

# Anais da



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
UEL - Londrina/PR



Anais da  
**XXVIII Semana da Matemática**

UEL - Londrina/PR

2012

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca  
Central da Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

S471a Semana da Matemática (28. : 2012 : Londrina, PR)  
Anais da XXVIII Semana da Matemática [livro eletrônico]  
/ comissão organizadora: Silvia Grandi dos Santos  
(coordenadora) ; Angela Sacamoto...[et al.]. – Londrina :  
UEL, 2012.  
1 Livro digital.

Disponível em: <http://www.mat.uel.br/semana2012/>  
ISBN 978-85-7846-166-9

1. Matemática – Pesquisa – Congressos. I. Santos, Silvia  
Grandi dos. II. Sacamoto, Angela. III. Universidade Estadual de  
Londrina. Centro de Ciências Exatas. IV. Título: 28ª Semana da  
Matemática.

CDU 51

## Realização:

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS - CCE  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
LONDRINA - PR

## Comissão Organizadora:

SILVIA GRANDI DOS SANTOS - COORDENADORA  
ANGELA SACAMOTO  
MICHELE DE OLIVEIRA ALVES  
REGINA CÉLIA G. PASQUINI

## Alunos do curso de Matemática - UEL

## Apoio:

PAULO ROGÉRIO CORSO (APOIO TÉCNICO)  
EDUARDO PEREIRA CAMPOS (TÉCNICO EM INFORMÁTICA)

## Patrocínio:



Universidade  
Estadual de Londrina



SECRETARIA DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E ENSINO SUPERIOR

FUNDAÇÃO  
ARAUCÁRIA  
Apoio ao Desenvolvimento Científico  
e Tecnológico do Paraná



## Apoio:



pos-graduação  
Matemática  
Aplicada e Computacional



PROFMAT



SBM  
SOCIEDADE BRASILEIRA  
DE MATEMÁTICA



Irodocência  
Programa de consolidação das Licenciaturas

# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>1</b>
<b>Sessões Técnicas</b>	<b>2</b>
Comunicação Oral . . . . .	3
C1 Equações do 3o Grau e as Controvérsias na História da Matemática . . . . .	4
C2 Problema de Corte Unidimensional . . . . .	11
C3 Uma Introdução às Redes Neurais Artificiais - O Perceptron . . . . .	16
C4 Teorema Final - A Solução Matemática para o Grande Enigma da Física . . . . .	23
C5 Introdução ao Euler 9.6 . . . . .	37
C6 Os Jogos de Raciocínio e a sua importância no desenvolvimento do pensamento lógico-matemático	46
C7 PRODOCÊNCIA / UEL / MATEMÁTICA: especificidades da EJA . . . . .	55
C8 O Método de Newton para sistemas não lineares .	60
C9 O Teorema de Aproximacao de Weierstrass via Polinômios de Bernstein . . . . .	67
C10 História das equações algébricas na formação de professores de Matemática . . . . .	75
C11 Uma Organização dos Cursos de Graduação da Universidade Estadual de Londrina Utilizando o Mapa Auto-Organizável de Kohonen . . . . .	84

C12	Uma proposta de ensino via medidas de tempo: O Sistema de Numeração Babilônico . . . . .	92
C13	O uso dos jogos educativos e a aprendizagem de geometria . . . . .	103
C14	O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ABORDANDO CONCEITOS DE PROGRESSÕES	112
C15	MatEpub: Livros Eletrônicos Públicos de Mate- mática com Folhas de Estilo CSS . . . . .	121
C16	A Continuidade de Sistemas Fuzzy SE-ENTÃO no Sentido de Perfilieva-Lehmke no Contexto de Reti- culados Completos . . . . .	125
C17	Uma Introdução aos Corpos Quadráticos . . . . .	134
C18	Algoritmo Genético e Aprendizagem Competitiva Aplicados ao Treinamento do Perceptron Morfológico	141
C19	Interfaces entre o PIBID Matemática Ensino Mé- dio e o seu BLOG . . . . .	149
Poster		155
P1	Materiais manipuláveis: uma proposta didática para o Ensino Fundamental à luz da Educação Matemá- tica Recreativa . . . . .	156
P2	A sequência didática e a aprendizagem de conceitos estatísticos . . . . .	159
P3	PIBID ENSINO MÉDIO DA UEL: JOGOS E O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA . . . . .	162
P4	Um estudo sobre aplicação da teoria fuzzy na en- genharia: escolha de projetos . . . . .	165
P5	MÉTODOS E ANÁLISES COMPUTACIONAIS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES EM DINÂMICAS POPULACIONAIS . . . . .	169
P6	ESTUDO DE CASO: DESENVOLVIMENTO DE UM APLICATIVO DE MODELAGEM E ENCAIXE	173
P7	Introdução do Software Geométrico Geogebra . . .	176
P8	Uma experiência de ensino com o jogo Hora do Rush	179

P9	PIBID, MEDIAÇÃO DE CONTEÚDOS E JOGOS	182
P10	Teorema do completamento para espaços métricos	186
P11	OFICINAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	188
P12	Problemas de Dimensionamento de Lotes . . . . .	191
P13	Demonstração do Teorema de Pitágoras a partir de materiais manipuláveis . . . . .	194

**Minicursos** **197**

MC 1	Integração e Diferenciação Numérica com o SciLab	198
MC 2	Aplicação da Fatoração em Primos na Criptografia	211
MC 3	A função de Euler e as Funções Trigonométricas	219
MC 4	Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias Impulsivas . . . . .	221
MC 5	Derivada Fraca × Derivada Clássica . . . . .	244
MC 6	Construção dos Números Reais como Comple- tamento dos Racionais . . . . .	260
MC 7	Ensinando Geometria com Origami: uma Abor- dagem para a Educação de Jovens e Adultos . . . . .	282
MC 8	Matemática e América Latina . . . . .	292
MC 9	Estudando Cálculo I com o <i>GeoGebra</i> . . . . .	293

**Oficinas** **294**

Of 1	Sistemas de Equações Lineares: uma Abordagem com a Utilização de Calculadoras Gráficas . . . . .	295
Of 2	Construindo Atividades Interativas com o <i>Geo- Gebra</i> : Recursos Básicos e Intermediários . . . . .	299
Of 3	Trabalhando com o Teorema de Pick . . . . .	300
Of 4	Mostra de Trabalhos de Prática . . . . .	301
Of 5	Círculos de Problemas Matemáticos . . . . .	302

# Apresentação

A Semana da Matemática é um evento realizado anualmente pelo Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina e tem como objetivo maior o de disseminar o conhecimento das áreas de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática.

Em 2012, foi realizada, no período de 24 a 28 de Setembro, a 28ª edição do evento e contou com Palestras, Minicursos, Mesa Redonda, Oficinas, Sessões Técnicas de Comunicação e Painéis, permitindo a divulgação dos trabalhos de projetos de Pesquisa, Ensino e Extensão, de Iniciação Científica e de Pós-graduação.

Essas atividades foram elaboradas e desenvolvidas para que pudessem promover o intercâmbio entre pesquisadores, docentes e estudantes de Matemática e de professores que atuam na rede pública, dando oportunidade para discutir temas de interesse geral relacionados à Matemática e Educação Matemática, bem como possibilitar a divulgação de linhas de pesquisas destas áreas desenvolvidas no Brasil, proporcionando a interação entre pesquisadores das áreas de Matemática e Educação Matemática com grupos de pesquisa locais.

# Sessões Técnicas

# Comunicação Oral

**C1**

**Equações do 3º Grau e as Controvérsias na  
História da Matemática**

Barba, A. N. D., Ferreira, R. C.

# Equações do 3º Grau e as Controvérsias na História da Matemática

Alessandra Negrini Dalla Barba (e-mail: ale.negrini10@gmail.com)

Ricardo Cezar Ferreira (e-mail: rcezar@uel.br)

Universidade Estadual de Londrina, Campus Universitário,  
Caixa Postal 6001 - CEP 86.051-980, Londrina, Paraná, Brasil.

## Resumo

As equações do 3º grau são conhecidas pelos matemáticos há mais de 3 mil anos. No entanto, apenas no século XVI d.C. é que foram encontradas as primeiras regras para resolução deste tipo de equação. Apesar de ter sido uma descoberta que auxiliou o desenvolvimento da Matemática em diversos aspectos, ela originou muitas brigas e disputas. Por causa da demora na divulgação de seus trabalhos, muitos matemáticos não receberam o devido valor por suas descobertas, que acabaram por serem associadas a outras pessoas. Neste trabalho será apresentado um breve histórico envolvendo a descoberta da fórmula para resolução de equações do 3º grau, seguido pela demonstração e utilização desta na resolução de um exemplo, e, por fim, uma análise gráfica deste tipo de equação.

**Palavras-chave:** Equação do 3º Grau, Fiore, Tartaglia, Cardano.

## 1 Introdução

As equações do 2º e 3º grau são conhecidas há mais de 3 mil anos. Os babilônicos, no século XVII a.C., já conheciam métodos para resolver equações do 2º grau. Porém, somente no século XVI d.C. é que alguns matemáticos italianos encontraram fórmulas para resolver equações do 3º grau.

Scipione del Ferro encontrou os primeiros métodos para resolver este tipo de equação, mas não publicou seu trabalho, apenas transmitiu parte dele a um de seus discípulos. Posteriormente, Tartaglia também encontrou fórmulas para resolver equações do 3º grau, mas seu método poderia ser utilizado para resolver uma quantidade maior de equações do que o de Ferro.

Por insistência de Cardano, Tartaglia revelou sua descoberta a ele sob o juramento de não publicá-la. Cardano estudou estes tipos de equações e depois publicou regras para resolvê-las em sua grande obra, a *Ars Magna*, unindo as descobertas de Tartaglia, as suas e as de Ferro. Por causa disso, Tartaglia acusou Cardano por não ter honrado seu juramento, mas este foi defendido por seu discípulo Ferrari, que desenvolveu posteriormente a fórmula para resolver equações do 4º grau.

## 2 A Equação do 3º Grau e Sua Repercussão Histórica

Por volta de 1700 a.C. os matemáticos babilônicos já conheciam técnicas para resolver equações do 2º grau quando estas eram apresentadas na forma de problemas. A fórmula utilizada para resolver este tipo de equação foi encontrada pelo matemático hindu Sridhara por volta do século X d.C.

No entanto, até o final do século XV d.C., alguns matemáticos afirmavam que não haveria uma regra geral para a solução de equações do tipo  $x^3 + px = q$ . Apesar deste tipo de equação já ser conhecida há mais de 3 mil anos, a primeira fórmula para resolução de uma equação do 3º grau foi encontrada no início do século XVI d.C. e é associada a Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, na Itália.

Ferro não publicou a sua descoberta. Ele a transmitiu ao seu discípulo Antonio Maria Fiore, mas revelou apenas a fórmula. Paralelamente, Tartaglia também encontrou uma fórmula para resolver equações do 3º grau do tipo  $x^3 + px^2 = n$ .

Nicolo Fontana (1499-1557), Figura 1, nasceu em Brescia, Itália, ficou órfão de pai aos seis anos de idade e foi criado, junto com seus três irmãos, por uma mãe muito dedicada. Teve que aprender a ler e a escrever sozinho, pois sua mãe não tinha condições para financiar seus estudos. Aos 14 anos, durante uma invasão das tropas francesas à Brescia, foi gravemente ferido no rosto, o que deixou-o desfigurado e, durante um longo tempo, com grandes dificuldades na fala. Por causa disso,



Figura 1: Nicolo Fontana (Tartaglia) 1499-1557 (David Smith Collection)

acabou recebendo o apelido Tartaglia, que significa gago, e que posteriormente foi adotado por ele como sobrenome.

Fiore desafiou Tartaglia para uma disputa envolvendo a resolução de equações do 3º grau. Ele propôs uma lista com trinta problemas envolvendo equações das quais ele possuía uma fórmula para resolver e Tartaglia também criou uma lista, mas esta continha equações do 3º grau em formas mais gerais. Faltando poucos dias para a disputa, Tartaglia conseguiu um método para resolver equações do tipo  $x^3 + px^2 = n$  e  $x^3 + qx = n$ . Como Fiore só sabia resolver as do segundo tipo, Tartaglia venceu esta disputa pública.

Girolamo Cardano (1501-1576), Figura 2, nasceu em Pavia, Itália. Cardano era um cientista excepcional. Durante sua



Figura 2: Girolamo Cardano - 1501-1576 (Mary Evans Picture Library)

vida foi médico, astrônomo, astrólogo, matemático, filósofo, investigador, entre outros. Publicou diversos livros, dentre eles sua autobiografia e um livro louvando o imperador romano Nero. Foi acusado de heresia por ter divulgado o horóscopo de Jesus Cristo. Em um de seus livros introduziu a ideia de probabilidade, que é utilizada nos dias de hoje, ensinando também formas de trapacear em jogos. Cardano pretendia publicar um livro de Álgebra com ajuda de seu discípulo Ludovico Ferrari.

Depois de ouvir rumores sobre a disputa entre Fiore e Tartaglia, Cardano conseguiu convencer este último a revelar sua descoberta, prometendo que não a divulgaria. Cardano mostrou que a substituição  $x = y - \frac{a}{3}$  permite eliminar o termo de 2º grau da equação  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . A partir de seus estudos, conseguiu deduzir fórmulas para resolver treze tipos de equações do 3º grau. Atualmente, as treze fórmulas foram reduzidas a uma única. Na época de Cardano, os matemáticos trabalhavam apenas com equações numéricas, somente a partir de 1591 as letras passaram a ser utilizadas na substituição de números. Na realidade, Cardano não apresentou fórmulas, mas sim regras que poderiam ser utilizadas e que eram explicadas a partir de exemplos numéricos.

Em 1542, Cardano e Ferrari visitaram Bolonha. Eles obtiveram permissão para analisar os manuscritos de Ferro e

acabaram encontrando a solução para  $x^3 + px = q$ . Como Cardano não podia publicar a solução de Tartaglia por causa de seu juramento, ele resolveu publicar a solução de Ferro. Assim, em 1545, ele publicou a sua grande obra, a *Ars Magna*. Esta obra foi bem aceita pelos matemáticos da época, com exceção de Tartaglia.

Em 1546, Tartaglia publicou o *Quesiti e Inventioni Diverse*, apresentando solução para diversos problemas que haviam sido propostos a ele, algumas informações sobre sua vida, além de comentar sobre Cardano e atacá-lo por não ter cumprido o seu juramento. Apesar de comentar na *Ars Magna* que a fórmula para resolução de equações do 3º grau foi descoberta por Ferro e redescoberta por Tartaglia, esta acabou sendo denominada fórmula de Cardano.

Em defesa de seu mestre, Ferrari publicou um panfleto, que posteriormente foi respondido. Essa situação durou cerca de um ano, e neste período foram publicados doze panfletos, sendo seis de Ferrari e os demais de Tartaglia. Cardano, durante toda essa disputa, manteve-se fora da briga, ignorando as provocações de Tartaglia. Após o término das discussões, não ficou bem definido quem seria o ganhador. Mas como as autoridades da universidade em que Tartaglia estava trabalhando não ficaram satisfeitas com o desempenho dele, eles cancelaram seu contrato. Tartaglia foi para Veneza, onde morreu nove anos depois.

Apesar de todas as discussões, a *Ars Magna* de Cardano é o primeiro grande tratado, escrito em latim, dedicado exclusivamente à Álgebra. Alguns dos tópicos tratados nele são as raízes negativas de uma equação, cálculo com números imaginários, além das fórmulas para resolução de equações de 3º e de 4º grau, sendo que as de 4º grau foram descobertas por Ferrari. Há indícios também de que Cardano tinha algum conhecimento da regra de sinais que seria abordada posteriormente por Descartes no século XVII.

### 3 Demonstração da Fórmula de Resolução de uma Equação do 3º Grau

A forma mais geral para se denotar uma equação do 3º grau é

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

em que  $a, b, c$  e  $d$  são constantes com  $a \neq 0$ . Dividindo ambos os lados da igualdade por  $a$  obtemos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \quad (2)$$

e considerando a mudança  $x = y - \frac{b}{3a}$  na equação anterior, teremos

$$\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0 \quad (3)$$

ou seja,

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{b^3}{27a^3}\right) = 0 \quad (4)$$

Observe que a equação anterior não possui o termo  $y^2$ . Assim, partindo de uma equação do 3º grau na forma geral, podemos reduzi-la, por meio de uma mudança de variável, a uma equação do 3º grau na forma

$$x^3 + px + q = 0 \quad (5)$$

com  $p$  e  $q$  constantes, na qual o termo de segundo grau é omitido. Portanto, basta estudarmos esta última forma para resolvermos qualquer equação do 3º grau. Inicialmente, Tartaglia supôs que a solução para a equação (5) era composta de duas parcelas, ou seja,  $x = A + B$  e deste modo,  $x^3 = (A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$ , logo

$$x^3 - 3AB(A + B) - (A^3 + B^3) = 0 \quad (6)$$

Como  $x = A + B$ , da equação anterior temos

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0 \quad (7)$$

Sabemos que  $x^3 + px + q = 0$ , comparando com (7) concluí-se que

$$p = -3AB \quad (8)$$

$$q = -(A^3 + B^3) \quad (9)$$

e conseqüentemente,

$$A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27} \quad (10)$$

$$A^3 + B^3 = -q \quad (11)$$

Sabemos qual é o valor da soma e do produto de  $A^3$  e  $B^3$ , então estes valores são as raízes da equação do 2º grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (12)$$

Utilizando a fórmula já conhecida para o cálculo das raízes de uma equação do 2º grau em sua forma geral, obtemos:

$$A^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad (13)$$

$$B^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad (14)$$

o que implica em

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (15)$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (16)$$

Uma vez que  $x = A + B$ , uma solução da equação  $x^3 + px + q = 0$  é dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (17)$$

**Observação.** Esta fórmula nos fornece apenas uma raiz para a equação do 3º grau. Para as outras duas raízes basta utilizarmos a fatoração de polinômios. Procedendo desta forma, iremos encontrar uma equação do 2º grau que pode ser facilmente resolvida por meio de processos já conhecidos. Assim, encontramos as três soluções da equação do 3º grau considerada.

### 3.1 Exemplo

Considere a equação do 3º grau  $x^3 - 6x - 9 = 0$ . Aplicaremos a fórmula de Cardano (17) para obter uma raiz. Note que  $p = -6$  e  $q = -9$ . Sendo assim,

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} \quad (18)$$

ou seja,

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = 2 + 1 = 3 \quad (19)$$

Logo, a solução obtida por meio da fórmula (17) é  $x = 3$ . Teremos então que

$$x^3 - 6x - 9 = (x^2 + 3x + 3)(x - 3) \quad (20)$$

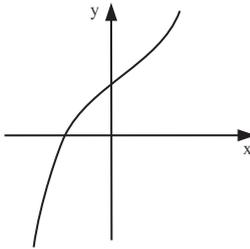
Resolvendo a equação do 2º grau encontraremos as soluções para a equação do 3º grau considerada inicialmente, a saber:

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \text{ e } x_3 = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2}$$

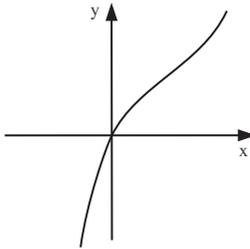
### 3.2 Análise Gráfica

Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^3 + px + q$ , com  $p$  e  $q$  constantes. Assumiremos  $x \neq 0$  e consequentemente  $f(x) = x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right)$ . Note que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = -\infty$ . Podemos concluir que se  $x$  assume valores positivos muito grandes, então  $f(x)$  é positiva, e quando  $x$  assume valores negativos muito grandes,  $f(x)$  é negativa. Como  $f$  é contínua, então  $f$  se anula em algum ponto do domínio. Portanto,  $f$  possui pelo menos uma raiz real, isto é, o gráfico desta função corta o eixo das abscissas em pelo menos um ponto. A partir desta observação, queremos analisar o que ocorre com o gráfico desta função, relacionando-o com as raízes da equação do 3º grau  $x^3 + px + q = 0$ . Para alcançar tal objetivo iremos analisar alguns casos:

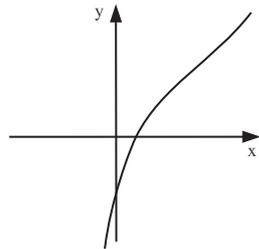
- (a) Se  $p > 0$  a derivada  $f'(x) = 3x^2 + p$  será sempre positiva, então  $f$  é uma função crescente, que corta o eixo  $x$  em um único ponto. Assim, quando  $p > 0$ , a equação do 3º grau tem uma única raiz real e duas raízes complexas conjugadas. Esse fato pode ser observado a partir da análise dos gráficos abaixo:



Uma raiz real negativa.

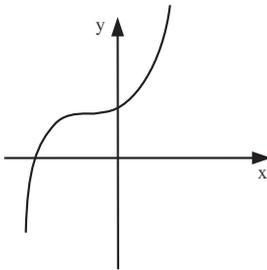


Uma raiz real nula.

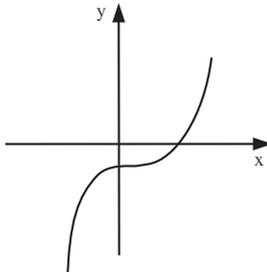


Uma raiz real positiva.

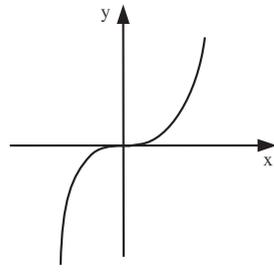
- (b) Se  $p = 0$ , a equação se reduz a  $x^3 = -q$ . Desta forma, a equação terá uma raiz real e duas complexas conjugadas se  $q \neq 0$  e terá uma raiz com multiplicidade 3 igual a zero se  $q = 0$ . Graficamente, teremos:



$y = x^3 + q$  com  $q > 0$ .

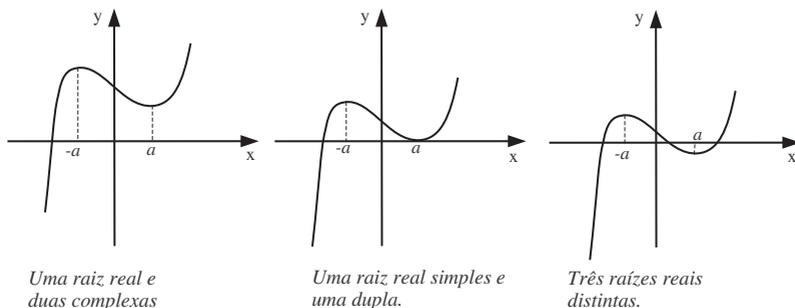


$y = x^3 + q$  com  $q < 0$ .



$y = x^3$ .

(c) Se  $p < 0$  vamos então denotar  $p = -3a^2 (a > 0)$ . Assim,  $f(x) = x^3 - 3a^2x + q$ , e sua derivada é dada por  $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$ , que se anula nos pontos  $x = a$  e  $x = -a$ . A derivada segunda  $f''(x) = 6x$  é negativa no ponto  $x = -a$ , então este ponto é de máximo. Analogamente,  $f''$  é positiva em  $x = a$ , então este é um ponto de mínimo. O gráfico da  $f$  pode assumir uma das formas abaixo. Assim, a equação do 3º grau possuirá uma raiz real e duas comple-



xas conjugadas, duas raízes reais, uma com multiplicidade 1 e uma com multiplicidade 2, ou três raízes reais e distintas.

## 4 Conclusões

A partir deste trabalho, podemos observar que os métodos para resolver equações do 3º grau são mais recentes quando comparamos com os do 2º grau, pois estas já eram resolvidas por volta de 1700 a.C., enquanto que aquelas só começaram a ser resolvidas no século XVI d.C.

Apesar de todos os problemas e disputas envolvendo a fórmula para resolver as equações do 3º grau, a divulgação feita por Cardano em sua *Ars Magna* foi fundamental para o desenvolvimento de diversos aspectos da Matemática. Se ele não tivesse publicado o seu trabalho, o de Ferro e o de Tartaglia, poderíamos jamais ter acesso à estas descobertas ou talvez precisássemos de muito mais tempo para que outro matemático pudesse encontrar uma fórmula capaz de resolver este tipo de equação, que poderia ser mais simples ou mais complexa do que a encontrada no século XVI.

Observando as brigas e disputas ocorridas no passado, podemos perceber como é fundamental que um matemático ou cientista publique a sua descoberta. Se Scipione del Ferro tivesse apresentado à comunidade matemática a sua descoberta, todos os dilemas teriam sido evitados e o seu esforço seria reconhecido por todos. Além disso, os outros matemáticos poderiam ajudar a complementar a descoberta de Ferro, o que poderia auxiliar todos os demais pesquisadores da área ou mesmo de outras áreas, evitando intrigas em relação a quem iniciou o trabalho.

## Referências

- [1] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.
- [2] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.
- [3] GARBI, Gilberto G. *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.
- [4] LIMA, Elon Lages. A Equação do 3º Grau. In *Revista Matemática Universitária*, n.5, p.9-23, jun.1987.

## **C2**

# **Problema de Corte Unidimensional**

Frioli, H. D., Santos, S. G.

# Problema de Corte Unidimensional

Helen Dabiani Frioli (helen.frioli@gmail.com)  
Silvia Grandi dos Santos (silviagsantos@uel.br)  
Universidade Estadual de Londrina  
Rodovia Celso Garcia Cid, 445 Km  
Londrina - Paraná, Brasil

Londrina-PR, 4 de setembro de 2012

## Resumo

Neste trabalho, discutiremos sobre os Problemas de Corte Unidimensional, mostrando o que é um problema de corte, bem como é possível modelá-lo por meio de Programação Inteira. Citaremos, também, métodos que podem ser utilizados para resolver um Problema de Corte.

**Palavras-chave:** Corte, Corte Unidimensional, Padrões de Corte, Geração de Padrões de Corte.

## 1 Introdução

Muitas indústrias têm seus processos de produção associado ao corte de matéria-prima. Estas matérias-primas são disponíveis em tamanhos grandes padronizados (objetos), que são estocados para, em seguida, serem cortadas em partes menores (itens), de tamanhos variados, para atender à demanda interna e/ou externa da indústria. Esta matéria-prima corresponde a aproximadamente 50% do custo do produto final, o que torna importante que os cortes sejam planejados, a fim de que os efeitos negativos, tais como o desperdício de matéria-prima, possam ser minimizados, diminuindo os custos de produção. Este problema é conhecido na literatura como Problema de Corte de Estoque.

Ele é essencial no planejamento da produção em muitas indústrias, tais como indústrias de papel, vidro, móveis, metalúrgica, plástica, têxtil, etc. Por menores que perezam as melhorias nos processos de corte, estas podem gerar economias significativas, principalmente se a produção for feita em grande escala.

Os problemas de Corte podem ser classificados considerando a dimensão do objeto a ser cortado, podendo ser classificado como Unidimensional, Bidimensional e Tridimensional.

O enfoque deste trabalho está voltado para o Problema de Corte de Estoque Unidimensional, tendo por objetivo apresentar modelos matemáticos que o caracteriza.

## 2 Problema de Corte de Estoque Unidimensional

O problema de corte é dito unidimensional quando apenas uma das dimensões é relevante no processo de corte. Ocorre por exemplo no corte de barras de ferro (construção civil), no corte de bobinas de papel, corte de canos, etc.

Nestes problemas, temos um objeto de comprimento  $L$  e vários itens, a serem cortados a partir deste objeto, com comprimentos  $l_1, l_2, \dots, l_m$ . A produção de cada tipo de item deve atender uma demanda  $d_1, d_2, \dots, d_m$ .

A Figura 1 ilustra este tipo de problema.



Figura 1: Corte Unidimensional. Figura retirada de [4]

O problema, então, consiste em produzir os itens a partir do corte dos objetos em estoque de modo a atender a demanda, otimizando uma determinada função, por exemplo, minimizando o número de objetos a serem cortados.

Cada uma das maneiras como os itens podem ser cortados do objeto é chamada de **padrão de corte**. Para cada padrão de corte podemos associar um vetor  $m$ -dimensional que contabiliza os itens nele contidos:  $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$  em que  $a_{ij}$  é o número de vezes que o item  $i$  aparece no padrão de corte  $j$ . Um vetor  $m$ -dimensional  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$  representa um padrão de corte  $j$  se, e somente se, satisfizer a restrição física do objeto, ou seja se, e somente se,

$$l_1 a_{1j} + l_2 a_{2j} + \dots + l_m a_{mj} \leq L$$

Observe na Figura 2, alguns exemplo de padrões de corte para um objeto e 3 itens.

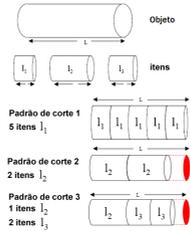


Figura 2: Exemplos de Padrões de Corte Unidimensional

Para os padrões de corte na Figura 2 tem-se os seguintes vetores associados:

$$A_1 = (5, 0, 0); \quad A_2 = (0, 2, 0); \quad A_3 = (0, 1, 2).$$

A área pontilhada em cada padrão de corte é a sua respectiva perda total calculada para cada padrão de corte  $j$ , por

$$P_j = \left( L - \sum_{i=1}^m l_i a_{ij} \right)$$

Os padrões de corte que possuem apenas um tipo de item são chamados de padrões de corte homogêneos. Tais padrões de corte têm apenas uma das  $m$  coordenadas não-nula ( $A_j = (0, \dots, a_{ij}, \dots, 0)$ ). Quando o número de vezes que o item aparece no padrão de corte homogêneo é o maior possível, este é chamado de padrão de corte homogêneo maximal. Os padrões de corte 1 e 2 na Figura 2 são exemplos de padrões de corte homogêneos maximais, com

$$a_{ij} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O modelo matemático de otimização inteira para o problema de corte de estoque unidimensional, proposto por Gilmore e Gomory e citado por Mosquera em [2], e tem por objetivo minimizar o número de padrões de corte distintos usados.

Sejam  $L$  o comprimento do objeto,  $l_i$ ,  $d_i$  o comprimento e a demanda do item  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e, considerando que os  $n$  padrões de corte possíveis sejam conhecidos *a priori*, o problema é formulado como:

$$\text{Min } Z_{GG} = \sum_{j=1}^n x_j \tag{2.1}$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{2.2}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

em que  $a_{ij}$  é o número de vezes que o item  $i$  aparece no padrão de corte  $j$  e  $x_j$  é a variável do problema que define quantos objetos são cortados de acordo com o padrão de corte  $j$ . As restrições (2.2) garantem o atendimento à demanda dos itens e permite excesso de produção.

