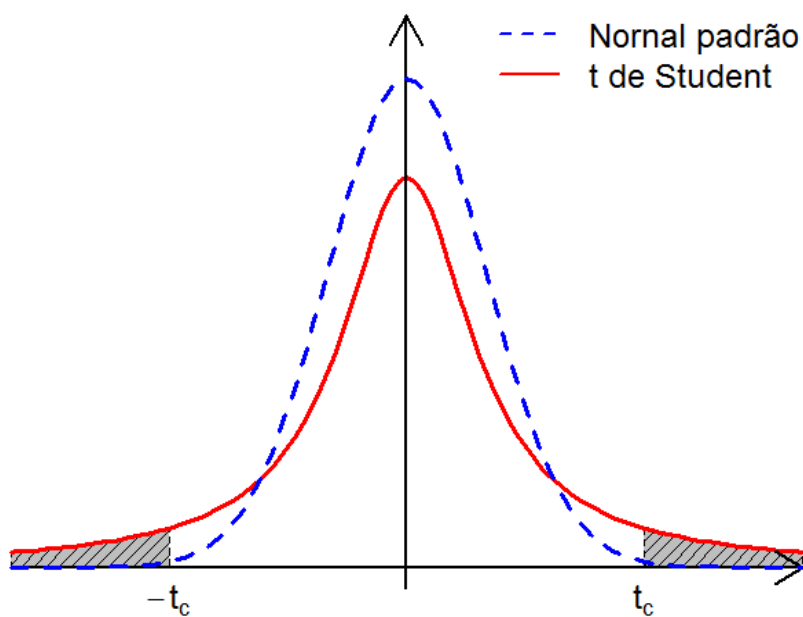


Figura 3 - Exemplo de gráfico construído no R. Comparação das curvas de densidade das distribuições Normal padrão e t de Student, destacando a calda pesada da distribuição t.

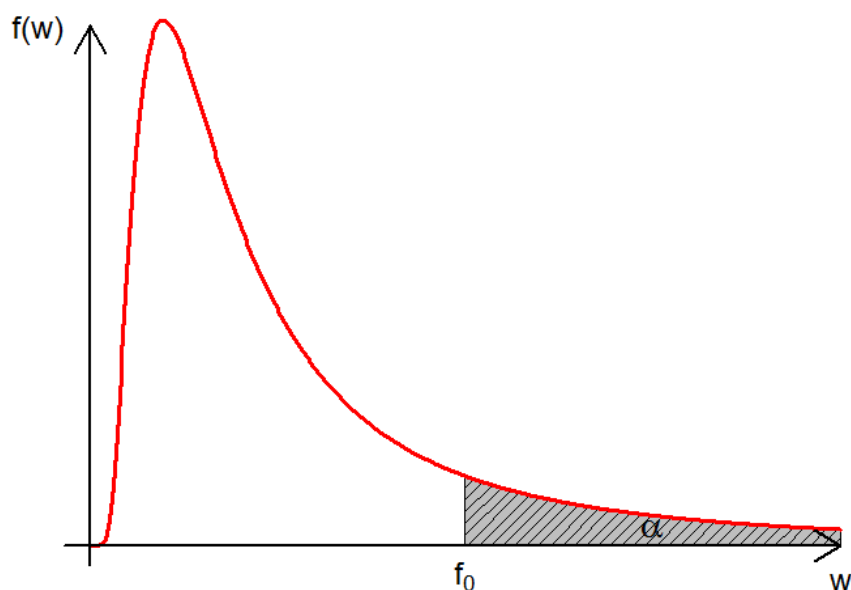


Figura 4 - Exemplo de gráfico construído no R. Área sob a curva da densidade de uma distribuição F de Snedecor equivalente ao cálculo da probabilidade $P(W > f_0)$.

O R está disponível para download no site do programa cujo endereço é <https://cran.r-project.org/> para os sistemas operacionais *Windows*, *Mac* e *Linux*. Após a instalação padrão é possível ainda, instalar pacotes adicionais com funções mais específicas, dependendo do tipo de análise. Mais informações sobre o pacote R, pode ser obtidas em Venables e Smith, (2016), R Core Team, (2016a, 2016b e 2016c).

É possível também a interligação com o programa de diagramação de textos “LaTeX” (LAMPOR, 1994), utilizando o programa RStudio (RStudio Team, 2015), que é um ambiente de desenvolvimento integrado ao R.

O RStudio é um software que agrega ao R vários recursos e facilidades como, autocompletar de comandos, realce de funções e objetos, visualização rápida dos objetos na memória e acesso aos arquivos de dados sem a necessidade de sair do programa, além de possuir janelas de ajuda, de gerenciamento de pacotes, de gráficos e arquivos integradas no mesmo ambiente entre outras facilidades.

Uma ilustração do ambiente RStudio é apresentada na Figura 5, observa-se que o programa oferece recursos adicionais ao R e pode baixado e instalado gratuitamente no site www.rstudio.com/products/RStudio/.

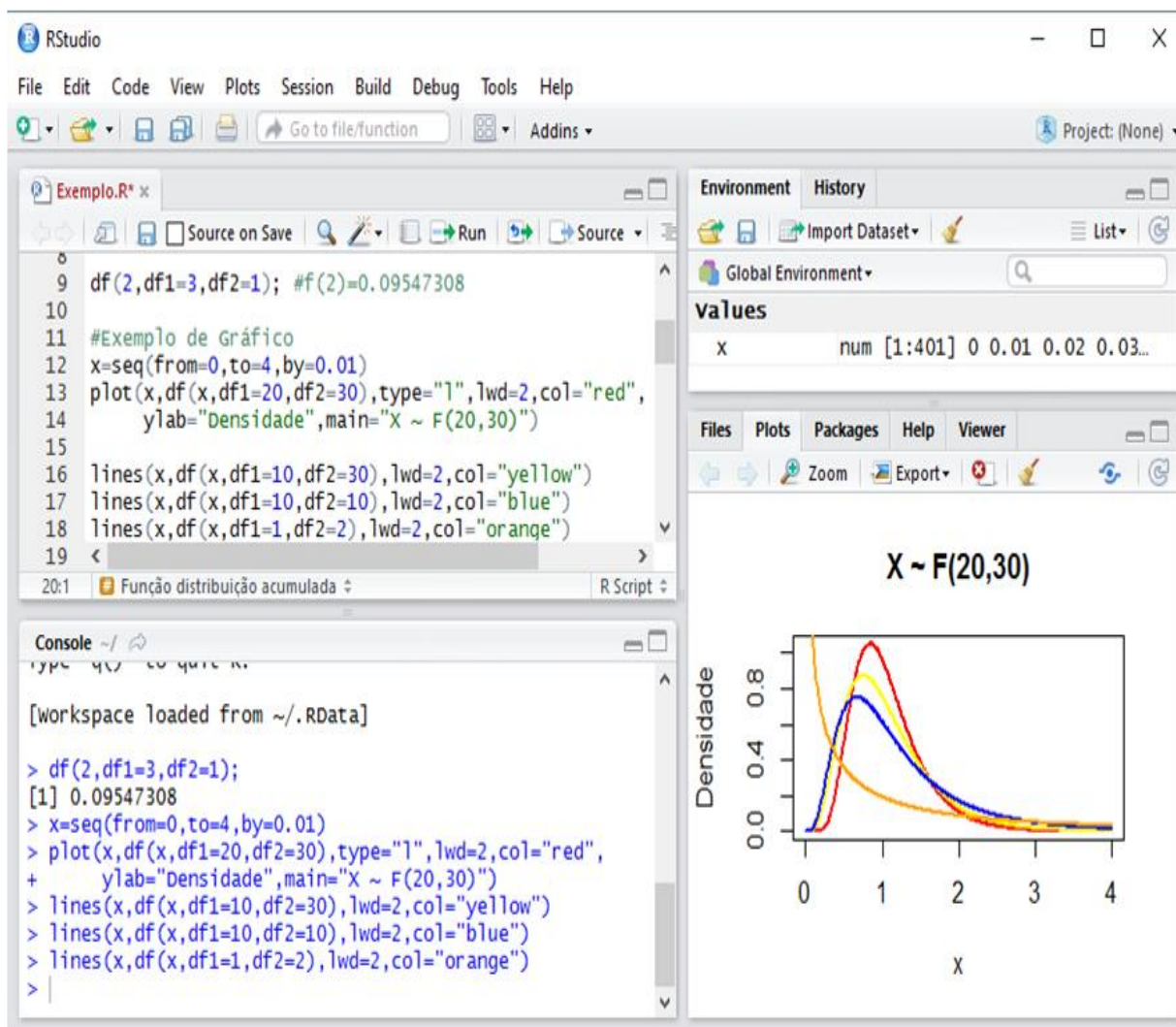


Figura 5 - Ilustração do ambiente RStudio. A esquerda observa-se as janelas de script e o console e a direita as janelas de visualização rápida de objetos carregados na memória e acesso aos arquivos de dados, janelas de ajuda, de gerenciamento de pacotes, de gráficos e arquivos integradas ao ambiente.

O material será divulgado por meio de um endereço eletrônico na internet, disponibilizado pela Universidade Estadual de Londrina.

O conteúdo abordado cobrirá os principais temas de um curso de Estatística Básica, a saber: Resumo dos dados; Medidas de posição e dispersão; Análise bidimensional; Probabilidade; Variáveis aleatórias; Simulação; Inferência; Estimação; Teste de hipóteses;

Análise de aderência e associação e regressão linear simples, (BUSSAB e MORETTIN, 2013), (FONSECA e MARTINS, 1996), (ITANO e SOANE, 1994) e (MAGALHÃES e LIMA, 2010).

Atualmente, dois alunos da Matemática Empresarial estão trabalhando no projeto, na construção de uma apostila sobre o uso do R com aplicações voltadas para matemáticos e na elaboração de um minicurso introdutório do R focado para professores e estudantes de matemática.

4. Resultados

Ao fim do projeto, espera-se obter a melhoria na qualidade das aulas de estatística, a disseminação da estatística por meio da divulgação do material elaborado na internet e o domínio do software R nos procedimentos de análise estatística por parte dos alunos.

No momento, não se tem nenhum material substancial disponível para uso, mas a divulgação do material se dará no endereço <http://www.uel.br/pessoal/tiagodesantana/>.

5. Considerações Finais

Este projeto possui vagas abertas para alunos de graduação em Matemática em qualquer das três habilitações e ano escolar, ainda que não tenham tido a disciplina de estatística, que está incluída no curriculum no segundo ou terceiro ano do curso de acordo com a habilitação.

6. Referências

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística básica**. 8ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

FONSECA, J. S., MARTINS, G. A. **Curso de estatística**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 1996.

ITANO, F. SOANE, M. S. **Tópicos de estatística utilizando R**, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. Disponível em <https://cran.r-project.org/doc/contrib/Itano-descriptive-stats.pdf>, 2007.

LAMPORT, L. **LATEX: A Document preparation system**. Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 2ª ed., 1994.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. **Noções de probabilidade e estatística.** 7 ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2010.

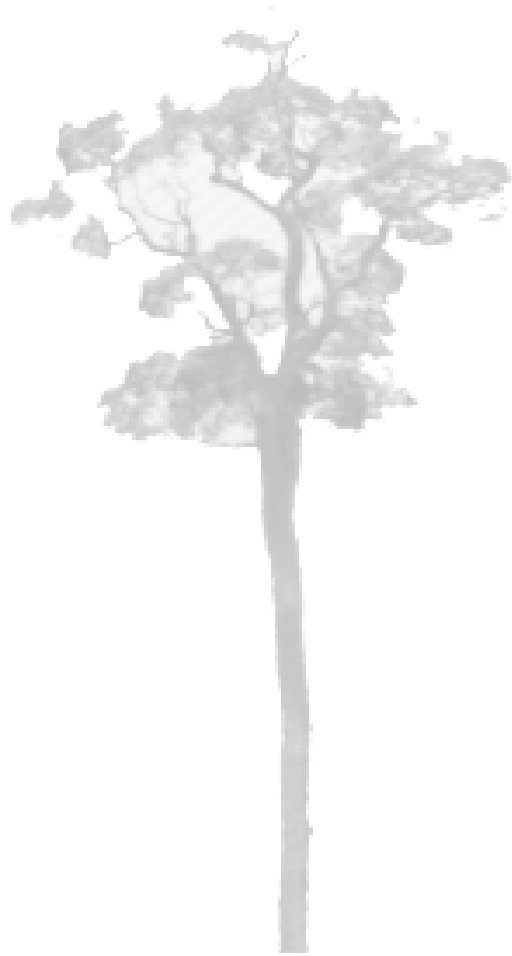
R Core Team. **R: A language and environment for statistical computing.** R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>, 2016a.

R Core Team. **R Data Import/Export.** R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://cran.r-project.org/doc/manuals/r-release/R-data.pdf>, 2016b.

R Core Team. **R Installation and Administration.** R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://cran.r-project.org/doc/manuals/r-release/R-admin.pdf>, 2016c.

RStudio Team. **RStudio: Integrated development for R.** RStudio, Inc., Boston, MA URL <http://www.rstudio.com/>, 2015.

VENABLES, W. N., SMITH, D. M., R Core Team. **An introduction to R: A programming environment for data analysis and graphics.** R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.cran.r-project.org/>, 2016.



SEQUÊNCIA DE CAUCHY E OS ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

*Gabriel Eduardo Bittencourt Moraes
Universidade Estadual de Londrina
gabrielmatematica2014@gmail.com*

*Profª Drª Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina
michelealves@uel.br*

Resumo:

Na disciplina de Análise Real, é visto que o conceito de seqüências convergentes é equivalente ao conceito de seqüência de Cauchy. Porém, na disciplina de Espaços Métricos, essa equivalência não é aplicada num espaço métrico arbitrário, tal equivalência é aplicada somente nos espaços métricos completos. Assim, serão dadas as definições e exemplos de: métrica, espaços métricos, seqüências convergentes, seqüências limitadas, seqüências de Cauchy em espaços métricos e por fim, espaços métricos completos.

Palavras-chave: métrica; espaços métricos; seqüências convergentes; seqüência de Cauchy; espaços métricos completos.

1. Introdução

O objetivo deste trabalho é enunciar e provar os seguintes resultados:

Proposição 1.1. Considere arbitrariamente M um espaço métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em M . Então, as seguintes afirmações são válidas:

- a) Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy.
- b) Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Proposição 1.2. A reta \mathbb{R} e o espaço euclidiano \mathbb{R}^n são espaços métricos completos.

2. Desenvolvimento

Definição 2.1. Uma *métrica num conjunto* M é uma função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado $(x, y) \in M \times M$ um número real $d(x, y)$ de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in M$:

- i) $d(x, x) = 0$,
- ii) $d(x, y) > 0$ para qualquer $x \neq y$,
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2.2. Um *espaço métrico* é um par (M, d) em que M é um conjunto arbitrário e d é uma métrica definida em M .

Exemplo 2.2.1. A reta \mathbb{R} é um espaço métrico com a métrica

$$d(x, y) = |x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. As condições necessárias para d ser métrica são facilmente verificadas.

Exemplo 2.2.2. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é um espaço métrico com qualquer uma das seguintes métricas:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\},$$

para quaisquer $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. A verificação de d ser métrica é trivial para os itens (i), (ii) e (iii). Para o item (iv), ver Página 8 em [1].

Definição 2.3. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ num espaço métrico M chama-se *sequência limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que

$$d(x_m, x_n) \leq c,$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.4. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência num espaço métrico M . Dizemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

O ponto $a \in M$ é chamado limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e quando este existe dizemos que a *sequência é convergente* em M e converge para a .

Exemplo 2.4.1. Seja a sequência de números reais $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n = 1/n$ para qualquer n natural. Vejamos que $\lim x_n = 0$. De fato, para todo $\varepsilon > 0$, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ e $n_0 > 1/\varepsilon$, vemos que:

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < 1/n < \varepsilon \Rightarrow |1/n - 0| < \varepsilon \Rightarrow d(x_n, 0) < \varepsilon.$$

Portanto, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pra 0.