A resolução de Problemas de Corte Unidimensionais são extremamente difíceis, pois um problema pode conter inúmeros padrões de corte, e além disso, temos a condição de integralidade sobre as variáveis de decisão, ou seja,  $x_{ij} \in \mathbb{Z}_+$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Assim uma estratégia que utilizamos para resolver um Problema de Corte Unidimensional é relaxar a condição de integralidade das variáveis de decisão, admitindo que estas possam atingir valores reais, não-negativos e resolver a relaxação linear pelo "Método Simplex com Geração de Colunas". Este método inicia com os padrões de corte homogêneos maximais e, a cada iteração, um novo padrão de corte melhor é gerado e, um dos padrões antigos é substituído pelo novo padrão. Este processo continua até gerar um padrão de corte  $A_k$  em que o número de objetos  $x_k$  seja superior ou igual aos demais  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k-1$ , deste modo nenhum padrão de corte  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, k-1$  é substituído por  $A_k$  pois, este padrão faz com que o número de objetos aumente (ou não se altere).

Note que a vantagem deste procedimento de geração de colunas é que não há necessidade de armazenar todos os padrões de corte do problema, mas sim, apenas os mais interessantes em cada passo do método. É importante ressaltar que este método de solução é aplicado à relaxação linear do problema, o que pode resultar em soluções fracionárias. Portanto, o fato de resolver o problema linear através do Método de Geração de Colunas não implica, necessariamente, numa solução ótima para o problema original (inteiro). Assim, depois de resolvido o problema linear, um novo problema pode surgir: encontrar uma solução inteira para o problema original a partir da solução da relaxação linear, se esta não for inteira. A solução inteira pode ser dada a partir de alguns métodos como, por exemplo, Método *Branch and Bound* ou pode-se chegar a uma solução aproximada a partir de heurísticas.

**Exemplo 1.** Considere a estrutura de concreto armado de um prédio. Mais precisamente, considere as colunas de concreto contendo barras de aço em seu interior. Estas colunas apresentam diferentes comprimentos e conseqüentemente cada uma delas requer barras com comprimentos específicos. Uma determinada construtora precisa de 9 barras de aço de 1 metro, 20 barras de 2 metros e 10 barras de 3 metros. A fábrica que produz estas barras, somente as produz com 12 metros. Assim, a construtora deve comprar estas barras grandes e cortá-las conforme sua necessidade. Qual o número de barras que a construtora deve comprar para minimizar os custos?

Neste exemplo o número de itens será igual a 3, ou seja  $m = 3$ , o comprimento do objeto a ser cortado é  $L = 12$  e o comprimento de cada item ( $l_i$ ) e a demanda de cada ( $d_i$ ) são visualizadas na Figura 3.

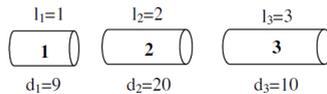


Figura 3: Itens a serem cortados com suas respectivas demandas.

Os padrões de corte homogêneos maximais são dados a seguir:

$$a_{11} = \left\lfloor \frac{L}{l_1} \right\rfloor = 12 \Rightarrow A_1 = (12, 0, 0)$$

$$a_{22} = \left\lfloor \frac{L}{l_2} \right\rfloor = 6 \Rightarrow A_2 = (0, 6, 0)$$

$$a_{33} = \left\lfloor \frac{L}{l_3} \right\rfloor = 4 \Rightarrow A_3 = (0, 0, 4)$$

Seguindo o modelo de Gilmore e Gomory, o problema de corte inicial que modela este problema é dado por

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } Z_{GG} = x_1 + x_2 + x_3 \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} 12x_1 & \geq 9 \\ & 6x_2 & \geq 20 \\ & & 4x_3 & \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 & \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \end{aligned}$$

Este é um exemplo de um problema de corte pequeno, portanto é facilmente resolvido pelo Método Simplex com Geração de Coluna.

## Referências

- [1] Arenales, M., Armentano, V. , Morabito, R. e Yanasse, H., **Pesquisa Operacional**, Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [2] Mosquera, G. P. **Contribuições para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional na Indústria Moveleira**, UNESP, 2007.
- [3] Faria, A. O. **Otimização do Problema de Corte e Empacotamento Unidimensional Utilizando Algoritmo Genético**, UFLA, 2006
- [4] Faccio, A. P. **Propostas de Solução para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional de uma Fábrica de Móveis de Pequeno Porte** , UNESP, 2008
- [5] Cherri, A. C. **Algumas extensões do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis**, USP - São Carlos, 2009.
- [6] Poldi, K. C. e Arenales, M. N. **Heurísticas para o problema de corte de estoque unidimensional inteiro**, USP - São Carlos, 2006.

## **C3**

# **Uma Introdução às Redes Neurais Artificiais - O Perceptron**

Iastrenski, M. F., Mesquita, M. E. R. V.

# Uma Introdução às Redes Neurais Artificiais - O Perceptron

Mariana Félix Iastrenski (e-mail: marianaiaastrenski@hotmail.com)

Departamento de Química, Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, Brasil.

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita (e-mail: valle@uel.br)

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, Brasil.

## Resumo

O trabalho apresenta a rede neural Perceptron, aplicada a problemas de classificação. Foram apresentadas a equação e o algoritmo de treinamento do Perceptron. Cada uma das partes que compõem estes foram estudadas e analisadas separadamente, visando um melhor desempenho da rede na classificação de um dado conjunto de dados. Exposta a teoria, seguem exemplos de classificação de dados linearmente separáveis e não-linearmente separáveis, explicitando as aplicações dos estudos teóricos em cada caso. Por último, foi apresentado o problema do Ou Exclusivo e como o Perceptron pode ser usado para resolvê-lo, apresentando a ideia fundamental da rede Perceptron de Múltiplas Camadas.

**Palavras-chave:** Redes Neurais Artificiais, Perceptron, Problemas de Classificação.

## 1 Introdução

Redes Neurais Artificiais (RNA's), ou simplesmente Redes Neurais, são sistemas inspirados no funcionamento do cérebro biológico. Assim como o cérebro humano, as redes neurais artificiais são formadas por neurônios, como unidade básica. Cada neurônio recebe vários dados de entrada, ponderados pelos seus respectivos pesos sinápticos. A soma desses valores corresponde ao corpo do neurônio, que produz uma saída, repassada adiante a outros neurônios por um único caminho (o correspondente ao axônio). Existem diversos tipos de redes neurais. No trabalho será estudada a rede Perceptron, que foi introduzida por Rosenblatt nos anos 1960 e representava uma das primeiras aplicações efetivas de RNA's [1],[2].

## 2 O Perceptron

A rede Perceptron é formada por um único neurônio. Esse neurônio recebe um conjunto de dados de entrada, os combina com os pesos sinápticos e, por meio de uma função de ativação, produz uma saída. Esses procedimentos estão todos incluídos na equação do perceptron [1]:

$$y = \varphi(\mathbf{w}' \cdot \mathbf{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i\right), \quad (1)$$

onde  $\varphi$  é a chamada “função de Limiar” (ou *Hard Limit*) e é dada por

$$y = \varphi(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } v \geq 0; \\ 0, & \text{se } v < 0. \end{cases} \quad (2)$$

### 2.1 Aprendizado do Perceptron

O *Teorema de Aprendizado do Perceptron* diz que, se os dados forem linearmente separáveis, a equação 1 fornece um Perceptron capaz de fazer toda a classificação corretamente [2].

O treinamento dessa rede é feito pelo aprendizado supervisionado, no qual um conjunto de entradas de treinamento, com as saídas conhecidas, são apresentadas à rede, que modifica seus pesos sinápticos a cada classificação que faz errada. Os ajustes nos pesos são feitos segundo o *Algoritmo de Aprendizagem do Perceptron*, que é dado por

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \eta[y - d] \cdot \mathbf{x}, \quad (3)$$

onde  $d$  é a saída conhecida [1]. Observe que, quando o perceptron apresenta saída igual à esperada, o termo  $\eta[y - d]$  se anula e o peso não é alterado.

### 2.1.1 Teorema de Convergência do Perceptron

Para provar que a equação 3 define uma sequência convergente se os dados forem linearmente separáveis, vamos supor  $\eta = 1$  e tomar o conjunto de pesos iniciais  $\mathbf{w}(1) = \mathbf{0}$ . Vamos supor também, que as entradas  $\mathbf{x}(n)$ , pertencem à classe  $\mathcal{C}_1$  ( $\mathbf{w}^T \mathbf{x} > 0$ ), mas estão sendo classificadas erradas, obtendo-se assim,  $\mathbf{w}(n)^T \mathbf{x}(n) < 0$ , onde  $n = 1, 2, \dots$ . Assim, a cada classificação errada, usamos o algoritmo de ajuste dos pesos sinápticos

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{x}(n). \quad (4)$$

Dado  $\mathbf{w}(1) = \mathbf{0}$ , obtemos:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(2) + \dots + \mathbf{x}(n) \quad (5)$$

Como supomos as classes  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_0$  linearmente separáveis, existe um vetor  $\mathbf{w}_o$  que faça  $\mathbf{w}_o^T \mathbf{x} > 0$ , para todo  $\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(n)$  pertencente à classe  $\mathcal{C}_1$ . Consequentemente, existe um número  $\alpha$  (o valor mínimo do produto  $\mathbf{w}_o^T \mathbf{x}$ ), dado por

$$\alpha = \min_{\mathbf{x}(n) \in \mathcal{C}_1} \mathbf{w}_o^T \mathbf{x}(n). \quad (6)$$

Multiplicando os dois lados da equação 5 por  $\mathbf{w}_o$ , temos

$$\mathbf{w}_o^T \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}_o^T \mathbf{x}(1) + \mathbf{w}_o^T \mathbf{x}(2) + \dots + \mathbf{w}_o^T \mathbf{x}(n). \quad (7)$$

Sendo  $\alpha$  o menor dos valores  $\mathbf{w}_o^T \mathbf{x}$ , todos eles são maiores ou iguais a  $\alpha$ , portanto

$$\mathbf{w}_o^T \mathbf{w}(n+1) \geq n\alpha. \quad (8)$$

Agora, usaremos uma inequação conhecida por *inequação de Cauchy-Schwarz*. Dados dois vetores  $\mathbf{w}_o$  e  $\mathbf{w}(n+1)$ , a inequação de Cauchy-Schwarz diz que

$$\|\mathbf{w}_o\|^2 \cdot \|\mathbf{w}(n+1)\|^2 \geq [\mathbf{w}_o^T \mathbf{w}(n+1)]^2, \quad (9)$$

ou seja, o produto das normas euclidianas dos vetores é maior ou igual que o produto escalar entre eles. Pela equação 8 temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_o\|^2 \cdot \|\mathbf{w}(n+1)\|^2 &\geq [\mathbf{w}_o^T \mathbf{w}(n+1)]^2 \geq n^2 \alpha^2 \\ \|\mathbf{w}_o\|^2 \cdot \|\mathbf{w}(n+1)\|^2 &\geq n^2 \alpha^2, \end{aligned}$$

que é o equivalente a

$$\|\mathbf{w}(n+1)\|^2 \geq \frac{n^2 \alpha^2}{\|\mathbf{w}_o\|^2}. \quad (10)$$

Agora vamos ver o problema por outra parte. Vamos reescrever a equação 4 de outra forma, trocando  $n$  por  $k$ , para desenvolvê-la por outro caminho

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{x}(k) \text{ com } k = 1, \dots, n \text{ e } \mathbf{x}(k) \in \mathcal{C}_1 \quad (11)$$

Tomando a norma euclidiana ao quadrado dos dois lados, temos

$$\|\mathbf{w}(k+1)\|^2 = \|\mathbf{w}(k)\|^2 + \|\mathbf{x}(k)\|^2 + 2\mathbf{w}(k)^T \mathbf{x}(k)$$

mas como  $\mathbf{w}(k)^T \mathbf{x}(k) \leq 0$ , (porque as entradas, da classe  $\mathcal{C}_1$  estavam sendo classificadas erradas), então

$$\|\mathbf{w}(k+1)\|^2 \leq \|\mathbf{w}(k)\|^2 + \|\mathbf{x}(k)\|^2$$

que equivale a

$$\|\mathbf{w}(k+1)\|^2 - \|\mathbf{w}(k)\|^2 \leq \|\mathbf{x}(k)\|^2.$$

Fazendo  $k$  variando de 1 a  $n$  e somando todas essas inequações (lembrando que o peso inicial  $\mathbf{w}(1) = \mathbf{0}$ ), temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}(n+1)\|^2 &\leq \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}(k)\|^2 \\ &\leq n\beta \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $\beta$  é um número positivo definido por

$$\beta = \max_{\mathbf{x}(k) \in \mathcal{C}_1} \|\mathbf{x}(k)\|^2. \quad (13)$$

A equação 12 nos informa que a norma euclidiana ao quadrado do vetor peso  $\mathbf{w}(n+1)$  cresce linearmente de acordo com o número  $n$  de entradas que são apresentadas à rede. Esse resultado entra em conflito com o resultado da equação 10, para valores suficientemente grandes de  $n$  (a equação 10 relaciona a norma euclidiana ao quadrado do vetor peso  $\mathbf{w}(n+1)$  com o quadrado de  $n$ ), ou seja:

$$\frac{n^2\alpha^2}{\|\mathbf{w}_o\|^2} \leq \|\mathbf{w}(n+1)\|^2 \leq n\beta,$$

de onde concluímos que

$$\frac{n^2\alpha^2}{\|\mathbf{w}_o\|^2} \leq n\beta.$$

Mas esta inequação não é válida para valores muito grandes de  $n$ . Então há um  $n_{max}$ , tal que a partir dele, a inequação passa a não ser verdadeira:

$$\frac{n_{max}^2\alpha^2}{\|\mathbf{w}_o\|^2} \leq n_{max}\beta$$

Resolvendo a equação para  $n_{max}$ , temos que

$$n_{max} \leq \frac{\beta\|\mathbf{w}_o\|^2}{\alpha^2} \quad (14)$$

Assim, provamos que, para  $\eta = 1$ ,  $\mathbf{w}(1) = \mathbf{0}$  e se existe um vetor peso  $\mathbf{w}_o$ , que separa as duas classes, então o algoritmo de treinamento do Perceptron conseguirá classificar todos os elementos das classes  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  corretamente em até  $n_{max}$  passagens.

## 2.2 Interpretação geométrica do Perceptron

Para compreender melhor o vetor peso  $\mathbf{w}$ , vamos considerar uma rede com entradas  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, 1]'$  e  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, b]'$  (com valores fixos). Esse vetor define uma reta da forma  $w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$ . A saída do Perceptron diz se o ponto  $(x_1, x_2)$  está acima ou abaixo dessa reta. Os ajustes no vetor peso  $\mathbf{w}$  modifica os valores de  $w_1, w_2$  e  $b$ , e consequentemente a reta que eles representam, até classificar as entradas corretamente.

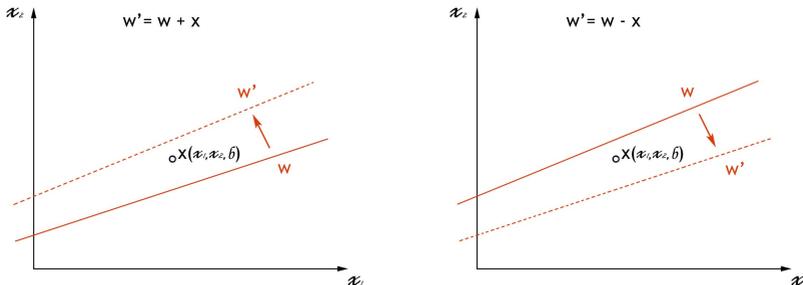
Generalizando essa ideia, para um Perceptron de  $n$  entradas, o vetor peso  $\mathbf{w}$  cria um hiperplano de separação entre as classes.

## 2.3 Orientação do Ajuste do Hiperplano

Pela equação 3, temos que, quando a saída do perceptron é diferente da classificação correta de um dado de entrada  $\mathbf{x}$ , o vetor peso  $\mathbf{w}$  é ajustado adicionando ou subtraindo  $\mathbf{x}$ . O que determina qual dessas operações deve ser feita, é a diferença  $y - d$  (figura 1), que nos garante que o hiperplano será deslocado na direção do dado que foi classificado errado:

- Se  $d = 1$  e  $y = 0$ ,  $y - d = +1$ , portanto o ajuste em  $\mathbf{w}$  é feito na direção de  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \mathbf{x}$ ).
- Se  $d = 0$  e  $y = 1$ ,  $y - d = -1$ , então o ajuste é feito na direção oposta a  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{x}$ ).

Figura 1: **Orientação do ajuste no deslocamento do hiperplano** - Aqui estão representados os casos de classificação errada e a correção no vetor peso. Se  $d = 1$  e  $y = 0$ ,  $y - d = +1$ , o ajuste é feito na direção de  $x$  ( $w' = w + x$ ). Se  $d = 0$  e  $y = 1$ ,  $y - d = -1$ , o ajuste também é feito na direção oposta a  $x$  ( $w' = w - x$ ).



## 2.4 Taxa de Aprendizagem

A taxa de aprendizagem refere-se ao termo  $\eta$ , da equação do algoritmo de aprendizado (3). Este termo multiplica o valor a ser acrescentado ao antigo  $w$ , portanto, pondera o grau com que  $w$  vai ser modificado. Quanto menor  $\eta$ , menor o ajuste em  $w$ , quanto maior  $\eta$ , maior o ajuste.

Esse termo é especialmente importante para se trabalhar com dados não linearmente separáveis. Quando se trabalha com um  $\eta$  fixo, após alguns ajustes, o valor de  $w$  começa a oscilar, pois está próximo, mas não consegue separar as classes. Por outro lado, usando  $\eta$  variável, podemos controlar o deslocamento do hiperplano de modo que os ajustes em  $w$  vão diminuindo conforme a rede vai sendo treinada, até que  $w$  permaneça praticamente inalterado. Isso ajuda a diminuir a taxa de erro da rede.

## 3 Desempenho do Perceptron em um Problema de Classificação

Nesse trabalho, foram usados para a classificação o conjunto de dados sobre a flor Íris de Ronald A. Fisher (1936). Eles são referentes a três tipos de flores íris: setosa, virgínica e versicolor. A íris setosa é linearmente separável dos tipos virgínica e versicolor, que não são linearmente separáveis entre si. Os dados trazem as medidas (em centímetros) do comprimento e largura das pétalas e sépalas de cinquenta exemplares de cada tipo.

Primeiramente trabalhamos com dados linearmente separáveis, portanto, vamos separar o tipo “íris setosa” dos demais. O treinamento foi feito apresentando sistematicamente dados de entrada à rede e usando o algoritmo de treinamento (equação 3, com  $\eta = 1$ ). Partindo dos mesmos pesos iniciais e  $\eta$  fixo, foram necessários de um a doze correções para chegar à classificação correta. A diferença no número de ajustes necessários aconteceu porque a ordem em que os dados foram apresentados à rede foi diferente em cada treinamento, bem como as correções no vetor peso, isso influencia no resultado final.

Depois usamos a rede Perceptron para classificar dados que não são linearmente separáveis entre si. Especificamente, separamos o tipo “íris versicolor” dos demais. Quando fixamos  $\eta = 1$ , a rede passa todo o tempo oscilando entre posições relativamente boas e posições muito fora de uma boa classificação. Quando aplicamos  $\eta' = 0.1\eta$ , verificamos que no início do treinamento a rede oscila bastante, e vai diminuindo gradativamente, até que permanece quase inalterada, perto de uma classificação satisfatória e termina o treinamento classificando a maioria dos vetores  $x$  corretamente.

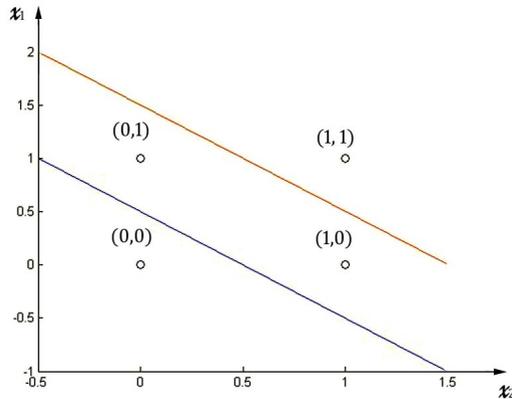
## 4 Problema do Ou Exclusivo

O problema do ou exclusivo (XOR) possui duas entradas e apresenta saída de acordo com a tabela 1. O operador XOR é um problema básico da lógica, mas, como se trata de dados não-linearmente separáveis, o Perceptron não consegue resolvê-lo

Tabela 1: Entradas  $x$  e saídas  $d$  do problema ou exclusivo.

$x_1$	$x_2$	$d$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figura 2: **Problema do Ou exclusivo:** Os pontos marcados são os conjuntos de entrada  $(x_1, x_2)$  e as retas representam os dois neurônios da primeira camada da rede.



corretamente. Realmente, isso não pode ser feito com apenas um neurônio, mas, com mais de um Perceptron, é possível obter a resposta correta.

Vamos montar manualmente uma rede que resolva o problema do XOR. Primeiramente, teremos como entradas os vetores  $x = [x_1, x_2, 1]'$ , onde o valor 1 está relacionado com o bias e os valores de  $x_1$  e  $x_2$  são tomados de acordo com a tabela 1.

A camada de entrada é formada por dois perceptrons: um, com peso sináptico  $w_1 = [-1, -1, 1.5]'$  (que diz respeito à reta  $x_1 = -x_2 + 1.5$ ) e dará saída  $y_1 = 1$  se, e somente se, o ponto  $(x_1, x_2)$  estiver abaixo dessa reta; E outro, com peso  $w_2 = [1, 1, -0.5]'$  (que diz respeito à reta  $x_1 = -x_2 + 0.5$ ) e dará saída  $y_2 = 1$  se, e somente se, o ponto  $(x_1, x_2)$  estiver acima dessa reta (figura 2).

Observe que os pontos  $(0,1)$  e  $(1,0)$ , recebem saídas  $y_1 = y_2 = 1$ , o que quer dizer que se encontram entre as retas dos dois Perceptrons; e os pontos  $(0,0)$  e  $(1,1)$  recebem saídas 0, que significa que estão fora do espaço entre as retas.

Então, um outro perceptron é usado para combinar essas duas saídas. Ele terá entrada  $x_3 = [y_1, y_2, 1]'$  e peso  $w_3 = [1, 1, -2]'$ , ou seja, ele soma os valores das saídas  $y_1$  e  $y_2$  e subtrai 2: se este valor for maior ou igual a zero, dá saída 1; se for menor que zero, responde saída zero (equação 2). Deste modo, temos a saída  $y_3 = 1$  se as entradas iniciais forem  $(0,1)$  ou  $(1,0)$  e  $y_3 = 0$  se  $(0,0)$  ou  $(1,1)$ , resolvendo corretamente o problema XOR.

Com isso, verificou-se que a rede Perceptron é bastante limitada, mas que mais de um Perceptron, combinados, apresentam um melhor desempenho em problemas de classificação. Introduzindo-se assim a ideia da rede Perceptron de Múltiplas Camadas, ou MLP (*Multilayer Perceptron*), que será estudada futuramente.

## 5 Conclusões

Neste trabalho estudamos o teorema de aprendizado do Perceptron e mostramos que essa rede neural é capaz de classificar corretamente um conjunto de dados linearmente separáveis. Observamos que podemos ajustar o termo  $\eta$  para melhorar seu desempenho com dados não-linearmente separáveis. E, através do problema do Ou Exclusivo, introduzimos a ideia da rede

Perceptron de Múltiplas Camadas. No futuro, estudaremos mais a fundo essa rede, com o algoritmo de retropropagação, que é mais eficaz na classificação de dados que não são linearmente separáveis.

## **Agradecimentos**

Agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro e ao meu orientador pela paciência e dedicação.

## **Referências**

- [1] Simon Haykin. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1999.
- [2] Robert Hecht-Nielsen. *Neurocomputing*. Addison-Wesley, Los Angeles, CA, USA, 1990.

## C4

# **Teorema Final - A Solução Matemática para o Grande Enigma da Física**

Ito, J. E.

## **Teorema Final – A Solução Matemática para o Grande Enigma da Física**

João Eidi Ito ([eedi@eidi.eng.br](mailto:eedi@eidi.eng.br))

Avenida Duque de Caxias, nº 1.980 – sala 902 – CEP 86010-190 – Londrina – Paraná – Brasil

Desde a apresentação da teoria da gravitação, por Isaac Newton (1.642 – 1.727), no século XVII, a busca por uma lei matemática unificadora dos conceitos de interações e campos tem consumido energia e tempo de grande parte dos físicos teóricos. Conhecida como ‘teoria final’, ‘teoria da unificação’, ou ‘teoria do tudo’, a formulação desses princípios unificadores tem se mostrado tão difícil, que não seria nenhum exagero considerá-la, hoje, o maior enigma da física. Sua procura já deu origem a inúmeras ramificações na área de pesquisa, com conceitos até mesmo conflitantes entre si. Como no caso da mecânica quântica e das teorias da relatividade restrita e geral, de Albert Einstein (1.879 – 1.955). Ou, ainda, da teoria dos campos de cordas, desenvolvida nas últimas três décadas. Enquanto alguns procuram respostas para suas dúvidas na observação do espaço sideral, outros se voltam para o estudo das partículas subatômicas. Em ambos os casos, contudo, as notícias divulgadas sempre dão conta do surgimento de mais dúvidas do que de esclarecimentos. E, mesmo quando as verbas investidas atingem quantias vultosas, como no caso do LHC (Large Hadron Collider), que custou cerca de 8 bilhões de dólares e criou muita expectativa em torno da comprovação da teoria do Big Bang, a divulgação de resultados positivos, feita depois de quatro anos apresentando problemas de funcionamento, chega a ser quase constrangedora. Mas, este é o problema das teorias. Por definição, são princípios fundamentados em suposições, hipóteses e, portanto, de caráter meramente especulativo. Nem mesmo uma ou mais comprovações experimentais poderão assegurar a veracidade de suas proposições. Por outro lado, apenas um resultado experimental negativo já é suficiente para condenar uma teoria. Ao contrário, os teoremas são proposições que necessitam de demonstração para ser consideradas verdadeiras. Entretanto, uma vez demonstradas, serão consideradas verdadeiras para todo o sempre. Pode parecer exagero fazer esses esclarecimentos, aqui. Porém, ainda há pesquisadores tidos como muito sérios, que defendem a validade da teoria da gravitação de Newton, ou a relatividade de Einstein, embora ambas já tenham falhado mais de uma vez e, portanto, não deveriam merecer mais

nenhum crédito. Todavia, eles argumentam que, com alguns ‘ajustes’, aquelas teorias podem funcionar e ser aceitas. E, assim, continuam procurando pela ‘teoria final’.

O objetivo deste trabalho é mostrar que as teorias da gravitação e da relatividade se fundamentam em princípios matematicamente inconsistentes, constituindo, assim, um enigma à parte. E, ao apontar a solução para suas inconsistências, apresentar o teorema final, cuja demonstração dará fim à histórica busca pela teoria unificadora, que começou a se delinear no longínquo ano de 1.453, com a queda de Constantinopla e o fim do Império Bizantino. A Europa começava a retomar os desenvolvimentos econômico, cultural e científico, que haviam se deslocado para o oriente, durante a Idade Média (476 – 1.453). A peste negra estava debelada, fora inventada a prensa tipográfica, surgia o Renascimento, grandes expedições marítimas eram empreendidas, floresciam as universidades italianas, alemãs e polonesas e eclodia a Revolução Protestante (1.517), de Martinho Lutero (1.483 – 1.543). Nicolau Copérnico (1.473 – 1.543) lançava seu livro *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (Do Movimento dos Corpos Celestes), defendendo o sistema heliocêntrico e, assim, iniciando uma verdadeira rebelião filosófica contra Aristóteles (384 – 322 a.C.), defensor do sistema geocêntrico. Poucas décadas depois, Galileu Galilei (1.564 – 1.642) demonstrava que corpos com diferentes massas caem com a mesma variação de velocidade (aceleração), ao contrário do que apregoava Aristóteles. Comenta-se que Galileu teria utilizado o raciocínio lógico do próprio Aristóteles, demonstrando que o mesmo levava a uma contradição, sem nunca ter realizado a famosa experiência na Torre de Pisa. Na mesma época, Johannes Kepler (1.571 – 1.630), baseando-se nas observações astronômicas de Tycho Brahe (1.546 – 1.601) enunciava as três leis do movimento planetário, utilizadas logo em seguida por Isaac Newton, para propor sua teoria da gravitação. O que talvez ninguém saiba, mas está explícito nos seus enunciados para quem quiser comprovar, é que a segunda e terceira leis de Kepler se contradizem. Isso parece tê-lo incomodado um pouco, pois transcorreram cerca de dez anos, entre a divulgação das duas primeiras leis (1.609, em *Astronomia Nova*) e a da terceira (1.619, em *Harmonice Mundi*, livro V):

*1ª lei (das órbitas elípticas): Cada planeta segue uma órbita elíptica, com o Sol se colocando num de seus focos.*

*2ª lei (das áreas iguais): O raio vetor de cada planeta, em relação ao Sol, percorre, em intervalos de tempos iguais, áreas iguais da elipse. ( $p = k r^2$ )*

*3ª lei (“harmônica”): O quadrado do período de revolução de cada planeta em torno do Sol, é proporcional ao cubo da distância média desse planeta ao Sol. ( $p^2 = k r^3$ )*

Onde  $p$  = período de revolução de um planeta em torno do Sol,  $r$  = raio vetor (distância média) desse planeta em relação ao Sol e  $k$  = constante de proporcionalidade.

Newton usou a terceira lei de Kepler em seu trabalho, mas não há registro de qualquer comentário que tenha sido feito na época, ou posteriormente, por ele ou qualquer outro pesquisador, a respeito desta discrepância. Como se pode ver claramente, a segunda e terceira leis de Kepler se diferenciam por um fator geométrico [ $r$ ]. E, conseqüentemente, a teoria da gravitação de Newton se baseia numa inconsistência matemática, ainda não resolvida. O fato dessa teoria flagrantemente inconsistente ter atravessado mais de três séculos praticamente incólume, pode ser explicado pela insurgência do Império Britânico no cenário mundial, justamente naquele período histórico, logo após Henrique VIII ter criado sua própria igreja, separando-se da Igreja Católica Romana (1.534) e de a Inglaterra iniciar e liderar a Revolução Industrial ocorrida no século XVIII. Newton apresentou sua teoria da gravitação num dos três volumes do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1.687). Também presidiu a Royal Society (fundada em 1.660) no período de 1.703 a 1.727, ano de sua morte.

Sob forte influência da obra de Newton e do poder econômico e militar exercido pela coroa britânica naquele período, foram desenvolvidos os estudos da eletrostática, pelo engenheiro francês Charles A. de Coulomb (1.736 – 1.806) e da corrente elétrica, pelo físico francês André M. Ampère (1.775 – 1.836). Nas décadas seguintes, muitos pesquisadores de diferentes áreas e nacionalidades se dedicaram e contribuíram para o desenvolvimento do estudo do eletromagnetismo, que iria mudar radicalmente o mundo, nos séculos seguintes. Mas, a rebelião filosófica contra Aristóteles, iniciada por Copérnico, parece ter ganhado força naqueles anos, influenciada, ainda, pelo espírito revolucionário reinante na época, que culminou com a Independência Americana (1.776) e a Revolução Francesa (1.789 – 1.799). Com efeito, todo o estudo das interações, feito naquele período, aparenta ter sido sob inspiração ‘anti-aristotélica’ e, por extensão, ‘anti-euclidiana’ (Euclides – 300 a.C.). Foi nessa época que surgiram as geometrias não-euclidianas de Nicolai I. Lobachevsky (1.793 – 1.856) e G. F. Bernhard Riemann (1.826 – 1.866). E, também, o questionamento da aplicação do Princípio de Relatividade de Galileu no eletromagnetismo de James Clerk Maxwell (1.831 – 1.879) e o desenvolvimento das equações da teoria da relatividade feito por Hendrik Lorentz (1.853 – 1.928) e Henri Poincaré (1.854 – 1.912).

Percebe-se que havia mais do que um clima de rebelião. Era quase um movimento conspiratório, unindo físicos e matemáticos contra a lógica aristotélica ainda dominante e que eles faziam questão de desprezar, sem nenhuma cerimônia. Não fosse assim, a teoria da relatividade não teria passado de uma ideia criativa e até interessante, mas rejeitada, diante da total falta de consistência matemática. Basta observar a proposição contida no seu segundo postulado:

$$c + v = c$$

onde  $c$  = velocidade de propagação da luz e  $v$  = velocidade qualquer

Esta equação é inválida, para todo  $v$  diferente de **zero**. Isso quer dizer que qualquer resultado obtido a partir dessa teoria, também será inválido. E a tão provalada comprovação da teoria da relatividade geral, num eclipse total do Sol ocorrido em 1.919, não poderia nunca (se analisada com um mínimo de rigor científico) ser aceita. Existe pelo menos uma explicação mais plausível do que a atração gravitacional do Sol, para justificar o aparente desvio da luz proveniente das estrelas próximas daquele astro: o efeito óptico de refração, provocado pela atmosfera solar. Além disso, as medições feitas pelo astrônomo inglês Arthur Eddington (1.882 – 1.944), apontaram valores de desvio 20% maiores do que a previsão teórica de Einstein. Mas, a manchete na primeira página do jornal londrino The Times fez a fama imediata do físico alemão. Ressalte-se que a Primeira Guerra Mundial terminara havia menos de seis meses e qualquer sinal de simpatia, partindo dos ingleses, seria muito bem recebido pelos alemães, para compensar o desfecho desfavorável naquela disputa. Não obstante, várias experiências feitas posteriormente em laboratórios ao redor do mundo e observações feitas pelos cientistas da NASA, em ondas de rádio emitidas pelas sondas Pioneers 10 e 11, Galileo e Ulysses (lançadas ao espaço a partir de 1.972), apontaram falhas na relatividade.

Em 1.929, Edwin P. Hubble (1.889 – 1.953) realizou medições do efeito Doppler no espectro da luz proveniente de diversas galáxias e, como resultado, enunciou a seguinte lei astronômica, que leva o seu nome: “Todas as galáxias se afastam com velocidade proporcional às suas distâncias da Terra”. Essa observação veio de encontro com uma proposição feita dois anos antes, por Georges Lemaitre (1.894 – 1.966) e que ficou conhecida como teoria do Big Bang. Todavia, caso Hubble não estivesse sugestionado a comprovar a predição de Lemaitre, ele poderia, simplesmente, ter afirmado que “a velocidade de propagação da luz proveniente de todas as galáxias varia a uma taxa inversamente

proporcional às suas distâncias da Terra”. Ou seja, entre a hipótese de afastamento das galáxias (com a velocidade de propagação da luz constante) e a de galáxias aparentemente estáticas (com a velocidade de propagação da luz decrescente), a diferença é de um fator geométrico [ $\mathbf{r}$ ], assim como aquele existente na discrepância entre a segunda e a terceira leis de Kepler.

Colocando isso em linguagem matemática, bastaria demonstrar que a diferenciação do vetor-posição em relação ao tempo, na direção de propagação do fenômeno, varia com o inverso da distância à origem, para provar que a afirmação de Hubble deveria ser a segunda e não a primeira, acima. Em seguida, aplicando o resultado dessa demonstração nas observações de Brahe – Kepler, seria possível anular o fator geométrico presente na equação da terceira lei e provar que a equação correta é a da segunda lei.

O fato de ser um fenômeno conservativo, isto é, onde não há variação (perda ou ganho) de energia, determina que a velocidade de propagação deva ser constante. Contudo, o que não se sabia, até agora, é que há uma diferença (de um fator geométrico), entre considerá-la constante em relação à origem ou ao observador. Portanto, do ponto de vista do observador, o **teorema final** pode ser assim enunciado:

*“A velocidade de propagação de qualquer fenômeno conservativo sob simetria esférica varia com o inverso da distância percorrida em relação à origem”.*

Ou, em notação matemática:

$$\mathbf{v} = k/ \mathbf{r}$$

onde  $\mathbf{v}$  = velocidade de propagação,  $\mathbf{r}$  = distância à fonte emissora e  $k$  = constante de proporcionalidade

A demonstração, precedida da apresentação de um axioma e um teorema abordando uma propriedade do espaço esférico ainda desconhecida, será apresentada nos anexos seguintes. Da mesma forma, todas as demais equações do movimento radial sob simetria esférica, bem como as equações das interações gravitacional e eletromagnética, são apresentadas nos corolários anexos, demonstrando que as mesmas são independentes das massas e das cargas elétricas das partículas e que obedecem aos mesmos princípios matemáticos. Como deveria ser, afinal, para atender ao caráter unificador.

## AXIOMA

### **ENUNCIADO:**

Todas as esferas têm o mesmo número de pontos  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ), independentemente dos seus raios.

### **DEMONSTRAÇÃO:**

Sejam duas esferas  $E1$  e  $E2$ , respectivamente de raios  $r1$  e  $r2$  quaisquer, com centro em  $O$  e seja uma semirreta  $sr$  com uma extremidade em  $O$  e a outra no infinito (sempre será possível trasladar uma das duas esferas, caso elas não sejam concêntricas, de forma que se tornem).

Se  $sr$  girar em torno de  $O$ , ocupando todas as posições possíveis do espaço,

então, para cada e toda posição do espaço que  $sr$  ocupar, ela interceptará  $E1$  e  $E2$  em pelo menos um e apenas um de seus respectivos pontos.

Prova (Lógica): A esfera é uma superfície definida por um centro e um raio-vetor (cujo módulo é a distância a  $O$ ), partindo deste e ligando apenas a um ponto de sua superfície, para cada direção do espaço tridimensional (euclidiano). Logo, supondo que em alguma(s) das  $n$  posições que  $sr$  ocupar no seu giro em torno de  $O$ , ela intercepte  $E1$  e/ou  $E2$  em mais de um ponto ou nenhum ponto, então  $E1$  e/ou  $E2$  não seria uma esfera. Mas, neste caso, ela não se enquadraria na proposição inicial.

### **COROLÁRIO:**

Em nenhuma das geometrias conhecidas (euclidiana e não-euclidianas) é atribuída dimensão ao ponto. Ele foi, sempre, definido como adimensional (sem dimensões) ou o 'ente desprovido de partes'. Portanto, nenhuma das geometrias está aparelhada com o ferramental adequado e suficiente para estudar o espaço definido com simetria esférica em torno de um determinado ponto (ou 'espaço esférico'). Isso explica, em parte, o fato de os fenômenos que se propagam desta forma não terem sido estudados corretamente, até hoje.

É verdade que no estudo do meio-contínuo foram feitos 'ajustes' para tentar compensar essa característica do espaço esférico. Entretanto, apenas os elementos infinitesimais ortogonais à direção de propagação (tangentes às superfícies esféricas) foram afetados. O elemento infinitesimal radial foi mantido invariante (constante). Para comprovar a necessidade de atribuir variação também a este terceiro elemento infinitesimal, será enunciado e demonstrado um teorema, que será chamado, aqui, de Teorema do Espaço Esférico.

## TEOREMA DO ESPAÇO ESFÉRICO

### ENUNCIADO:

Dado um sistema de coordenadas esféricas  $r, \varphi, \theta$  (ver figura abaixo):

Sejam definidos:

- 1) As equações dos arcos de circunferência  $S_\varphi = r \varphi$  e  $S_\theta = r \sin \varphi \theta$ .
- 2) O elemento infinitesimal de volume  $dV = dS_\varphi dS_\theta dr$ , na direção da semirreta  $sr$  dada.

Se:

$$dS_\varphi = dS_\theta;$$

$$d\varphi = \text{constante}; \text{ e}$$

$$d\theta = \text{constante};$$

Então:

$$dr / r = \text{constante}$$

### DEMONSTRAÇÃO:

$$S_\varphi = r \varphi \rightarrow dS_\varphi = dr \varphi + r d\varphi$$

$$S_\theta = r \sin \varphi \theta \rightarrow dS_\theta = dr \sin \varphi \theta + r \cos \varphi d\varphi \theta + r \sin \varphi d\theta$$

$$dS_\theta = dr \sin \varphi \theta + r (\cos \varphi d\varphi \theta + \sin \varphi d\theta)$$

$$dS_\varphi - dS_\theta = dr (\varphi - \sin \varphi \theta) + r (d\varphi - \cos \varphi d\varphi \theta - \sin \varphi d\theta)$$

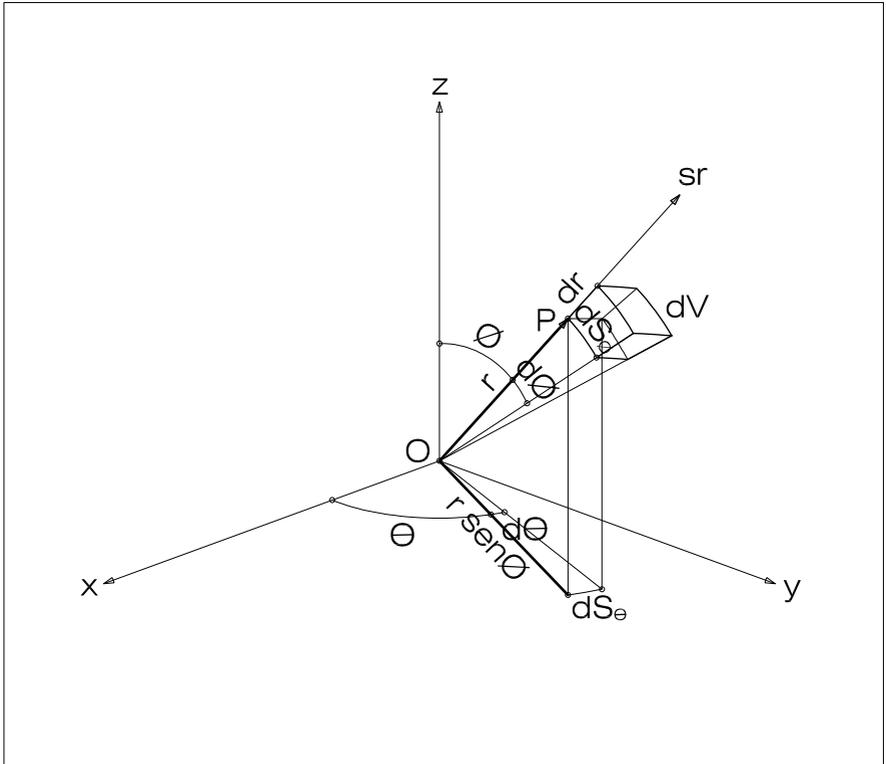
Lembrando que  $dS_\varphi = dS_\theta$

$$dr (\sin \varphi \theta - \varphi) = r (d\varphi - \cos \varphi d\varphi \theta - \sin \varphi d\theta)$$

Como, por definição,  $d\varphi = \text{constante}$ ,  $d\theta = \text{constante}$  e os demais elementos estão fora dos operadores diferenciais, então, admitindo-se  $c_1$  e  $c_2$  constantes, pode-se escrever:

$$dr c_1 = r c_2; \text{ e, finalmente,}$$

$$\underline{dr / r = \text{constante.}}$$



Sistema de coordenadas esféricas ( $r$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ )

## TEOREMA FINAL

### ENUNCIADO:

Sejam:

- 1) a função  $w = f[x(t), y(t), z(t)]$ , definida pela equação  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , tal que  $w = r^2$  define a simetria esférica da propagação de um determinado fenômeno;
- 2)  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  o vetor-posição de um ponto P dado; e
- 3)  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$  o vetor-velocidade de P, ao descrever o movimento radial na propagação definida acima.

Se:

$$\partial^2 w / \partial t^2 = 0;$$

isto é, se o sistema for conservativo,

Então:

$$v = c / r;$$

onde  $c =$  constante;

$$\mathbf{v} = ] \mathbf{v} [$$

$$\mathbf{r} = ] \mathbf{r} [$$

### DEMONSTRAÇÃO:

$$\partial^2 w / \partial t^2 = \partial / \partial t (\partial w / \partial t) = 0.$$

Logo,  $\partial w / \partial t =$  constante.

$$\text{Mas, } \partial w / \partial t = \partial w / \partial x \cdot dx/dt + \partial w / \partial y \cdot dy/dt + \partial w / \partial z \cdot dz/dt$$

(regra da cadeia). Ou, escrevendo de outra forma,  $\partial w / \partial t = \text{grad } w \cdot d\mathbf{r}/dt =$

$$= \nabla w \cdot d\mathbf{r}/dt$$

$$\text{Lembrando que } \nabla w = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 2\mathbf{r},$$

$$\text{Então, } \partial w / \partial t = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 2r v \cos \alpha = \text{constante.}$$

Como  $\alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ . Logo,

$$2r v = c$$

$$v = c / r$$

## COROLÁRIOS

- 1) Admitindo-se que a velocidade inicial  $v_0$  seja constante, pode-se escrever:

$$\underline{v = v_0 / r}$$

- 2) Sabendo-se que a aceleração radial  $a = d v / d t$  (em módulo):

$$a = d / d t (v_0 / r)$$

$$a = (- v_0 / r^2) d r / d t = (- v_0 / r^2) v =$$

$$\underline{a = - v_0^2 / r^3}$$

- 3) Partindo-se da equação do movimento (na direção radial):

$$r = r_0 + v \Delta t + (a / 2) \Delta t^2 \quad \text{e, fazendo-se as substituições acima, sem a notação vetorial (desnecessária)}$$

$$r = r_0 + (v_0 / r) \Delta t - (v_0^2 / 2 r^3) \Delta t^2$$

e, fazendo-se, ainda,  $r_0 = 0$  e  $\Delta t = t$ ,

$$r^2 = v_0 t - v_0^2 t^2 / 2 r^2 \quad \text{aplicando o item 1, acima, novamente}$$

$$r^2 = v_0 t - v^2 t^2 / 2 \quad \text{lembrando que } r = v t$$

$$r^2 = v_0 t - r^2 / 2$$

$$r^2 = 2 v_0 t / 3 \quad \text{fazendo-se } 2 v_0 / 3 = \text{constante}$$

$$\underline{t = k r^2} \quad \text{onde } k = \text{constante de proporcionalidade}$$

que é a segunda lei de Kepler.

- 4) No caso da propagação ondulatória no movimento radial, partindo-se de

$$v = \lambda \nu \quad \lambda \quad \text{e} \quad \nu \quad \text{comprimento e frequência da onda, respectivamente, aplicando-se o item 1, acima:}$$

$$\underline{\nu = v_0 / r}$$

- 5) A equação diferencial do movimento radial ondulatório será:

$$\underline{\partial^2 w / \partial t^2 = (v_0 / 2 r)^2 \partial^2 w / \partial r^2}$$

6) INTERAÇÃO GRAVITACIONAL:

Condição básica: existência de um corpo principal, cuja massa crie, em torno de si, uma simetria esférica de atração gravitacional, na direção radial e no sentido convergente.

Condição de equilíbrio: existência de corpos secundários que, atraídos pela força gravitacional exercida pelo corpo principal, tenham o movimento radial impedido por uma força centrífuga, decorrente de um movimento orbital em torno daquele.

$$Fg + Fc = 0 \quad (\text{em grandezas escalares})$$

$$m g + m v^2 / r = 0$$

onde  $m$  é a massa do corpo secundário,  $g$  é a aceleração gravitacional exercida pelo corpo principal sobre o corpo secundário,  $v$  é a velocidade deste no movimento orbital (circular) e  $r$  é a distância entre os centros de gravidade dos dois corpos.

Lembrando que

$$v = 2\pi r / p$$

( $p$  = período de revolução do movimento orbital)

$$g = - v_0^2 / r^3$$

(item 2, acima)

$$- v_0^2 / r^3 + 4\pi^2 r^2 / r p^2 = 0$$

$$v_0^2 / r^3 = 4\pi^2 r / p^2$$

$$p^2 = 4\pi^2 (r^2) / v_0^2$$

$$p = 2\pi r^2 / v_0$$

Fazendo-se  $k = 2\pi / v_0$

$$\underline{p = k r^2}$$

que é a segunda lei de Kepler.

A discrepância entre a segunda e terceira leis de Kepler se explica, lembrando-se que os astrônomos “medem” a distância entre os planetas e demais astros, utilizando a velocidade da luz (por isso tornaram-na constante) como parâmetro. Como ficou demonstrado, pelo teorema acima, que a velocidade proveniente daqueles corpos celestes varia à taxa  $1/r$ , todas as distâncias utilizadas por Kepler, na formulação da terceira lei, estão majoradas pelo fator geométrico  $r$ . fazendo-se as devidas correções, a segunda e terceira leis se igualam, como deveria ocorrer.

7) INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA:

Condição básica: existência de um corpo principal, cuja carga elétrica crie, em torno de si, uma simetria esférica de atração eletrostática, na direção radial e no sentido convergente.

Condição de equilíbrio: existência de corpos secundários que, atraídos pela força eletrostática exercida pelo corpo principal, tenham o movimento radial impedido por uma força centrífuga, decorrente de um movimento orbital provocado por um campo magnético em torno daquele.

$$\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = \mathbf{0} \quad (\text{em grandezas vetoriais})$$

$q \mathbf{E} + q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  onde  $q$  é a carga elétrica do corpo secundário,  $\mathbf{E}$  é campo elétrico provocado pelo corpo principal sobre o corpo secundário,  $\mathbf{v}$  é a velocidade deste no movimento orbital (circular) e  $\mathbf{B}$  é o campo magnético provocado pelo movimento do mesmo.

Mas,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} = B \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = (B v / r) \mathbf{r}$$

Logo,

$$\begin{aligned} q \mathbf{E} + q (v B / r) \mathbf{r} &= \mathbf{0} \\ (q r / r) \mathbf{E} + (q v B / r) \mathbf{r} &= \mathbf{0} \\ r \mathbf{E} + v B \mathbf{r} &= \mathbf{0} \\ (r \mathbf{E}) \mathbf{u}_r + (v B r) \mathbf{u}_r &= 0 \mathbf{u}_r \\ r \mathbf{E} + v B r &= 0 \\ \mathbf{E} &= v \mathbf{B} \end{aligned}$$

Como, por definição,  $\mathbf{F}_B$  é a força centrífuga que mantém o equilíbrio:

$$v B / r = ]a_c[ = v^2 / r, \quad \text{onde } v = B$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= v \mathbf{B} \\ \mathbf{E} &= v^2 \end{aligned} \quad \text{mas, } v = v_0 / r$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= v_0^2 / r^2 \\ \mathbf{E} / r &= ]a_r[ = v_0^2 / r^3 \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_r = a_c$$

$$a_r = a_c$$

(aceleração radial = aceleração centrífuga)

Substituindo-se, novamente:

$$v_o^2 / r^3 = v^2 / r = 4\pi^2 r / p^2$$

$$p^2 = 4\pi^2 (r^2) / v_o^2$$

$$p = 2\pi r^2 / v_o$$

Fazendo-se  $k = 2\pi / v_o$

$$\underline{p = k r^2}$$

que é, novamente, a segunda lei de Kepler.

**C5**

## **Introdução ao Euler 9.6**

Matos, I. E.

## Introdução ao Euler 9.6

Israel Emanua de Matos (e-mail: [3m.manuamat@gmail.com](mailto:3m.manuamat@gmail.com))

Rod. Celso Garcia Cid Km 380, Jardim Perobal, Londrina, Paraná, Brasil

### Resumo

Esta é uma introdução ao Euler (Euler Math Toolbox). O objetivo é a realização de uma abordagem inicial ao programa Euler. Após esta apresentação, você deverá estar habilitado a encontrar o seu próprio caminho com Euler com a ajuda da documentação e da referência. Foi escrito para a matemática universitária, projetado por um matemático com a necessidade frequente de cálculos numéricos e simbólicos, para gerar a construção gráfica dos resultados.

O objetivo adicional foi tornar o Euler útil também para os níveis básicos. A linguagem Euler, combinada com o sistema de álgebra Maxima, tornam esta ferramenta ideal para este fim.

**Palavras-chave:** Matemática; Euler; Maxima.

## 1. Introdução

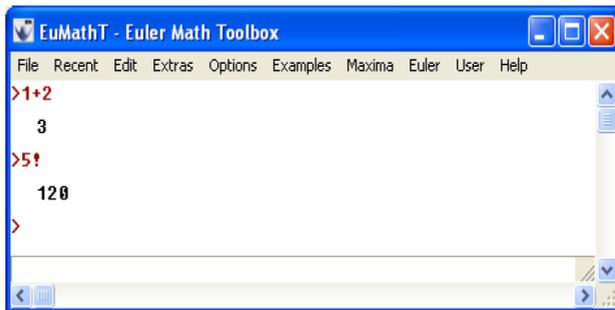
Euler Math Toolbox (Euler) é um software de cálculo numérico e algébrico, uma mistura entre um Computer Algebra System (CAS) e uma linguagem matricial numérica. Seu início se deu por volta de 1988 para gerar a funcionalidade do Matlab. O programa nunca foi um clone do Matlab, e sempre teve vida própria desde o início.

A parte numérica foi programada por René Grothmann, professor de Matemática na Universidade de Eichstätt. A parte algébrica utiliza o Maxima como um software aberto CAS.

Euler também pode operar com números complexos, intervalos e strings. Todos estes cálculos podem ser programados em funções do Euler, que podem ser carregadas no Euler com arquivos externos. Realmente, uma grande parte da sintaxe do Euler é baseada em funções escritas na linguagem de programação Euler.

O sistema embutido Maxima se comunica com o Euler através de **pipes**. O Maxima fica em um sistema separado, mas existem várias interações entre o Euler e o Maxima. Este é um poderoso ambiente para pesquisas matemáticas.

O Euler mostra um **prompt** > em uma linha de comando na janela com texto (notebook), onde os comandos são inseridos (em marrom) e executados, e a saída (em preto) aparece na mesma janela sob o comando. Os comandos na janela de texto podem ser editados e executados de cada vez. Também podemos anexar comentários.



### 1.1. A linha de comando

Todos os comandos são inseridos na janela de texto na atual linha de comando. Os comandos ficam em marrom e iniciam com o **prompt** > para o Euler, e com “::” ou “:” para o Maxima. O usuário não pode deletar o **prompt** >. Além disso, a janela de texto pode conter comentários em cor verde, e a função definida em cor azul iniciando com \$. Cores não são representadas nos exemplos desta introdução.

### 1.2. Usando o Maxima dentro do Euler

Maxima é um sistema de cálculo algébrico e simbólico, que pode ser chamado dentro do Euler. Após a primeira chamada, Euler inicia uma instância de Maxima no **background**, e se comunica com o Euler através de **pipes**. Assim, deve ocorrer uma pequena demora quando o Maxima for chamado pela primeira vez em um notebook.

Existem dois modos de usar o Maxima: a entrada direta de comandos ou entrada por **strings**. Nós usamos o método direto. Para enviar um comando ao Maxima, use o **prompt** :: ou o **prompt** : na frente do comando, sendo preferível o modo de compatibilidade com o **prompt** ::. Neste modo, Euler fará muito uso da formatação do comando.

### 1.3. Calculando com o Euler e com o Maxima

Com o Euler e o Maxima, temos duas ferramentas, uma para realizar cálculos numéricos rápidos e a outra para operações aritméticas simbólicas exatas.

Agora realizaremos alguns cálculos muito simples com frações, que irão gerar resultados diferentes no Euler e no Maxima.

Após digitar a linha de comando, pressionamos a tecla Enter para ver o resultado da operação.

#### Euler: Linhas de comando

```
>1+1/2+1/3+1/4 // calcula a fração com o Euler
2.0833333333333
>:: 1+1/2+1/3+1/4 // calcula a fração com o Maxima
25/12
```

1. Um comando do Euler inicia com um simples > no prompt.
2. O comando para usar o Maxima inicia com “::” mas podemos usar : apenas.
3. O comando “::” é um modo especial de compatibilidade com o Maxima, para que você possa usar uma sintaxe mais próxima da usada no Euler.
4. O resultado no Euler é uma fração decimal com 16 dígitos de precisão.
5. O Maxima dá a resposta na forma de uma fração.

#### 1.4. Iremos analisar uma função

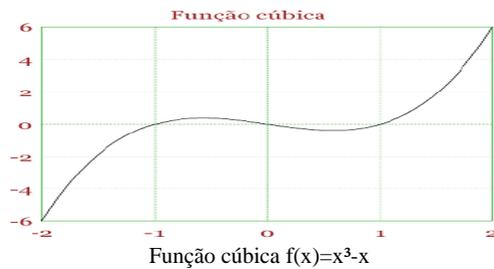
Plotaremos funções com o Euler, lembrando que o Maxima possui uma ótima ferramenta gratuita embutida (Gnuplot) para plotar gráficos das mais variadas formas de funções.

Plotamos a função  $f(x) = x^3 - x$  na variável  $x$ , com:

Euler: Linhas de comando

```
>plot2d("x^3-x",title="Função cúbica"); insimg;
```

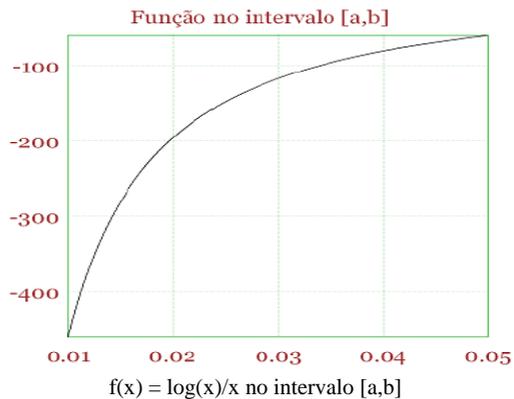
O comando **insimg**; indica que o gráfico é inserido em uma janela de texto, no notebook.



Plotamos a expressão  $\log(x)/x$  na variável  $x$ , no intervalo  $[a,b]$  com  $a = 0$  e  $b = 0:05$

Euler: Linhas de comando

```
>plot2d("log(x)/x",a=0.01,b=0.05,title="Função no intervalo [a,b]");  
>insimg;
```



Várias integrais exatas podem ser calculadas com o Maxima. Tente a integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2} dx$$

Euler: Linhas de comando

```
>:: integrate(log(x)/x^2, x, 1, inf)
1
```

Com strings, guardamos expressões, mas podemos definir funções no Euler e no Maxima.

Euler: Linhas de comando

```
>function f(x) := x^3-x // função no Euler
>:: function f(x) := x^3-x // função no Maxima
```

$$f(x) = x^3 - x$$

#### 1.4.1. Vetores e Matrizes

Uma das melhores razões para usar o Euler é a sua linguagem matricial. O Euler pode realizar cálculos com expressões de álgebra Linear, mas a principal vantagem do Euler é no uso de vetores para calcular valores e gerar tabelas de dados.

A regra básica é a seguinte: Se qualquer função escalar do Euler é aplicado a um vetor de entrada, a função é avaliada elemento a elemento.

Euler: Linhas de comando

```
>shortformat;
>v=1:5
  1      2      3      4      5
>v^2
  1      4      9     16     25
>sqrt(v)
  1  1.414214  1.732051  2  2.236068
```

Agora, vamos calcular uma função de valores vetoriais da função binomial e plotar a mesma:

Euler: Linhas de comando

```
>n=0:20; b=bin(20,n); // Calcula bin(20,0) ... bin(20,20)
>plot2d(n,b,points=1,title="bin(20,n)"); xlabel("n");
```

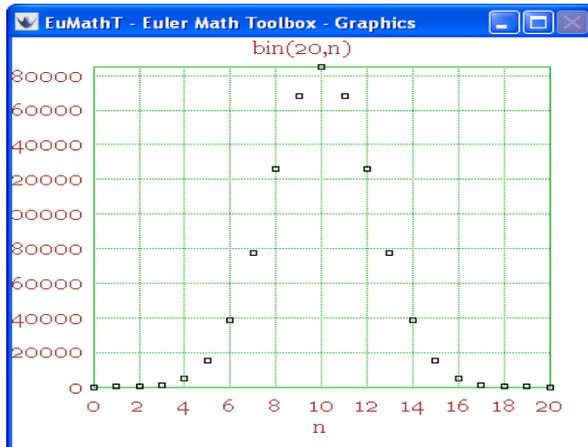


Figura 2: Função binomial de 20 com a taxa n

### 1.4.2. Variáveis

Resultados podem ser guardados em variáveis para uso posterior. Para associar um valor a uma variável, Euler tem := e =. Preferimos := pois algo como a=a^2 parece confuso.

Euler: Linhas de comando

```
>g:=9.81; t:=2.5; s:=1/2*g*t^2;
>s
30.65625
```

Tanto o Euler como o Maxima, pode usar um resultado anterior com %, mas ele deve ser usado dentro de uma mesma linha.