Definição 2.5. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ num espaço métrico M chama-se *sequência de Cauchy*, quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Proposição 2.6. Considere arbitrariamente M um espaço métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em M . Então, as seguintes afirmações são válidas:

- a) Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.
- b) Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um sequência de Cauchy, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Demonstração: Considere uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M .

a) Suponha que $\lim x_n = a$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon/2.$$

Se tomarmos $m, n > n_0$ teremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Logo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

b) Temos por hipótese que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

Considere uma constante $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, tal que

$$k/2 = \text{máx}\{d(x_1, x_{n_0+1}), \dots, d(x_{n_0}, x_{n_0+1}), \varepsilon\},$$

Logo, temos os seguintes casos:

Caso 1: $m, n > n_0$:

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon < k/2 < k.$$

Caso 2: $m, n \leq n_0$:

$$d(x_m, x_n) < d(x_n, x_{n_0+1}) + d(x_m, x_{n_0+1}) < k/2 + k/2 = k.$$

Caso 3: $m > n_0, n \leq n_0$:

$$d(x_m, x_n) < d(x_n, x_{n_0+1}) + d(x_m, x_{n_0+1}) < k/2 + \varepsilon < k/2 + k/2 = k.$$

Caso 4: $m \leq n_0, n > n_0$:

$$d(x_m, x_n) < d(x_n, x_{n_0+1}) + d(x_m, x_{n_0+1}) < \varepsilon + k/2 < k/2 + k/2 = k.$$

Portanto, existe $k > 0$, tal que

$$d(x_m, x_n) \leq k,$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.7. Diz-se que um *espaço métrico* M é *completo* quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Proposição 2.8. O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.

Demonstração: Suponhamos M e N completos e considere $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy arbitrária em $M \times N$ tal que $z_n = (x_n, y_n)$, para cada n natural. Como as projeções

$$p_1: M \times N \rightarrow M \text{ e } p_2: M \times N \rightarrow N,$$

são uniformemente contínuas, obtemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em M e N , respectivamente. Logo, existem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

tal que $a \in M$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b,$$

tal que $b \in N$.

Assim para $c=(a,b) \in M \times N$, temos $\lim z_n = c$ e portanto, é completo. Reciprocamente, se $M \times N$ é completo, então fixando $b \in N$, vemos que a aplicação $x \rightarrow (x,b)$ é uma isometria de M sobre o subespaço fechado $M \times b \subset M \times N$. Segue-se da Proposição 6¹ que M é completo. De modo análogo, se verifica que N é completo.

Proposição 2.9. $M_1 \times \dots \times M_n$ é completo, se e somente se, M_1, \dots, M_n são completos.

Demonstração: Aplicando $n-1$ vezes a proposição anterior, concluimos que

$$M_1 \times M_2, M_1 \times M_2 \times M_3, \dots, M_1 \times \dots \times M_n,$$

são completos desde que M_1, \dots, M_n sejam completos. Reciprocamente, se o produto cartesiano é completo, cada fator M_i é completo, por ser isométrico ao subespaço fechado

$$a_1 \times \dots \times a_{i-1} \times M_i \times a_{i+1} \times \dots \times a_n,$$

contido no produto cartesiano.

Proposição 2.10. A reta \mathbb{R} e o espaço euclidiano \mathbb{R}^n são espaços métricos completos.

Demonstração: Inicialmente vejamos que \mathbb{R} é um espaço métrico completo. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} . Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome

$$X_n = \{ x_n, x_{n+1}, \dots \},$$

logo:

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots \supset X_n \supset \dots,$$

e X_n são todos limitados $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pois é uma sequência de Cauchy. Tome $a_n = \inf(X_n)$,

logo

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b = \sup(X_n).$$

Assim, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é não decrescente e limitada, portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

¹ Proposição 6, Página 184, Espaços Métricos, Elon Lages Lima.

pois temos que a é limite de uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para n arbitrariamente grande. Dado $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, como $\lim a_n = a$, então existe $m > n_1$ tal que:

$$a_m \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon.$$

Mas $a_m = \inf(X_m)$ e $a + \varepsilon > a_m$ implica que existe $x_n \in X_m$ tal que

$$a_m \leq x_n < a + \varepsilon.$$

Assim, temos que

$$a - \varepsilon < a_m < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, $n_1 \in \mathbb{N}$ existe

$$n > n_1 \text{ tal que } x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Logo, a reta \mathbb{R} é um espaço métrico completo e segue da proposição anterior que o espaço euclidiano \mathbb{R}^n também é um espaço métrico completo.

3. Considerações Finais

Primeiramente, conseguimos perceber que a reta \mathbb{R} é um exemplo de espaço métrico, ou seja, o conceito estudado em Análise Real é apenas uma parte de um conceito mais amplo, que pode ser visto em Espaços Métricos. Consequentemente, a equivalência de convergência e sequência de Cauchy em \mathbb{R} , não é obtida em qualquer espaço métrico M , visto que nem toda sequência de Cauchy é convergente. Por fim, foi apresentada a definição de espaços métricos completos, que depende da convergência da sequência de Cauchy e visto que a reta \mathbb{R} e o espaço euclidiano \mathbb{R}^n são espaços métricos completos.

4. Agradecimentos

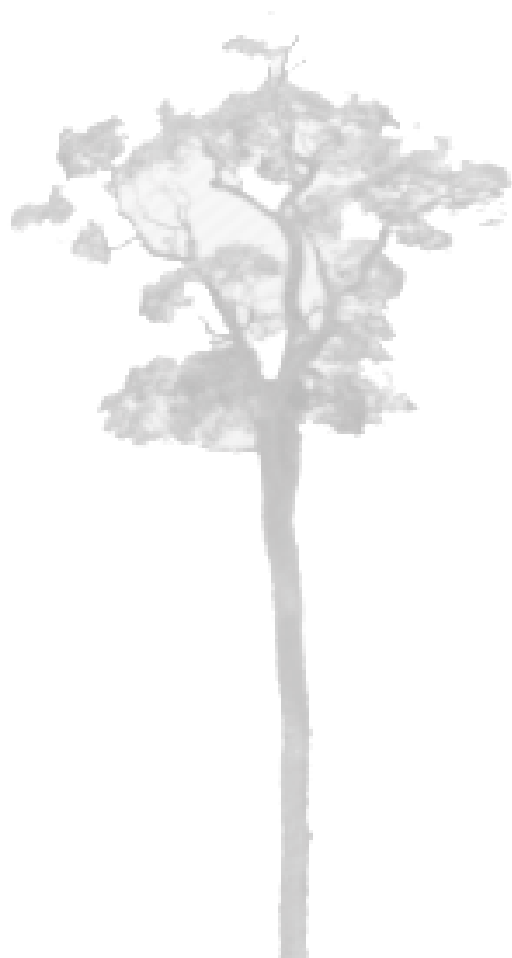
Agradeço a Prof^a Dr^a Michele de Oliveira Alves pela sua coordenação e colaboração no desenvolvimento deste trabalho, com sua extrema importância. Também agradeço a própria Universidade Estadual de Londrina, ao Departamento de Matemática e a organização da 31^a Semana da Matemática pela oportunidade de apresentação dada. Os sinceros agradecimentos a Fundação Araucária, CAPES e Proex, por suas contribuições com a 31^a

Semana da Matemática. Por fim, o agradecimento ao CNPq pelo investimento da bolsa de iniciação científica.

5. Referências

[1] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos. Projeto Euclides*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013

[2] KREYSZIG, E., *Introductory functional analysis with applications*, John-Wiley Sons, 1968.



SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DA DIFUSÃO EM SISTEMAS PREDADOR-PRESA

João Luís Rodrigues Paixão
Universidade Estadual de Londrina
joao_rodriguespaixao@hotmail.com

Laryssa Ribeiro Calcagnoto
Universidade Estadual de Londrina
laryssa_calcagnoto@hotmail.com

Mara Carolina Torres dos Santos
Universidade Estadual de Londrina
mara_torres14@hotmail.com

Paulo Laerte Natti
Universidade Estadual de Londrina
plnatti@uel.br

Neyva Maria Lopes Romeiro
Universidade Estadual de Londrina
nromeiro@uel.br

Eliandro Rodrigues Cirilo
Universidade Estadual de Londrina
ercirilo@uel.br

Resumo:

Neste trabalho analisou-se numericamente, através do método de diferenças finitas, um modelo populacional do tipo Lotka-Volterra com difusão. Do ponto de vista numérico, utilizou-se o método explícito para a resolução numérica dos sistemas de equações diferenciais e o método de Liapunov, que consiste em analisar a estabilidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias, em torno da situação de equilíbrio, quando submetidos a perturbações nas condições iniciais. Os resultados numéricos evidenciaram a importância dos processos difusivos na evolução e estabilidade de tais sistemas.

Palavras-chave: Método de diferenças finitas; Método de Lyapunov; Dispersão espacial.

1. Introdução

Thomas Malthus assumiu que a variação do crescimento de uma população era proporcional à população em cada instante, o que significava dizer que a população aumentava em crescimento exponencial no decorrer do tempo. Convencido de que o modelo de crescimento de Malthus não era adequado para explicar a expansão demográfica de um país, Pierre-François Verhust incorporou uma limitação ao modelo, de modo a reduzir a taxa de crescimento e inibir o crescimento exponencial.

Baseados em Malthus e Verhust, Alfred Lotka e Vito Volterra, nos anos de 1925 e 1926, respectivamente, propuseram modelos para a interação entre as espécies. Estes modelos denominados modelos Lotka-Volterra foram as bases para os modelos que desenvolveram-se para a descrição da dinâmica dos sistemas do tipo predador-presa, onde uma das espécies é predadora da outra espécie (BOYCE, DIPRIMA, 1994).

Posteriormente, vários aprimoramentos foram implementados nesses modelos com o objetivo de descrever sistemas predador-presa com características específicas (HASTINGS, 1997). Atualmente modelos do tipo predador-presa são usados em várias áreas do conhecimento, tais como em ciências biológicas e agrárias, em ciências econômicas, em ciências ambientais, em telecomunicações, entre outras aplicações.

Uma crítica às equações de Lotka-Volterra é que, na ausência de predadores, a população de presas aumenta sem limites. Este problema pode ser corrigido ao se considerar o efeito natural inibidor que o ambiente tem, devido as suas limitações, sobre uma população crescente. Matematicamente, este efeito inibidor pode ser modelado por meio de um termo do tipo Verhulst para a saturação da população de presas (SOBRINHO, 2015).

O objetivo desse trabalho é estudar o efeito de termos difusivos na dinâmica das populações. Realizaremos análises numéricas da dinâmica das populações e estudos da estabilidade das populações de predadores e presas, quando processos difusivos espaciais estão presentes no sistema.

2. Procedimentos metodológicos

O método de Lyapunov, aplicado a um sistema de EDO's, permite analisar a dinâmica e estabilidade do sistema em torno de um ponto de equilíbrio. Inicialmente deve-se verificar se o sistema, em torno de um ponto estacionário (x_0, y_0) , satisfaz as seguintes condições:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \left[\frac{\text{parte não linear da EDO}}{\text{parte linear da EDO}} \right] = 0. \quad (1)$$

A condição (1) garante que a dinâmica do sistema de EDO's é dominada pelos termos lineares em torno do ponto de equilíbrio. Dessa forma, podem-se desprezar nesse entorno os termos não lineares das EDO's, obtendo-se o sistema linear equivalente (BOYCE, DIPRIMA, 1994).

Neste trabalho considera-se modelos com apenas duas espécies, uma espécie presa e a outra predadora. Sejam as populações da presa e do predador, respectivamente, denotadas por $x(t)$ e $y(t)$, no instante t . Modelando matematicamente a interação das espécies, considera-se que na ausência do predador, $y(t) = 0$, a população de presas aumentará, sem nenhum tipo de obstáculo, a uma taxa proporcional à população atual, ou seja, com um termo da forma $[ax(t)]$, onde a é uma constante positiva. Por outro lado, considera-se que a carência de presas, $x(t) = 0$, acarretará a extinção da população de predadores, devido à falta de alimento, situação descrita por um termo da forma $[-cy(t)]$, onde c é uma constante positiva. Considera-se também que o número de encontros entre as duas espécies é proporcional ao produto das populações de cada espécie, ou seja, $x(t).y(t)$. Estes encontros tendem a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas.

Assim, a taxa de crescimento da população de predadores, $\frac{dy}{dt}$, é aumentada por um termo da

forma $[+\gamma x(t)y(t)]$, enquanto a taxa de crescimento da população de presas, $\frac{dx}{dt}$, é diminuída

por um termo da forma $[-\alpha x(t)y(t)]$, onde α e γ são constantes positivas. Também considera-se um termo de saturação de Verhust na população de presas $x(t)$, ou seja, um termo do tipo $(-kx^2)$ com k uma constante positiva. Enfim, termos difusivos D_1 e D_2 nas populações de presa e predadores são acrescentados com o objetivo de descrever a dispersão espacial das populações.

Em consequência dessa modelagem matemática, somos levados às equações do modelo de Lotka-Volterra difusivo (LEWIS, MAINI, PETROVSKI, 2013):

$$\frac{dx}{dt} = D_1 \frac{d^2 x}{dz^2} + ax - kx^2 - \alpha xy$$

$$\frac{dy}{dt} = D_2 \frac{d^2 y}{dz^2} - cy + \gamma xy ,$$
(2)

onde a , c , $K = a/k$, D_1 , D_2 , α e γ são constantes positivas. A quantidade a é a taxa intrínseca de nascimento de presas, c a taxa de mortalidade de predadores, K a taxa de saturação da população de presas, D_1 e D_2 são as taxas de difusão das populações de presas x e de predadoras y , respectivamente, enquanto α e γ são as taxas de interação entre presas e predadores, respectivamente.

3. Resultados e Discussão

No modelo de Malthus as populações apresentam uma variação exponencial, isto é, não há limites para o crescimento exponencial, como pode ser visto pela figura 1. Esse modelo é utilizado no crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo, como por exemplo: crescimento de bactérias.

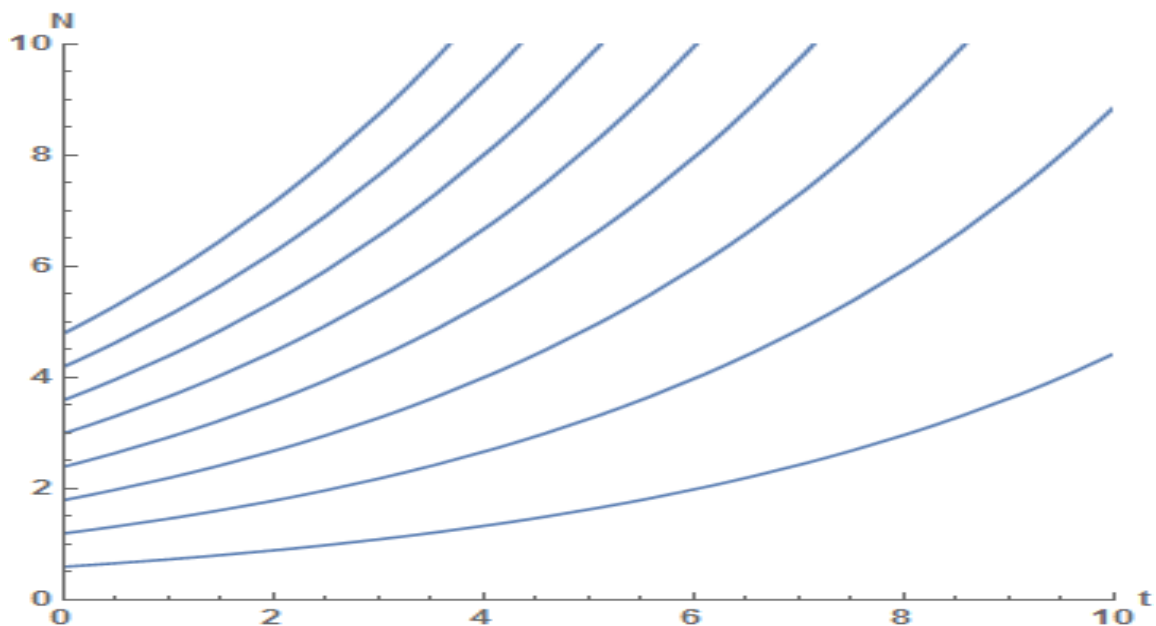


Figura 1: Representação do crescimento exponencial das populações descritas pelo modelo de Malthus, para várias condições iniciais.