Euler: Linhas de comando

```
>solve("cos(x)-x",1), cos(%)-%
0.7390851332152
0
```

Variáveis são eliminadas quando o Euler é reiniciado ou com a função **clear var** ou com **revalue(var)**. Variáveis Euler não tem um tipo. Eles podem tomar dados de qualquer tipo. Mas, o tipo pode ser verificado com **typeof** ou com as funções **isreal**, **iscomplex**, etc. Para verificar por uma matriz, use **size**.

Euler: Linhas de comando

```
>[isreal(1:10), iscomplex(I)]
1 1
>[length(2), length(1:10), length(random(3,2))]
1 10 3
```

## 1.5. Funções de varias variáveis

### 1.5.1. Gráficos 3D

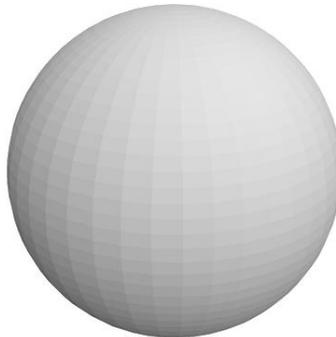
- Gráficos de funções 3D: os tipos mais comuns de gráficos sólidos mostram gráficos de funções. `plot3d` necessita somente uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ .
- Gráficos 3D com grade: a superfície não é mostrada, somente a grade. Isto pode ser obtido pelo uso do parâmetro **wire=1**.
- Gráficos 3D com segmentos: esta é uma sequência de segmentos de reta em 3D. Use o parâmetro **wire=1**. A função necessita ou de três parâmetros funcionais em  $x$  ou três matrizes, sendo que pelo menos um deles deve ser um vetor-linha.
- Gráficos 3D com pontos: este tipo de gráfico gera um espalhamento de pontos no espaço como uma nuvem. A função necessita de três vetores para as coordenadas

### 1.5.2. Superfícies, Curvas e Pontos

Alguns exemplos de gráficos 3D. Para uma superfície 3D, `plot3d` necessita de três parâmetros funcionais nas variáveis  $x$  e  $y$ , ou três matrizes. Em qualquer caso, a superfície é modelada por uma aplicação  $f: Q \rightarrow R^3$ , onde  $Q$  é um retângulo em  $R^2$ .

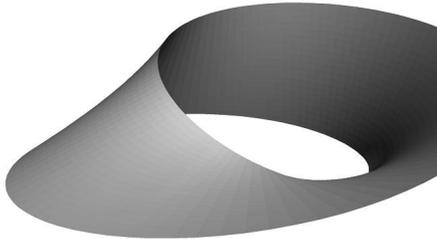
#### Euler: Linhas de comando

```
>plot3d("cos(x)*cos(y)", "sin(x)*cos(y)", "sin(y)", ...  
> xmin=0, xmax=2*pi, ymin=-pi/2, ymax=pi/2, ...  
> hue=1, user=1, light=[1,0,1], frame=0);
```



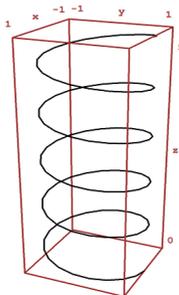
Euler: Linhas de comando

```
>x=linspace(0,2*pi,100); y=(-1:0.1:1)';  
>plot3d(cos(x)*(1+y/2*cos(x/2)),sin(x)*(1+y/2*cos(x/2)),...  
> y/2*sin(x/2),frame=0,hue=2,max=0.8,scale=2);
```



Euler: Linhas de comando

```
>plot3d("sin(x)","cos(x)","x/2Pi",xmin=0,xmax=10pi,n=100,user=1);
```



## 1.6. Estatística

Euler pode gerar vetores e matrizes preenchidos com números aleatórios.

Euler também pode embaralhar vetores com a função **shuffle**.

Euler: Linhas de comando

```
>z:=shuffle(1:49); sort(z[1:6])  
7 11 14 29 34 39
```

## 2. Método

O intuito desta apresentação é poder compartilhar um programa gratuito e tão prático como aqueles que temos que são pagos. Podemos fazer muitas coisas tanto na parte cálculo numérico até plotar gráficos em 2d e 3d. Isso tudo sem contar que podemos ter dois programas inclusos num só, o Maxima e o Euler, temos duas ferramentas, uma para realizar cálculos numéricos rápidos e a outra para operações aritméticas simbólicas exatas. Lembrando que o Maxima possui uma ótima ferramenta gratuita embutida (Gnuplot) para plotar gráficos das mais variadas formas de funções.

### **Conclusão:**

Concluo que, neste programa, por mais simples que possa parecer, está incluída uma grande ferramenta que pode nos auxiliar na nossa vida acadêmica.

Lembrando que o Euler, junto com Maxima, é um programa gratuito que poderá ajudar a todos, tanto na realização de cálculos numéricos rápidos quanto em outras operações aritméticas simbólicas exatas.

### **Referência**

<http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pdfs/euler96-br.pdf>

<http://www.windows7download.com/win7-euler-math-toolbox/qjorwqwn.html>

<http://www.rene-grothmann.de>

## C6

# Os Jogos de Raciocínio e a sua importância no desenvolvimento do pensamento lógico-matemático

Moreira, D. T., Silva, G. S.

# Os Jogos de Raciocínio e a sua importância no desenvolvimento do pensamento lógico-matemático.

Prof<sup>ª</sup>. Ms. Denise Trindade Moreira (e-mail: dtmoreira2000@yahoo.com.br)  
Gabriel dos Santos e Silva (e-mail: gabriel.santos22@gmail.com)  
Colégio Educar, Londrina, Paraná.

## Resumo

Neste artigo, relataremos a experiência do uso de jogos de raciocínio em sala de aula. Destacaremos a aplicação de quatro jogos em diferentes níveis de escolaridade (Educação Infantil e Ensino Fundamental), descrevendo as habilidades esperadas para os alunos e as dificuldades encontradas. Faremos, também, uma descrição do pensamento lógico-matemático envolvido em cada jogo e a implicação deste na série em questão. Estas aulas de jogos são realizadas no Colégio Educar (Londrina, Paraná) semanalmente em 50 minutos, nas turmas do EI 4 da Educação Infantil ao 9º ano do Ensino Fundamental.

**Palavras-chave:** Jogos no Ensino de Matemática, Jogos de Raciocínio, Pensamento Lógico-Matemático.

## 1. INTRODUÇÃO

A partir da Educação Infantil até o 9º ano do Ensino Fundamental os alunos do Colégio Educar (Londrina, Paraná) participam de um projeto de aprendizagem cujo objetivo é ampliar as possibilidades de desenvolvimento cognitivo, social, afetivo e psicológico utilizando jogos de raciocínio.

A realização do projeto se dá durante o ano letivo, no tempo de uma aula de 50 minutos por semana, contando com o trabalho de um professor aplicador e a professora regente da sala (nas turmas do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental). Nas aulas, são discutidos os jogos, estratégias e relações entre o que é aprendido no jogo e situações do cotidiano.

Este projeto visa o desenvolvimento do aluno através das relações interpessoais, jogos de raciocínio e métodos metacognitivos. A metodologia aplicada é derivada da Teoria da Experiência da Aprendizagem Mediada de Reuven Feuerstein, pesquisador da Psicologia do Desenvolvimento, cujos trabalhos têm como base a noção de modificabilidade cognitiva, por meio da qual as faculdades intelectuais de um indivíduo podem ser expandidas não somente na idade evolutiva, mas durante todo o curso de uma vida, fazendo uso principalmente das ideias de mediação da aprendizagem (Meier, Garcia, 2007). Também baseia-se em ideias e estudos de vários investigadores e educadores proeminentes tais como John Dewey, Howard Gardner, Vigotsky, David Perkins e Robert Sternberg.

## 2. O JOGO NA EDUCAÇÃO

No trabalho com a Matemática o jogo é uma estratégia que proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade e da capacidade de resolver problemas, fazendo com que o processo de aprendizagem seja significativo para quem ensina e aprende.

Para Kishimoto (2003), o jogo tem a finalidade de desenvolver habilidades de resolução de problemas, possibilitando ao aluno à oportunidade de estabelecer planos de ação para atingir seus objetivos, executar suas jogadas e avaliar sua eficácia nos resultados.

O jogo exige o desenvolvimento da capacidade de atuar sozinho e em grupo, criando e obedecendo a regras, agindo e reagindo a estímulos próprios da ação. Como o jogo implica em ação, ao participar de um, a criança passa por uma etapa de envolvimento, adaptação e reconhecimento, e de desenvolvimento paulatino da noção de trabalho cooperativo – tão importante para a ação educativa na escola. Além disso, é um tema que perpassa todo o programa de Matemática na Educação Básica.

Alguns documentos oficiais tratam a importância do uso de jogos no ensino de Matemática. O Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (BRASIL, 1998, p. 235) apresenta os jogos como uma maneira lúdica da criança perceber que ideias matemáticas podem ser evidenciadas através de perguntas, observações e formulações de propostas; defendem nessa etapa da escolarização o uso de “quebra-cabeças, labirintos, dominós, dados de diferentes tipos, jogos de encaixe, jogos de cartas” (p. 235) e outras brincadeiras. Não distante desse pensamento, Corsino (2007, p. 60) afirma que, com o surgimento do 1º ano do Ensino Fundamental, “é importante que as atividades propostas sejam acompanhadas de jogos e de situações-problema e promovam a troca de ideias entre as crianças”. Os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que no 1º e 2º ciclos,

por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos): os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações. (BRASIL, p. 36)

No 3º e 4º ciclos,

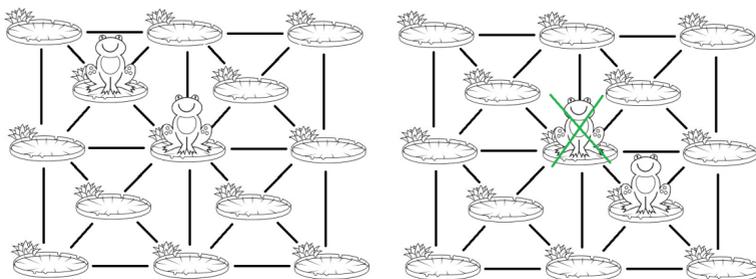
nos jogos de estratégia (busca de procedimentos para ganhar) parte-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático. (BRASIL, p. 48)

### **3. DESCRIÇÃO DOS JOGOS**

#### **3.1 SAPINHOS**

“Sapinhos” é um jogo de tabuleiro, composto de 13 vitórias-régias em um tabuleiro retangular, 12 sapinhos verdes e 1 sapinho vermelho.

Temos 40 cartas-desafio que, numeradas de acordo com o grau de dificuldade, ilustram as posições as quais os sapinhos devem ser colocados no tabuleiro (nunca utilizando os 13 sapinhos ao mesmo tempo, mas obrigatoriamente contendo o sapo vermelho). O objetivo do jogo é manter apenas o sapo vermelho no tabuleiro. Os sapos não podem andar pelas casas; podem simplesmente saltar um sapo de uma casa adjacente (figura 1), parando com o sapinho na casa seguinte a ele e retirar o sapo saltado do tabuleiro; o único sapo que não pode ser saltado (mas pode saltar) é o sapo vermelho.



**Figura 1** – Exemplo de movimento permitido no jogo “Sapinhos”.

O “Sapinhos” é aplicado na Educação Infantil (5 anos), 1º ano, 2º ano e 5º ano do Ensino Fundamental. Na Educação Infantil, iniciamos o reconhecimento da estrutura do jogo através de um tapete cuja ilustração é o tabuleiro; nessa aplicação, objetivamos que os alunos se envolvam em um trabalho voltado à orientação espacial, à transformação de uma representação bidimensional em uma tridimensional, criem vocabulários próprios de orientação espacial e criem uma análise de pontos de referência, sempre identificando o problema e aquilo que é possível fazer para resolvê-lo. Analisando o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (1998, p. 229), notamos que a proposta vai ao encontro do que o documento espera que os alunos trabalhem no bloco espaço e forma. Eles elencam:

- Explicitação e/ou representação da posição de pessoas e objetos, utilizando vocabulário pertinente nos jogos, nas brincadeiras e nas diversas situações nas quais as crianças considerarem necessário essa ação. [...] • Representações bidimensionais e tridimensionais de objetos. • Identificação de pontos de referência para situar-se e deslocar-se no espaço. • Descrição e representação de pequenos percursos e trajetetos, observando pontos de referência. (p. 229)

Durante a aplicação do jogo, percebemos que os alunos ainda não apresentam condições de resolver completamente as cartas-desafio, necessitando de uma grande ajuda e intervenção do professor aplicador. Porém, percebemos, satisfatoriamente, que os alunos começam a compreender o vocabulário necessário para localização espacial (embora ainda com algumas dificuldades com o reconhecimento da direita e da esquerda), representam corretamente as informações bidimensionais no espaço tridimensional e já começam a identificar um problema. Além disso, o jogo possibilita uma grande discussão sobre linha, coluna e diagonal, o que possibilita às crianças um entendimento maior sobre os conceitos. Notamos que os alunos tiveram uma grande compreensão sobre linha coluna e diagonal após a exploração do jogo.

### 3.2 SALADA GREGA

“Salada grega” é um jogo de cartas que contém 48 cartas com desenhos de componentes de uma receita de salada grega: tomate, azeitona, pepino, pimentão, queijo e cebola. São distribuídos os

alimentos pelas cartas de modo que, muitas vezes, não apareçam todos os tipos de ingredientes, existindo repetições de um alimento mesmo alimento em cada carta (figura 2).



**Figura 2** – Algumas cartas do jogo “Salada Grega”.

Os alunos se reúnem em grupos de 4 a 6 alunos, onde cada jogador recebe 5 cartas, ficando as demais em um monte virado com a face para baixo. Vira-se uma carta inicial e todos os jogadores a examinam. O primeiro jogador deve descartar uma carta que tenha um dos ingredientes em maior quantidade que na carta seguinte. Exemplo: se a carta superior do monte de descartes tem 2 pepinos e 3 tomates, o jogador seguinte pode descartar uma carta com 5 queijos, 1 pepino, 2 azeitonas e 4 tomates, pois ela apresenta um dos ingredientes da carta descartada (tomate) e este está em maior quantidade. Caso o jogador não possua nenhuma carta para descarte, ele compra uma nova do monte; se ainda assim não tiver descarte, ele passa a vez. Vence quem terminar primeiro as cartas da sua mão.

Com esse jogo, esperamos que os alunos adquiram a capacidade de analisar os dados das cartas, identificando quantidades, comparando-as e selecionando, ampliando, assim, sua percepção de quantidades. O documento Ensino Fundamental de Nove Anos (2007) do Ministério da Educação, afirma que o 1º ano no Ensino Fundamental, trabalha-se com as noções lógico-matemáticas a fim de:

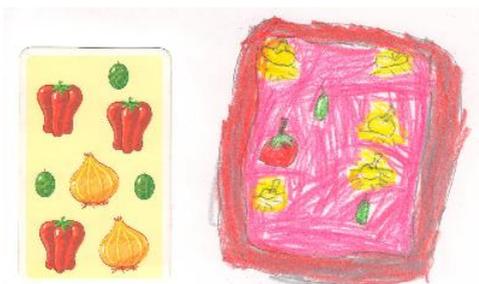
[...] encorajar as crianças a identificar semelhanças e diferenças entre diferentes elementos, classificando, ordenando e seriando; a fazer correspondências e agrupamentos; a comparar conjuntos; a pensar sobre números e quantidades de objetos quando esses forem significativos para elas, operando com quantidades e registrando as situações-problema (inicialmente de forma espontânea e, posteriormente, usando a linguagem matemática). (CORSINO, 2007, p. 60)

Inicialmente, percebemos nas crianças certa dificuldade em selecionar os dados contidos nas cartas para, então, comparar. Nesse sentido, foi necessário estabelecer com eles uma sequência correta de ações para análise das cartas: primeiro analisaríamos a presença ou ausência dos alimentos na carta para depois comparar.

Em seguida, através de cartas ampliadas do jogo, discutimos as palavras apropriadas para comparação de quantidades e pedíamos para que toda vez que uma carta fosse descartada, dissessem: “ $x$  pepinos é mais que  $y$  pepinos”, para que, através do registro oral, percebêssemos se os alunos realmente tinham desenvolvido as habilidades citadas ou estavam descartando cartas aleatoriamente. Com isso, identificamos os alunos que estavam com dificuldades no desenvolvimento do raciocínio e,

com eles, através de uma análise guiada, fomos trabalhando carta a carta. Então, percebemos que, satisfatoriamente, todos os alunos já conseguiam selecionar as informações, comparar as grandezas e estabelecer os critérios necessários para realizar essa seleção.

Ao final da aplicação do jogo, entregamos uma carta do baralho aos alunos e pedimos para que escolham uma carta que possa ser jogada depois daquela e a desenhem. Com a produção dos alunos, podemos perceber que adquiriram as habilidades, pois cada um deles escolheu apenas um ingrediente para que a quantidade fosse maior, sem preocupação com os demais, ou seja, seguindo os passos descritos, analisaram os alimentos e depois compararam, realizando satisfatoriamente aquilo que trabalhamos em sala (figura 3).



**Figura 3** – Carta descartada à esquerda e uma carta permitida para descarte à direita.

### 3.3 HORA DO RUSH

“Hora do Rush” é um jogo de tabuleiro composto por 12 carrinhos de cores distintas, que ocupam duas casas do tabuleiro, 2 caminhões e 2 ônibus que ocupam três casas do tabuleiro e 40 cartas-desafio que indicam posições que os carros, caminhões e ônibus devem ser posicionados. O aluno deve montar essa carta no tabuleiro e, movendo os veículos para frente ou para trás (sem retirá-los), deve levar o carro vermelho (que está presente em todas as cartas-desafio) em direção à saída.



**Figura 4** – Cartas-desafio do jogo Hora do Rush.

Trabalhamos o “Hora do Rush” nas turmas de 5 anos Educação Infantil, 1º, 3º, 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental. Em cada ano trabalhamos com uma abordagem diferente e com intensidades diferentes, embora, em todas, trabalhamos sempre em duplas nos momentos em que os alunos entram

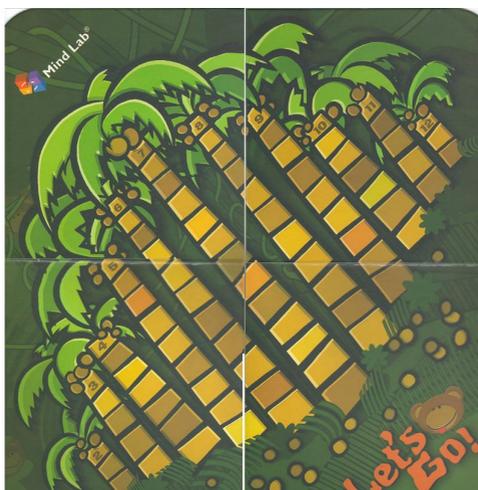
em contato com o tabuleiro. Na turma do 6º ano, trabalhamos com o jogo levando os alunos a discutir e assim perceber os problemas contidos no jogo, elaborando estratégias para a resolução do problema, criando hipóteses e testando-as. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais validam os objetivos quando afirmam que os objetivos para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental são, dentre outros,

- selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas. (BRASIL, 1998, p. 48)

Notamos que nesse momento, o aluno já faz registros corretos e bem elaborados de movimentos, explicitando ordenadamente o raciocínio desenvolvido para a solução do problema. Percebemos também que a identificação de problemas menores já está mais clara e a solução ordenada dos mesmos já é realizada com sucesso, embora a impulsividade para controlar os carros ainda seja grande. Nessa idade, já é perceptível que há aquisição de uma linguagem apropriada para comunicação com a dupla e com o professor, fazendo com que o diálogo leve as duplas a chegarem a desafios mais avançados que as séries anteriores.

### 3.4 LET'S GO!

“Let's Go!” é um jogo de tabuleiro composto por 3 peças representando macacos, 4 dados, 44 peças retangulares divididas em 4 cores (rosa, amarelo, azul e verde). Além disso, o tabuleiro do jogo é formado por 11 coqueiros numerados de 2 a 12 e de tamanhos distintos (figura 5).



**Figura 5** – Tabuleiro do jogo Let's Go!

Os alunos devem jogar “Let’s Go!” em grupos de 4 jogadores. Na vez de um jogador, ele lança os quatro dados e observa as faces; ele deve agrupar em grupos de 2 dados para trabalhar com a soma dos dados: as duas somas que ele encontrar representam os coqueiros que ele vai caminhar com os macacos do jogo. Na primeira vez que joga, ele caminha com dois macacos e, em seguida, joga os dados novamente e, se a combinação for a mesma da anterior, ele apenas caminha uma casa a mais com cada macaco do jogo e não insere o terceiro; caso contrário, ele insere mais um macaco e caminha. Dando prosseguimento ao jogo, o mesmo jogador continua lançando os dados e caminhando com as somas das faces. Caso ele encontre somente uma soma que tenha macacos dele no jogo, ele caminha somente com aquela soma; se for uma soma repetida (exemplo 7 e 7), ele anda duas vezes com o mesmo macaco. Cada jogador pode realizar quantas jogadas quiser antes de passar sua vez. Se o jogador lançar os dados e não for possível encontrar somas que tenham macacos no tabuleiro, ele perde tudo o que fez naquela rodada. Porém, se ele passar a vez, utiliza as peças com a sua cor para marcar onde ele parou e, assim, quando for sua vez de jogar de novo, ele pode iniciar de onde parou. Contudo, não é necessário que nas rodadas seguintes o jogador utilize os coqueiros que já tinha utilizado. Quando um macaco chega no topo de um coqueiro, marca-se com a peça da cor do jogador que aquele coqueiro foi conquistado e, então, nenhum outro jogador pode utilizar aquele coqueiro. Vence o jogador que primeiro conquistar 3 coqueiros.

Trabalhamos “Let’s Go!” com as turmas do 7º e 9º anos do Ensino Fundamental. No 7º ano, objetivamos que os alunos comecem a fazer aferições e afirmações a partir de análise de probabilidades, compreendendo sempre que a probabilidade representa uma incerteza, uma chance e não uma divisão, como sugere a representação de fração. Além disso, esperamos que os alunos compreendam a representação do tamanho dos coqueiros associada à probabilidade de se obter determinado número no dado, como discutiremos ainda nesse artigo. Informações dos Parâmetros Curriculares Nacionais nos afirmam que

neste ciclo, também amplia-se a exploração das possibilidades de quantificar o incerto. Com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana. (BRASIL, 1998, p. 70)

Notamos que há uma compreensão muito maior da probabilidade conforme o decorrer das aulas em que há a aplicação do “Let’s Go!” Ainda apresentam dificuldades em algumas representações formais de probabilidade, porém, intuitivamente, já percebem questões como risco, incerteza e aumento de probabilidades. Percebemos que os alunos preocupam-se em utilizar os coqueiros maiores, uma vez que a probabilidade de obter tais números no dado é maior; quando obtém possíveis somas de coqueiros menores, procuram reorganizar os dados a fim de buscar aqueles que lhes oferecem maiores chances.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os jogos são importantes ferramentas para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e a produção de conhecimento matemático. Nesse sentido, é importante que o professor se preocupe em explorar essa e outras ferramentas em sala de aula. Consideramos que foi essencial aos alunos utilizar os jogos, uma vez que essa atividade favoreceu a aprendizagem redimensionando a questão do erro, estimulou a exploração e a solução de problemas. O uso dos jogos provocou o desenvolvimento cognitivo, impulsionando-o, dinamizando o processo de ensino, equilibrando-o, desequilibrando-o e permitindo o avanço. Além disso, houve o fortalecimento de habilidades sociais, transferência interdisciplinar, transcendência de conteúdos para situações do cotidiano e aumento da autoconfiança dos alunos.

#### 5. REFERÊNCIAS

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME/USP, 2002.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC, 1998.

\_\_\_\_\_. *Referencial curricular nacional para a educação infantil*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CORSINO, P. As crianças de seis anos e as áreas do conhecimento. In: BEAUCHAMP, J. PAGEL, S. D. NASCIMENTO, A. R. (orgs.) *Ensino fundamental de nove anos: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade*. Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007.

KISHIMOTO, T. M. *Jogo, Brinquedo, Brincadeira e a Educação*. São Paulo: Cortez, 2003.

MEIER, M. e GARCIA, S. *Mediação da aprendizagem: contribuições de Feuerstein e de Vygotsky*. Curitiba: Grafiven, 2010.

MIGUEL, J. C. *O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas*. Disponível em: <<http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/Ensino-Matematica-Enfoque-Conceitos.pdf>>. Acesso em: 01/04/2011.

C7

**PRODOCÊNCIA / UEL / MATEMÁTICA:  
especificidades da EJA**

Pasquini, R. C. G. *Et al.*

# **PRODOCÊNCIA/UEL/MATEMÁTICA: especificidades da EJA.**

Regina Célia Guapo Pasquini  
Ana Márcia Tucci de Carvalho  
Neuza Teramon  
Departamento de Matemática  
Universidade Estadual de Londrina

## **Introdução**

A Educação de Jovens e Adultos - EJA é marcada por uma história de insucessos que remonta a década de 60 com a criação do Movimento Brasileiro de Alfabetização (MOBRAL) (BAGGIO, 2007) e fruto de intenções políticas, que caminhavam no sentido de promover uma educação capaz de incluir uma grande parte da população na sociedade e no mundo do trabalho.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB 9394/96, coloca a Educação de Jovens e Adultos em uma posição diferenciada ao ser assumida pelos Centros Estaduais de Educação Básica para Jovens e Adultos dos estados (BAGGIO, 2007), em particular, no estado do Paraná com a criação do CEEBJA, ofertando a modalidade de ensino semipresencial e presencial. Para que os objetivos constantes na documentação oficial para a EJA sejam conferidos é necessário reconhecer o direito do jovem/adulto de ser sujeito; mudando consequentemente a maneira como a EJA é concebida e praticada.

A busca de estratégias que sejam capazes de abarcar as especificidades que a EJA possui é um grande desafio e devem ser próprias da natureza do seu público. A participação em outros projetos nos oportunizaram diversos contatos com essa comunidade e percebemos que a grande maioria dos estudantes busca pelo direito à educação básica com anseios dos mais diversos. É comum encontrarmos histórias de vida que relatam um passado difícil capaz de influir diretamente na permanência desses estudantes na escola na idade própria. Entretanto, precisamos cuidar para que esse fator promova um processo de discriminação do estudante jovem e adulto, já que muitas vezes ele retorna à escola em idade adulta. Pelo contrário, devemos considerar o fator idade como um

aliado na construção de conhecimentos que promovam a inclusão desse estudante nesse mundo atual.

É preciso articular as formas de pensar matemática ao mundo do jovem e do adulto, investir na formação de educadores, e renovar o currículo – interdisciplinar e transversal, entre outras ações, de forma a constituir um direito, e não um favor prestado em função da disposição dos governos, da sociedade ou dos empresários (SACRAMENTO, 2012).

### **O ensino de Matemática na EJA e o PRODOCÊNCIA<sup>1</sup>**

Atualmente o ensino de Matemática em nosso país sofre mudanças circunstanciais. São vários os trabalhos que promovem estratégias vinculadas às atuais tendências em Educação Matemática e apresentam os resultados dessas ideias, quer sejam com o emprego de tecnologias de Informação e Comunicação, a Resolução de Problemas, o trabalho com jogos ou materiais manipuláveis, a Investigação Matemática, a Modelagem Matemática, a História da Matemática e outras. Podemos ilustrar trabalhos nessa direção como as monografias que o curso de Especialização em Educação Matemática do Departamento de Matemática da UEL desenvolve há anos, que trazem propostas de utilização da tendência Resolução de Problemas junto a implementação das mesmas.

É com vistas nesse movimento que dedicamos nossos esforços ao subprojeto de pesquisa em ensino intitulado "A inclusão educacional na perspectiva da Inclusão Matemática" que faz parte do projeto PRODOCÊNCIA/UEL e conta com a participação de professores do Departamento de Matemática da UEL que se dedicam à formação de professores de Matemática, de estudantes da Licenciatura em Matemática e de professores da Educação Básica Pública.

Em consonância com os objetivos do projeto maior cujo título, "Enfrentando os desafios das Licenciaturas na formação inicial e continuada de professores: a inclusão em

---

<sup>1</sup> Este projeto faz parte do Programa PRODOCÊNCIA/UEL institucional financiado pela CAPES

debate" voltamos nossas ações à Educação de Jovens e Adultos (EJA) ao considerar a população dessa modalidade, o estudante jovem ou adulto, como excluída do acesso à educação na idade própria.

Centramos nossas ações na busca de promover alternativas de trabalho para essa modalidade de ensino capaz de fomentar novas metodologias de práticas de ensino, nas áreas de Matemática e Educação Matemática, na perspectiva da inclusão educacional; conceber alternativas didático-pedagógicas face à necessidade dos professores do ensino superior e da educação básica, que atuam especificamente nas áreas de Matemática e Educação Matemática; e de produzir material didático que atenda às atividades desenvolvidas, a fim de subsidiar o desenvolvimento do projeto.

Da nossa participação em outros projetos que oportunizaram diversos contatos com essa comunidade percebemos que a grande maioria dos estudantes busca pelo direito à educação básica com anseios dos mais diversos. É comum encontrarmos histórias de vida que relatam um passado difícil capaz de influir diretamente na permanência desses estudantes na escola na idade própria. Entretanto, precisamos cuidar para que esse fator promova um processo de discriminação do estudante jovem e adulto, já que muitas vezes ele retorna à escola em idade adulta. Pelo contrário, devemos considerar o fator idade como um aliado no ensino e na aprendizagem de conhecimentos que promovam a inclusão desse estudante nesse mundo atual.

Por circunstâncias diversas, em um dado momento foi tirado deste estudante um direito que a Constituição Brasileira lhes garante e segundo Fonseca (2002):

[...] a interrupção ou impedimento de sua trajetória escolar não lhe ocorre, porém, apenas como um episódio isolado de não acesso a um serviço, mas num contexto mais amplo de exclusão social e cultural, e que, em grande medida, condicionará também as possibilidades de reinclusão que se forjaram nessa nova (ou primeira) oportunidade de escolarização. (p.29)

Com o projeto em tela, professores em formação do curso de Licenciatura em Matemática da UEL terão contato com as especificidades dessa modalidade de ensino. Segundo Souza *et all* (1995, p. 41) "O professor deve ser formado para ter o compromisso de intervir na realidade e para ter autonomia intelectual para a escolha de metodologias, procedimentos didáticos e paradigmas científicos."