No modelo de Verhulst as populações apresentam um crescimento logístico, quando as populações crescem até um limite máximo sustentável, isto é, as populações tendem a se estabilizarem, que é visto na figura 2 para várias condições iniciais. Note que as populações estabilizam-se no valor da taxa de saturação K .

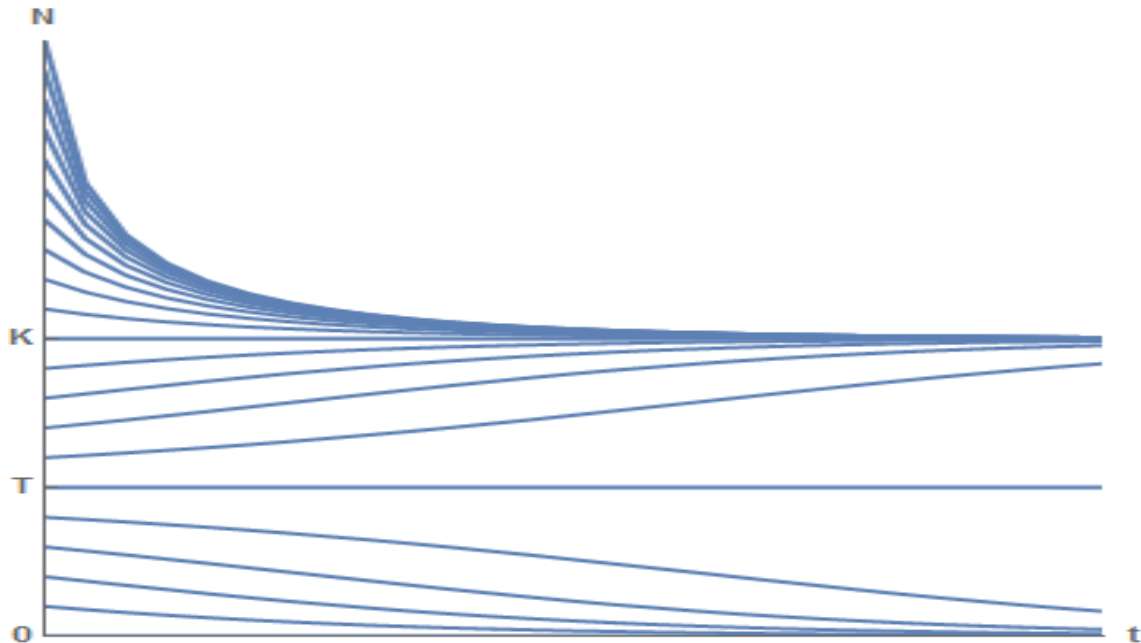


Figura 2: Comportamento de populações do Modelo de Verhulst com saturação K e limiar T , para várias condições iniciais.

Já no modelo de Lotka-Volterra sem saturação as populações de predador e de presa apresentam uma variação cíclica. Por outro lado, quando é acrescentado um termo de saturação na população de presas, verifica-se que esse modelo exibe estabilidade assintótica, isto é, um estado de equilíbrio assintótico (SOBRINHO et al., 2015).

Considere um sistema predador-presa sem processos difusivos $D_1 = D_2 = 0$, descrito pelas equações de Lotka-Volterra (2), com a seguinte parametrização: $a = 1.0$, $c = 0.75$, $k = 0.5$, $\alpha = 0.5$ e $\gamma = 0.5$. Verifica-se que independentemente das condições iniciais (indicadas na janela da figura 3), as populações de predador e presa tendem às populações de equilíbrio dadas por $x=1.5$ e $y=0.5$, como pode ser observado na figura 3 e na figura 4 (a).

Na figura 4 (b) consideram-se processos difusivos na evolução das populações de predadores e presas. Quando $D_1 = D_2 = 1$, observa-se que as populações também atingem uma estabilidade, porém com a população de predadores menor, pois com a difusão dos predadores e da presa, uma situação real, a predação fica mais esporádica, já que ocorre menos contato entre predadores e presas. A diferença dos gráficos pode ser observada na figura 4 (c), onde se mostra a comparação dos resultados numéricos com difusão e sem difusão.

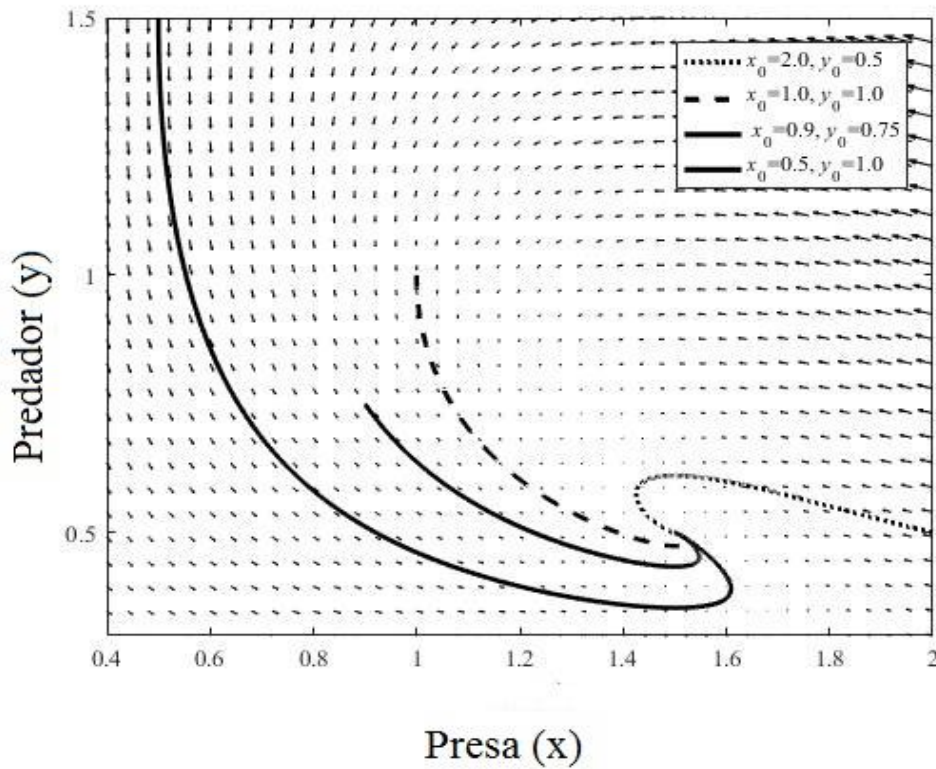


Figura 3: Variação das populações de predadores e presas no modelo de Lotka-Volterra com saturação nas presas para várias condições iniciais apresentadas.

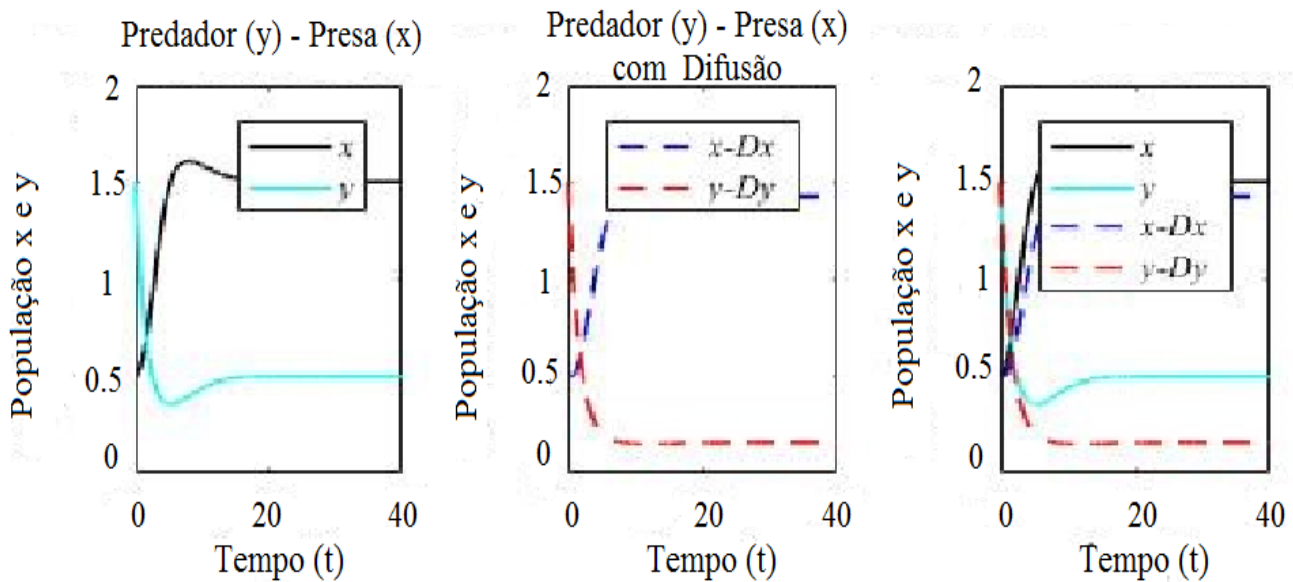


Figura 2: (a) Variações das populações de predadores e presas para a condição inicial (0.5, 1.5). (b) Variação das populações de presas e predadores com difusão espacial para a condição inicial (0.5, 1.5). (c) Comparação e sobreposição dos resultados anteriores.

4. Conclusões

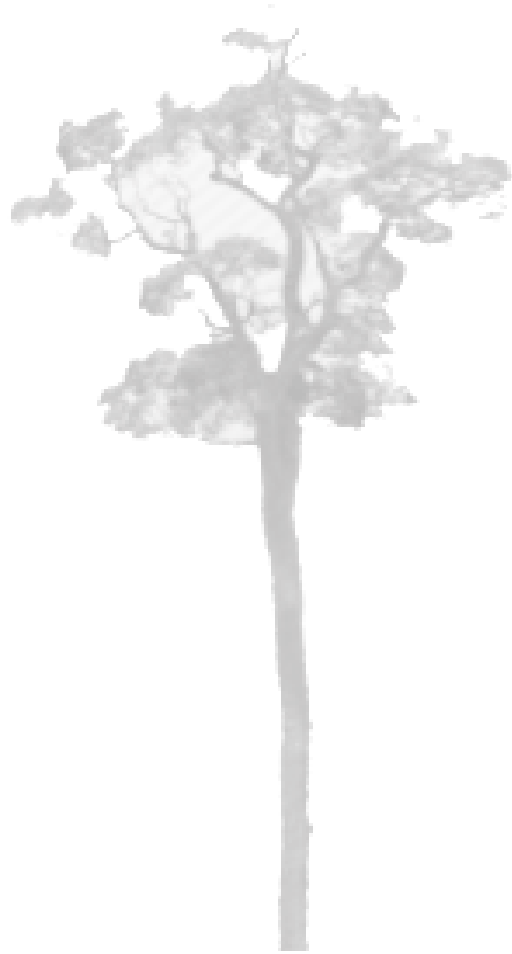
Para esse estudo é importante conhecer a taxa de mortalidade da espécie predadora (parâmetro c), a taxa de natalidade da espécie presa (parâmetro a) e a taxa de encontro das espécies (parâmetro γ). Uma razão desfavorável desses fatores, num dado intervalo de tempo, pode levar uma população à extinção (SOBRINHO et al., 2015) Estudaram-se os comportamentos assintóticos das populações descritas pelos modelos de Lotka-Volterra e Lotka-Volterra com difusão. Observou-se que é importante conhecer as taxas de difusão das espécies. O efeito da difusão espacial pode conduzir a espécie predadora à extinção. Na continuidade desse trabalho, pretende-se estudar sistemas mais complexos, tais como aqueles que envolvem sistemas de dois predadores que competem por uma presa, por exemplo.

5. Agradecimentos

Agradecemos ao Governo do Estado do Paraná, a Secretária de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, a Fundação Araucária, a CAPES, a Universidade Estadual de Londrina e o Departamento de Matemática/UEL. O autor J.L.R. Paixão agradece ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC/UEL pelo apoio financeiro fornecido no período de Agosto/2015 a Julho/2016.

6. Referências

- Boyce, W; Diprima, R. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1994.
- Hastings, A., **Population biology** (Springer-Verlag, New York, 1997).
- Lewis, M.A., Maini, P.K., Petrovskii, S.V., Eds. **Dispersal, Individual Movement and Spatial Ecology: A Mathematical Perspective**. Springer, Lecture Notes in Mathematics Vol. 2071, 2013.
- Sobrinho, A.S.O., de Oliveira, C.F., Kita, C.M., Takano Natti, E.R., Natti, P.L., **Mathematical Modeling and Stability of Predator-Prey Systems**, arXiv:1504.06244 [pdf], 2015.



TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO E SUAS APLICAÇÕES

Leticia Flor dos Santos
Universidade Estadual de Londrina
leticiaflordossantos@gmail.com

Prof^ª. Dr^ª. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina
michelealves@uel.br

Resumo:

O objetivo deste trabalho é abordar o Teorema do Valor Intermediário e algumas de suas aplicações. Sabemos que esse teorema estabelece matematicamente o princípio de que uma função contínua definida num intervalo $[a;b]$ não pode passar de um valor para outro sem passar por todos os valores intermediários. Sendo assim este trabalho visa enunciar e demonstrar o Teorema do Valor Intermediário, bem como definir os resultados que necessitaremos para tal. Além disso faremos três aplicações deste teorema, a existência de raiz para um polinômio de grau ímpar, a existência e unicidade da raiz n -ésima de um número real positivo e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em sua versão unidimensional.

Palavras-chave: Teorema do Valor Intermediário; Aplicações; Função Contínua.

1. Introdução

O Teorema do Valor Intermediário estabelece matematicamente o princípio de que uma função contínua definida num intervalo $[a;b]$ não pode passar de um valor para outro sem passar por todos os valores intermediários, princípio que é bastante plausível. Sendo assim neste trabalho abordaremos três aplicações deste teorema, a existência de raiz para um polinômio de grau ímpar, a existência e unicidade da raiz n -ésima de um número real positivo e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em sua versão unidimensional, conforme descritas abaixo.

1. Sejam $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ com $a_n \neq 0$ e o polinômio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mostraremos que se $n \in \mathbb{N}$ for um número ímpar, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

2. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a \geq 0$. Mostraremos a existência e unicidade da $\sqrt[n]{a}$.

-
-
3. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \leq a$ e $b \leq f(b)$. Mostraremos que existe pelo menos um número $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = c$.

4. Objetivos

O objetivo do nosso trabalho é abordar o Teorema do Valor Intermediário e algumas de suas aplicações, assim como definir, os resultados que necessitaremos para demonstração e aplicação deste teorema.

5. Resultados

Definição 1 Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definição 2 Diz-se que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Definição 3 Definimos a restrição de uma função $f: X \rightarrow C$ a um subconjunto A de X como sendo a função $f|_A: A \rightarrow C$ tal que $f|_A(x) = f(x)$ para qualquer $x \in A$.

Definição 4 Seja $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in D$ é ponto fixo de f se $f(x) = x$.

Teorema 5 (Teorema do Valor Intermediário) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se

$$f(a) < d < f(b),$$

então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração 1. Seja

$$A = \{x \in [a, b], f(x) < d\}.$$

Observe que $a \in A$, logo $A \neq \emptyset$ e como $A \subset [a, b]$ temos que A é limitado. Assim, tome $c = \sup A$ em que $c \in [a, b]$.

Se $f(c) < d$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta), f(x) < d.$$

Escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$c + \frac{\delta}{k} \in [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta),$$

logo

$$f\left(c + \frac{\delta}{k}\right) < d \Rightarrow c + \frac{\delta}{k} \in A.$$

Assim chegamos num absurdo, pois $c = \sup A$, $c + \frac{\delta}{k} > c$ e $c + \frac{\delta}{k} \in A$.

Se $f(c) < d$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta), f(x) > d.$$

Observe que $c - \delta < c$, logo existe $x' \in A$ tal que $c - \delta < x' \leq c$. Então, do fato de $x' \in A$ obtemos que $x' \in [a, b]$ e $f(x') < d$. Por outro lado $x' \in [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta)$, ou seja, $f(x') > d$. O que é um absurdo, logo $f(c) = d$. Observe ainda que se $c = a$ ou $c = b$, então $f(a) = d$ ou $f(b) = d$ o que não é possível devido a hipótese.

Portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Evidentemente, o Teorema do Valor Intermediário vale também no caso em que $f(b) < d < f(a)$.

Corolário 6 Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é um intervalo.

Demonstração. Se f é constante, o resultado é óbvio. Do contrário, sejam

$$\alpha = \inf f(I) = \inf\{f(x); x \in I\}$$

e

$$\beta = \sup f(I) = \sup\{f(x); x \in I\}.$$

Podemos ter $\alpha = -\infty$, se f for ilimitada inferiormente em I , ou $\beta = +\infty$, no caso de f ser ilimitada superiormente em I . Provaremos que $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β .

Seja d tal que $\alpha < d < \beta$, pelas definições de inf e sup existem $a, b \in I$ tais que

$$\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário existe $c \in [a, b]$, desta forma $c \in I$, tal que $f(c) = d$. Logo $d \in f(I)$ e assim $(\alpha, \beta) \subset f(I)$.

Do fato de α ser o inf e β ser o sup de $f(I)$, temos que nenhum número real menor do que α ou maior do que β pode estar em $f(I)$.

Portanto, $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β .

Na demonstração do corolário, não fizemos nenhuma afirmação sobre os extremos do intervalo $f(I)$ pertencerem ou não ao intervalo. De fato, podemos ter

$$f(I) = [\alpha, \beta], \text{ ou } f(I) = (\alpha, \beta), \text{ ou } f(I) = [\alpha, \beta) \text{ ou } f(I) = (\alpha, \beta].$$

6. Aplicações

Aplicação 1

Como aplicação mostraremos que todo polinômio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de grau ímpar, possui pelo menos uma raiz real.

De fato, seja

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$ com n ímpar e $a_n \neq 0$.

Colocando a_nx^n em evidência temos que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, p(x) = a_nx^n \left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dots + 1 \right).$$

Logo, se $a_n > 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$$

Se $a_n < 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty.$$

Diante disso e do fato de p ser contínua, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p(a) < 0 < p(b)$.

Assim podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário para a função

$$\begin{aligned} p|_{[a,b]}: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow p(x) \end{aligned}$$

que é contínua, logo existe $c \in (a, b)$ tal que $p(c) = 0$. Portanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

Aplicação 2

Nesta aplicação mostraremos a existência de $\sqrt[n]{a}$ para $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$.

De fato, considere a função $f: [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, definida por

$$f(x) = x^n$$

para qualquer $x \in [0, +\infty)$. Observe que

- a) f é uma função crescente, e portanto, f é injetora.
- b) $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $f([0, +\infty))$ é um intervalo de \mathbb{R} , conforme Corolário 6. Logo, sua imagem é um subintervalo ilimitado de $[0, +\infty)$, contendo seu extremo inferior, ou seja, $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. Sendo assim, f é uma função sobrejetora.

Portanto, f é uma função bijetora e assim para todo número real $a \geq 0$, existe um único número real $b \geq 0$ tal que $a = b^n$, logo $b = \sqrt[n]{a}$.

Aplicação 3

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a) \leq a$ e $b \leq f(b)$. Então, existe pelo menos um número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

De fato, defina $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = f(x) - x$$

que é uma função contínua. Observe que,

$$\varphi(a) = f(a) - a \leq 0 \text{ e } \varphi(b) = f(b) - b \geq 0.$$

Logo, $\varphi(a) \leq 0 \leq \varphi(b)$, entretanto, se $\varphi(a) = 0$ ou $\varphi(b) = 0$, então $f(a) = a$ ou $f(b) = b$. Neste caso, obtemos $c = a$ ou $c = b$.

Por outro lado, se $\varphi(a) < 0 < \varphi(b)$, então pelo Teorema do Valor Intermediário existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi(c) = 0$, ou seja, $f(c) = c$. Portanto, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

O resultado que acabamos de provar é a versão unidimensional do Teorema do ponto fixo de Brouwer.

7. Considerações Finais

O propósito deste trabalho foi apresentar e destacar algumas das aplicações do Teorema do Valor Intermediário. Esse teorema é de fácil entendimento e tem grande utilidade em várias áreas.

8. Agradecimentos

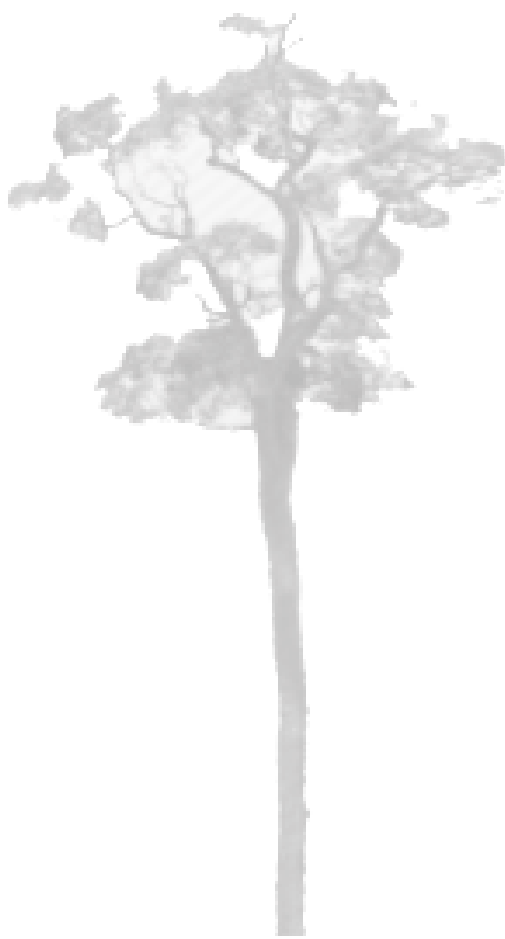
Inicialmente, agradeço a professora Dr.^a Michele de Oliveira Alves, a qual me orientou durante os estudos neste trabalho, pela compreensão e também pelo ensino. Manifesto também minha gratidão a organização deste evento, a Fundação Araucária via projeto de pesquisa e ao MEC-SESU pelo apoio financeiro via projeto PET.

9. Referências

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise. Coleção Matemática Universitária. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise. Projeto Euclides. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

NERI, Cassio. Curso de Análise Real. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2006.



TEORIAS DE APRENDIZAGEM: SKINNER E GAGNÉ

*Caio Luiz Escobar dos Santos
Universidade Estadual de Londrina
caio.luiz.escobar@gmail.com*

*Angela Marta P. das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina
angelamarta@uel.br*

Resumo:

O objetivo deste painel é apresentar dois enfoques de aprendizagem, instrução e desenvolvimento mental: as Teorias de Skinner e de Gagné. Sabe-se que várias alternativas metodológicas são constantemente testadas e os problemas persistem, o que fazer então? Talvez saber mais sobre como os indivíduos aprendam, sobre como se dá o desenvolvimento mental de uma criança, sobre modelos instrucionais., ou seja, saber mais sobre teorias de aprendizagem, instrução e desenvolvimento mental seja um caminho.

Na abordagem de Skinner temos a teoria S-R (estimulo-resposta), suas aplicações e implicações para o ensino e a aprendizagem, sempre visando o comportamento do individuo. Além disso, discutimos a predição das relações entre as variáveis de "input" (estímulos) e de "output" (respostas), a teoria do reforço, dando enfoque aos seus principais pontos, exemplos específicos de aplicação da abordagem skenneriana, a instrução programada e o método Keller.

Na teoria de Gagné, nosso objetivo foi dar uma visão geral da teoria e suas implicações para o ensino e a aprendizagem, buscar relacionar e/ou unificar princípios de aprendizagem de modo a explicar fatos específicos observados. A aprendizagem segundo Gagné é uma mudança comportamental persistente e se distingue da maturação, com destaque para a "teoria de pensamento e informação". Além disso, Gagné mostra a distinção entre eventos externo e internos, na qual ele analisa em oito fases e as nomeia e identifica o processo envolvido na mesma. Discutimos o tema tratado por Gagné de resultados da aprendizagem, em que existem cinco categorias de capacidades humanas que podem ser aprendidas:

- 1- Informação verbal
- 2- Habilidades intelectuais
- 3- Estratégias cognitivas

4- Atitudes

5- Habilidades motoras

Finalmente, tratamos como Gagné vê a instrução e o papel do professor.

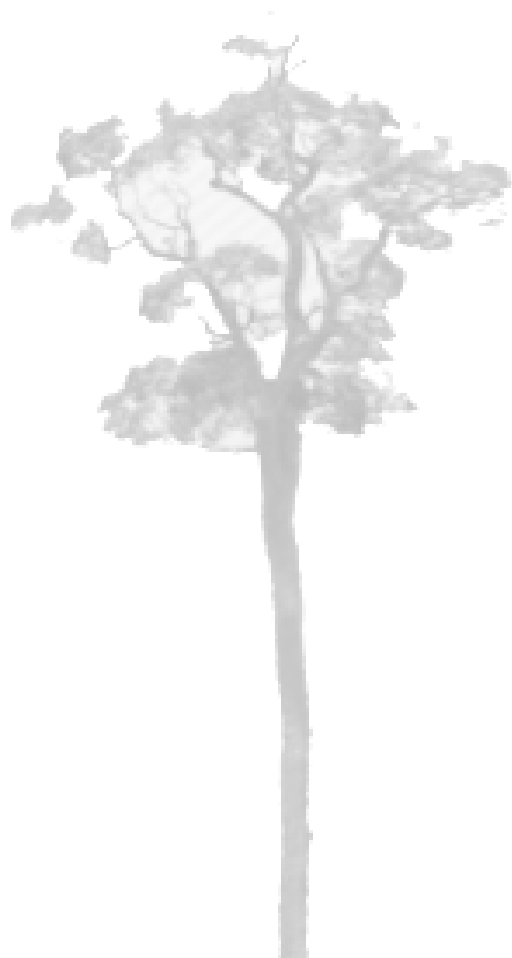
1. Agradecimentos

Governo do Estado do Paraná, Secretaria de Ciências e Tecnologia em Ensino Superior, Fundação Araucária, CAPES, Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática/UEL, MEC SISU.

2. Referências

[1] MOREIRA, M. A., Ensino e Aprendizagem - Enfoques Teóricos. Editora Moraes LTDA. São Paulo, SP. 2ª ed. 1985.

[2] MOREIRA, M. A. Teoria de Aprendizagem. São Paulo: EPU, 1999.



TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM: UMA QUESTÃO DA OBMEP

*Mateus Augusto Ferreira Garcia Domingues
Universidade Estadual de Londrina
augustogarciadomingues@hotmail.com*

*Prof^a. Dr^a. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina
magnapires@yahoo.com.br*

Resumo:

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a resolução, em sala de aula, de um problema do banco de questões da OBMEP, com a Estratégia de Resolução de Problemas em forma de Trajetória Hipotética de Aprendizagem. A proposta é mostrar as atitudes de um hipotético professor na condução de alunos resolvendo tarefas de contagem, potencializando boas situações de aprendizagem, levando em conta que, na maioria das vezes, a aula expositiva não requer a participação ativa do aluno. No decorrer do trabalho, procurou-se explorar todo o potencial que um problema possui, como instigar o interesse do aluno e colaborar para que ele queira descobrir a resposta. Esse processo favorece que o aluno construa seu próprio conhecimento, não deixando de lado a importância do professor, pois ele é o mediador, possibilitando uma maior interação entre o aluno e os conteúdos propostos.

Palavras-chave: Estratégia de Resolução de Problemas. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Contagem. OBMEP.

Agradecimentos

Governo do Estado do Paraná, Secretaria de Ciência e Tecnologia em Ensino Superior, Fundação Araucária, CAPES, Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática/UEL.

1. Introdução

Este trabalho é parte de uma monografia escrita no Curso de Especialização em Educação Matemática da UEL.

Este estudo foi planejado para “desmistificar” a dificuldade de interpretação dos alunos quando se trabalha com problemas matemáticos, mais especificamente, problemas do banco de questões da OBMEP.

Geralmente quando se fala em matemática, os alunos têm a concepção de que não pode ser aplicada no seu cotidiano, vindo a fazer as seguintes perguntas: “para que aprender isso? Em que vou usar?” Muitas vezes o docente procura motivá-los tentando explicar a sua aplicabilidade, dizendo que o mundo pode ser descrito por intermédio da matemática.

A proposta é mostrar as atitudes de um hipotético professor na condução de alunos resolvendo tarefa de contagem, potencializando boas situações de aprendizagem, levando em conta que, na maioria das vezes, a aula expositiva não requer a participação ativa dos alunos.

No decorrer do relato explora-se o potencial que o problema possui, procura-se instigar o interesse do aluno e colaborar para que ele queira descobrir a resposta. Esse processo favorece que o aluno construa seu próprio conhecimento, não deixando de lado a importância do professor, pois ele é o mediador, possibilitando uma maior interação entre o aluno e os conteúdos propostos.

Foi desenvolvida uma tarefa a respeito de contagem, trabalhando o conceito de número e álgebra, retomando alguns conteúdos já estudados. Com a tarefa, buscou-se trabalhar o conceito de sequência, por meio de Progressão Aritmética (P.A.) e o conceito de equações com duas variáveis.

2. Elementos Teóricos

2.1. A Estratégia de Resolução de Problemas

Para começar a falar de Resolução de Problemas, escolheu-se abordar de início a trajetória de dois matemáticos que contribuíram para a evolução da ciência matemática, Pierre de Fermat e Andrew Wiles. Seus caminhos se entrelaçaram em decorrência de um problema que desafiou os melhores matemáticos por quase 400 anos.

Fermat nasceu no dia 20 de agosto de 1601, em Beaumont-de-Lomages, França, e morreu no dia 12 de janeiro de 1665 em Castres, França. Foi um matemático amador que resolvia problemas, estudando uma reescrita da “Aritmética¹”, de Diofante. Uma cópia dessa obra foi apresentada a Fermat, nela havia 1000 anos de conhecimentos matemáticos. Ele estudava os problemas e suas soluções. Além de resolvê-los, elaborava outros para melhor entendê-los e assim enfrentá-los.

Wiles, nascido em 1963, desde os 10 anos era deslumbrado pela Matemática. Ele gostava de resolver problemas na escola, também os levava para casa e criava outros. Frequentava muito a biblioteca local em Cambridge, Inglaterra, onde encontrava os melhores problemas.

¹ Aritmética é um dos livros de Diofante de Alexandria sobre teoria dos números, no qual o autor foi último herói da matemática grega.

Singh (2014) relata que Wiles conheceu o teorema de Fermat no momento em que voltava da escola, quando resolveu passar em uma biblioteca pequena da Rua Milton, onde havia muitas coleções de livros sobre enigmas, charadas científicas e problemas matemáticos. Esses livros atraíam sua atenção. Nesse dia, ele viu um livro que tinha apenas um problema e nenhuma solução.

O problema consiste na seguinte igualdade:

$$x^n + y^n = z^n, \text{ para } n \text{ maior do que } 2.$$

O teorema de Fermat é um problema aparentemente simples. Wiles disse, em uma entrevista, que, quando viu o Último Teorema de Fermat pela primeira vez, ainda criança, aquele problema tornou-se sua grande paixão.

Pereira (2002) enfatiza que o Teorema de Fermat tornou-se importante pelo fato de que, ao tentar resolvê-lo, criaram ideias novas, obtendo grandes avanços em inúmeros campos da Matemática, entre eles a Teoria dos Números e a Geometria.

Com essa breve história, pode-se verificar a importância dos problemas na Matemática. Uma das propostas da Educação Matemática é a implementação da Resolução de Problemas com os alunos da Educação Básica. Este trabalho utiliza essa estratégia em Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem².

Allevato e Onuchic (2008), estudiosas da estratégia de Resolução de Problemas, mencionam Polya e o seu livro “A arte de Resolver Problema” que foca a importância de conduzir o aluno a pensar por intermédio de resolução de problemas, todavia “uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. Em 1949 ele escreveu que resolver problemas é realização específica da inteligência e que, se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta” (Polya *apud* Allevato e Onuchic 2008, pág. 3).

Para Polya, resolver problema

é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados (Polya *apud* Krulik 1997, pág. 1 e 2).

² Trajetória Hipotética de Aprendizagem THA – Um modelo apresentado pelo pesquisador americano Martin Simon em 1995, tendo como base a reconstrução das práticas matemáticas construtivistas (MENOTTI 2014, pág.12).