## **Resultados preliminares**

Como resultados preliminares do projeto desenvolvemos propostas de ensino que envolvam conteúdos de matemática próximos à realidade do estudante EJA. Trazemos a Resolução de Problemas como uma estratégia capaz de valorizar os conhecimentos prévios dos estudantes jovens e adultos e promover o aprendizado a partir de situações que pertençam a realidade dos mesmos.

A fim disseminar os resultados do nosso trabalho e, ao mesmo tempo promulgar as ações previstas no mesmo, estamos organizando uma Mostra de Trabalhos do projeto desenvolvida a partir de minicursos e/ou oficinas desenvolvidas pela equipe do projeto prevista para o início do próximo semestre.

Acreditamos que os estudos realizados em torno do conhecimento e da compreensão de mecanismos para a inclusão do jovem e adulto na Educação Básica constituem-se em um dos caminhos capaz de trazer à formação do professor de Matemática a capacidade de lidar com a diversidade e a cultura inclusiva de modo crítico e reflexivo.

## **REFERÊNCIAS**

BAGGIO, T. M. *Resolução de Problemas como estratégias de ensino para EJA*. (Monografia da Especialização em Educação Matemática) – Londrina: UEL. 2007

FONSECA, M. da C. F. R. *Educação Matemática de Jovens e Adultos - Especificidades, desafios e contribuições*. Belo Horizonte: Autêntica. 2002

SOUZA et all, **Novas Diretrizes para a Licenciatura em matemática**. Temas e Debates (Blumenau), SBEM, N. 7, 1995.

Sacramento I., **A Educação De Jovens E Adultos No Brasil. 2012** acessado em 25 de junho de 2012

## C8

# O Método de Newton para sistemas não lineares

Piveta, A. C. P.

# 28<sup>a</sup> Semana da Matemática

## O método de Newton para sistemas não lineares

Anna Claudia Polimene Piveta (e-mail: annapiveta@hotmail.com)

### Resumo

O objetivo do nosso trabalho foi estudar o método de Newton para sistemas não lineares e sua ordem de convergência. Inicialmente, estudamos o método de Newton unidimensional, onde foi usado o Teorema do Ponto Fixo de Banach para demonstrá-lo e, em seguida, aplicamos o conhecimento adquirido para o caso de sistemas não lineares.

**Palavras-chave:** Método de Newton para sistemas não lineares, ordem de convergência, teorema do ponto fixo de Banach

## 1 Introdução

O método de Newton combina duas idéias básicas comuns nas aproximações numéricas: linearização e iteração.

Na linearização, procuramos substituir (numa certa vizinhança) um problema complicado por sua aproximação linear que, por via de regra, é facilmente resolvida. A aproximação linear pode ser obtida tomando os primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor da função em questão.

Por outro lado, o processo iterativo, ou aproximações sucessivas, consiste na repetição sistemática de um procedimento até que seja atingido o grau de aproximação desejado. Neste ponto, a questão fundamental é saber se tal procedimento converge. Para se responder isto recorreremos, no nosso estudo, ao Teorema do Ponto Fixo de Banach.

A adaptação do método de Newton unidimensional, a sistemas não lineares, envolve a cada iteração, determinar de forma simultânea as variações particulares para cada uma das variáveis envolvidas. Digamos que desejamos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

O primeiro passo é usar a notação vetorial. Seja  $\mathbf{x}$  é um vetor com  $n$  componentes e  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  é uma função vetorial, isto é,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})).$$

Assim, o sistema acima será representado por uma única equação vetorial,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ . Usando então aproximação de Taylor no caso de sistemas, teríamos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \mathbf{E} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{x}^k$  = vetor aproximação na  $k$ -ésima iteração,  $\mathbf{E}$  é um vetor que representa o erro da aproximação linear e  $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$  é uma matriz que contém todas as derivadas parciais de todas as componentes da função  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , chamada de matriz Jacobiana de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , isto é,  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}_{ij}]$ .

Para estabelecer o método iterativo, a aproximação na iteração  $k + 1$  será definida pelo vetor que anula a parte linear da equação (1), isto é, o vetor  $\mathbf{x}^{k+1}$  é tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = 0 \quad (2)$$

Para explicitar  $\mathbf{x}^{k+1}$ , multiplicamos esta equação pela inversa da matriz Jacobiana e teremos

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^k)\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$$

Como a inversão de matrizes é uma operação cara, podemos evitá-la trabalhando na expressão (2), isto é, encontramos a aproximação da iteração  $k+1$  resolvendo um sistema linear para calcular  $\mathbf{v}$  tal que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)\mathbf{v} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k). \quad (3)$$

Assim, a nova aproximação será:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{v}.$$

## 1.1 Ordem de Convergência

A ordem de convergência de um método mede a velocidade com que as iterações produzidas por esse método aproximam-se da solução exata. Assim, quanto maior for a ordem de convergência melhor será o método numérico pois mais rapidamente obteremos a solução. Mais precisamente, temos:

**Definição** (Ordem de Convergência) Sejam  $\mathbf{x}^k$  o resultado da aplicação de um método numérico na iteração  $k$  e  $e_k = \mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}$  o seu erro. Se existirem um número  $p \geq 1$  e uma constante  $c > 0$  tais que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|^p} = c$$

então  $p$  é a **ordem de convergência** desse método onde por  $\|\cdot\|$  denotamos a norma em  $\mathbb{R}^n$ .

Para o método de Newton em sistemas não lineares, temos que a ordem de convergência do método é quadrática. A seguir, enunciaremos o teorema que estabelece tal resultado somente para o caso  $n = 2$ .

## 1.2 Teorema

Sejam  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  e  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ . Suponha que se verificam as seguintes condições:

1.  $F$ ,  $G$  e suas derivadas parciais até a segunda ordem sejam contínuas e limitadas

numa vizinhança  $V$  de  $x$ , isto é,

$$\begin{aligned} |F_x(\mathbf{x})| + |\mathbf{F}_y(\mathbf{x})| + |\mathbf{F}_{xx}(\mathbf{x})| + |\mathbf{F}_{xy}(\mathbf{x})| + |\mathbf{F}_{yy}(\mathbf{x})| &\leq \mathbf{k}_1 < \mathbf{1} \\ |G_x(\mathbf{x})| + |\mathbf{G}_y(\mathbf{x})| + |\mathbf{G}_{xx}(\mathbf{x})| + |\mathbf{G}_{xy}(\mathbf{x})| + |\mathbf{G}_{yy}(\mathbf{x})| &\leq \mathbf{k}_2 < \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}(\bar{\mathbf{x}});$$

2.  $J(f, g)(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}_x \mathbf{g}_y - \mathbf{f}_y \mathbf{g}_x](\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}(\bar{\mathbf{x}})$
3.  $\| -[F'(\mathbf{x}^0)^{-1} \cdot \frac{\mathbf{F}''(\mathbf{C})}{2}] \| \leq \mathbf{K}$  tal que  $K \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \mathbf{1}$ , onde  $\mathbf{x}^0$  é a primeira escolha e  $C$  tal que  $\|\bar{\mathbf{x}} - C\| < 1/K$ .

Então o método de Newton para sistemas não lineares converge para a raiz  $\bar{\mathbf{x}}$  e o erro das iteradas consecutivas satisfaz a relação  $\|e_{n+1}\| \leq K \|e_n\|^2$ .

### 1.3 Exemplo

Usar o método de Newton para resolver o sistema

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 2x_1^3 - x_2^3 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1x_2^3 - x_2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

As derivadas parciais destas funções são

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 6x_1^2 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -2x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= x_2^3 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 3x_1x_2^2 - 1 \end{aligned}$$

e, portanto, a matriz Jacobiana é

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1^2 & -2x_2 \\ x_2^3 & 3x_1x_2^2 - 1. \end{bmatrix}$$

Tomando uma aproximação inicial  $\mathbf{x}^0 = (1.2, 1.7)$  temos:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 8.64 & -3.4 \\ 4.91 & 9.4 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} -0.4340 \\ 0.1956 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação (3) encontramos

$$\mathbf{v} = (0.03488, -0.03902)^T.$$

Assim,

$$\mathbf{x}^1 = (1.2349, 1.6610)^T.$$

Para o cálculo de uma nova aproximação recalculamos  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^1)$  e a matriz Jacobiana em  $\mathbf{x}^1$ .

Resolvendo a equação correspondente a (3) temos

$$\mathbf{x}^2 = (1.2343, 1.6615)^T.$$

## 2 Conclusões

Os resultados obtidos a partir dos estudos do Método de Newton para sistemas não lineares foram:

1. É um dos métodos mais utilizados para obter soluções de equações não lineares, pois converge rapidamente;
2. A ordem de convergência é quadrática;
3. Quando aplicado a um sistema não linear de  $n$  equações a  $n$  incógnitas devemos de calcular  $n^2$  funções derivadas parciais e  $n$  funções. Isso representa um considerável custo computacional;
4. A informação, a priori, a respeito da localização da raiz desejada, pode definir uma iteração que não converge ou que ela convirja para outra raiz.

## Referências

- [1] THOMAS, G. *Cálculo* Vol.2. 11<sup>a</sup> ed., Pearson - Addison Wesley, 2009.
- [2] STEWART, J. *Cálculo* Vol.1. 5<sup>a</sup> ed., Cengage Learning, São Paulo, 2008.
- [3] RUGGIERO, M.A.G., LOPES, V.L.R. *Cálculo Numérico* 2<sup>a</sup> ed., Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2000.
- [4] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Vol.1. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [5] LIMA, E. L. *Análise Real*. Vol.1. Coleção Matemática Universitária, IMPA. Rio de Janeiro: 1989. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

## C9

# O Teorema de Aproximacao de Weierstrass via Polinômios de Bernstein

Saita, T. M., Fatori, L. H.

# O Teorema de Aproximação de Weierstrass via Polinômios de Bernstein

Tatiana Mari Saita (e-mail: tatianasaita@gmail.com)

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Paraná, Brasil

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Luci Harue Fatori (e-mail: lucifatori@uel.br)

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Paraná, Brasil

## Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar o Teorema de Aproximação de Weierstrass, desenvolvido em 1885. Este resultado nos afirma que dada uma função contínua  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $I$  é um conjunto compacto da reta, podemos aproximá-la por uma sequência de polinômios. Em outras palavras, podemos afirmar que os polinômios são densos no conjunto das funções contínuas definidas em  $I$ .

Uma das formas de demonstração para este teorema foi realizada em 1911 por Sergei Bernstein. O matemático russo criou um algoritmo para aproximação de funções, utilizando uma classe de polinômios que ficou conhecido como Polinômios de Bernstein.

**Palavras-chave:** Aproximação, Weierstrass, Polinômios de Bernstein.

## 1 Introdução

Analisar o comportamento de algumas funções pode ser uma tarefa complicada. Uma das saídas para este problema é aproximando a função dada por uma outra mais elementar, por exemplo os polinômios ou as funções "escada".

Neste contexto, considere uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, o Teorema de Aproximação de Weierstrass nos garante a existência de uma sequência de polinômios que converge uniformemente para a função  $f$ . Uma importante hipótese para que este resultado possa ser utilizado, é o fato do conjunto  $I$  ser um intervalo compacto na reta, através desta propriedade é possível garantir a uniformidade da convergência.

Uma das formas mais conhecidas para provar este teorema utiliza os Polinômios de Bernstein. Esta classe especial de polinômios depende de uma função dada  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , e é definida por

$$B_n(x) = B_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (1)$$

Onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Sergei Bernstein conseguiu provar que para toda função contínua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , existe uma sequência de Polinômios de Bernstein  $B_n(x; f)$  que converge uniformemente para a função  $f$ . O passo seguinte, foi generalizar este resultado, de modo que as funções dadas fossem definidas em intervalos compactos arbitrários. Com estes resultados em mãos, conseguimos chegar a demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass.

## 2 Fundamentos Teóricos

Para o estudo do Teorema de Aproximação de Weierstrass foi necessário o conhecimento prévio de espaços métricos e também de suas propriedades. A seguir, vamos analisar o comportamento dos polinômios de Bernstein definido em (1).

### 2.1 Polinômios de Bernstein

Para termos uma noção básica deste polinômio, vamos explicitá-la para o caso em que  $n = 1$  e  $n = 2$ . Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Segue que

$$\begin{aligned} B_1(x) &= \sum_{k=0}^1 f\left(\frac{k}{1}\right) \binom{1}{k} x^k (1-x)^{1-k} \\ &= [-f(0) + f(1)]x + f(0) \\ B_2(x) &= \sum_{k=0}^2 f\left(\frac{k}{2}\right) \binom{2}{k} x^k (1-x)^{2-k} \\ &= [f(1) + f(0)]x^2 - 2\left[f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right]x + f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Note que o valor de  $B_n(x; f)$  do polinômio no ponto  $x$  é calculado para valores  $f(0), f(1/2), \dots, f(1)$ , com fatores  $\varphi_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  não negativos, que aqui podemos interpretar como funções "peso", nas quais podem assumir valores muito pequenos para valores de  $k$  quando  $k/n$  esta distante de  $x$ . De fato, a função  $\varphi_k$  é não negativa no intervalo  $[0, 1]$  e tem seu valor máximo atingido no ponto  $k/n$ . Além disso, vemos que a soma de todos  $\varphi_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  é igual a 1 para todo  $x \in [0, 1]$ .

Antes de enunciarmos o Teorema de Aproximação de Bernstein, vamos analisar o comportamento desses polinômios.

Segue do Teorema Binomial que

$$(s + t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k t^{n-k} \quad (2)$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Agora, se considerarmos  $s = x$  e  $t = 1 - x$  em (1) obteremos

$$1 = (x + 1 - x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (3)$$

Daqui já observamos que a somatória dos termos  $\varphi_k^s$  são igual a um. Além disso, se tomarmos  $f_0(x) = 1$  temos que o polinômio de Bernstein de  $f_0$  é igual a função  $f_0(x) = 1$

Agora, se reescrevendo (2) com  $n = m - 1$  e  $k = j$  temos

$$1 = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} x^j (1-x)^{m-1-j}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{n} \binom{n}{k}. \quad (4)$$

Multiplicando por  $x$  e usando a igualdade (3) temos

$$x = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j+1}{m} \binom{m}{j+1} x^{j+1} (1-x)^{m-(1+j)}.$$

Fazendo,  $j + 1 = k$  segue que

$$x = \sum_{k=1}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}. \quad (5)$$

Quando  $k = 0$ , a expressão acima é nula. Logo,

$$x = \sum_{j=0}^m \frac{j+1}{m} \binom{m}{j+1} x^{j+1} (1-x)^{m-(1+j)}. \quad (6)$$

Note que se tomarmos  $f_1(x) = x$ , o polinômio de Bernstein da função  $f_1$  é igual a  $f_1(x) = x$  De (2), se substituirmos  $n = m - 2$ ,  $j = k$  e utilizando o fato de

$$\binom{n-2}{k-2} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

obteremos

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} x^j (1-x)^{m-2-j} \\ \Rightarrow 1 &= \sum_{j=0}^{m-2} \frac{(j+2)(j+1)}{m(m-1)} \binom{m}{j+2} x^{j+2} (1-x)^{m-2-j} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $x^2$  e tomando  $j + 2 = k$  temos

$$m(m-1)x^2 = \sum_{k=2}^m k(k-1) \binom{m}{k} x^{k+2} (1-x)^{m-k}$$

Acrescentamos os termos  $k = 0, 1$  pois ao substituirmos na igualdade, ela será nula. Assim obtemos

$$(m-1)x^2 = \sum_{k=0}^m \frac{k^2 - k}{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \quad (7)$$

Por (4) e (6)

$$\begin{aligned} (m-1)x^2 + x &= \sum_{k=0}^m \frac{(k^2 - k)}{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} + \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{m}\right)x^2 + \frac{x}{m} &= \sum_{k=0}^m \left[ \frac{(k^2 - k)}{m^2} + \frac{k}{m^2} \right] \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^m \left(\frac{k}{m}\right)^2 \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \end{aligned}$$

Aqui podemos observar que o  $n$ -ésimo polinômio de Bernstein de  $f_2(x) = x^2$  é dado por

$$B_n(x; f_2) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{x}{n}$$

e converge uniformemente para  $f_2$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$  e tomando  $n_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$  temos que

$$|B_n - f_2| = \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x - x^2 \right| = \frac{1}{n} | -x^2 + x |$$

Como  $0 < x < 1$  e  $0 < 1 - x < 1 \Rightarrow x(1-x) \in [0, 1]$  implica que  $|x(1-x)| < 1$ . Logo,

$$\frac{1}{n} | -x^2 + x | \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\epsilon} = \epsilon$$

Como já foi mencionado, o  $n$ -ésimo Polinômio de Bernstein para a função constante  $f_0(x) = 1$  coincide com  $f_0$ . Pode-se concluir a mesma coisa para a função  $f_1(x) = x$ . Para a função  $f_2(x) = x^2$  temos a convergência uniforme do Polinômio de Bernstein para  $f_2$ . Estes resultados nos dão a ideia intuitiva da regularidade na convergência uniforme dos Polinômios de Bernstein. O próximo teorema irá esclarecer esta relação e além disso, irá nos fornecer uma prova construtiva do Teorema de Aproximação de Weierstrass.

**Teorema 2.1** (Teorema de Aproximação de Bernstein). *Seja  $f$  uma função contínua em  $[0, 1]$  com imagem em  $\mathbb{R}$ . Então toda sequência de Polinômios de Bernstein definida por*

$$B_n(x) = B_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

*de  $f$  converge uniformemente em  $[0, 1]$  para  $f$ .*

*Demonstração:* Multiplicando a igualdade (2) por  $f(x)$  temos

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Sendo assim,

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^n \{f(x) - f(k/n)\} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

e aplicando módulo temos

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \{f(x) - f(k/n)\} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned} \quad (8)$$

Pelo Teorema de Weierstrass (Vide [?]),  $f$  é limitada, digamos por  $M$  e também é uniformemente contínua pelo fato de ser definida em um conjunto compacto.

Da continuidade uniforme, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  e escolhamos  $n$  tal que  $n \geq \sup \left\{ \delta^{-4}, \frac{M^2}{\epsilon^2} \right\}$ . Deste modo, podemos decompor a desigualdade (8) em duas somas e analisar dois casos: os valores de  $k$  para os quais  $|x - \frac{k}{n}|$  são pequenos e aqueles para os quais  $|x - \frac{k}{n}|$  são grandes.

1. A soma quando  $|x - k/n| < n^{-1/4} \leq \delta$ . Esta desigualdade vem do fato de

$$n \geq \delta^{-4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \leq \delta \Rightarrow \frac{1}{n^{1/4}} \leq \delta$$

Sendo assim, podemos majorar  $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \epsilon$ . Segue que

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \epsilon \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \epsilon \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \epsilon \cdot 1 = \epsilon$$

A última igualdade vem de (2).

2. Quando  $|x - k/n| \geq n^{-1/4} \Rightarrow (x - k/n)^2 \geq n^{-1/2}$ . Note que se multiplicarmos a igualdade (2) por  $x^2$  temos

$$x^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+2} (1-x)^{n-k} \quad (9)$$

e multiplicarmos por  $-2x$  a igualdade  $x = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  obtemos

$$-2x^2 = \sum_{k=0}^n -2 \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k} \quad (10)$$

somando (9) e (10) temos

$$-x^2 = \sum_{k=0}^n \left[ x^2 - \frac{2kx}{n} \right] x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k}$$

e somando a igualdade  $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n}$ . Segue que,

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{n} + \frac{x}{n} &= \sum_{k=0}^n \left[ \frac{k^2}{n^2} + x^2 - 2x \frac{k}{n} \right] x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} \\ \Rightarrow \frac{x}{n} (1-x) &= \sum_{k=0}^n \left( x - \frac{k}{n} \right)^2 x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Com a igualdade acima e aplicando a desigualdade triangular podemos limitar  $|f(x) - f(k/n)|$  por  $2M$ . Assim,

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n 2M \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 2M \sum_{k=0}^n \frac{(x - k/n)^2}{(x - k/n)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

onde o termo  $(x - k/n)^2$  foi multiplicado e dividido.

Note que,  $(x - k/n)^2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{(x - k/n)^2} \leq n^{1/2}$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} &2M \sum_{k=0}^n \frac{(x - k/n)^2}{(x - k/n)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2M \sqrt{n} \sum_{k=0}^n (x - k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2M \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} x(1-x) \right) \leq \frac{M}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

esta última desigualdade decorre do fato de

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

onde  $x \in [0, 1]$

Pela escolha feita de  $n$ , concluímos que as duas partes são limitadas por  $\epsilon$ . Logo,

$$|f(x) - B_n(x)| < 2\epsilon$$

Portanto a sequência  $B_n$  converge uniformemente em  $[0, 1]$  para  $f$ .

□

Com estes resultados em mão que podemos demonstrar o Teorema de Aproximação de Weierstrass

## 2.2 O Teorema de Aproximação de Weierstrass

O principal resultado desse estudo é o Teorema de Aproximação de Weierstrass, provado em 1885. Este resultado nos diz que qualquer função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , mesmo que não possua derivada, é limite uniforme de uma sequência de polinômios no mesmo domínio de  $f$ .

**Teorema 2.2** (Teorema de Aproximação de Weierstrass). *Dada uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , existe uma sequência de polinômios  $p_n$  tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$  uniformemente em  $[a, b]$ .*

*Demonstração :* Para o caso em que  $f$  seja uma função contínua definida em um intervalo compacto  $[a, b]$  em  $\mathbb{R}$ , então a função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(t) = (f(b - a)t + a)$$

para todo  $t \in [0, 1]$  é também contínua. Aplicando o Teorema de Aproximação de Bernstein, temos que  $g$  pode ser aproximado uniformemente por Polinômios de Bernstein, o que prova o resultado.

## Referências

- [1] BARTLE, R. *Elementos de Análise Real*. Campus, 1983.
- [2] DOMINGUES, H. H., *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. São Paulo: Atual, 1982.
- [3] HONING, C. S., *Aplicações da topologia à análise* Projeto Euclides: IMPA, 1976.
- [4] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [5] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Vol.1. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

**C10**

**História das equações algébricas na formação  
de professores de Matemática**

Savioli, A. M. P. D., Gois, V. H. S.

# História das equações algébricas na formação de professores de Matemática

Angela Marta Pereira das Dores Savioli (e-mail: angelamarta@uel.br)  
Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática, Londrina, Paraná,  
Brasil

Victor Hugo dos Santos Gois (e-mail: victor.gois28@hotmail.com)  
Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática, Londrina, Paraná,  
Brasil

## Resumo

Nesta pesquisa, fizemos reflexões a respeito da história das equações algébricas e das origens históricas do pensamento algébrico, sob a perspectiva de diversos autores. Destacamos as contribuições para a Matemática e para a álgebra da história das equações algébricas, considerando que houve uma mudança radical no conceito de álgebra no final do século XVIII e início do século XIX. Até o final do século XIX, álgebra significava basicamente resolução de equações e atualmente vemos que a mesma tem outras caracterizações. Trabalhamos ainda com as origens do pensamento algébrico que já se manifestava entre os povos mesopotâmicos e se desenvolveu nas civilizações seguintes, como a grega. Considerando que boa parte dos conteúdos de matemática ensinados no Ensino Médio e Fundamental é formada por conteúdos algébricos, acredita-se que reflexões sobre esses assuntos sejam pertinentes e devem permear essa formação, para que os mesmos possam desenvolver um bom trabalho na sua prática pedagógica.

**Palavras-chave:** Álgebra, Pensamento Algébrico, História das Equações Algébricas.

## 1. Introdução

Até o final do século passado poucas pesquisas vinham discutindo sobre pensamento algébrico, álgebra ou linguagem algébrica. No campo de investigação da Álgebra, Fiorentini (1993) diz que pesquisas em torno do ensino da Geometria ganham um grande destaque por pesquisadores em Educação Matemática, enquanto o ensino da Álgebra parece um tanto abandonado e estagnado. Pesquisas que tratam da Álgebra, pensamento algébrico, e suas contribuições na formação de professores, são recentes e por muitas vezes estão relacionadas com a geometria. E a história da álgebra ainda é pouco difundida.

Assim, estudos que permitam na história da Álgebra e do pensamento algébrico a realização de pesquisas com ênfase na formação de professores ou na educação matemática escolar, são essenciais para o campo educacional brasileiro. Nesse sentido, fazer reflexões sobre a história das equações algébricas e as origens do pensamento algébrico tendo uma compreensão destes contextos sob a perspectiva de alguns autores como Lins e Gimenez (1997), Fiorentini et al (1993, 2005), Radford (2001), Kieran (1992), Ponte et al (2006, 2009) e Keppke (2006), considerando as diversas caracterizações do pensamento algébrico e da álgebra, contribuiriam para os processos de formação de professores.

## 2. Materiais e Métodos

Buscamos, com o estudo de alguns textos, discutir, refletir e analisar sobre as caracterizações do pensamento algébrico, suas origens históricas, algumas pesquisas na área que tratam do assunto, a história das equações algébricas e suas contribuições e as relações entre pensamento algébrico e as equações algébricas contribuindo assim para a formação de futuros professores de Matemática.

### 3. Resultados

Respondemos alguns questionamentos iniciais, trabalhando com os teóricos citados anteriormente, abordando a história da álgebra juntamente com as origens do pensamento algébrico.

#### 3.1. Álgebra, linguagem, simbolismo e pensamento algébricos

Souza (2007) nos diz que a Álgebra decorre de uma linguagem que lança mão de símbolos para expressar idéias gerais na matemática, seja para expressar termos desconhecidos ou termos variáveis. Sendo ainda as normas ou conjunto de normas para operar expressões algébricas.

Originalmente vemos que a Álgebra tem um sentido mais amplo, pois

[...] é uma variante latina da palavra árabe al-jabr (às vezes transliterada al-jabr), usada no título de um livro, [...] citado, abreviadamente, como Al-jabr.

[...] Ainda que originalmente “álgebra” refira-se a equações, a palavra hoje tem um significado muito mais amplo, e uma definição satisfatória requer um enfoque em duas fases: (1) Álgebra antiga (elementar) é o estudo das equações e métodos de resolvê-las. (2) Álgebra moderna (abstrata) é o estudo das estruturas matemáticas tais como grupos, anéis e corpos [...] (BAUMGART, 1992, p. 1-3).

Para Falcão (1993), a Álgebra pode ser definida

[...] como um conjunto de procedimentos matemáticos que nos permite representar e resolver problemas através dos quais somente com os conceitos aritméticos não conseguiríamos resolver. (SANTOS e SANTOS, 2011, p. 2 apud FALCÃO, 1993).

A respeito do pensamento algébrico, Lins e Gimenez (1997) apresentam as seguintes caracterizações: aritmetismo (produção de significados apenas em relação a números e operações), internalismo (consideração de números e operações apenas segundo suas propriedades, não “modelando” números em outros objetos “físicos” ou “geométricos”) e analiticamente (operações sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos).

Segundo, Fiorentini, Miorim e Miguel apud Keppke (1993), podemos caracterizar o pensamento algébrico como: “a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, as tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.” (p. 87).

Pela expressividade de estudos na linha de pesquisa sobre o pensamento algébrico e a Álgebra, existem inúmeros trabalhos científicos publicados na área: artigos, livros, revistas, periódicos,

monografias, dissertações, teses em geral, tais como: VIEIRA, M. S. *Algumas dificuldades em Álgebra, observadas em alunos do 1º grau: indicações para uma proposta*. UEL – Londrina, 1997, que aponta e questiona algumas dificuldades na passagem da aritmética para a Álgebra. E OLIVEIRA, R. A. de. *Desenvolvendo o pensamento algébrico no ensino fundamental: relato de experiência*. UEL – Londrina, 2000, que apresenta relatos de experiências e sugestões de tarefas que tenham como objetivo estudar o desenvolvimento do pensamento algébrico nas séries iniciais do ensino fundamental.

Neste sentido, reflexões no intuito de mudança são bem quistas, e é o que caracteriza essas e outras pesquisas com essa temática.

A época que os citados trabalhos foram desenvolvidos (ambos no final do século XX) foi marcada por análises e reflexões sobre o Ensino, não somente de Álgebra, mas o da Matemática em si. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) fundamentam tal afirmação que aponta a necessidade de uma abordagem que reduzira a visão tradicional do Ensino de Matemática; além disso, seu principal objetivo é dar margem a prática em sala de aula a professores da Educação Básica.

Os conceitos sobre a linguagem e o simbolismo algébrico aparecem com a necessidade advinda da representação de quantidades desconhecidas, representando de forma genérica uma quantidade determinada, ainda que desconhecida.

Especificamente sobre notação algébrica, Eves (1997) cita que em 1842, G.H.F. Nesselmann caracterizou o desenvolvimento da álgebra em três estágios:

O primeiro estágio é o da Álgebra retórica (cerca de 250 d.C) - Utilizando a linguagem corrente para a resolução de certos tipos de problemas e não há uso de símbolos ou sinais especiais. Neste estágio os argumentos eram escritos em prosa.

O segundo estágio é o da Álgebra sincopada (séculos III a XVI) - Utilizando pequenas abreviações em algumas operações, quantidades e relações que frequentemente eram usadas. Neste estágio começa-se o uso de letras para representar quantidades desconhecidas e um foco maior em como descobrir o valor das incógnitas. Tem-se um grande destaque para Viète (1540-1603) que influenciado pelo trabalho de Diofanto introduziu a inovação de usar letras para substituir valores dados e também para valores desconhecidos.

E por fim, o terceiro estágio, o da Álgebra simbólica (depois do século XVI) – As soluções são escritas usando linguagem matemática constituída por símbolos. Além disso, nesta última etapa há pouquíssima relação com as idéias e os objetos que as representam.

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) se apóiam em Klein (1934), que diz que é somente a partir da percepção de uma nova maneira assumida pela letra que podemos falar sobre um verdadeiro significado da Álgebra.

### **3.2. Produção de significados e pesquisas referentes à álgebra escolar**

Para Beltrame (2009), baseado em Lins e Gimenes (2006), a produção algébrica está estreitamente ligada à atividade algébrica, isso se confirma quando observamos todos os aspectos que envolvem a Álgebra, sejam eles os materiais didáticos usados em sala de aula, os conteúdos que o professor utiliza, entre outros.

“[...] produzir significados para a Álgebra. Esses significados se caracterizam como sendo um conjunto de afirmações para as quais podem ser produzidos significados em relação aos números e operações aritméticas, que podem envolver uma igualdade ou não. Sendo assim, para os autores, o pensamento algébrico é um modo de produzir significado para a Álgebra.” (BELTRAME, 2009, p. 21).