É importante fazer uma reflexão a respeito do que seja um problema. Para Pereira, problema

é o meio pelo qual a Matemática se desenvolve, ou seja, o “alimento” da evolução matemática. Um problema tem seu grau de importância relacionado à quantidade de ideias novas que ele traz à matemática e o quão ele é capaz de impulsionar os diversos ramos da Matemática – sobretudo àqueles em que ele não está diretamente relacionado (Pereira 2002, pág. 3).

Segundo o mesmo autor, qualquer situação que necessita ser explorada de modo que busque informações matemáticas desconhecidas, na qual o indivíduo se dedique com o intuito de resolver ou criar uma demonstração de uma solução Matemática, é um problema matemático.

Inspirado nessas concepções, o educador pode incentivar os aprendizes a explorar situações para que comecem a pensar e desenvolver as ideias com o propósito de procurar uma solução Matemática, trabalhar de forma que os encoraje a resolver problemas de todos os níveis.

O professor pode conduzir a turma com problemas simples no primeiro momento. Quando os discentes começarem a organizar as ideias e tiverem uma melhor familiaridade com a aula de resolução de problemas, poderão ser aplicados problemas não rotineiros ou quebra-cabeças, com isso os alunos poderão melhorar a argumentação Matemática.

Uma estratégia de Resolução de Problema consiste em formular hipótese para solucionar alguma situação. Para que possamos "fazer" Matemática, utilizamos informações e dados e, por meio de hipóteses, podemos chegar a um possível resultado. Ao nos depararmos com um problema é preciso coletar todas as informações nele contidos e, em seguida, determinar uma estratégia que possa resolvê-lo.

É sabido que existem vários caminhos para chegar a uma resolução. No momento em que o docente escolhe um problema, ele pode identificar de que tipo ele é: repetitivo, simples, não rotineiro ou quebra-cabeças. O aluno, ao se deparar com esse problema, elabora uma estratégia para poder solucioná-lo. O estudante deve respectivamente compreender, planejar, analisar, coletar dados e finalmente resolver o problema.

2.2. Trajetória Hipotética de Aprendizagem

O ensino da Matemática trabalhado por meio da estratégia de Resolução de Problemas permite diversas formas de abordar conteúdos matemáticos, podendo assim explorá-los por meio de diferentes caminhos.

O papel do educador é ser mediador, ter como meta auxiliar os alunos no processo de ensino e de aprendizagem. A Trajetória Hipotética de Aprendizagem é uma possibilidade que pode ajudar o professor no planejamento de sua aula.

Para Menotti (2014), as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem vêm se propagando no Brasil, é figura de estudos realizados por Martin Simon, conduzindo uma grande expectativa, no meio dos educadores, na direção do processo de ensino e de aprendizagem do ponto de vista construtivista.

Uma das principais funções do professor é planejar suas atividades, e estas resultarão em boas situações de aprendizagem.

Durante o desenvolvimento de atividades pelos professores, um objetivo inicial planejado, geralmente, deveria ser modificado muitas vezes (talvez continuamente), durante o estudo de um conceito matemático particular. Quando os alunos começam a comprometer-se com as atividades planejadas, os professores deveriam “comunicar-se” com as observações dos alunos, nas quais eles formatam novas ideias sobre esse conceito. Assim, o ambiente de aprendizagem envolveria resultados da interação entre o professor e os alunos e o modo como eles se engajam em um conteúdo matemático (PIRES 2009, p. 154 e 155).

Estando os alunos empenhados nas atividades planejadas, se acontecer algo que os desestimule, o educador precisa intervir. Quando isso ocorrer, “o professor necessita de conhecimentos e teorias que lhe sirvam de embasamento para construção de sua prática de aula” (Menotti 2014, p. 18).

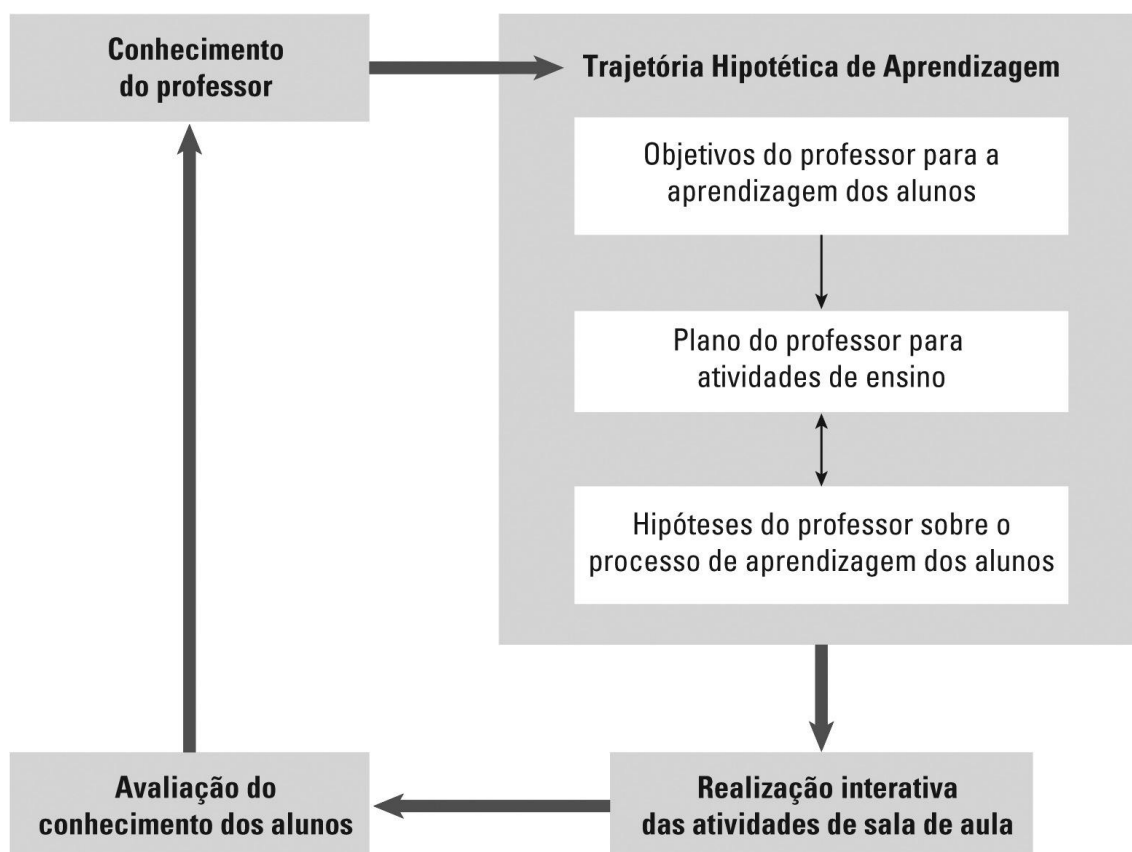
Simon afirma que, em suas experiências, a discussão na sala de aula o impulsionou a reexaminar diversos conhecimentos para favorecer a elaboração do seu “mapa conceitual” e destaca que o termo “mapa”, nesse contexto, é usado para enfatizar que o conhecimento do professor serve como um mapa que traduz como ele se empenha na construção da compreensão dos alunos e identifica o potencial de aprendizagem (PIRES 2009, p. 155).

Simon, *apud* Pires (1995), descreve que, na qualidade de professor, há dois eventos importantes no âmbito do ensino. No primeiro momento, ele fala do seu ponto de vista, os saberes matemáticos dos discentes estão sustentados pelo saber matemático do docente em

questão. Simon observou que o interesse pelo entendimento matemático dos discentes e sua percepção das ideias Matemáticas envolvem interconexões.

Rosenbaum (2010), Coll e Solé (2009) especulam que, no momento em que o professor ajuda os alunos, eles aprendem e constroem seu conhecimento, porém o docente precisa atender todas às necessidades dos educandos, conduzindo-os as aprendizagens, independentemente de como vai auxiliá-los, podendo variar na quantidade, tipo e qualidade.

Figura 1 – Ciclo de ensino de matemática abreviado



Fonte: SIMON, (1955 *apud* PIRES, 2009 p.156).

Em concordância com Simon, ao observar que tudo parte do nível de conhecimento do professor, não basta ter apenas conhecimento, mas sim objetivos para a aprendizagem do aluno, e, ao planejar as atividades de ensino, criar novos desafios para os alunos, com isso eles começam a formular conjecturas conseguindo resolvê-las.

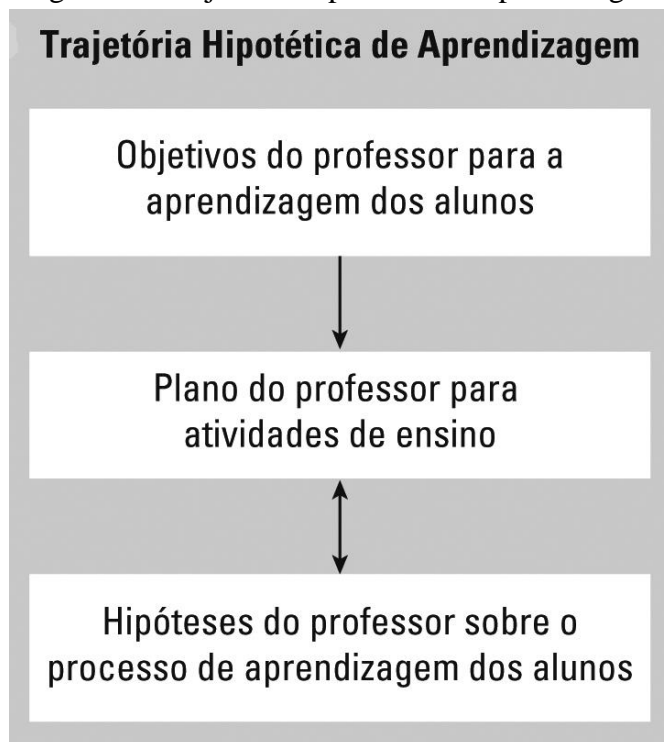
Cabe ao professor mediar o processo, avaliando e retomando as tarefas desenvolvidas e se necessário realizar as formulações necessárias para que os objetivos iniciais possam ser alcançados ou até mesmo alterados. Os

alunos formulam suas hipóteses de maneiras diferentes, pois são pessoas diferentes com conhecimentos diferentes, cada um apropria-se do conhecimento em seu tempo e de maneira gradativa. O professor deve estar preparado para reformular uma THA sempre que verificar que seus alunos estão apresentando dificuldade em compreender algum conceito abordado (MENOTTI 2014, p. 21).

A Trajetória Hipotética da Aprendizagem possui três componentes, que são:

- 1- o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;
- 2- as atividades de ensino;
- 3- o processo hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos será colocado em ação no contexto de aprendizagem das atividades) (PIRES 2009, p. 157).

Figura 2 – Trajetória Hipotética de Aprendizagem



Fonte: SIMON, (1955 *apud* PIRES, 2009 p.157).

De acordo com a mesma autora, a noção de trajetória hipotética de aprendizagem, para Simon,

pressupõe a importância da relação entre a meta pretendida e o raciocínio sobre decisões de ensino e a hipótese sobre esse percurso. Para ele, o

desenvolvimento de um processo hipotético de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades dessa aprendizagem tem uma relação simbólica. A geração de ideias para atividades de aprendizagem é subordinada à hipótese do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e aprendizagem de seus alunos. A escolha da palavra “trajetória” é significativa para designar um caminho (PIRES 2009, p. 158).

Simon fez uma simulação de como seria uma trajetória hipotética:

Façamos uma analogia: considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na sequência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da sequência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua “trajetória”. O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua “trajetória hipotética” (SIMON *apud* PIREs 2009, p. 158).

Menotti (2014) ressalta que é obrigação do professor assentar os mínimos detalhes com relação aos conhecimentos matemáticos, a trajetória de sua obra e, com isso, poder contribuir na formação de seus alunos, saber o momento de atuar para poder revisar seu trajeto. Resumindo, cabe ao professor decidir uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem a partir das observações e interações que estará realizando a respeito das tarefas dos alunos, seja individual ou coletivamente, e, ao desenvolver a tarefa, fazer uma retomada de decisões para uma melhor reflexão sempre que for necessário. E, ao Planejar, os resultados obtidos podem ser diferentes, ou não, dos apresentados no início.

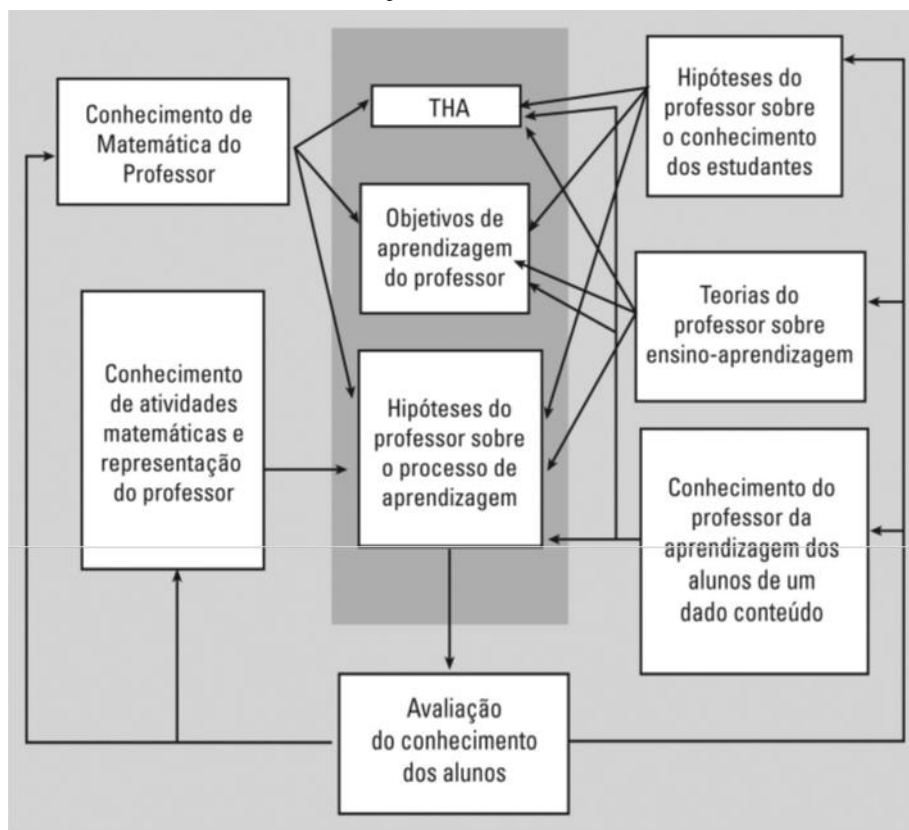
O professor deve ensinar o aluno a aprender a aprender. Nesta perspectiva, os alunos são aprendizes ativos que constroem o próprio conhecimento. A autora critica a concepção errônea da teoria construtivista: quando professores abandonam os alunos a própria sorte ao acreditarem que se “ajudarem” os aprendizes estará dando pistas ou respostas que deveriam ser conquistadas pelos alunos. Não podemos refutar tal informação, porém o professor deve perceber em que ocasião intervir para não perder o momento da aprendizagem. Assim como é importante que o professor perceba em que momento deve adaptar a atividade a um grau de dificuldade maior ou menor dependendo do desenvolvimento e compreensão dos aprendizes (MAURI *apud* ROSENBAUM, 2010, p. 23 e 24).

Ao iniciar uma aula, o professor deve analisar o nível de conhecimento de seus alunos podendo, assim, estudar detalhadamente os objetivos de aprendizagem, contribuindo com o desenvolvimento de suas situações por meio do processo hipotético de aprendizagem, que, no momento que o aluno desenvolver suas tarefas, deixará de ser hipotético.

Se necessário, durante a trajetória, o professor realiza adaptações gerando um novo objetivo, podendo propor outras tarefas ou usando as mesmas, para desenvolver as hipóteses do processo de ensino por parte dos alunos, que realizam as tarefas. O processo não para, sendo possível a reconstrução e ressignificação do conhecimento e da aprendizagem (MENOTTI 2014, p. 23).

Pires (2009) descreve detalhadamente algumas observações de Simon (1955) no que se diz respeito aos domínios do conhecimento do professor, a ligação da trajetória hipotética de aprendizagem e o convívio com os alunos. Isso contribui para um melhor diagnóstico visando o ensino e o conhecimento matemático do docente, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Domínios do conhecimento do professor, trajetória hipotética de aprendizagem e interações com os alunos



Fonte: SIMON, (1955 *apud* PIRES, 2009 p.159)

3. Apresentação da Trajetória

Na maioria das vezes os educadores fazem questionamentos sobre como fazer uma abordagem matemática, procurando interagir melhor com seus alunos buscando proporcionar uma aula que possa contribuir para a construção do conhecimento.

Por meio da questão procurou-se exemplificar como o docente pode interferir no desenvolvimento da tarefa, introduzindo novos conceitos matemáticos, para que os alunos possam construir seus conhecimentos e dar sentido a eles.

3.1 Trajetória: Termos Esquecidos da P.A.

O professor entrega uma cópia da tarefa para cada grupo de alunos e pede que façam uma leitura do problema.

TERMOS ESQUECIDOS DA P.A.³

Uma progressão aritmética, costumeiramente chamada de P.A., é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do termo anterior com um valor fixo r chamado diferença comum ou razão da progressão. Por exemplo, a sequência abaixo é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e diferença comum 4.

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19, a_6 = 23, a_7 = 27, a_8 = 31, a_9 = 35, \dots$$

Veja que estamos denotando o número da posição i pelo símbolo a_i .

- Se o primeiro termo de uma progressão aritmética é 2 e sua diferença comum é 3, qual é o valor do quarto termo?
- A professora de João pediu que ele calculasse o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética. Infelizmente ele esqueceu qual era o termo inicial e a diferença comum. As únicas informações das quais ele lembrava eram:

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 207$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 553$$

Quanto vale o décimo primeiro termo?

Tiago⁴: Por onde podemos começar? Professor, já estudamos sequência, e lembro que você comentou na aula passada que íamos começar a estudar Progressão Aritmética.

Professor: Então esse problema é sobre P.A.?

³ Tarefa retirada do Banco de questões 2015 – Nível 3 .

⁴ Os nomes utilizados nas trajetórias contidas nesses relatos são fictícios.

Pedro: No enunciado está dizendo que P.A. é uma sequência.

Professor: Sim.

Pedro: Então já sabemos alguma coisa a respeito disso.

Professor: Estudamos, sim, Pedro, mas trabalhamos apenas a definição de sequência. Progressão Aritmética é um caso particular de sequência.

O Professor retoma a definição de sequência:

Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função definida em $N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ e tomando valores no conjunto dos números reais.

$$f: N^* \rightarrow R$$

Vanessa: Ah sim, agora lembro quando você apresentou essa definição...

Professor: O que mais diz o enunciado?

Carla: Que uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um valor fixo r chamado de diferença comum ou razão da progressão.

Professor: Isso mesmo Carla, então, o que está contido no enunciado é uma forma de definir P.A.: que é uma sequência e que, a partir do segundo termo, tem um valor fixo chamado razão ou diferença comum, certo?

Tiago: Isso professor, também tem um exemplo, mas não entendi.

Professor: Será que só você, Tiago, ou mais alguém não entendeu o exemplo citado na tarefa?

Maria Isabel: Professor! Ainda tenho muita dúvida de como e por onde começar a resolver essa tarefa.

Professor: Acompanhe a explicação, assim podemos analisar o que está acontecendo:

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19, a_6 = 23, a_7 = 27, a_8 = 31, a_9 = 35, \dots$$

Aqui está dizendo que o primeiro termo é igual a 3 e tem uma razão igual a 4 e somando quatro ao termo inicial obtemos o segundo termo com valor 7.

Pedro: Sim, professor, vejo que o termo inicial é 3 e que a diferença comum é 4, consegui entender.

Professor: Vejo que vocês já estão entendendo o enunciado, agora vamos tentar resolver a alternativa a.

Carla: Professor! Olha, a primeira pergunta desse problema está dizendo que o termo inicial é 2 e a diferença comum é 3.

Professor: Certo, todos entenderam.

Alunos: Sim!

Professor: Então, o que vocês devem fazer para resolver?

Pedro: Achar o valor do quarto termo.

Professor: Como vocês podem fazer isso?

Jean: Achar o primeiro termo e a partir disso somar a razão.

Professor: E agora?

Gabriele: Professor! Acho que resolvemos.

Professor: Então explica como vocês fizeram, Gabriele.

Gabriele: Professor, como o primeiro termo é 2, somei com 3 que é a diferença comum.

Professor: Sim.

Gabriele: Achei que o segundo termo é igual a 5, como está pedindo o quarto termo, somei mais 3 no segundo termo chegando no valor 8, terceiro termo, adicionando mais 3 chego ao valor 11.

Professor: Mostra para seus amigos como você fez

Gabriele mostra seus cálculos para os amigos.

$$a_1 = 2 \text{ e } r = 3$$

$$a_2 = a_1 + 3 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 8$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 11$$

Professor: Isso mesmo, Gabriele, todos chegaram ao mesmo resultado.

Alunos: Sim, professor, chegamos.

Professor: Vocês viram como não foi tão difícil resolver.

Jean: Professor! Não acabamos ainda, tem a alternativa b.

Professor: Como podemos "atacar" essa questão?

Gabriele: Professor, vejo aqui que tem pouca informação nesse enunciado, e fala que a professora pediu que João calculasse o décimo primeiro termo de uma P.A., certo?

Professor: Sim.

Gabriele: Então, ele não conseguiu pegar todas as informações que a professora passou.

Maria Isabel: Não vamos conseguir resolver, não tem todas as informações no problema para poder resolver.

Professor: Será que essas informações não são o suficiente para resolver a questão?

Vanessa: Como assim? Olha aqui, tem apenas o quarto termo somando o sétimo e o décimo igual a duzentos e sete, falta o primeiro, segundo, terceiro, quinto, oitavo e nono, fora a outra soma que está faltando também. Como resolver isso?

Professor: Como podemos resolver? Boa pergunta!

A turma começou a se dispersar e o professor pediu que eles fizessem a leitura do enunciado novamente.

Pedro: Mas, professor, olha aqui, não consigo entender.

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 207$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 553$$

Tiago: Não sei também.

Professor: Vamos rever a definição: Progressão Aritmética (P.A.) é toda sequência de números na qual cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um valor fixo r chamado razão ou diferença comum da progressão.

Todos: Sim.

Professor: Então, quando falamos que é uma P.A., o que esses termos têm em comum?

Carla: Não consigo identificar as semelhanças.

Jean: Também não.

Professor: Pensam no que acabamos de fazer na questão anterior.

Maria Isabel: Mas na outra questão tinha o primeiro termo, diferente dessa e, a diferença comum que também não aparece nessa P.A.

Professor: Será que não?

Tiago: Não. Olha, não temos o primeiro termo, como podemos achar o valor da razão e resolver esse problema?

Professor: Vamos prestar atenção no enunciado da tarefa, lá fala que a professora pergunta o valor do décimo primeiro termo de uma P.A., e que João esqueceu alguns termos, porque quando a professora ditou ele estava distraído.

Vanessa: É verdade, mas como podemos descobrir o valor do termo inicial e a razão?

Tiago: Será que podemos trabalhar com incógnitas.

Professor: Podemos?

Tiago: Creio que sim, contudo não consegui verificar ainda onde posso colocá-las.

Professor: Será que posso fazer isso? Não temos o valor do primeiro termo e você falou que podemos usar incógnita, ele pode valer x . O que os outros acham?

Alunos: Sim.

Professor: Então tentem, mas vocês já conseguiram um suposto valor para o primeiro termo e o valor da razão? Qual é?

Vanessa: Não consegui visualizar ainda professor.

Professor: Seus colegas disseram que, como não tem o valor do primeiro termo, eles podem chamá-lo a x .

Vanessa: Entendi, mas qual seria o valor da razão, também não temos o valor dela, ah já sei! Podemos falar que a razão vale um valor r também.

Professor: Pode sim, mas como vocês começariam a resolver a questão? Temos que achar o valor do décimo primeiro termo.

Jean: Professor, quando resolvemos a primeira pergunta do problema, vimos que, para achar o segundo termo, somamos o primeiro com a razão, será que nesse caso pode dar certo?

Professor: Creio que sim. Por que não tentam?

Após alguns minutos.

Gabrielle: Professor! Consegui fazer, será que está certo?

Professor: O que você fez, Gabrielle?

Gabrielle: Como o termo inicial vale x , para achar o segundo adiciono o valor da razão e obtenho o valor $x + r$, terceiro termo $x + 2r$, vou adicionando o valor da razão em cada termo até chegar ao décimo primeiro que é o desejado.

Professor: Isso mesmo mostre no quadro como você fez.

Gabrielle mostrou todos os cálculos.

$$a_1 = x, \quad a_2 = x + r, \quad a_3 = x + 2r, \quad a_4 = x + 3r,$$

$$a_5 = x + 4r, \quad a_6 = x + 5r, \quad a_7 = x + 6r, \quad a_8 = x + 7r,$$

$$a_9 = x + 8r, \quad a_{10} = x + 9r, \quad a_{11} = x + 10r.$$

Professor: Isso mesmo. O que pode ser feito para resolver o problema? Porque, se vocês analisarem, a Gabrielle não conseguiu calcular e chegar a uma resposta, porém expôs uma estratégia útil para tentarmos encontrá-lo.

Thiago: O que pode ser feito agora, não consigo entender.

Professor: Vamos verificar quais são as informações que o problema nos traz.

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 207$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 553$$

Professor: Vocês conseguem perceber alguma relação, e colocar em prática junto com a forma que Gabrielle escreveu os termos?

Carla: Também conseguimos chegar num resultado igual, e analisando a pergunta descobrimos quanto vale o quarto termo, sétimo termo e décimo termo, a partir disso, substituímos e obtivemos o seguinte resultado.

Na primeira expressão:

$$x + 3r + x + 6r + x + 9r = 207$$

e,

$$x + 4r + x + 5r + x + 6r + x + 7r + x + 8r + x + 9r + x + 10r = 553$$

na segunda expressão.

Professor: Isso mesmo! Como podemos resolver essas equações?

Tiago: Somamos todos os valores de x e todos os valores de r .

Professor: Isso, meus parabéns, o que mais?

Vanessa: Depois que achar todos os valores, vamos chegar a um sistema com duas incógnitas.

Professor: Sim, vocês já estudaram sistema de equações com duas incógnitas.

Carla: Já sim, professor! Mas analisando aqui, não vamos chegar à resposta. Vamos achar apenas o valor do termo inicial e da diferença comum.

Professor: Sim, verdade! Então, calculem, por favor.

Pedro: Já calculei.

Professor: Como você fez os cálculos, Pedro?

Pedro: Assim.

Pedro mostrou uma folha de caderno para o professor com todos os cálculos.

$$\begin{cases} 3x + 18r = 217 \\ 7x + 49r = 553 \end{cases}$$

$$x = \frac{207 - 18r}{3} = 69 - 6r$$

$$7(69 - 6r) + 49r = 553 \Rightarrow 483 - 42r + 49r = 553 \Rightarrow 7r = 70 \Rightarrow r = 10$$

Substituindo o valor de r na primeira equação, temos:

$$x = 69 - 6r \Rightarrow x = 69 - 60 \Rightarrow x = 9$$

Professor: Isso mesmo, Pedro! Alguém mais conseguiu resolver e achar o resultado?

Jean: Eu, mas não estou muito confiante, professor.

Professor: Qual foi sua resposta?

Jean: Termo inicial 9 e razão 10.

Professor: Todos conseguiram achar o mesmo valor?

Gabrielle: Eu não, mas o Jean já mostrou onde errei.

Professor: Então, o que vocês acham, já terminaram de resolver o problema?

Pedro: Não!

Professor: O que está faltando?

Maria Isabel: Achar o valor do décimo primeiro termo.

Professor: Que cálculo pode ser feito para achar o valor? Alguém tem alguma ideia?

Pedro: Olha! Revisando minha conta vi que o décimo primeiro termo é igual ao primeiro termo mais dez vezes a razão.

Professor: E aí, pessoal, será que Pedro está certo?

Vanessa: Está sim, professor, já fiz até os cálculos.

Professor: Então mostra.

Vanessa mostra como ela resolveu.

$$a_{11} = x + 10r \Rightarrow a_{11} = 9 + 10 \cdot 10 = 109$$

Professor: Alunos, o valor do décimo primeiro termo é 109, todos concordam?

Todos: Sim.

Professor: Não foi tão difícil resolver o problema.

Jean: Tem razão, professor.

Professor: Beleza pessoal, por hoje é só. Estão todos dispensados.

Neste trabalho, muitos desses comportamentos foram realmente apresentados por alunos numa aplicação piloto dessas tarefas. A aplicação foi feita em duas turmas de 8º ano de um colégio estadual de Londrina, com aproximadamente 35 alunos cada turma. Em suma, as reações dos alunos hipotetizadas nessas trajetórias são em parte reais e, em parte, imaginadas.

4. Considerações Finais

Este trabalho permitiu vislumbrar o desenvolvimento de outras estratégias em sala e perceber que é possível aos alunos estudar matemática de forma prazerosa. Muitas vezes eles vão encontrar obstáculos ao resolver alguns problemas, mas, se persistirem, os alunos podem conseguir resolver a tarefa proposta.

O trabalho de estudar e o exercício da construção das trajetórias foi muito significativo. Nesse tempo pode-se refletir melhor sobre o papel do docente na sala de aula, pois organizar

essa trajetória foi uma quebra de paradigma, ainda mais depois de ter inserido um problema na sala de aula e ver como é gratificante os alunos organizar suas ideias.

Depois, começar a refletir sobre a relação professor/aluno, em que, muitas vezes o professor se coloca no lugar dos alunos, tentando buscar alternativas para suprir as dúvidas deles, sem deixar de ser conciliador buscando possibilidades para suprir todas as dificuldades do colegiado, e também na relação aluno/aluno, pois eles começam a trocar ideias acerca do conteúdo estudado, o que os deixa mais próximos e menos individuais, pois começam a trabalhar em equipe.

A trajetória apresentada pode contribuir para fazer com que os professores percebam como suas ações e perguntas podem conduzir os alunos a compreender, organizar seu pensamento, estabelecer planos para solucionar o problema, podendo refletir, conjecturar e tomar decisões no momento propício, e perceber que a participação é indispensável no processo de aprender.

Menotti (2014, p. 149) salienta que “ao aluno é permitido buscar novas resoluções, em especial, que sejam de sua autoria. Contrapondo resoluções mecanizadas, prontas e acabadas, as ideias dos alunos para a resolução do problema devem ser aproveitadas e valorizadas”.

É importante que o docente conheça bem seus alunos, e para atingir seu objetivo, ao elaborar as tarefas elas precisam ser bem definidas, por meio de situações desafiadoras, precisam ser claras aos olhos dos resolvidores para não desmotivá-los.

5. Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas como uma metodologia de trabalho para o ensino de matemática em sala de aula. Congresso Internacional de Educação Matemática, em Monterrey, México, 2008. Disponível em <<http://tsg.icme11.org/document/get/453>>.

OBMEP – Banco de questões 2015. Disponível em < www.obmep.org.br>.

BRANCA, Nicholas A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org). A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1997. p. 4 – 12.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org). A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

MENOTTI, Rogéria Malacrida, Frações e suas operações: Resolução de Problemas em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. 2014. 154 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade de Londrina, Londrina, 2014.

PEREIRA, Antônio Luiz. Notas de aula: MAT450 - Seminários de Resolução de Problemas, março de 2002.

PIRES, Célia Maria Carolino. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166; 1º quadrimestre 2009.