Desse modo, podemos dizer então que pensar algebricamente é ser capaz de compreender, entender e utilizar conceitos algébricos.

Ainda nos dias atuais, podemos observar que, com base em pesquisas feitas, o ensino de álgebra é realizado de forma mecânica, sem questionamentos por parte do aprendiz, este se preocupa com *como fazer* e não com *o porquê fazer dessa maneira*, repetindo diversas técnicas e fórmulas em exercícios sem a reflexão necessária para a expansão do conhecimento.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) trabalhar com a Álgebra é entender conceitos tais como o de variável e de função, ou ainda a representação de situações tanto algebricamente quanto graficamente, resolver problemas através de equações e ter conhecimento das sintaxes de uma equação e, para compreender mais facilmente estes conceitos, pode-se utilizar de recursos tecnológicos.

Ponte, Branco e Matos (2009) sugerem que as perspectivas da Álgebra escolar, precisam caracterizar-se pelo desenvolvimento do pensamento algébrico que pode ser alcançado da seguinte maneira:

“Podemos então dizer que o grande objectivo do estudo da Álgebra nos ensinamentos básico e secundário é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos, mas vai muito, além disso. [...] o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação”. (PONTE; BRANCO e MATOS, 2009, p. 10)

As dificuldades apresentadas por parte dos alunos, no que diz respeito à aprendizagem de álgebra, têm provocado um grande crescimento de pesquisas. Duas delas serão explicitadas:

A primeira delas trata do problema no ensino dos números e Álgebra:

“[...] tem por objectivo discutir os problemas que se colocam actualmente aos Números e Álgebra, dois temas que considero fundamentais no currículo da Matemática escolar, mas que pouca atenção têm tido na Educação Matemática em Portugal.” (PONTE, 2006, p.1)

Nessa pesquisa, o autor analisa os problemas e propõe uma discussão aprofundada sobre o assunto para que haja a produção de um currículo de ensino que contemple as necessidades tanto de quem ensina quanto de quem aprende.

A segunda pesquisa propõe trabalhar sobre o uso das variáveis segundo o Modelo 3UV:

“Por vivenciar as dificuldades dos meus alunos e também pela Álgebra ser uma área da Matemática que ocupa um lugar importante no currículo escolar, propusemo-nos neste trabalho investigar se a introdução ao estudo da Álgebra abordada no livro didático, instrumento de trabalho em sala de aula dos professores da rede básica de ensino, contemplam os usos das variáveis de acordo com o Modelo 3UV de Ursini et al (2005) para o ensino da Álgebra. Esse modelo aborda essencialmente três usos distintos da variável: termo desconhecido (as incógnitas), os números gerais e as relações funcionais. A análise de livros didáticos de Matemática é tema presente em estudos e pesquisas ligadas à Educação Matemática.” (BELTRAME, 2009, p. 7)

Pelo relato de experiência da autora, a pesquisa relata que sua prática docente foi mudada positivamente e explicita que a Álgebra vai além do que a simples manipulação de símbolos matemáticos, já que os alunos compreendiam o conceito de variável somente com atividades que envolviam um uso da variável, mas seria ideal trabalhar com os três usos possíveis da variável.

### 3.3. Ensino da Álgebra

Não se pode negar que no ensino de Álgebra no Brasil, num panorama geral, ainda persistem características de uma perspectiva tradicional, manifestando-se pela primeira vez mais ou menos no 7º ano. Segundo Caldeira (2010), o ensino desse ramo da Matemática tem sido caracterizado pelo “uso de símbolos literais e operações que são realizadas sobre esses símbolos, e a aprendizagem tem se limitado à memorização de regras para a manipulação simbólica.” (p.34)

Podemos citar muitos fatores que expliquem essa concepção, porém o mais relevante deles pode ser como o professor assume o uso do livro didático. Lins e Gimenez (1997) mencionam sobre o fato dos livros didáticos apresentarem forte tendência para uma concepção letrista da Álgebra em que a técnica é seguida pela prática (exercícios); o outro motivo é baseado em Kieran (1992) ao afirmar que os alunos sentem dificuldades pela Álgebra ensinada pelos professores que por sua vez apresentam somente a Álgebra que está nos livros didáticos; o terceiro, e último motivo é baseado no que mostra Silva e Junior (2005) ao afirmarem que aproximadamente nove entre dez professores utilizam em todas as suas aulas o livro didático. Tais autores amparam a afirmação feita em relação ao uso do livro didático.

Segundo Caldeira (2010)

O conhecimento algébrico, na formação inicial de professores, não deve se limitar ao conteúdo disciplinar dos cursos de licenciatura em Matemática, como parte do conhecimento matemático. Consideramos importante que sejam discutidas as formas de atribuir significados para a álgebra no contexto de ensino e as questões relacionadas à quando e a como ensinar álgebra na Educação Básica, conhecimentos sobre o ensino de matemática. (p. 34)

A formação de professores de matemática pode, desta forma, tornar-se um possível obstáculo.

O papel do professor reflexivo sobre o próprio ensino de álgebra é de suma importância para a

transformação do cenário atual, porém, tal ação ainda não é realizada por inúmeros fatores, entre eles estão: o distanciamento dos profissionais das pesquisas universitárias, a excessiva carga de trabalho, falta de apoio dos sistemas de ensino. Porém, iniciativas de formação continuada por parte dos governos em questão podem ser uma tentativa de melhorar essa situação.

Caldeira (2010) também mostra que uma alternativa para minimizar os obstáculos estaria envolvida com as propostas curriculares.

Acreditamos que, para mudar ação dos professores de Matemática com relação do ensino de álgebra, uma contribuição seria incorporar nas propostas curriculares orientações mais específicas com relação ao seu trabalho em todas as séries, indicando experiências que possibilitem a aprendizagem da álgebra com compreensão (CALDEIRA, 2010, p. 39).

Podemos considerar assim que, o pensamento algébrico se relaciona sempre com uma linguagem algébrica simbólica, pelo fato da concepção tradicional da qual está carregada a jornada escolar.

Dessa forma, conforme defendem Lins e Gimenez (1997), a abordagem algébrica já se faz necessária nas primeiras séries do Ensino Fundamental.

### **3.4. Pensamento algébrico relacionado à geometria**

Em se tratando da Geometria, quando se trabalha adequadamente, alguns elementos caracterizadores do pensamento algébrico podem ser encontrados: a percepção de regularidades e a presença do processo de generalização são alguns deles.

O desenho geométrico é uma ferramenta para representar e construir proposições que podem ser da própria geometria como também de outras áreas da matemática. Aqui, subentende-se a própria álgebra. Assim, o desenho geométrico pode ser visto como uma maneira de se expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema, que aqui se considera ser elemento caracterizador do pensamento algébrico.

As capacidades de abstração e representação do espaço estão ligadas com o desenvolvimento do pensamento geométrico. Por outro lado, o pensamento algébrico está estritamente ligado com pensamento geométrico, que está em estreita ligação com o estatístico-probabilístico (representações gráficas), bem como gráficos de diferentes tipos e tabelas. (PORTANOVA, 2006).

## **4. Conclusões**

A “álgebra egípcia”, a “álgebra babilônica”, a “álgebra diofantina”, entre outras, servem como base em contribuições culturais diversas. Segundo o apoio da perspectiva de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) a Álgebra pode ser classificada pelas diversas culturas que a constituíram ou através de sua história.

Segundo o desenvolvimento histórico da Álgebra, podemos dividi-la em dois campos: a Álgebra Clássica ou Elementar e a Álgebra Moderna ou abstrata.

Podemos classificar o desenvolvimento da linguagem algébrica ainda em função de suas fases evolutivas que podem ser distinguidas em três momentos: a retórica ou verbal, a sincopada e a simbólica.

Podemos considerar ainda que o desenvolvimento da Álgebra esteja ligado com a significação que é atribuída aos símbolos desta linguagem.

Um objetivo fundamental, enfim, pode classificar o desenvolvimento da Álgebra, com: o da resolução de equações. Distinguiram-se três períodos: o intra-operacional, o interoperacional e o transoperacional.

Segundo Caldeira (2010), a Álgebra é apresentada como um importante elemento da aprendizagem nas séries finais do Ensino Fundamental. Caldeira destaca ainda que,

[...] apesar de no terceiro e quarto ciclos a álgebra ser um conteúdo explícito a ser trabalhado, apenas a repetição mecânica de exercícios nas aulas de matemática, muito comum na prática pedagógica de alguns professores, não garante o sucesso dos alunos. (CALDEIRA, 2010, p.37)

Em Portugal, Ponte (2006) faz uma pesquisa sobre o ensino de Números e Álgebra no currículo escolar, e segundo ele o maior problema do ensino da Álgebra no currículo português é relacionado ao seu quase desaparecimento como uma área de conhecimento bem definida.

Os PCN (1998) sugerem que é mais favorável propor situações que façam os alunos construir noções algébricas a partir da observação de tabelas e gráficos, ao invés de atribuir um significado de forma mecânica, apenas fazendo repetições com equações e expressões. Deste modo, percebe-se que grande parte dos professores não trabalha com o conhecimento algébrico da forma idealizada pelos PCN. Muitos ainda persistem no uso de uma perspectiva tradicional, utilizando exercícios com equações e expressões no ensino da Álgebra.

A História da Matemática, Resolução de Problemas, Investigação Matemática, Jogos, Modelagem Matemática e Tecnologias da Informação, são tendências em Educação Matemática que propõem meios possíveis para trabalhar com o conhecimento algébrico. Diversos materiais elaborados e publicados nesse campo de estudo, que apresentam propostas do Ensino de tópicos da Álgebra baseado nessas tendências facilitam e apóiam o professor na construção de uma nova realidade de ensino.

## **Agradecimentos**

Agradecemos a Capes pelo apoio financeiro por meio dos projetos PIBID II Matemática UEL e Observatório da Educação.

## Referências

BAUMGART, J. K. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: História da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1992.

BELTRAME, J. T. *A Álgebra nos Livros Didáticos: Um estudo dos usos das variáveis, segundo o Modelo 3UV*. 2009. 157f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2009.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

FIORENTINI, D. ; FERNANDES, F. L. P. ; Cristovão, E.M.. *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico*. In: CIBEM V- Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 2005, Porto. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico, 2005. v. 1. p. 1-13.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. *Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar*. Pro-Posições (UNICAMP), v. 4, n.1, p. 78-91, mar. 1993.

KIERAN, C. *The learning and teaching of algebra*. Montreal: Université du Québec à Montréal, 1992

KEPPKE, C. L. *Álgebra nos currículos do Ensino Fundamental*. São Paulo, 2006. Disponível em: [http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/charston\\_lima\\_keppke.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/charston_lima_keppke.pdf) Acessado em 11.mai.2011.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. 4 ed. Campinas: Papyrus Editora, 1997, 176 p.

PONTE, J. P., MATOS, A. & BRANCO, N. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. [Acessado em 30/11/2011 de <http://pt.scribd.com/doc/74162096/4/Diferentes-perspectivas-da-Algebra-e-da-Algebra-escolar>]

PONTE, J. P. *Números e álgebra no currículo escolar*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavaro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE, 2006. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte\(Caminha\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte(Caminha).pdf) Acessado em 16.nov.2011.

PORTANOVA, R. *Um Currículo de Matemática em movimento*. In: VIII Encontro Paulista de Educação matemática, 2006, porto alegre. Anais do viii EPEM, 2006.

SOUSA, A. S. *Metacognição e Ensino da Álgebra: Análise do que pensam e dizem professores de Matemática da Educação Básica*. São Paulo, 2007. Disponível em: [www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-29012009-120830/publico/DissertacaoAdilsonSebastiao.pdf](http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-29012009-120830/publico/DissertacaoAdilsonSebastiao.pdf) Acessado em 25, de maio de 2011.

SILVA JÚNIOR, C. V. *Crerios de Adoção e Utilização do Livro Didático de Matemática no Ensino Fundamental e a Participação do Professor na Adoção: o caso do agreste de Pernambuco*. 2005. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2005.

**C11**

**Uma Organização dos Cursos de Graduação da  
Universidade Estadual de Londrina Utilizando  
o Mapa Auto-Organizável de Kohonen**

Silva, G. S., Mesquita, M. E. R. V.

# Uma Organização dos Cursos de Graduação da Universidade Estadual de Londrina Utilizando o Mapa Auto-Organizável de Kohonen

Gabriel dos Santos e Silva (e-mail: gabriel.santos22@gmail.com)

Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita (e-mail: valle@uel.br)

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – PR, Brasil.

## Resumo

Nesse trabalho, investigamos a aplicação da rede neural auto-organizável (SOM, *Self-Organizing Map*) de Kohonen para a elaboração de um mapa bi-dimensional com os cursos de graduação da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Em termos gerais, a SOM proposta por Kohonen tem como objetivo capturar a topologia e a distribuição de probabilidade de um conjunto de dados. Essa informação é obtida através de um processo não supervisionado que ressalta as características relevantes dos dados e proporciona a criação de agrupamentos de neurônios. Nesse trabalho, os neurônios serão organizados numa rede bi-dimensional onde cada grupo de neurônios corresponde a um curso de graduação.

**Palavras-chave:** Redes Neurais Artificiais, Mapas Auto-organizáveis, Técnicas de Agrupamento.

## 1. INTRODUÇÃO

Uma rede neural artificial (RNA) é um modelo matemático inspirado no cérebro humano, onde as unidades básicas de processamento são os neurônios (ANDERSON, 1995; HASSOUN, 1995; HAYKIN, 1999). Os estudos das redes neurais artificiais iniciaram em 1943 quando o biólogo Warren McCulloch e o matemático Walter Pitts apresentaram um modelo matemático de um neurônio biológico (McCULLOCH, PITTS, 1943).

No início dos anos 80, Kohonen apresentou um modelo de RNA auto-organizável conhecido como mapa auto-organizável (SOM, acrônimo do termo inglês *self-organizing maps*) ou rede de Kohonen (KOHONEN, 1982; 1989). A SOM, e suas variações, representam a classe mais popular de RNAs com aprendizado não-supervisionado, isto é, sem professor. Esses modelos também representam uma RNA com forte motivação biológica no cérebro humano. Com efeito, assim como o córtex cerebral humano, a SOM é organizada de modo que estímulos diferentes excitam regiões distintas da rede.

## 2. ALGORITMO SOM

Considere uma rede neural bi-dimensional quadrada com  $m$  neurônios. O algoritmo SOM é feito a partir de quatro etapas definidas abaixo:

1. *Inicialização:* Determina-se vetores aleatórios  $\mathbf{w}_j(0)$  distintos dois a dois para  $j = 1, 2, \dots, m$ .

2. *Amostragem:* Escolha aleatoriamente um vetor  $\mathbf{x}_b$  para apresentar à rede.

3. *Casamento por similaridade:* Verifica-se qual é o neurônio vencedor, através da menor distância euclidiana no tempo  $n$ , utilizando a função:  $d(x) = \operatorname{argmin}_j \|\mathbf{w}_j(n) - \mathbf{x}_b\|$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

4. *Atualização*: Após a escolha do neurônio vencedor, ajusta-se os neurônios  $w_j$  usando a fórmula de atualização:  $w_j(n+1) = w_j(n) + \eta \cdot h_{j,i(x)}(n) \cdot (x_b - w_j(n))$ , onde  $\eta$  é o parâmetro da taxa de aprendizagem e  $h_{j,i(x)}(n)$  corresponde à função que define a vizinhança centrada no neurônio vencedor  $i(x)$ .

5. *Continuação*: Repita os passos 2, 3 e 4 até que não sejam observadas modificações significativas no mapa.

O parâmetro  $\eta$  e a taxa  $h_{j,i(x)}(n)$  possuem as características:

- A função de vizinha  $h_{j,i(x)}(n)$  tem seu valor máximo em  $i(x)$ , começando a decrescer conforme há um aumento na distância lateral  $d_{j,i(x)}$ , a qual é responsável por definir a distância entre o neurônio vencedor e o neurônio excitado  $j$ .
- O tamanho da vizinhança topológica diminui com o passar do tempo  $n$ .
- O parâmetro da taxa de aprendizagem permanece com um valor fixo com o passar do tempo  $n$ .

Utiliza-se, em geral, a função gaussiana:

$$h_{j,i(x)} = \exp\left(-\frac{d_{j,i}^2}{2 \cdot \sigma(n)^2}\right),$$

onde  $d_{j,i} = \|r_j - r_i\|$ , em que  $r_j$  é a posição do neurônio  $j$  e  $r_i$  é a posição discreta do neurônio  $i$ . A função  $\sigma(n)$  pode ser obtida com:

$$\sigma(n) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{n}{\tau_1}\right).$$

Tal função mede o grau de participação no processo de aprendizagem ocorrida nos neurônios vizinhos ao neurônio vencedor.  $\sigma_0$  é tomado como o valor de  $\sigma(n)$  na inicialização do algoritmo e  $n$  representa o número de iterações.

Ao mesmo tempo, podemos definir a função como:

$$\eta = \eta_0 \cdot \exp\left(-\frac{n}{\tau_2}\right)$$

Nessas expressões,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  representam constantes de tempo, as quais são dadas pela relação:

$$\tau_1 = \frac{\tau_2}{\log \sigma_0}$$

### 3. EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Foram tomados, para o experimento, os 54 cursos de graduação da Universidade Estadual de Londrina e todas as 1538 disciplinas contidas nos currículos desses cursos. Com esses dados, construímos uma matriz  $X$  cujas entradas são definidas pela equação:

$$x_{a,b} = \begin{cases} 2, & \text{se a disciplina } a \text{ é anual no curso } b; \\ 1, & \text{se a disciplina } a \text{ é semestral no curso } b; \\ 0.5, & \text{se a disciplina } a \text{ é bimestral no curso } b; \\ 0, & \text{se a disciplina } a \text{ não faz parte do curso } b. \end{cases}$$

A partir de uma rede bi-dimensional quadrada 30x30, seguimos os passos descritos no algoritmo SOM, com 10000 iterações e com os parâmetros iniciais  $\sigma_0 = \frac{10000}{\sqrt{2}}$ ,  $\tau_1 = \frac{10000}{2 \cdot \log \frac{10000}{\sqrt{2}}}$  e  $\tau_2 = 5000$ .

Por fim, criamos dois mapas, A e S, contendo informações sobre o neurônio vencedor. O primeiro contém uma relação entre cada neurônio e a melhor resposta que ele apresenta. O segundo apresenta os neurônios que tiveram as melhores respostas após a apresentação dos cursos, ressaltando que a vizinhança de cada neurônio também é influenciada quando ele é vencedor.

#### 4. RESULTADOS

O mapa da figura 1 representa os neurônios com melhores respostas aos cursos apresentados. Tal mapa deve ser compreendido fazendo uma correspondência entre número e nome de curso apresentado no Apêndice 1.

Analisando o mapa, percebemos alguns agrupamentos satisfatórios, a exemplo das letras (Letras (Bach), Letras (Lic), LEM Inglês, LEM Francês e LEM Espanhol) que se preservaram próximas, o que, naturalmente, deveria acontecer. Outro agrupamento interessante se concentra na parte inferior esquerda do mapa, onde se encontram as disciplinas próximas às Ciências Exatas (Matemática, Química, Engenharia Elétrica, Engenharia Civil, Arquitetura, Ciência da Computação e Física). Além disso, notamos que no mapa há preservação da proximidade entre as diferentes habilitações de um mesmo curso, como os cursos que apresentam bacharelado e licenciatura ou, até mesmo, as habilitações dos cursos Química e Psicologia. Em contrapartida, percebemos que há uma distância entre Comunicação Social (Jornalismo) e Comunicação Social (Relações Públicas), estando o primeiro mais próximo de Letras e o segundo mais próximo das Ciências Sociais, indo de encontro ao que se admite, em senso comum, por apresentarem a mesma nomenclatura.

Sabemos que o mapa construído é uma projeção no plano de um espaço de dimensão 1538, havendo a possibilidade da ocorrência de distorções. Ao analisarmos o curso de Pedagogia, por exemplo, notamos que, na rede bi-dimensional, o neurônio que melhor o responde tem menor distância aos neurônios que melhor respondem à Biomedicina, Ciências Sociais (Licenciatura), Educação Física e Enfermagem. Tal fato pode ser compreendido se calcularmos as normas das diferenças entre os vetores que representam o curso de Pedagogia e os quatro cursos acima descritos, encontramos uma média de aproximadamente 12 unidades de distância; em contrapartida, a norma da diferença entre o curso de Pedagogia e outros cursos, como História e Biblioteconomia, pode assumir valores menores que 12 unidades de distância.

36	-	-	-	-	38	-	-	-	-	35	-	-	-	-	16	-	-	-	-	45	-	-	-	-	7	-	-	20	-	-	12
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	13	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	52	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	34	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	4
5	-	-	-	-	37	-	-	-	-	44	-	-	-	-	42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	15	14	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	6	-	-	-	33	-	32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	19
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	28	-	-	23	-	-	-	-	-	-	-	22	-	-	-	-	-	-	-	18
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53
25	-	-	-	40	-	-	41	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	26	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
51	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
49	-	-	50	-	-	2	-	-	-	27	-	-	-	11	-	-	-	54	-	-	43	-	-	-	-	-	-	-	47	48	

**Figura 1** – Mapa S com os neurônios que mais venceram ao apresentar um curso.

Outro fator importante que devemos considerar ao analisar o mapa é a existência de disciplinas em cursos que são próprias de outro curso, porém não são componentes da grade deste. Para figurar essa situação, podemos considerar o curso de Ciências Contábeis, ao qual uma de suas disciplinas é 6MAT061 – Matemática, cuja ementa envolve fundamentos básicos de matemática (potenciação, radiciação, progressões, proporcionalidade, funções e equações do 1º e 2º grau e sistemas), ofertada pelo departamento de Matemática. Entretanto, o curso de Matemática não contém essa disciplina em sua ementa, o que elimina a única possível disciplina comum entre esses dois cursos; da mesma forma, os cursos de Medicina e Matemática também não apresentam disciplinas em comum, o que nos leva a perceber que tanto Medicina quanto Ciências Contábeis devem estar à mesma distância do curso de Matemática. Com efeito, os cursos de Matemática e Ciências Contábeis estão situados em vértices

opostos no mapa S. Nesse sentido, poderíamos acrescentar no vetor do curso, coordenadas indicando quantas disciplinas cada departamento oferta àquele curso; contudo, o objetivo da nossa pesquisa é analisar a relação entre as disciplinas comuns e a distribuição dos cursos na rede neural; inserindo essas novas coordenadas, favoreceríamos um resultado previamente criado por nós.

É importante salientar que muitas disciplinas, embora com ementas semelhantes, apresentam códigos e nomes diferentes, o que fez com que o trabalho fosse voltado exclusivamente à ementa, não à nomenclatura. A exemplo disso, temos uma disciplina que, em Matemática, tem código e nome 2MAT015 Cálculo I e em Ciência da Computação 6MAT054 Cálculo Diferencial e Integral I, que mantém ementas muito próximas, tendo variações mínimas de um curso para o outro. Por essas disciplinas serem do departamento de Matemática, as diferenças entre nomes não causaram transtorno, porém, nos casos das disciplinas de outros departamentos, a análise se tornava muito mais minuciosa.

Por fim, gostaríamos de observar que os cursos de Biomedicina e Enfermagem possuem, respectivamente, as menores médias das distâncias com os outros cursos da universidade e, conseqüentemente, estão no centro do mapa. Acreditamos que esses cursos possuem as menores distâncias em vista da estrutura bimestral de algumas disciplinas. Com efeito, conforme os critérios adotados, foi atribuído o valor 0.5 aos elementos da matriz X que correspondem a essas disciplinas. Desse modo, ao calcular a norma euclidiana com um curso que não contém uma disciplina bimestral, é acrescido apenas  $0.5^2 = 0.25$  no somatório da raiz.

## 5. CONCLUSÕES

Através da análise do mapa e dos experimentos computacionais realizados para determinar os melhores valores iniciais para o experimento, podemos perceber a eficácia da SOM na criação do mapa dos cursos de graduação da UEL, a partir das disciplinas. Embora a quantidade de disciplinas comuns entre dois cursos seja reduzida, foi possível, através do algoritmo, valorizar as similaridades comuns, tornando, assim, o mapa mais próximo da organização esperada.

Além disso, com essa análise, em especial da experimentação, podemos perceber que foram satisfeitas as condições propostas pelo algoritmo, de preservação topológica e influência na excitação de regiões vizinhas. Com isso, notamos que a rede, de fato, se assemelhou às ideias descritas do córtex cerebral, uma vez que, satisfeitas as condições, ilustraram uma organização e distribuição da aprendizagem.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, J. *An Introduction to Neural Networks*. MIT Press, MA, 1995.

HASSOUN, M. H. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.

HAYKIN , S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.

KOHONEN , T. *Self-organized formation of topologically correct feature maps*. *Biological Cybernetics* 43 (1982), 59–69.

KOHONEN , T. *Self-organization and associative memory*, 3rd edition ed. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1989.

KOHONEN , T. *Self-Organizing Maps*, third extended edition ed., vol. 30 of Springer Series in Information Sciences. Springer, 2001.

McCULLOCH , W., AND PITTS , W. *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*. *Bulletin of Mathematical Biophysics* 5 (1943), 115–133.

ROSA, A. F. R., *Aplicações de Redes Neurais Auto-Organizáveis para a Identificação Autônoma de Fonemas*. Londrina, 2011. Monografia apresentada na Universidade Estadual de Londrina para obtenção do grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

## APÊNDICE 1

Relação dos cursos para análise no mapa da figura 1:

1 – Administração	19 – Design Gráfico	37 – LEM Inglês,
2 – Agronomia	20 – Direito	38 – Letras (Bach)
3 – Arquitetura e Urbanismo	21 – Educação Física (Bach)	39 – Letras (Lic)
4 – Arquivologia	22 – Educação Física (Lic)	40 – Matemática (Bach)
5 – Artes Cênicas	23 – Enfermagem	41 – Matemática (Lic)
6 – Artes Visuais	24 – Engenharia Civil	42 – Medicina
7 – Biblioteconomia	25 – Engenharia Elétrica	43 – Medicina Veterinária
8 – Biomedicina	26 – Esporte	44 – Música
9 – Ciência da Computação	27 – Farmácia	45 – Odontologia
10 – Ciências Biológicas (Bach)	28 – Filosofia	46 – Pedagogia
11 – Ciências Biológicas (Lic)	29 – Física (Bach)	47 – Psicologia (Bach)
12 – Ciências Contábeis	30 – Física (Lic)	48 – Psicologia (Form. de Psic.)
13 – Ciências Econômicas	31 – Fisioterapia	49 – Química (Bach)
14 – Ciências Sociais (Bach)	32 – Geografia (Bach)	50 – Química (Lic)
15 – Ciências Sociais (Lic)	33 – Geografia (Lic)	51 – Química (Tecnológico)
16 – Com. Social (Jornalismo)	34 – História	52 – Secretariado Executivo
17 – Com. Social (RP)	35 – LEM Francês	53 – Serviço Social
18 – Design de Moda	36 – LEM Espanhol	54 – Zootecnia

## C12

# Uma proposta de ensino via medidas de tempo: O Sistema de Numeração Babilônico

Silva, G. S., *Et al.*

# Uma proposta de ensino via medidas de tempo: O Sistema de Numeração Babilônico

Gabriel dos Santos e Silva (e-mail: gabriel.santos22@gmail.com)

Paulo Henrique Rodrigues (e-mail: paulowyz@hotmail.com)

Prof<sup>a</sup>. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini (e-mail: rcgpasq@uel.br)

Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná.

## Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar uma proposta de ensino das medidas de tempo norteada pelo sistema de numeração babilônico. Essa proposta é indicada para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental e foi contruída por ocasião de um trabalho realizado no curso de Matemática – Licenciatura. Como o sistema de numeração babilônico possui base hexadecimal, a proposta tem como objetivo promover relações deste sistema com as medidas de tempo em consonância com os estudos apresentados em (Cyrino e Pasquini, 2010), no sentido de não utilizar uma visão recapitulacionista para o ensino de conteúdos de Matemática via História da Matemática.

**Palavras-chave:** História da Matemática, Sistema de Numeração Babilônico, Educação Matemática.

## 1. INTRODUÇÃO

Dentre as tendências em Educação Matemática, podemos destacar a História da Matemática como uma importante componente para o ensino de Matemática. Quando analisamos as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008), notamos uma relevância significativa atribuída a esta tendência, tomando um papel, entre outras coisas, de ser um vínculo entre descobertas matemáticas aos fatos sociais (p. 66).

Nas orientações de documentos oficiais, os sistemas de numeração devem ser abordados como conteúdos básicos para o 6º ano do Ensino Fundamental (PARANÁ, 2008) e entendemos que podem tratados mediante relações com outros assuntos, não somente para que se perceba que em Matemática os conteúdos estão interligados, mais ainda, que enquanto conhecimento adquirido, seja utilizado para aquisição de outros novos.

Analisando os capítulos de sistemas de numeração e medidas de tempo de alguns livros

didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental (DANTE, 2010; GIOVANNI e GIOVANNI JUNIOR, 2005; GIOVANNI JUNIOR e CASTRUCCI, 2009; IEZZI, 2005; MORI e ONAGA, 2005;) notamos que o sistema de numeração dos babilônicos é pouco explorado, em alguns casos, nem é citado (DANTE, 2010; IEZZI, 2005). E, além disso, o conteúdo medidas de tempo, embora referenciado nos conteúdos das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, é trabalhado também de modo sutil. As noções de base de um sistema de numeração não são apresentadas em quatro das obras referenciadas; somente são apresentadas em uma das obras (MORI e ONAGA, 2005) por meio de uma frase, contudo não é explicitada uma relação entre outras bases. Em um determinado momento, as autoras citam agrupamentos distintos, mas não relacionam com o conceito.

Diante destas perspectivas, fazemos uma proposta de ensino de medida de tempo vinculado ao ensino do sistema de numeração babilônico. Para isso, utilizamos a História da Matemática como vínculo entre os conhecimentos citados, levando o aluno a relacionar e, possivelmente, melhor compreender as ideias envolvidas em ambos os conteúdos.

Com isso, apresentaremos nesse artigo um levantamento de bibliografias que fundamentam o uso da História da Matemática no ensino de Matemática, algumas considerações sobre o sistema de numeração babilônico, o contexto da elaboração da proposta (materiais e métodos) e por fim, a apresentação da proposta.