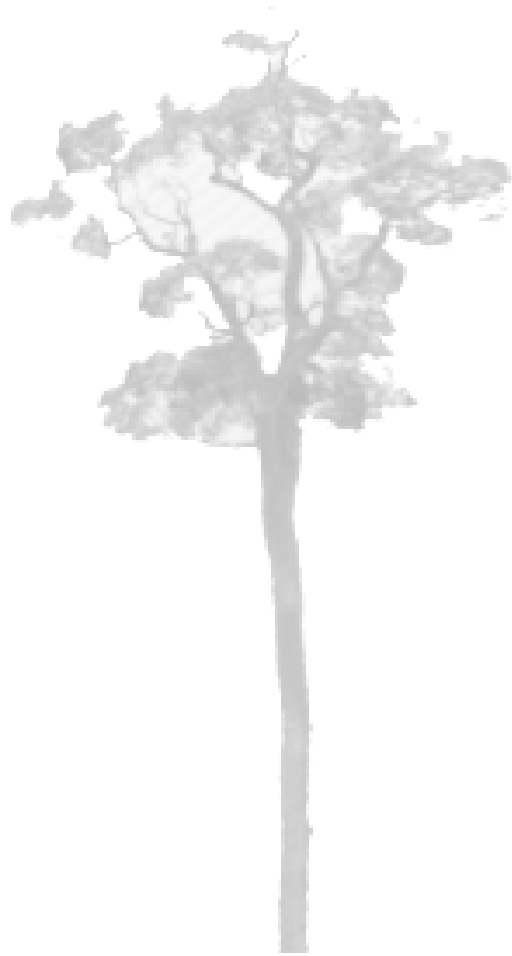
POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na High School. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997. 1-3.

ROSENBAUM, Luciane Santos. Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010. Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/luciane_rosenbaum.pdf>. Acesso em: 13 de abril. 2016.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM)

SINGH, Simon, *O Último Teorema de Fermat*, 1.ed. Rio de Janeiro: Record, 2014.

SUYDAN, M. N. Desemaranhando pistas a partir da pesquisa sobre resolução de problemas In: KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997. 49 - 73.



UMA TAREFA DE AVALIAÇÃO FORMATIVA NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Christian James de Castro Bussmann¹; Michelle Andrade Klaiber²; Angela Marta Pereira das Dores Savioli³

Introdução

Neste texto relatamos o desenvolvimento de uma tarefa de avaliação com estudantes do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática com vistas a uma discussão e caracterização da Avaliação Formativa, concepção de avaliação que valoriza todo o processo de ensino e aprendizagem e não apenas os resultados obtidos por meio deste, como ocorre frequentemente nas disciplinas de matemática. Na tarefa os estudantes elaboraram *feedback* para a resolução de algumas questões resolvidas por alunos do ensino médio. Após análise desses registros observamos que as atividades realizadas pelos estudantes foram mais voltadas à identificação de erros e dificuldades nas resoluções do que a auxiliar para que o resolvidor da questão possa orientar sua própria aprendizagem no sentido de aprender com seus erros e superar obstáculos e dificuldades. Atribuímos esse resultado à grande influência das experiências vividas por esses estudantes durante o período escolar e às escassas discussões sobre o assunto durante sua formação docente.

Desde os tempos mais remotos a Matemática esteve presente contribuindo para a formação da sociedade como a conhecemos atualmente. No entanto, ela ainda é considerada não só pelos estudantes, mas também pela comunidade em geral, como sendo muito difícil.

Se a disciplina de matemática já causa certo “pânico” nos estudantes, o que dizer então da avaliação em matemática? De acordo com Lopez, Buriasco e Ferreira (2014, p. 252)

Usualmente, na escola, a expressão avaliação é relacionada, na maioria das vezes, com provas escritas e notas. É considerada como aquele momento angustiante em que o professor enfileira seus alunos na sala de aula e ordena que não olhem para os lados, não consultem seus materiais nem os colegas e, respondam as questões apresentadas em uma folha [...]

Mesmo esse assunto sendo discutido há algum tempo, podemos dizer que ainda hoje a avaliação apresenta um caráter classificatório; contribuindo pouco para o que acreditamos ser sua principal função: fornecer informações que possam direcionar o processo de ensino e aprendizagem (De Lange, 1999).

Nos cursos de formação de professores de matemática, esta concepção de avaliação que enfatiza resultados e tem fins classificatórios é reforçada na maioria das disciplinas cursadas, criando um ciclo onde o professor que “ensina da forma como aprendeu” também avalia da forma como foi avaliado.

Com base nestas reflexões, decidimos propor aos estudantes do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática um momento de discussão e uma tarefa sobre avaliação. Objetivamos com esta tarefa apresentar aos futuros professores de matemática uma outra concepção de avaliação que priorize o processo, o pensamento e o desenvolvimento de habilidades dos estudantes e forneça indícios que orientem professor e estudante na tomada de decisão educacional, a Avaliação Formativa .

A experiência aqui relatada foi realizada durante dois encontros semanais com uma turma do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

No primeiro encontro, estavam presentes 17 estudantes, aos quais inicialmente foi proposta uma discussão sobre avaliação em matemática com a intenção de ouvir as concepções destes alunos a respeito do assunto. Na sequência foram apresentadas e discutidas algumas características e concepções da Avaliação Formativa, evidenciando como esta pode servir como motivação (ao invés de obstáculo) para aprendizagem da matemática. Ao final do primeiro encontro foram distribuídos aos estudantes problemas envolvendo conteúdos da geometria analítica e foi solicitado que eles resolvessem estes problemas.

¹ Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus Luiz Meneghel; christian@uenp.edu.br.

² Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Apucarana; Michelle@utfpr.edu.br.

³ Universidade Estadual de Londrina; angelamarta@uel.br.

No segundo encontro, estavam presentes apenas 12 estudantes que realizaram a tarefa proposta, solicitamos que eles se reunissem em grupos de 3 alunos e entregamos a eles resoluções das questões (que já haviam sido resolvidas por eles) feitas por alunos de uma turma do 3º ano do ensino médio para que fossem analisadas.

Todas as resoluções entregues estavam incompletas e/ou apresentavam equívocos em relação aos cálculos aritméticos e/ou conceitos e definições empregados. A proposta foi que os grupos discutissem e escrevessem um *feedback*⁴ sobre cada resolução destinado ao estudante que a desenvolveu, de forma que este fosse capaz de dar continuidade a sua resolução, refletindo sobre possíveis equívocos e deficiências.

Para a discussão e análise dos resultados obtidos identificaremos os 10 estudantes do curso de licenciatura em matemática por E_1, E_2, \dots, E_{10} .

Os licenciandos E_1, E_2 e E_3 em seus *feedback* fizeram um análise de quais erros e quais dificuldades foram apresentadas pelos estudantes durante a resolução da questão, foram feitos comentários como: “o raciocínio está correto”, “o aluno soube ler e compreender o problema”, “o aluno tem dificuldades em operações básicas e radiciação”, mas apenas o licenciando E_1 fez um questionamento que poderia incitar o estudante a uma reflexão inicial sobre a resolução dada, porém, na sequência ele acaba dizendo qual o caminho correto para a resolução, qual fórmula utilizar e ainda apresenta a resolução do problema.

Os licenciandos E_4, E_5, E_6 e E_8 elaboraram o *feedback* de outras questões, mas assim como E_1 e E_2 apenas identificaram erros e confusões apresentados pelos estudantes resolvidores das questões, e em alguns casos apresentaram a “forma correta” de resolução.

Por fim, os licenciandos E_7, E_9 e E_{10} apresentaram certa dificuldade na elaboração do *feedback*, fato que pode ser justificado por indícios em seus *feedbacks* de que não sabiam ou não tentaram resolver a questão.

Nas discussões entre os grupos, foram apontadas algumas ideias da avaliação formativa, como a importância da comunicação entre estudante e professor, destacando que alguns dos problemas encontrados na resolução escrita poderiam ter sido solucionados com uma conversa entre estes. Quanto ao *feedback*, os estudantes compreenderam a importância de apontar os pontos positivos das resoluções para toda a turma e em uma conversa individual com o resolvidor apontar os pontos negativos bem como questionar sobre como foi desenvolvida a resolução, para que assim o professor possa ter uma melhor compreensão do pensamento do estudante.

Durante a realização dos encontros pudemos observar que aquele estava sendo o primeiro contato dos estudantes com a Avaliação Formativa e que a forma tradicional de avaliar (com objetivo de classificar apenas) esteve fortemente presente em suas experiências com a avaliação em matemática, o que justifica em suas tarefas de elaboração de *feedback* os diversos apontamentos de “o que está certo”, “o que está errado”, “como fazer da forma correta” e quase nenhuma orientação, sugestão ou questionamento que proporcionasse ao aluno resolvidor da questão a possibilidade de refletir sobre suas dificuldades e sobre as próximas ações que poderiam ser tomadas de forma a diminuir as lacunas em seu processo de aprendizagem.

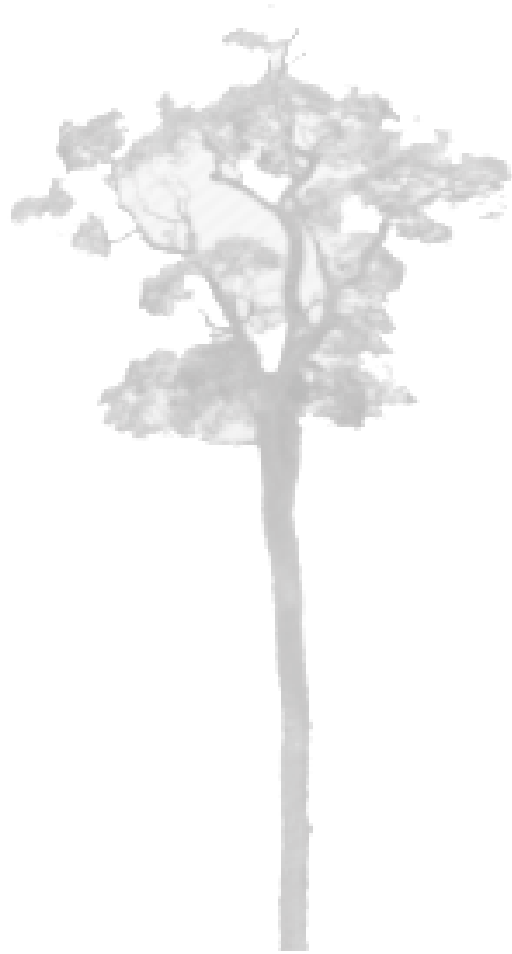
Fica evidente a necessidade de proporcionar aos licenciandos em matemática momentos de discussão, reflexão e investigação sobre outras concepções de avaliação e sobre suas influências não só na avaliação, mas em todo o processo de ensino e aprendizagem em matemática.

Referências

DE LANGE, Jan. Framework for classroom assessment in mathematics. Madison: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999. 72 p.

LOPEZ, Juliana M. S.; BURIASCO, Regina L. C. de; FERREIRA, Pamela E. A. Educação Matemática Realística: considerações para a avaliação da aprendizagem. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 14, p. 248-265, dez. 2014.

⁴ Na Avaliação Formativa, o *feedback* é um retorno que o professor dá ao estudante sobre as atividades desenvolvidas, ele deve ocorrer durante e não ao final do processo, possibilitando ao estudante regular seus processos de aprendizagem.





A CRIATIVIDADE NOSSA DE CADA DIA

*Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina
tucci@uel.br*

Resumo:

O século XXI traz em sua essência a diversidade e a flexibilidade. Nas escolas, estamos vivendo momentos que exigem versatilidade e apresentam desafios aos professores e futuros professores. Nesta perspectiva, podemos conjecturar que se mostra interessante expandir e aprimorar talentos e potencialidades individuais, já que os diferentes problemas escolares demandam cada vez mais esforço para serem solucionados. O papel da criatividade torna-se cada vez mais relevante e útil para aproveitarmos melhor os próprios recursos.

Mas, o que é a criatividade? Longe do que muitas vezes imaginamos, não se restringe a genialidades particulares, não é apenas um ‘insigth’ momentâneo.

A proposta deste minicurso é apresentar o processo criativo, desfazer alguns mitos associados à criatividade e apresentar algumas características que podem ser desenvolvidas por todos. Esta proposta será realizada por meio de atividades que pretendem ser divertidas e envolventes.

A EQUAÇÃO DO CALOR COM CONDIÇÃO DE NEUMANN

LUAN CARLOS LINS TRANNIN MARCIO A. JORGE DA SILVA
luantrannin@outlook.com *marcioajs@uel.br*

Universidade Estadual de Londrina - UEL

Resumo

O objetivo central deste trabalho é o estudo do seguinte problema de valor inicial e de fronteira para a Equação do Calor:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (1)$$

onde $f \in C([0, L])$ é uma função contínua dada, $\alpha > 0$ é uma constante relacionada a difusividade térmica e $L > 0$ é o comprimento de uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo.

Mais precisamente, mostramos que o problema (1) possui uma solução na seguinte classe $u \in C([0, L] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$. Utilizando o método de separação de variáveis e Séries de Fourier, obtemos inicialmente um candidato à “solução” de (1), a saber,

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\alpha^2 \frac{\pi^2 x^2 t}{L}}. \quad (2)$$

Em seguida, usaremos os resultados de Séries de Fourier para provar que a função u dada em (2) é, de fato, uma solução do problema proposto. Utilizando argumentos análogos aos apresentado em [1, 2, 3] mostramos o seguinte resultado.

Teorema 1 *Suponhamos que $f \in C([0, L])$ e que f é diferenciável em $[0, L]$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC([0, L])$. Então a série (2) converge uniformemente em $[0, L] \times [0, +\infty)$ para uma função $u \in C([0, L] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, L] \times (0, +\infty))$ que é a solução de (1).*



APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA AO MEIO EMPRESARIAL

Eliandro Rodrigues Cirilo
Universidade Estadual de Londrina
ercirilo@uel.br

Resumo:

Em meio a multiplicação da ciência nos diversos ramos do conhecimento que vivemos hoje, destacam-se as aplicações matemáticas ao nicho empresarial. Nesta palestra objetiva-se apresentar quantitativamente a matemática a serviço de problemas encontrados no mundo das empresas. Além disso, pontua-se também, as perspectivas de ganhos financeiros por parte do Matemático Aplicado no desenvolvimento das soluções dos problemas empresariais.



AS CATÁSTROFES DE THOM

Bruna Oréfice Okamoto
Universidade Federal de São Carlos
bruna@dm.ufscar.br

Resumo:

A Teoria da Catástrofe, criada por René Thom na década de 60, é um método para descrever a evolução das formas na natureza. Neste seminário, veremos uma pequena introdução à essa teoria e alguns exemplos de catástrofes elementares.

ASSIMILAÇÃO CONTÍNUA DE DADOS PARA MODELOS DA DINÂMICA DE FLUIDOS

DÉBORA A. F. ALBANEZ

1. RESUMO

Neste trabalho apresentamos um modelo de assimilação contínua de dados do tipo relaxamento no tempo para sistemas dinâmicos dissipativos, desenvolvido inicialmente em [2], para as equações de Navier-Stokes bidimensionais. Tal modelo de assimilação de dados baseia-se no fato de que esses sistemas possuem um número finito de parâmetros determinantes (graus de liberdade) tais como modos, nós médias espaciais locais, os quais determinam o comportamento desses sistemas para tempos suficientemente grandes. Supondo que a evolução no tempo da solução de um sistema é dado pela forma

$$\frac{du}{dt} = F(u(t))$$

onde o dado inicial $u(0)$ é desconhecido, o algoritmo de assimilação contínua de dados construído através das medidas observacionais é da forma

$$\frac{dv}{dt} = F(v(t)) - \mu(I_h(v(t)) - I_h(u(t)))$$

para todo $t \in [0, T]$, onde $I_h(u(t))$ representam as medições observacionais no tempo t em uma resolução h . É discutida essa assimilação para os modelos Navier-Stokes- α (ver [1]) e para o modelo de propagação bidimensional Bénard (ver [3]).