## **2. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA**

Nos últimos anos, pesquisadores de Universidades brasileiras têm investido esforços para elaborar iniciativas referentes ao uso da História da Matemática no ensino de Matemática. Para confirmar tal afirmação, basta levantarmos trabalhos de eventos referentes à Educação Matemática no Brasil, em particular os da área de História da Matemática; veremos, então, que boa parte dos trabalhos atuais tem utilizado essa tendência.

De fato, podemos observar vantagens ao trabalhar com a História da Matemática. Miguel e Mirim (2004) apontam que a História da Matemática pode ajudar os alunos a perceberem:

[...] (1) A matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar a generalização e extensão das ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (p. 53).

No âmbito educacional atual, muitos desses aspectos ainda não são adquiridos pelos alunos, talvez pelo fato que muitos dos professores de Matemática também não tenham essas impressões. Por motivos parecidos com esse Fauvel (1997) afirma que um dos empecilhos de se trabalhar com a história da matemática na Educação Matemática é a formação do professor e “por isso, recomenda-se a todos os cursos de Licenciatura em Matemática que ofereçam História da Matemática”. (D’AMBROSIO, 1996, p. 13).

Podemos encontrar também referências sobre o uso da História da Matemática no Ensino de Matemática nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná. Segundo esse documento:

É importante entender a História da Matemática no contexto da prática escolar como componente necessário de um dos objetivos primordiais da disciplina, qual seja, que os estudantes compreendam a natureza da Matemática e sua relevância na vida da humanidade. A abordagem histórica deve vincular as descobertas matemáticas aos fatos sociais e políticos à circunstâncias históricas e às correntes filosóficas que determinaram o pensamento e influenciaram o avanço científico de cada época. (PARANÁ, 2008, p. 66).

Diante disso, assumimos nesse trabalho a perspectiva de Cyrino e Pasquini (2010) ao afirmarem que não defendem o uso da História da Matemática como um recurso didático de uma forma recapitulacionista, no sentido de “reaver os caminhos trilhados”. Elas defendem

[...] uma conexão na qual os estudantes possam lidar criticamente com problemas que pertencem a uma cultura matemática, o como as ideias constituídas nessa cultura estão organicamente articuladas, de modo que possam produzir significados para conceitos, métodos e ideias constituintes dessa cultura, e perceber que certas noções estão naturalmente excluídas dessa cultura. Assumimos uma leitura epistemológica da história. (CYRINO e PASQUINI, 2010, p. 14)

Nesse sentido, nossa proposta não indica que os alunos recapitem toda a História da Matemática produzida pelos Babilônicos e sim compreendam como o sistema de numeração dessa civilização influenciou o nosso sistema e também, que outros povos utilizaram um uso diferenciado da abordagem matemática que assumimos hoje.

### **3. O SISTEMA DE NUMERAÇÃO BABILÔNICO**

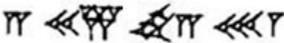
Babilônia foi a capital da antiga Suméria e Ácadia, no sul da Mesopotâmia (onde se localiza o Iraque atualmente). Foi fundada provavelmente em 1950 a.C. e, nessa região, utilizava-se como matéria prima para a escrita a argila. Os babilônios escreviam em tábuas de argila úmidas, e a cozinhavam num forno até endurecer. Uma das principais características do sistema numérico dos babilônios é a

utilização do sistema de numeração de base 60. Contudo para algarismos menores que 60 faziam uso da base 10. Podemos observar as relações entre as bases 10 e 60 na figura 1.

1	∩	11	∩ ∩	21	∩ ∩ ∩	31	∩ ∩ ∩ ∩	41	∩ ∩ ∩ ∩ ∩	51	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩
2	∩ ∩	12	∩ ∩ ∩	22	∩ ∩ ∩ ∩	32	∩ ∩ ∩ ∩ ∩	42	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	52	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩
3	∩ ∩ ∩	13	∩ ∩ ∩ ∩	23	∩ ∩ ∩ ∩ ∩	33	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	43	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	53	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩
4	∩ ∩ ∩ ∩	14	∩ ∩ ∩ ∩ ∩	24	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	34	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	44	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	54	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩
5	∩ ∩ ∩ ∩ ∩	15	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	25	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	35	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	45	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	55	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩
6	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	16	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	26	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	36	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	46	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	56	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩
7	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	17	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	27	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	37	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	47	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	57	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩
8	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	18	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	28	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	38	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	48	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	58	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩
9	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	19	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	29	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	39	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	49	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	59	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩
10	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	20	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	30	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	40	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩	50	∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩		

**Figura 1** – Sistema de Numeração Babilônica. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/aulas/1629/imagens/Aula7/imagem1.JPG>. Acesso em 31/08/2012.

Exemplificando, o número 524551 no sistema de numeração babilônico (base 60) seria escrito

na forma:  $2(60^3) + 25(60^2) + 42(60) + 31 =$  

Este sistema de numeração gerou conflitos até por volta do ano 300 a.C. devido ao fato de não ter um símbolo para o zero que representasse as potências ausentes de 60. Devido a isso foi inserido um símbolo para o zero, que consistia de duas cunhas pequenas, mas ele só era usado para indicar a potência ausente dentro do número, contudo quando a potência ausente estava no final ele não era indicado.

$$10\ 804 = 3(60^2) + 0(60) + 4 =$$


**Figura 2** – Representação do número 10804 no sistema de numeração babilônico. (EVES, 1995, P.36)

#### 4. ALGORITMO PARA CONVERSÃO DE NÚMEROS NA BASE 10 PARA A BASE 60.

Passos para a conversão de um número qualquer (x) na base decimal para a base hexadecimal:

1. Determine entre quais potências de 60 se encontram o numeral a ser convertido, analisando o Quadro 1.

$60^0$	1
$60^1$	60
$60^2$	3 600
$60^3$	216 000
$60^4$	12 960 000
$60^5$	777 600 000
$60^6$	46 565 000 000

**Quadro 1** – Potências cuja base da potenciação é 60 e os expoentes variam de 0 a 6.

2. Se  $60^b < x < 60^c$  com b, c números naturais e c sucessor de b, então efetue a divisão

$$\frac{x}{60^b} . \text{ Obtenha, pelo algoritmo euclidiano, } x = q_1 60^b + r_1 .$$

3. Se  $r_1$  for 0, encerre o algoritmo. Se  $r_1$  for não nulo, efetue as divisões:

$$\frac{r_1}{60^{b-1}}, \frac{r_2}{60^{b-2}}, \frac{r_3}{60^{b-3}}, \dots, \frac{r_n}{60^{b-n}} .$$

Onde  $r_n$  é resto da divisão de  $r_{n-1}$  por  $60^{b-(n-1)}$ . Faça as divisões até que  $b - n = 1$  ou  $r_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

4. Escreva o número na forma:

$$x = q_1 60^b + q_2 60^{b-1} + \dots + q_{n+1} 60^{b-n}$$

Para exemplificar, escreveremos, utilizando os passos descritos, o número 18 085 na base 60, ou seja, no sistema de numeração babilônico.

1. Determinar entre quais potências de 60 o número está. Nesse caso,  $60^2 < 18\ 085 < 60^3$ .
2. Dividimos 18 085 por  $60^2 = 3\ 600$ .

$$\begin{array}{r|l} 18\ 085 & 3600 \\ -18\ 000 & 5 \\ \hline 00\ 085 & \end{array}$$

3. Dividimos o resto (85) por  $60^{2-1} = 60^1 = 60$

$$\begin{array}{r|l} 85 & 60 \\ -60 & 1 \\ \hline 25 & \end{array}$$

4. Então, o número pode ser escrito como:  $18\ 085 = 5 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60 + 25$

## 5. MATERIAIS E MÉTODOS

Este artigo é resultado de um trabalho de conclusão de disciplina que realizamos na disciplina “Tópicos de Educação Matemática II” no 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina em 2011 sob orientação da Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini. Este trabalho consistia no desenvolvimento de um projeto que utilizasse uma das atuais tendências em Educação Matemática. Em nosso caso, escolhemos a História da Matemática, e por meio desta tendência, elaboramos a proposta que norteia esse artigo.

Primeiramente procuramos, em diferentes meios, materiais que fundamentavam o uso da História da Matemática no Ensino de Matemática. Em seguida, fizemos um levantamento em livros de História da Matemática sobre o sistema de numeração babilônico. Nessa perspectiva, já tínhamos uma

ideia inicial, fomentada por estudos individuais destes, que consistia na relação entre o sistema de numeração babilônico e as medidas de tempo, já que ambos sistemas utilizam a base hexadecimal. Por meio dessa ideia, estruturamos a proposta em formato de trabalho de conclusão de disciplina em 2011 e por orientação da professora decidimos compor esse artigo com a intenção de divulgarmos nosso trabalho.

## 6. PROPOSTA DE ENSINO

Esta proposta é direcionada a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Embora as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) afirmem que o conteúdo medidas de tempo deva ser iniciado no 6º ano, pois buscamos uma análise mais minuciosa dos conteúdos descritos. Além disso, cabe ao professor relacionar (ou não) com as medidas de ângulos, cujos submúltiplos são trabalhados no ano proposto e seguem a base 60.

Adotaremos um tempo de aproximadamente 3 aulas de 50 minutos para a aplicação da proposta. Nesse sentido, podemos observar que os conteúdos, muitas vezes trabalhados desassociados, tomariam mais tempo do que o proposto.

Primeiramente apresentaremos<sup>1</sup> aos alunos a história dos babilônicos e seu sistema de numeração, ainda não mencionando sua relação com a medida de tempo que utilizamos hoje. Nesse momento, é oportuno trabalhar com os alunos sobre a cultura e costumes dos povos dessa época, enriquecendo a aula com conhecimentos de outras áreas e situando os alunos a época trazendo os problemas que circundavam aqueles povos e que favoreciam a utilização do sistema de numeração hexadecimal.

Em seguida, apresentaremos aos estudantes exemplos de conversão de um número qualquer na representação babilônica para a numeração árabe (nosso sistema de numeração). Nesse ponto consideramos relevante que o professor busque por sugestões dos alunos para que possam realizar a conversão. Em uma inter-relação entre os conteúdos, se convir, é possível abordar as regras das ordens das operações nas expressões numéricas (tais quais aparecem no momento da mudança de bases).

Na sequência, faremos a exposição, da mesma maneira da etapa anterior, sobre a conversão de um número na representação indiarábica para a representação babilônica. Faremos essa abordagem por meio do algoritmo descrito anteriormente, embora não o apresentando propriamente, mas utilizando exemplos que usam o algoritmo, como aquele já trabalhado nesse artigo.

Após as etapas descritas, questionaremos os alunos com a pergunta de investigação: “No seu cotidiano, é possível perceber algum tipo de herança do sistema de numeração babilônico?”. Deixare-

---

1 Com o objetivo de facilitar a visualização da proposta, a abordaremos na primeira pessoa do plural.

mos os alunos responderem essa questão durante um tempo, caso eles não consigam, deixaremos com que eles pesquisem em casa, apresentando suas conclusões em uma aula futura (possivelmente já na terceira).

Em um momento posterior àquele que a turma conclui que a medição do tempo é uma herança do sistema babilônico, pretendemos iniciar o conteúdo (medidas de tempo) com base no que as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná objetivam; nesse contexto, esperamos que o aluno “realize transformações de unidades de medida de tempo envolvendo seus múltiplos e submúltiplos” (PARANÁ, 2008, p. 77).

É propício propor questões em que seja necessário que o aluno trabalhe com os submúltiplos da hora para que ele utilize o algoritmo aprendido na primeira etapa da aula. Com isso, a exploração das relações deve ser feita nesse momento, onde haverá o completo vínculo entre os conteúdos que propusemos trabalhar. Esse momento de exploração deve ser enriquecido com discussões, para que, assim, a ideia de utilizar um conteúdo vinculado ao outro tenha sentido.

## **7. CONSIDERAÇÕES**

No contexto trabalhado, observamos que a História da Matemática pode ser usada como uma importante estratégia para ensinar matemática. Contudo, um segundo passo seria a aplicação das ideias propostas, para validar a suposição descrita, trazendo, assim, contribuições para a elaboração de melhorias na teoria descrita. Analisando as falhas e o que foi positivo, poderemos reestruturar o que já foi pensado. É válido sempre lembrar que as observações realizadas em virtude da aplicação em uma turma não podem ser sempre generalizadas para todas, porém, por meio da prática docente, algumas generalizações podem ser válidas se bem apontadas e analisadas.

Para um trabalho com maior aproveitamento, há também a possibilidade da realização de um trabalho integrado com professores de outras disciplinas, como História, Geografia e Artes. Nesse sentido, um projeto interdisciplinar poderia contribuir para uma percepção, por parte dos alunos, de que a Matemática se relaciona com outras disciplinas, com situações reais e que a mesma não é isolada enquanto corpo de conhecimento.

Por meio da elaboração do trabalho, percebemos que a História da Matemática foi necessária e fundamental para que houvesse o vínculo proposto pelas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná. Com isso, ressalta-se a importância da utilização dessa tendência em aulas de Matemática.

Defendemos que o uso da História da Matemática, não de forma recapitulacionista, deve estar cada vez mais presente nas aulas de Matemática. Propostas que relacionam diferentes estratégias de diferentes povos com o que vem sendo apresentado em Matemática em sala de aula são relevantes já que os alunos possam observar, por meio delas, diferentes elementos que consistiam uma cultura matemática no passado e relacioná-los com o que vemos no presente. Além disso, por meio desta tendência, é possível constituir uma perspectiva humana para a Matemática, muitas vezes ausente nas salas de aula.

Por meio da aplicação dessa proposta, os alunos poderão observar elementos da cultura matemática dos babilônicos, e encontrar relações entre estes elementos e a cultura matemática atual. Diante disso, consideramos relevante que essa proposta seja aplicada em sala de aula e que seja reformulada a partir de dados obtidos dessa prática.

## 7. REFERÊNCIAS

BOYER, C. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo. Editora Edgard Blücher, 1996.

CYRINO, M. C. C. T.; PASQUINI, R. C. G. *Multiplificação e divisão de números inteiros: uma proposta para a formação de professores de Matemática*. Belém: SBHM, 2010.

D'AMBROSIO, U. *História da Matemática e Educação*. In: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (Org.) Cadernos CEDES 40. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, L. R. *Tudo é Matemática*, 6º ano. 4ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP. Editora da UNICAMP, 1995.

FAUVEL, J. A utilização da História em Educação Matemática. Tradução: Paulo Oliveira. In: VIEIRA, A; VELOSO, E. LAGARTO, M. J. *Relevância da História no Ensino da Matemática*. GTHEM/APM. Grafis, 1997.

GIOVANNI, J. R. GIOVANNI JUNIOR, J. R. *Matemática: pensar & descobrir*, 6º ano. São Paulo: FTD, 2005.

GIOVANNI JUNIOR, J. R. CASTRUCCI, B. *A conquista da Matemática*, 6º ano. São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, G. DOLCE, O. MACHADO, A. *Matemática e realidade*, 5ª série. São Paulo: Atual, 2005.

MIGUEL, A. MIORIM, M. A. *História na Educação Matemática: Propostas e Desafios*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MORI, I. ONAGA, D. S. *Matemática: ideias e desafios*, 5ª série. São Paulo: Saraiva, 2005.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica para o Estado do Paraná – Matemática*. Curitiba: SEED, 2008.

## C13

# O uso dos jogos educativos e a aprendizagem de geometria

Silva, L. R., Pereira, R. S. G.

# O uso dos jogos educativos e a aprendizagem de geometria

Lucieni Regina da Silva (lucieni\_silva@hotmail.com)

Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil.

Rudolph dos Santos Gomes Pereira (rudolph.matematica@gmail.com)

Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil.

## Resumo

A utilização de jogos no ensino da Matemática, principalmente no conteúdo de Geometria, constitui uma metodologia inovadora. Muitos alunos não têm uma base suficiente sobre os conceitos geométricos, este trabalho convida a uma reflexão sobre o ensino da matemática, o medo apresentado por alguns alunos frente a esta disciplina, a maneira como se concretiza a aprendizagem da Matemática, o conceito e uso do jogo no ensino da Matemática. O objetivo deste trabalho é mostrar a importância do jogo como metodologia de ensino e sua aplicação de maneira coerente com as propostas, sendo fundamentada na aprendizagem e não simplesmente no ato de jogar por jogar. O trabalho aponta também a reação dos alunos frente a uma situação de jogo, de desafio, para isto foi realizado um trabalho de campo, que foi concretizado com a aplicação de um jogo para os alunos da 7ª série do ensino fundamental para análise de expectativas dos alunos.

**Palavras-chave:** Jogos educativos, Ensino de matemática, Ensino de geometria.

## Abstract

The use of games in mathematics education, especially in the content of Geometry, is an innovative methodology. Many students do not have a sufficient basis on geometric concepts, this work invites a reflection on the teaching of mathematics, the fear displayed by some students face this discipline, the way he realizes the learning of mathematics, the concept and use of game in mathematics education. The objective of this work is to show the importance of the game as a teaching methodology and its application in a manner consistent with the proposals, being based on learning and not simply in the act of play by play. The work also points to the reaction of the students before a game situation, the challenge for this was done field work, which was achieved with the application of a game for the eighth graders of elementary education for the analysis of expectations students.

**Keywords:** Educational games, Teaching math, Teaching geometry.

## 1. Introdução

O ensino da Matemática, principalmente com relação aos conteúdos de Geometria, tem despertado o interesse de alguns estudiosos, visto que muitos alunos apresentam dificuldades de aprendizagem Matemática. O presente trabalho tem como objetivo apresentar o jogo como metodologia no ensino da Geometria no ensino fundamental.

No segundo capítulo abordamos a Educação Matemática, citando a forma de ensino de matemática que ainda vem sendo utilizado por alguns professores e que tem como consequência algumas vezes despertado nos alunos o medo desta disciplina. O terceiro capítulo tem como tema a aplicação de jogos no ensino da Matemática, visando a aplicação destes e o enriquecimento das aulas por meio desta metodologia que está sendo adotada por alguns profissionais da educação. Também se faz um alerta quanto aos cuidados que se deve ter ao utilizar os jogos em sala de aula. O quarto capítulo se refere a aprendizagem da Geometria, um breve histórico, o seu ensino nas escolas, as dificuldades que os alunos encontram referente seus conteúdos, durante as atividades escolares. A partir destes tópicos acima, foi realizado um estudo de campo, onde apresentamos no quinto e último capítulo a aplicação de um jogo “DOMINÓ DAS QUATRO CORES” com os alunos do ensino fundamental, mais precisamente da 7ª série, de dois municípios distintos situados no norte do estado do Paraná, cujo objetivo foi avaliar a aceitação dos alunos quanto utilização do

jogo em sala de aula, e que também favorecia a verificação de sua atitude social com os colegas, percepção e raciocínio lógico na solução do problema apresentado, assim como o nível de entrosamento destes alunos com esta metodologia.

## **2. O ensino da matemática**

A matemática faz parte do cotidiano de todas as pessoas e durante todo o tempo nos deparamos com situações que envolvem esta disciplina, seja um cálculo, uma forma geométrica, um problema lógico entre outros, e por este motivo esta disciplina há muitos anos integra o currículo escolar.

A técnica utilizada frequentemente no ensino da matemática em que o professor propõe aos alunos o conteúdo oralmente, partindo de definições, modelos, demonstrações e exercícios de fixação, privilegia o aprendizado por meio da reprodução, e dessa maneira percebe-se que não há relação professor e aluno, o que desprivilegia a troca de informações e de saberes.

Geralmente o sucesso ou fracasso escolar estão ligados a fatores que podem ser de ordem psicológica, social, emocional, orgânica, cultural e intelectual, entretanto podem também estar relacionados com fatores específicos do contexto escolar que podem ser a relação professor e aluno, a formação do professor, a própria cultura da escola e também com a metodologia adotada pelo professor.

Segundo Rabelo (2002), apesar da matemática estar presente na vida das pessoas constantemente, a maioria delas não a compreendem, a temem ou odeiam. Isto ocorre muitas vezes pelo fato de que em algumas escolas, o ensino formal continua sendo utilizado pelos professores.

A aprendizagem escolar consiste na assimilação de conteúdos, realizados em atividades que possibilitem a utilização de conhecimentos já construídos na fase anterior à vida escolar juntamente com a vontade, e o desejo de aprender.

Para Bicudo (1985, p. 48), “ser professor é preocupar-se com o ser do aluno, tentando auxiliá-lo a conhecer algo que ele, professor, já conhece e que julga importante que o aluno venha a conhecer, também”. Esta postura deve ser adotada por todos os profissionais, para que sejam atingidos os objetivos do processo ensino e aprendizagem.

De acordo com Ausubel (1976) se fosse preciso reduzir toda a psicologia educacional a uma só norma, diria que o fator independente mais importante, influenciando a aprendizagem seria tudo aquilo que o aprendiz já sabe. Assim ocorre a aprendizagem significativa, o processo em que novas idéias, novos significados são recebidos e vinculados com os que o aluno já possui.

Com o passar dos anos, alguns pesquisadores e educadores despertam o interesse pela dificuldade que alguns alunos apresentam em aprender a Matemática, como também os obstáculos encontrados por alguns professores em conseguir ensinar este conteúdo matemático.

[...] Nós, professores de Matemática, que deveríamos estimular o pleno raciocínio, somos os mais ferrenhos cobradores de automatismos; se dermos um exercício ou um problema, exigimos uma resposta por um caminho ensinado, quando deveríamos animar o encontro desse resultado por vários caminhos. Só assim a capacidade de conjecturar e relacionar se desenvolveria (RABELO, 2002, p. 63).

A Educação Matemática tem como objetivo propiciar ao estudante compreender a Matemática por meio de situações concretas que o leve a encontrar os resultados sem que lhe seja antes informado pelo professor.

Uma das metodologias que estão sendo utilizadas nas escolas são os jogos, pesquisadores afirmam que esta seja uma maneira prazerosa de aprender. Em muitos textos voltados para a Educação Matemática, encontramos os jogos como proposta de trabalho importantes visto que motiva as aulas de Matemática, despertando nos alunos o gosto pelo aprendizado.

### **3. A aplicação de jogos no ensino da matemática**

Os jogos são importantes na formação ou enriquecimento de certas habilidades, como a organização, a atenção, a concentração, a ordem, habilidades estas que também são necessárias ao aprendizado da Matemática. Pesquisadores defendem a utilização de jogos no ensino da Matemática, afirmando que esta desperta o interesse dos alunos, fazendo com que gostem de aprender e que façam da aprendizagem um processo divertido e interessante.

Borin (1996, p. 09) afirma que “a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados pelos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la”.

Os jogos didáticos são capazes de contribuir de diversas maneiras para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, porque direciona o jogador a um processo de interpretação de informações, observação de dados e aplicações de hipóteses.

O jogo constitui uma metodologia excelente para ser utilizada pelos professores, mas apesar das vantagens na utilização dos jogos didáticos como ferramenta de ensino ela depende de esforços e comprometimento tanto do professor quanto dos alunos.

De acordo com Santana (2006, p. 01) “é necessário deixar claro o objetivo dos jogos no ensino da Matemática para que este não se torne apenas um lazer nas salas de aula, sem oferecer nenhum auxílio ao processo de ensino/aprendizagem”. O professor não deve simplesmente

apresentar o jogo aos alunos e deixar que brinquem soltos e sozinhos. Deve conduzir totalmente a atividade, para que realmente atinja os objetivos.

A finalidade de se utilizar os jogos nas aulas de Matemática, não só estimulam a formação de novos conhecimentos, mas também, propicia a interação entre espaço, velocidade, tempo, lógica e não só envolve os números nas suas aplicações.

#### **4. Aprendizagem de geometria**

A palavra Geometria é de origem grega, foram os gregos que nomearam esta parte da Matemática, (geo de terra; metria referente a medida). Este povo desenvolveu a teoria da Geometria baseados na Geometria prática dos egípcios (CRESCENTI, 2005).

É muito grande o número de alunos que não entendem a Geometria que deve ser ensinada nas escolas, vários apresentam pavor por esta área da Matemática e simplesmente nem querem procurar entender.

A Geometria está presente no cotidiano, se observarmos em todos os lugares poderemos notar sempre algo que esteja relacionado a uma forma geométrica, um ângulo, uma área, um volume. Consiste em um campo de ensino riquíssimo em aproveitamento, ou seja, aplicação prática que tem a capacidade de ajudar a tomar decisões e resolver problemas que em algumas ocasiões apenas a álgebra não resolve.

O ensino de Geometria segundo algumas pesquisas vem sendo abandonado, pois fica sempre no segundo plano na visão de alguns professores. “Este costume de programar a geometria para o final do ano letivo é, de outro modo, reforçado pelos livros didáticos que, pelo que pude observar, abordam esses temas quase sempre por último” (PAVANELLO, 1989, p. 06).

Dentre as dificuldades encontradas no ensino de Geometria, a principal se refere a relação entre os conteúdos geométricos e a visualização que muitos alunos apresentam durante as aulas expositivas, pois o professor tem dificuldade de transmitir o conteúdo e os alunos de visualizarem as características. O professor enquanto educador desempenha um papel muito importante na sala de aula, ele é responsável pela direção de todo processo de ensino e aprendizagem. Em relação ao ensino da Geometria sua posição como educador necessita de uma grande sensibilidade, já que necessita trabalhar algumas formas visuais com alguns conceitos e também com algumas propriedades.

Pela necessidade de despertar o interesse dos alunos pela Matemática, alguns educadores propõem algumas metodologias para se trabalhar os conceitos de Matemática em sala de aula, considerando que os alunos precisam participar das atividades, resolvemos aplicar um jogo para

conferir a sua posição frente a situações lúdicas envolvendo desafio e trabalho em grupo, que descrevemos no capítulo seguinte.

## 5. Metodologia

Alguns jogos são materiais que auxiliam a elaboração do pensamento Geométrico, já que permitem o desenvolvimento de algumas habilidades como a percepção visual, pois possibilita a visualização das formas e dos traçados que compõem o desenho.

A fim de verificar os conhecimentos sobre os conteúdos da Geometria, escolheu-se um jogo denominado DOMINÓ DAS QUATRO CORES (SILVA & KODAMA, 2004), para ser aplicado nas turmas de 7ª série do ensino fundamental de duas escolas - Escola 1 e Escola 2 - fixadas em dois municípios distintos do norte pioneiro do Estado do Paraná. Cujo objetivo é analisar a aceitação dos alunos frente um desafio geométrico proposto em forma de quebra-cabeça.

A atividade proposta aos alunos objetiva a construção de uma figura geométrica (quadrado) utilizando todas as peças que compõem o jogo conforme as regras do mesmo. No início realizou-se um sorteio para divisão dos grupos. Na seqüência apresentou-se as peças que compõem o jogo e os alunos foram questionados sobre as características destas. Abaixo são apresentados alguns questionamentos feitos no decorrer da aplicação do jogo nas duas escolas.

### Escola 1

*Estagiária: Vejam esta figura que tenho em minhas mãos, qual a forma geométrica dela?*

*A. M.: Quadrado.*

*Estagiária: Por que é denominado de quadrado?*

*A.M.: Por que tem quatro lados.*

*R.: É eles tem as mesmas medidas.*

*Estagiária: E esta figura aqui? (mostrando para os alunos o retângulo menor)*

*G.: Este é um retângulo.*

*Estagiária: E quais as características do retângulo?*

*A.M.: Ele também tem quatro lados, mas os lados não tem as mesmas medidas.*

### Escola 2

*Estagiária: Quero que vocês identifiquem as figuras geométricas que compõem o jogo.*

*J.: Você tem quadrados e retângulos.*

*Estagiária: Muito bem! E quais as características de cada uma delas? Procure se lembrar do que já estudou sobre as formas geométricas.*

*J.: Este lado aqui é igual a este outro.*

*Estagiária: E por que chamamos esta figura de quadrado?*

*M: Porque tem quatro lados! QUADRILÁTERO!!*

*Estagiária: E o retângulo? Quais as características dele?*

*H.: Os comprimentos são iguais e as larguras também. Quero dizer, tem quatro lados também, mas as medidas são diferentes.*

*Estagiária: O que mais vocês podem perceber em relação a estas peças?*

*H.: Tem retângulos de dois tamanhos.*

*J.: E quadrados de um tamanho só.*

*H.: O retângulo maior tem três vezes o tamanho do quadrado.*

*Estagiária: Isso mesmo. Vamos agora para a nossa atividade. Montar o quadrado utilizando todas as peças.*

Alguns alunos foram participativos durante estes questionamentos, outros, porém se apresentavam desligados não demonstrando interesse. Após este diálogo os grupos se dirigiram às peças e começaram a montar a figura proposta.

Interessante notar que nesta fase da atividade, aqueles alunos que antes se mostravam desinteressados, alteraram o comportamento pois estavam ansiosos em conseguir construir a figura antes do outro grupo.

### **Escola 1**

*R.: Ei, presta atenção, azul próximo de azul não pode!*

*A.M.: Então, se eu colocar aqui.*

*L.: Ah, mas também não pode ser aí, vai ficar perto daquela outra peça azul. Os vértices de mesma cor não podem ficar juntos, lembra?*

*R: Ah, mas se você trocar estas duas peças, daí você pode colocar esta ali.*

O aluno R. é muito atencioso, e suas companheiras do grupo A.M. e L. quase conseguiram concluir a atividade.

### **Escola 2**

*H.: Terminei!*

*J.: Vamos ver. Ih, as cores próximas não pode. Então não está certo.*

*M.: Ei, se você trocar estas duas peças dá certo.*

*H.: Não, está errado. Formamos um retângulo, e temos que formar um quadrado.*

## **6. Conclusão**

Percebe-se que os alunos gostam deste tipo de atividade que desperta neles desafio e que a dinâmica estabelecida pelo jogo propicia a integração e a socialização deles, visto que se ajudam e

utilizam o raciocínio para escolher as melhores estratégias durante a atividade. Foi perceptível também a atenção deles pelas regras do jogo, visto que estavam atentos a estas durante a atividade. Em decorrência do tempo disponibilizado pela escola para aplicação da atividade, esta não pôde ser concluída com êxito, pois os alunos não conseguiram montar o quadrado. Contudo apresentaram muita força de vontade, atenção e concentração, acharam que o tempo para execução do trabalho foi curto solicitando mais tempo para concluir a atividade. Com esta afirmação constatamos que a utilização dos jogos é satisfatória, pois os alunos demonstraram interesse em continuar a atividade.

## 7. Fotos da aplicação do jogo nas escolas e do jogo montado



## Referências

AUSUBEL, D. *Psicologia educativa: um ponto de vista cognoscitivo*. México: Trilhas, 1976.