REFERENCIAS

- [1] Albanez, D.A.F., Nussenzveig, H.J. and Titi, E. *Continuous data assimilation for the three-dimensional Navier-Stokes- α model*, Asymptotic Analysis, Vol.97 (2016)
- [2] Azouani, A., Olson, E. and Titi, E. *Continuous Data Assimilation Using General Interpolant Observables*, Journal of Nonlinear Science, Vol.24 (2014)
- [3] Farhat, E. Lunasin and E.S. Titi, *Continuous data assimilation algorithm for a 2D Bénard convection through horizontal velocity measurements alone*, Journal of Nonlinear Science, (appeared online) (2016)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ, 86300-000, CORNÉLIO PROCÓPIO, PR, BRASIL

E-mail address: deboraalbanez@utfpr.edu.br

Bolas e Esferas em Espaços Métricos

Guilherme Rocha Ortega

Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR – Brasil

e-mail: guilhermerochoaortega@gmail.com

Prof^a. Dr^a. Michele de Oliveira Alves

Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR – Brasil

e-mail: michelealves@uel.br

Resumo:

Dentre os conceitos básicos estudados em espaços métricos, o conceito de bolas e esferas é com certeza um dos mais fascinantes entre os alunos do curso de matemática. É neste momento que a idéia geométrica trazida por eles sobre bola e esfera é desconstruída. Com este intuito, o objetivo deste trabalho é apresentar, geometricamente e algebricamente, vários exemplos de bolas abertas, fechadas e esferas em diferentes espaços métricos. Para isto, iniciaremos com a definição e exemplos de espaços métricos, bem como a definição e exemplos de bolas abertas, fechadas e esferas. Mostraremos que num mesmo espaço métrico bolas e esferas podem ser geometricamente diferentes, mesmo que se considere métricas equivalentes em tal espaço. Por exemplo, consideraremos em \mathbb{R}^n as seguintes métricas

$$\begin{aligned}d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\d'(x, y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\d''(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\},\end{aligned}$$

definidas para qualquer $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Mostraremos que tais métricas são equivalentes, porém para $n = 2$ as métricas d, d' e d'' nos fornecem, respectivamente, como bola aberta o interior de um círculo, de um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e de um quadrado com diagonais paralelas aos eixos coordenados.

Palavras-chave: Bolas, Esferas, Espaços Métricos.

Referências

- [1] LIMA, Elon Lages. Espaços Métricos. Projeto Euclides. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [2] DOMINGUES, H. H., Espaços métricos e introdução à topologia, Atual Editora, 1982.

CONTROLADOR FUZZY DE ILUMINAÇÃO

Rafael B. Gibellato
Universidade Estadual de Londrina
rafaelgibellato@gmail.com

Resumo:

O controlador Fuzzy tem como objetivo a economia de energia, com a lógica Fuzzy podemos assumir valores além de verdadeiro ou falso, diferente da lógica clássica, assim podemos controlar a luz além dos comandos de acesa e apagada, então podemos acender a luz de acordo com a necessidade, evitando manter uma luz totalmente acesa sem que seja realmente necessário, logo a economia de energia torna o uso do controlador Fuzzy vantajoso. Utilizamos do programa Octave para escrever as linhas de código baseadas na lógica Fuzzy, assim o controlador trabalha com dois valores de entrada, a quantidade de iluminação no ambiente e a quantidade de pessoas presentes, sendo os valores de entrada a porcentagem de iluminação natural disponível e a porcentagem de utilização do ambiente naquele momento. A saída do controlador é a porcentagem de iluminação artificial, que pode ser controlada por um dimmer. Nossas primeiras simulações dão conta de uma economia mínima de 40% de energia podendo chegar acima de 70%. Considerando a estimativa mais conservadora podemos avaliar os custos de implantação do sistema em uma praça de tamanho média, e comparar a economia de energia com os custos de instalação do sistema, obtendo que a economia paga os custos de instalação em aproximadamente 2 anos. Assim, concluímos que o controlador oportuniza uma economia de energia, devido ao fato de utilizar a luz somente na quantidade necessária, gerando um ganho financeiro após 2 anos de uso, e um ganho ecológico a partir da instalação.



DISCRETIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

*Neyva Maria Lopes Romeiro
Universidade Estadual de Londrina
nromeiro@gmail.com*

Resumo:

Uma aplicação, relativamente simples, utilizando equações diferenciais pode ser encontrada em modelos unidimensionais de transporte de poluentes. Aproximações numéricas destes modelos podem ser obtidos utilizando o método de diferenças finitas, que consiste na discretização das derivadas envolvidas na equação diferencial. A ferramenta matemática básica na definição de aproximações para as derivadas é a série de Taylor.



O NÚMERO DE EULER E A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Thiago Pinguello de Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
thiagoandrade@utfpr.edu.br

Resumo:

Nesta apresentação veremos a história de Leonard Euler, sua trajetória matemática e algumas de suas contribuições para a matemática como o número que recebe seu nome, o número de Euler "e", cujo valor é aproximadamente 2,718281, a função exponencial natural $\exp(x)$, a importante identidade $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$, entre outras. Para ilustrar como o número e foi obtido abordaremos a questão do cálculo de Juros Compostos e reconstituiremos o caminho histórico que levou ao descobrimento do número de Euler no século XVI. Veremos também como o número de Euler e a função exponencial natural se relacionam com o Cálculo de Juros Compostos e dá origem ao que hoje é chamado de Juros Contínuos, onde ao invés de capitalizações em períodos pré fixados temos a capitalização contínua. Veremos ainda, através de um exemplo prático do dia-a-dia, como o uso do Juros Contínuos é mais vantajoso que o uso do Juro Composto e por que, tanto a Academia quanto o Mercado de Capitais só trabalham com juros contínuos, enquanto que a rede bancária ainda utiliza o Juro Composto com o público em geral. Finalizaremos vendo 10 curiosidades matemáticas descobertas por Leonard Euler.

O PAPEL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA EM UMA AULA NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO

*Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina
marciacyrino@uel.br*

Resumo:

O Ensino Exploratório no âmbito da disciplina de matemática tem sido apresentado como uma alternativa ao ensino diretivo ou expositivo (associado à metáfora da transmissão de informação/conhecimento matemático do professor para o aluno) em que se procura que os alunos sejam trazidos para o centro da atividade matemática da sala de aula, ao realizar de tarefas matemáticas significativas. Este tipo de ensino pode enquadrar-se numa perspectiva mais ampla de inquiry based teaching, na língua inglesa, ou seja, um ensino baseado na inquirição. Uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório pode ser estruturada em quatro fases (introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens), nas quais se identificam ações específicas do professor com dois objetivos principais distintos, mas inter-relacionados: (i) promover as aprendizagens matemáticas dos alunos; e (ii) gerir os alunos, a turma e o funcionamento da aula. O objetivo dessa palestra é o de discutir o papel de um professor de matemática em uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório, na qual os alunos têm a oportunidade de constituir conhecimentos e procedimentos matemáticos de modo significativo e de desenvolver a capacidade de resolver problemas, de raciocinar matematicamente e de estabelecer um espaço que permita a comunicação matemática. Discutiremos aspectos inerentes ao papel do professor em cada fase da aula, nomeadamente, ao antecipar a aula, ao propor a tarefa, ao monitorar a realização da tarefa, ao selecionar e sequenciar as resoluções que serão apresentadas pelos alunos, a discussão das resoluções e a sistematização.



FRANCISCO BRAUN

O que uma língua glacial tem a ver com uma aplicação injetora?

O QUE UMA LÍNGUA GLACIAL TEM A VER COM UMA APLICAÇÃO INJETORA?

*Francisco Braun
Universidade Federal de São Carlos
franciscobraun@dm.ufscar.br*

Resumo:

Iniciaremos com noções elementares sobre injetividade de aplicações em \mathbb{R}^n , introduziremos a Conjectura Jacobiana e a Conjectura Jacobiana Real. A primeira é um problema em aberto, já a segunda, é falsa.

Apresentaremos nossos trabalhos conjuntos com Oréfice-Okamoto e Santos Filho dando condições adicionais para a validade da Conjectura Jacobiana Real. Nossos argumentos utilizam a geometria de certas estruturas batizadas de línguas glaciais.

POR QUE A DENSIDADE DOS RACIONAIS (E DOS IRRACIONAIS) NO CONJUNTO DOS REAIS É UMA PROPRIEDADE TÃO IMPORTANTE PARA A ANÁLISE REAL?

Arlei Ubiratã da Rocha
Professor QPM da Rede Estadual de Ensino,
Professor Convidado do Projeto OBMEP na Escola,
Mestrando do Profmat 2014-2016

Para compreender-se o refinamento e a implicabilidade da Análise Real no Universo da matemática é necessário entender alguns conceitos tais como: enumerabilidade, densidade e completeza, que permitem aos matemáticos construir e explorar os conjuntos de maior infinitude – Racionais, Irracionais e Reais.

Pela utilização do princípio da boa ordenação e da propriedade arquimediana, consegue-se utilizar algumas premissas básicas e uma sequência lógica de passos para demonstrar que tanto o conjunto \mathbb{Q} quanto o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são densos em \mathbb{R} .

Assim, pode-se investigar outras questões relacionadas a esses conceitos, tal como:

Como saber se existe um número da forma $\frac{a\sqrt{p}}{b}$, com p um primo qualquer e a, b inteiros não-nulos, no intervalo aberto $(\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b})$?

Primeiramente, deve-se demonstrar que $\frac{a\sqrt{p}}{b}$ não é um número racional.

Assuma-se que \sqrt{p} é racional e busque-se chegar a uma contradição. Se \sqrt{p} é racional, então se pode escrever $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros não-nulos com fatores não comuns. Então, $n^2 \cdot p = m^2$, de modo que m^2 é um múltiplo de p . Mas como p é um número primo, logo m também deve ser um múltiplo de p . Logo, $m = k \cdot p$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Então, $n^2 \cdot p = m^2 = k^2 \cdot p^2$, o que implica que $n^2 = k^2 \cdot p$. Portanto, n também é múltiplo de p , o que contradiz o fato de que m e n são números inteiros tal que $\frac{m}{n}$ seja irredutível.

Então, o que se pretende é procurar mostrar que este número irracional $\frac{a\sqrt{p}}{b}$ está dentro do intervalo $(\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b})$. Sabe-se que p é primo e o menor valor de p é 2, sendo que $1 < \sqrt{p}$. Portanto, $\frac{a}{b} < \frac{a\sqrt{p}}{b}$. E, daí, para que $\frac{a\sqrt{p}}{b} < \frac{a+1}{b}$ deve-se ter $a \cdot (\sqrt{p} - 1) < 1 \Rightarrow \sqrt{p} < \frac{a+1}{a}$.

Assim, temos duas condições: a primeira, sempre satisfeita para qualquer valor positivo de $\frac{a}{b}$. A segunda, implica que só é possível a existência desse número irracional, no intervalo considerado, se \sqrt{p} for menor do que 1 mais $\frac{1}{a}$.

Bibliografia:

1. BARTLE, R.G. – Elementos de Análise Real. Editora Campus. Rio de Janeiro, 1983.
2. http://www.matthew-hoelle.com/further_2.html



LUCI HARUE FATORI

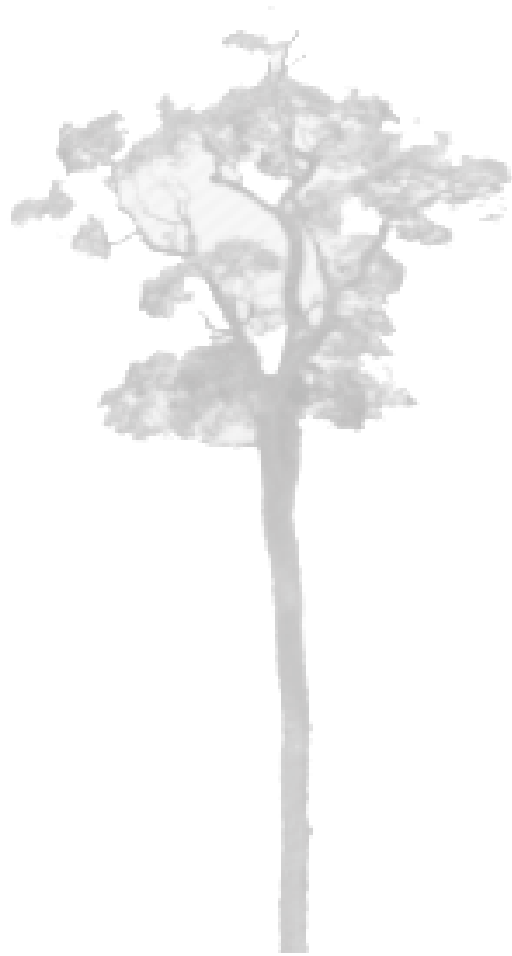
Princípio das gavetas: um exemplo de matemática simples e atraente

PRINCIPIO DAS GAVETAS: UM EXEMPLO DE MATEMÁTICA SIMPLES E ATRAENTE

*Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina
lucifatori@uel.br*

Resumo:

O objetivo desta palestra é mostrar como um resultado aparentemente tão simples como o Princípio das Gavetas, também conhecido como Princípio do Pombal, pode ser aplicado a diversos problemas da matemática elementar, geometria, teoria dos números, combinatórias, teoria de grafos e na prova da densidade dos números racionais na reta.





MODELAGEM MATEMÁTICA E TEMAS TRANSVERSAIS: SUGESTÕES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

*Gabriel dos Santos e Silva
Universidade Estadual de Londrina
gabriel.santos22@gmail.com*

Ministrantes:

*Prof. Ms. Gabriel dos Santos e Silva
Profa. Emily Caroline Felix Cordeiro
Profa. Eliane de Souza Machado
Profa. Fernanda Emmy Fukabori Nakai
Profa. Tabata Suelen da Silva Capelli*

Resumo:

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1998, são propostos temas transversais, com o objetivo de que sejam trabalhados por todas as disciplinas escolares, discutindo questões significativas do ponto de vista social, visando uma educação para a cidadania. Na disciplina de Modelagem Matemática da especialização em Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), os alunos elaboraram propostas de aulas utilizando a modelagem matemática como método de ensino, em que os temas eram os propostos pelos PCN (Ética, Meio Ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual e Trabalho e Consumo). O objetivo desta oficina é apresentar as propostas de aula elaboradas na especialização e discutir sua relevância social, a matemática envolvida e novas propostas possíveis para cada tema.



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: SUGESTÕES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

*Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina
magnapires@yahoo.com.br*

Ministrantes:

*Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Profa. Andressa Cordeiro de Oliveira
Prof. Guilherme Schiavo de Moraes
Profa. Mariana Souza Innocenti*

Resumo:

As estratégias Resolução de Problemas e Investigações Matemática são recomendadas por documentos curriculares para o trabalho com a Matemática na Educação Básica. Os objetivos do minicurso são: proporcionar aos participantes uma experiência como alunos em uma aula com tarefas de Resolução de Problemas e de Investigações Matemática, ressaltando alguns pontos (ênfase na sistematização dos conteúdos); discutir algumas definições matemáticas da Educação Básica e discutir algumas questões teóricas da Resolução de Problemas e das Investigações Matemática.

As tarefas escolhidas para o desenvolvimento do minicurso serão lançadas para que os participantes as resolvam com o conhecimento que tiverem. Em seguida as estratégias utilizadas pelos participantes serão discutidas com a intenção de explorar e sistematizar os conteúdos que aparecerem.

A elaboração do minicurso conta com a participação de três alunos do curso de Especialização em Educação Matemática, turma 2016, que resolveram as tarefas e prepararam a sistematização dos conteúdos que podem aparecer nas resoluções. A intenção é formar professores de matemática em todas as fases do minicurso.



SIMETRIA: A HISTÓRIA DE UM CONCEITO E SUAS IMPLICAÇÕES NO CONTEXTO ESCOLAR

*Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
hjbortol@vm.uff.br*

*Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina
rcgpasq@uel.br*

Ministrantes:

*Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini*

Resumo:

Simetria é um conceito-chave em Matemática com aplicações importantes em áreas como Física, Química, Biologia, Cristalografia, Arquitetura, entre outras. Ao longo da História, a palavra “Simetria” teve diferentes significados culminando com o conceito moderno de invariância por um grupo de transformações. Nesta oficina iremos contrapor este desenvolvimento histórico com o contexto escolar (currículo e livros didáticos) com ênfase especial no conceito moderno de simetria. O tema é um campo fértil para discussões sobre as abordagens da História da Matemática. A oficina será conduzida por meio das várias tarefas e atividades intercaladas. Estas tarefas vêm em cinco sabores: (1) atividades computacionais interativas feitas com o GeoGebra (que podem ser acessadas via smartphones mais recentes, tablets, computadores desktop e laptops), (2) atividades com material concreto (cartolina, transparências e planificações), (3) exercícios de Matemática, (4) reflexões sobre a prática e (5) análises de documentos de orientação curricular, livros didáticos e fragmentos de textos históricos.