BICUDO, M A.V. *Educação Matemática*. São Paulo: Moraes, 1985.

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME-USP, 1996.

CRESCENTI, E. P. *Os professores de Matemática e a Geometria: opiniões sobre a área e seu ensino*. São Carlos – SP. 2005. Pós-Graduação. Disponível em: <<http://www.bdt.d.ufscar.br/tdebusca/arquivo.php?codArquivo=840>>. Acesso em: 27 de jun. de 2009.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do Ensino de Geometria no Brasil: uma visão histórica*. Dissertação (mestrado). Campinas: Universidade de Campinas, 1989.

RABELO, E. H. *Textos matemáticos: produção, interpretação e resolução de problemas*. 3ª ed. Ver. E. Ampl. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

SANTANA, G. F. *Utilizando Jogos Matemáticos como Auxiliadores no Ensino/Aprendizado*. Disponível em: <<http://www.unimesp.edu.br/>> Acesso: 25 de jul. de 2009.

SILVA, A. F.; KODAMA, H. M.Y. *Os jogos no ensino da matemática*. 2004. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/OF11.pdf>> Acesso em: 30 de ago. de 2009.

C14

**O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA  
COMO RECURSO À RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS: ABORDANDO CONCEITOS  
DE PROGRESSÕES**

Silva, M. B., Ferreira, G. F.

# O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ABORDANDO CONCEITOS DE PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

Maurício Barbosa da Silva (e-mail: mauricioskai@gmail.com)  
Guilherme Francisco Ferreira (e-mail: guilhermefrancisco7ferreira@gmail.com)  
FAP – Faculdade de Apucarana, PR

## Resumo

Com base nos pressupostos do uso da História da Matemática, enquanto alternativa pedagógica, serão apresentadas no seguinte trabalho algumas considerações quanto as potenciais qualidades de se abordar a Matemática, no ensino e aprendizagem de conceitos sobre progressão aritmética e geométrica, por meio da Resolução de Problemas articulada a História da Matemática. Pretende-se também apresentar um relato de duas atividades desenvolvidas com alunos do segundo ano do ensino médio na modalidade técnico administrativo. A primeira atividade apresenta o conteúdo “progressões”, sendo trabalhado com o auxílio de um pequeno trecho que revela parte da História do matemático Carl Friedrich Gauss e sua eficaz estratégia de somar os números inteiros de um a cem. Já a outra atividade, para desenvolvê-la foi apresentada um trecho do livro “O homem que calculava”, que conta parte da lenda de como surgiu o jogo xadrez. Posteriormente, foram lançadas algumas situações problemas para a abordagem de determinados conceitos.

**Palavras-chave:** História da Matemática, Resolução de Problemas, Conceitos, Progressões.

## 1. Introdução

Consideramos o uso da História da Matemática junto à Resolução de problemas, uma maneira de proporcionar ao professor aumento das possibilidades de trabalhar a Matemática de forma mais significativa e produtiva. Pautados por argumentos que reforçam o uso da história como subsidiária a outras tendências metodológicas de ensino da Matemática. Ao trabalhar as atividades relatadas no artigo em questão, pretendemos verificar se é vantajoso o uso da História da Matemática no desenvolvimento de, principalmente, expressões Matemáticas.

## 2. Resolução de Problemas e História da Matemática

Nós enquanto educadores matemáticos, buscamos meios para tornar a educação mais dinâmica, sendo um de nossos objetivos derrubar o modelo pragmático e fragmentado de ensino. Trabalhando para este fim, temos por auxílio um arsenal de Tendências Metodológicas elencadas da seguinte forma pelas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2008, p. 61): *resolução de problemas*; modelagem matemática; mídias tecnológicas; etnomatemática; *história da matemática* e investigações matemáticas; dentre estas, destacamos a Resolução de Problemas e a História da Matemática.

A Resolução de Problemas é uma metodologia importante não somente à Matemática, mas, em Matemática, situações-problema podem possibilitar que alunos construam estratégias “planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios

erros cometidos para a busca de novas alternativas” (BRASIL, 1998, p. 52), o que promove o desenvolvimento do espírito de pesquisador, forçando-os a experimentar, organizar e sistematizar tanto dados quanto resultados; fortalecendo suas estruturas cognitivas, aumentando a capacidade de raciocinar, atribuindo-lhes responsabilidades, resultando em alunos mais autônomos e com maior capacidade comunicativa e argumentativa. (BRASIL, 1998).

Para ser possível trabalhar em consonância à Resolução de Problemas, o professor deve ter como princípios básicos a “exposição oral e resolução de exercícios” (PARANÁ, 2008, p. 63); tornando assim a aula dinâmica. Nesta perspectiva, o professor assume um papel do coadjuvante, fugindo da figura imposta tradicionalmente daquele que detém o conhecimento, tornando-se o organizador da aprendizagem, sendo o responsável por construir pontes entre o problema e os alunos, fornecendo informações que não poderiam ser encontradas por eles, facilitando esta relação (aluno-problema), para que em outro momento possa se tornar (o professor) um mediador entre conhecimento e aluno, levantando questionamentos e contestando os resultados apontados pelos educandos (BRASIL, 1998).

Logo, à luz da metodologia de Resolução de Problemas, considera-se que:

Cabe ao professor assegurar um espaço de discussão no qual os alunos pensem sobre os problemas que irão resolver, elaborem uma estratégia, apresentem suas hipóteses e façam o registro da solução encontrada ou de recursos que utilizaram para chegarem ao resultado. Isso favorece a formação do pensamento matemático livre do apego às regras. (PARANÁ, 2008, p. 63)

Vê-se a Resolução de Problemas como um dos métodos que podem tornar as aulas de Matemática atividades ativas e interativas (necessidade apontada pelos PCN, 1998). Além disso, ao trabalhar com Resolução de Problemas, “o aluno envolve-se com o ‘fazer’ matemática no sentido de criar hipóteses e conjecturas e investigá-los a partir da situação problema proposta” (D’AMBRÓSIO, 1989, p. 17); portanto, uma possibilidade de gerar experiência entre aluno e conhecimento matemático, sendo que “ninguém pode aprender da experiência de outro, a menos que essa experiência seja de algum modo revivida e tornada própria” (BONDÍA, 2002, p. 27), ou seja, o aprendizado é fruto da experiência entre o eu e o conhecimento, no caso, conhecimento Matemático.

Dentre os encaminhamentos metodológicos apontados pelas DCEs (PARANÁ, 2008) há também a História da Matemática. De acordo com as Diretrizes, um dos objetivos da disciplina Matemática na escola, é que os estudantes compreendam sua natureza e relevância à humanidade; a História da Matemática tem papel fundamental a esta compreensão, pois é um componente necessário a este processo.

Na busca por compreender como a História da Matemática pode desempenhar este papel a

nível didático, consideramos a posição apresentada por Miguel (1995). Em seu texto: “As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores”, o autor enumera 12 argumentos que reforçam o uso da História da Matemática como uma ferramenta que potencializa a aprendizagem, sendo estes: 1) *A História é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da matemática*; 2) *A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática*; 3) *A História constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática*; 4) *A História é uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas*; 5) *A História é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino*; 6) *A história constitui num instrumento de formalização de conceitos matemáticos*; 7) *A História é um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico*; 8) *A História é um instrumento unificado dos vários campos da matemática*; 9) *A História é um instrumento promotor de atitudes e valores*; 10) *A história constitui-se num instrumento de conscientização epistemológica*; 11) *A História é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática*; e 12) *A História é um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural*.

Dentre estes argumentos, demos ênfase em três deles na execução de nosso projeto. O primeiro dos argumentos escolhidos foi: *A História é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da matemática*. Segundo o autor, este argumento é válido, pois a História da Matemática permite o vislumbre, tanto por parte do aluno quanto para o professor, de como se deu evolução da Matemática, cai a imagem de alguém constrangido por forças e hábitos, dando lugar a um ser “capaz de observar informações provenientes de sua fisiologia interna, de seu meio físico e, sobretudo no homem, de seu ambiente social” (EVANS, apud. MIGUEL, 1995, p. 76). Assim como na resolução de problemas, a História da Matemática possibilita maior envolvimento entre alunos e Matemática, pois em ambos os casos há uma mudança na forma como os alunos se deparam com esta ciência, ela “passa” da categoria de intocável e maçante, para uma condição de alcançável e desafiadora; tanto a Resolução de Problemas quanto a História da Matemática, quando usados para este fim, são motivadores.

Enfatizamos também o quarto argumento: *A História é uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas*. Na História da Matemática, encontramos várias situações que podem ser adaptadas à sala de aula como problemas. Sob este aspecto “a resolução de um problema constitui-se, por si só, numa atividade altamente motivadora” (MIGUEL, 1995, p. 80), pois a história é um mecanismo que eleva o potencial motivador do problema. Além disso, problemas históricos são motivadores, pois servem para esclarecer e reforçar conceitos que estão sendo estudados; é um canal de informação cultural e

sociológica; proporcionam a verificação das habilidades matemáticas de nossos antepassados e possibilita a percepção de uma continuidade entre a matemática do passado e a do presente. Além disso, dada esta função à História da Matemática, torna-a subsidiária da Resolução de Problemas, fornecendo os problemas históricos que serão abordados em sala de aula.

O último dos argumentos ao qual damos ênfase é: *A História é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino*. É sob este ponto de vista que também trabalhamos a Resolução de Problemas, trazendo uma matemática na qual é possível adentrar, com problemas “ainda” sem respostas, mas que podem ser respondidos com certo esforço. Da mesma forma que, abordar a História da Matemática em sala de aula traz essa realidade aos alunos, permitindo-os acharem-se mais capazes de resolvê-la.

Todos os argumentos apresentados por Miguel tem seu valor, neste caso decidimos por pautarmos nossas ideias sobre os três que foram detalhados acima. É importante salientar que usar História da Matemática apenas como uma ferramenta à motivação pode não ser a melhor das opções, pois, desta forma, ela acarreta em mais um tipo de conhecimento a ser adquirido além da Matemática, e quando explorada de maneira profunda e/ou abrangente, acaba representando um momento desconexo ao conteúdo matemático trabalhado.

Nas atividades descritas a seguir, nossa intenção foi fazer da História da Matemática um auxiliar à Resolução de Problemas em uma aula de progressão aritmética e geométrica; relacionamos uma à outra, assim como bem afirma Viana (2000, p. 4) “Todavia, sou a favor do ‘Uso Didático da História da Matemática’ como uma Tendência dentro da Educação Matemática. Como? Ora é muito simples: associando o conhecimento da História da Matemática às demais tendências [...]”.

### **3. Desenvolvimento das atividades**

Frequentemente, o professor de Matemática se depara com comentários do tipo: *“Para que eu vou usar isso? Quem inventou essas fórmulas? Porque essas fórmulas são assim? Da onde saiu isso?”*. Entendemos aqui tais indagações como incentivos para o professor buscar, em suas aulas de Matemática, maneiras mais atrativas e desafiadoras de conduzi-las. O relato que apresentamos consiste em duas atividades sobre o conteúdo progressões.

#### **Primeira atividade**

A fim de lançar a situação problema, apresentamos aos alunos um pequeno trecho do Livro *“A rainha das ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática”*, que versa

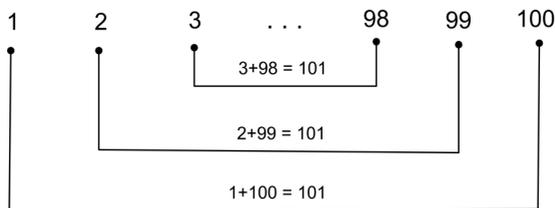
sobre parte da infância do Matemático Carl Friedrich Gauss e sua estratégia para somar os inteiros de um a cem:

Tendo sido enviado à escola aos sete anos, aos nove começou a receber aulas de aritmética de um obscuro professor primário chamado Buttner, cujo nome somente entrou para a História por haver ele cruzado o glorioso caminho de Gauss. Buttner, dentro do que prescreviam os métodos de ensino da época, costumava ordenar a seus alunos que fizessem cansativos exercícios envolvendo somas, subtrações, multiplicações e divisões. Certo dia ele mandou as crianças somarem os inteiros de 1 a 100, esperando, com isso, mantê-los ocupados por bastante tempo. Para sua surpresa, o garotinho Gauss, depois de poucos minutos, dirigiu-se à mesa do professor e entregou-lhe uma pequena lousa com o resultado correto: 5.050. Ao contrário dos colegas, que haviam mergulhado mecanicamente no trabalho, Gauss preferiu antes meditar sobre a questão. (GARBI, 2010, p. 270)

Dando continuidade, foi proposta aos alunos a seguinte situação problema: “*Qual é a soma de todos os números inteiros de um a cem?*”.

Com o problema, pretendia-se incentivar os alunos por meio do fato notável de Gauss, ainda criança, ter realizado tal soma de maneira rápida e eficaz. Depois de poucos minutos certo aluno, que já havia tido contato com o conteúdo em um momento extracurricular, sugeriu a seguinte observação: os números de um a cem ordenados de forma crescente configuram uma progressão aritmética de razão um (Figura – 1) em que a soma do primeiro com o último, do segundo com o penúltimo, e assim sucessivamente, são iguais. Notada a observação, perceberam que a soma seria o produto de cinquenta por cento e um.

**Figura 1 – Esquema da soma dos números inteiros de um a cem**



Fonte: Autor do trabalho, 2012.

De fato, foi esclarecido aos alunos ser essa a estratégia utilizada por Gauss para realizar tal soma. São cinquenta pares, que quando somados, resultam em 101. Então, a soma total é 5050. Como os alunos já haviam estudado sobre as premissas de progressão aritmética (representação dos termos, termo geral, razão, etc.), a próxima indagação lançada foi: “*Como generalizamos a soma dos termos de uma progressão aritmética?*”.

Depois de algumas discussões entre alunos e professor, chega-se a seguinte conclusão: para somar os inteiros de um a cem, foi multiplicada a soma de um termo e seu equidistante em relação

ao termo central pela metade do número de termos. Logo, a expressão será descrita da seguinte forma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}$$

Onde **n** é o número total da PA (progressão aritmética), **a<sub>1</sub>** o primeiro termo e **a<sub>n</sub>** o enésimo termo.

## Segunda atividade

Com atividade em questão, pretendia-se elaborar com os alunos a expressão relativa ao termo geral de uma progressão geométrica. Para isso foi apresentado um trecho do livro “*O homem que calculava*”. O texto apresenta como provavelmente ocorreu a invenção do jogo Xadrez, onde o inventor do jogo faz o seguinte pedido como recompensa:

Dar-me-eis um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro. — Insensato! - clamou o rei. - Onde foste aprender tão grande desamor à fortuna? A recompensa que me pedes é ridícula. Bem sabes que há, num punhado de trigo, número incontável de grãos. Devemos compreender, portanto, que com duas ou três medidas de trigo eu te pagarei folgadoamente, consoante o teu pedido, pelas sessenta e quatro casas do tabuleiro. Mandou o rei chamar os algebristas mais hábeis da corte e ordenou-lhes calculassem a porção de trigo que Sessa pretendia. (TAHAN, 2008, p. 121)

Depois de apresentado o trecho foi lançada a seguinte indagação aos alunos: “*Quantos grãos de trigo o rei Ladava deveria pagar a Sessa somente pela última casa do tabuleiro?*”.

Certamente continuando o processo indutivo, que Sessa sugeriu para o pagamento dos grãos, chega-se ao total equivalente à sexagésima casa do tabuleiro. Porém, os alunos concordaram que seria inviável tal estratégia. Observando o padrão da quantidade de grãos paga por casa, alguns alunos notaram que esta poderia ser escrita na forma de potência (quadro – 1). Logo, com a ajuda do professor, encontraram a expressão relativa à quantidade de grãos de trigo paga por uma determinada casa.

### Quadro 1 – quantidade de trigos pagos por casa

Casa 1 = $1 \cdot 2^0$
Casa 2 = $1 \cdot 2^1$
Casa 3 = $1 \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^2$
Casa 4 = $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^3$
⋮
Casa n = $1 \cdot 2^{n-1}$

Fonte: Autor do trabalho, 2012.

Prosseguindo a atividade, encontraram o total pago pela sexagésima casa por meio da expressão encontrada e, por meio da mesma, de forma análoga, chega-se na expressão do termo geral de uma progressão geométrica:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Em que  $a_n$  é o enésimo termo,  $a_1$  o primeiro termo e  $q$  a razão da progressão. Posteriormente foram trabalhados, mais profundamente, tais conceitos no decorrer da atividade.

## 4. Conclusão

Pautados nos argumentos apresentados, e na relação entre conhecimento, professor e alunos, que percebemos durante a realização das atividades relatadas, consideramos ser vantajoso fazer uso do recurso da História da Matemática mesclada à Resolução de Problemas, pois pudemos perceber o efeito motivador causado por esta nos alunos, que proporcionou um ambiente voltado à exploração dos conceitos matemáticos. Desta forma, acreditamos que as aulas foram mais significativas por conta do uso articulado destes recursos metodológicos.

Portanto, a utilização destas tendências foi significativa para o fator motivador à experiência matemática por parte dos alunos, o que, sob a perspectiva adotada, é o caminho que conduz à aprendizagem.

## 5. Referências

BONDÍA, Jorge Larrosa. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. **Universidade de Barcelona**, Espanha, n. 19, p.20-28, Jan/Abr, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** - ensino de quinta à oitava série. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. DF. 1989. P. 15-19. Disponível em:

<[http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diaadia/arquivos/File/conteudo/artigos\\_teses/MATEMATICA/Artigo\\_Beatriz.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diaadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf)>. Acesso em: 01 set 2012.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Revista Zetetiké**, Unicamp, Campinas, v.5, n.8, p. 73-104, Jul/Dez, 1997.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares Estaduais**. Curitiba: [s.n.], 2008.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 71. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

**C15**

**MatEpub: Livros Eletrônicos Públicos de  
Matemática com Folhas de Estilo CSS**

Sodré, U., *Et al.*

# MatEpub: Livros Eletrônicos Públicos de Matemática com Folhas de Estilo CSS

Ulysses Sodré (e-mail:ulysses@uel.br)

Sônia Ferreira Lopes Toffoli (e-mail:sonialopes@uel.br)

Márcia Carvalho D'Amico de Paula Machado (e-mail:marcia@uel.br)

Dep. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, Brasil

## Resumo

Neste trabalho, nós apresentamos a situação atual do Projeto MatePUB: Matemática Essencial em Livros Eletrônicos EPUB, que está construindo livros eletrônicos públicos EPUB gratuitos com conteúdo matemático. As dificuldades para produzir livros de Matemática estão associadas à falta de bons navegadores para a Web que renderizam todos os símbolos matemáticos. Como a Web não tem tratado de forma adequada o problema, temos produzido livros eletrônicos utilizando folhas de estilo CSS para gerar a maioria dos símbolos e expressões matemáticas sem recorrer a imagens gerando símbolos e expressões matemáticas em páginas XHTML.

**Palavras-chave:** livro, eletrônico, epub, gratuito, matemática, folhas, estilo, css.

## 1 Introdução

Neste trabalho, nós **apresentamos** a situação atual do Projeto MatePUB: Matemática Essencial em Livros Eletrônicos EPUB, que está construindo livros eletrônicos públicos EPUB gratuitos com conteúdo matemático. Este tipo de livro não é muito comum em nosso meio, haja vista as dificuldades de produzir boas páginas de Matemática que possam ser renderizadas com todos os símbolos matemáticos. Existe a expectativa que os novos navegadores da Web possam produzir uma boa saída gráfica dos símbolos, o que facilitaria a produção de material com matemática em todos os níveis. Infelizmente, a Web não tem cuidado de uma forma adequada sobre este problema e muitas pessoas ou empresas produzem arquivos de formato PDF que geram saídas de boa qualidade gráfica. É exatamente nesse contexto que entram os livros eletrônicos como um formato gratuito e um possível substituto para o formato PDF. Neste trabalho, nós tratamos de alguns procedimentos para gerar símbolos e expressões matemáticas em páginas XHTML, visando a produção dos livros eletrônicos. Mostramos também que já é possível criar livros eletrônicos usando apenas folhas de estilo CSS.

## 2 Página Matemática Essencial

A página Matemática Essencial, iniciou as suas atividades em 1997, com algumas páginas básicas de Matemática. Foram desenvolvidos vários projetos para construir páginas em HTML. Na esteira dessa atividade, foram ofertados vários cursos em HTML para alunos de extensão. O trabalho de atualização das páginas em XHTML foi realizado diversas vezes. Ocorreu um aumento significativo dos materiais da Página Matemática Essencial. Em diversas ocasiões realizamos estudos sobre símbolos matemáticos, dando ênfase em: (a) Entidades de caracteres disponíveis em html; (b) Construções de elementos matemáticos com MathML; (c) Uso do  $\LaTeX$  na construção de símbolos, via `dvi.png`; (d) Arquivos com a extensão `png`; (e) Inserção de arquivos gráficos: `jpg` e `SVG`, e (e) Uso do MathJax com o  $\LaTeX$ .

## 3 Projetos desenvolvidos até o momento

Até a presente data, já desenvolvemos quatro projetos de Extensão, todos eles visando a criação de páginas com materiais e tutoriais relacionados com a Matemática. Em todo momento, demos ênfase a uso de programas gratuitos e também oferecemos materiais gratuitos a todos os interessados.

Cada um desses projetos é desenvolvido em uma média de três anos, atende a comunidade universitária e produz materiais que ficam disponibilizados na Internet, além de auxiliar e atender alunos do curso de Matemática da UEL. Os quatro projetos citados são:

- *MatWeb: Matemática pela Internet*, que trata de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Já encerrado.
- *MatSup: Matemática Superior pela Internet*, que trata de Matemática para o Ensino Superior. Já encerrado.
- *SacMat: Sistemas de Auxílio Computacional em Matemática*, que produziu Tutoriais ampliados de programas computacionais de Matemática, traduzidos para o português. Já encerrado.
- *MatePUB: Matemática em Livros Eletrônicos EPUB*, que está produzindo Livros eletrônicos públicos (formato EPUB) de Matemática. Em andamento.

## 4 Principais Características de um livro eletrônico EPUB

Entre as principais características de um livro eletrônico EPUB, temos que: (a) Este tipo de livro é gratuito e de código aberto; (b) O texto do livro é redimensionável nas telas de computadores e de equipamentos móveis de comunicação; (c) Aceita imagens *inline* dos tipos *raster* e vetoriais; (d) Os dados de informação são imersos nos códigos fonte; (e) Possui suporte a Direitos Autorais (DRM: Digital Rights Management); (f) Aceita folhas de estilo CSS; (g) Tem suporte para gerar formatos alternativos do mesmo arquivo-fonte; (h) Usa interna e externamente o XML para melhorar o livro EPUB, e (i) A Adobe, que vende o *PDF Writer* financia o formato EPUB para livro eletrônico, que poderá concorrer com o formato PDF.

## 5 Contraste entre livros eletrônicos de literatura e de Matemática

Enquanto existem *muitos* livros *epub* de literatura em geral, com textos e gráficos em formatos *png* e *jpg*, existem muito *poucos* livros eletrônicos gratuitos no formato EPUB para Matemática. A Fonte do problema relacionado com a Matemática na Web ocorre pelo fato que, a Web ainda não criou entidades de caracteres XHTML para que possamos usar *todos* os símbolos matemáticos na construção de livros eletrônicos, sendo que os navegadores *antigos* não mostram muitos símbolos matemáticos disponíveis em páginas da Web, e não reconhecem *folhas de estilo* CSS com expressões matemáticas.

## 6 Situação atual para os livros EPUB de Matemática

A situação atual para a produção de livros eletrônicos EPUB de Matemática, está apoiada no fato que se pode usar folhas de estilo CSS para construir páginas altamente sofisticadas para a Web. Além disso, os criadores do HTML5, informam ser possível exibir expressões matemáticas, mas tal formato ainda não foi validado pelo consórcio W3C. Hoje, já temos possibilidade de renderizar boa parte da Matemática, pelo uso de *scripts* que permitem anexar folhas de estilo a páginas da Web para gerar páginas com expressões matemáticas. Também, os membros participante deste projeto, já possuem tecnologia para produzir matemática com: *potências, índices, frações, somas, produtos, limites e integrais, inline* em parágrafos e no modo *displaystyle*, de forma similar ao  $\text{\LaTeX}$ . Observamos que os códigos cobrem quase todo o contexto matemático no âmbito do Ensino Fundamental e Médio, cobrindo uma parte significativa de materiais para o Ensino Superior.

## 7 Projeto MatePUB: Matemática Essencial em Livros Eletrônicos EPUB

O Projeto MatePUB: Matemática Essencial em Livros Eletrônicos EPUB, pode ser identificado no presente momento, como tendo o objetivo de construir livros eletrônicos públicos no formato EPUB de Matemática, possui conteúdo de 299 links de páginas no site Matemática Essencial, cujo endereço é <http://www.mat.uel.br/matessencial/>. Os beneficiários deste Projeto são: alunos, docentes e interessados pela Matemática. Os livros eletrônicos EPUB podem ser acessados através de computadores e também em dispositivos móveis ou fixos de comunicação, como celulares 3G, Kindle, Ipad, Netbook, etc. Os conteúdos gerados são gratuitos contendo Matemática para o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior, e os Livros eletrônicos EPUB estão de acordo com as atuais políticas ecológicas.

## 8 Nossos primeiros trabalhos neste Projeto MatEpub

1. Página Matemática Essencial: <http://www.mat.uel.br/matessencial/>
2. Página com os nossos livros eletrônicos EPUB: [alegria/matepub/matepub.htm](#)
3. Arquivo Modelo-fonte.zip para construir o seu EPUB: [alegria/matepub/modelo-fonte.zip](#)
4. Livro Eletrônico EPUB: Livro de João: [alegria/matepub/João.epub](#)
5. Livro EPUB: Modelo: [alegria/matepub/modelo.epub](#)
6. Livro EPUB: Aplicações da Matemática: [alegria/matepub/Aplicações da Matemática.epub](#)
7. Livro EPUB: Mini Dicionário de Matemática: [alegria/matepub/Mini Dicionário de Matemática.epub](#)
8. Livro EPUB: Harmonia Matemática: [alegria/matepub/Harmonia Matemática.epub](#)
9. Livro EPUB: Razões e Proporções: [alegria/matepub/razoes.epub](#)

## Sobre o Projeto MatEpub

Este Projeto é um trabalho de Extensão na Universidade Estadual de Londrina, que conta com a participação de alunos, docentes e visa levar livros eletrônicos de Matemática, no formato EPUB, a todos interessados pela Matemática.

## Referências

- [1] Ulysses Sodré. *MatePUB: Matemática Essencial em Livros Eletrônicos EPUB*, Material apresentado na 27a. Semana da Matemática. Departamento de Matemática. Universidade Estadual de Londrina. 30 de agosto de 2011.
- [2] Ulysses Sodré. *LaTeX com o TeXnicCenter*, Apostila para a produção de trabalhos científicos com o LaTeX. Departamento de Matemática. Universidade Estadual de Londrina. Londrina-PR, Abril de 2011.

*Alerta encontrado na Bíblia Sagrada, Apocalipse 13:15-16*

... que fossem mortos todos os que não adorassem a imagem da besta. A todos, pequenos e grandes, ricos e pobres, livres e servos, lhes *seja posto um sinal na sua mão direita, ou nas suas testas*, para que ninguém possa comprar ou vender, senão aquele que tiver o *sinal*, ou o *nome da besta*, ou o *número do seu nome*, que é 666.

Caso tenha alguma dúvida sobre o alerta, pesquise no Google as palavras: Obama, ship e 2013.

C16

**A Continuidade de Sistemas Fuzzy SE-ENTÃO  
no Sentido de Perfilieva-Lehmke no Contexto  
de Reticulados Completos**

Tavares, E. H. G., Mesquita, M. E. R. V.

# A Continuidade de Sistemas Fuzzy SE-ENTÃO no Sentido de Perfilieva-Lehmke no Contexto de Reticulados Completos

Eduardo Henrique Gomes Tavares (e-mail: dudyz1@hotmail.com)  
Departamento de Matemática – CCE, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR – Brasil

Marcos Eduardo Valle (e-mail: valle@uel.br)  
Departamento de Matemática – CCE, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR – Brasil

## Resumo

Neste trabalho verificamos que um modelo de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO é correto se, e somente se, ele é contínuo. Além disso, estudamos a relação de um modelo de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO com os operadores de dilatação e erosão da morfologia matemática.

**Palavras-chave:** Sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO, modelo correto e contínuo, reticulados completos..

## 1 Introdução

A morfologia matemática é uma das áreas de destaque do processamento de imagens com inúmeras aplicações em análise de imagens, tais como: filtragem de ruídos, reconhecimento e classificação de padrões, segmentação, reconstrução, extração de objetos de interesse, etc. Introduzida na década de 60 por Jean Serra e George Matheron, através da morfologia matemática é possível se fazer transformações entre reticulados completos, os quais são chamados de operadores morfológicos. Com base na teoria de conjuntos, foram introduzidos os operadores elementares dilatação e erosão.

A teoria dos conjuntos fuzzy foi introduzida por Lotfi Zadeh como uma ferramenta para modelar a imprecisão e a ambiguidade que surge em sistemas complexos. Um conjunto fuzzy difere de um conjunto clássico ao atribuir a cada elemento um valor no intervalo  $[0; 1]$ . Esse valor corresponde ao grau de pertinência, ou compatibilidade, do elemento com o conceito representado pelo conjunto fuzzy. Dessa forma, conjuntos fuzzy podem ser usados para representar conceitos imprecisos como, temperatura confortável e erro pequeno.

Muitos modelos envolvendo conjuntos fuzzy são formulados utilizando regras fuzzy. Chamamos de regra fuzzy qualquer sentença da forma SE-ENTÃO em que os antecedentes e/ou consequente são conjuntos nebulosos. Várias regras fuzzy formam um sistema de regras fuzzy. Sistemas de regras fuzzy foram aplicados com sucesso em diversas áreas do conhecimento incluindo controle, problemas de biomatemática e transmissão de voz sobre IP.

É importante esclarecer, entretanto, que a teoria dos conjuntos fuzzy não é uma teoria nebulosa ou vaga. Em outras palavras, embora usadas para descrever conceitos que não são claramente definidos, a teoria dos conjuntos fuzzy possui uma rigorosa base matemática. Especificamente, essa teoria pode ser muito bem conduzida num reticulado completo. Em vista dessa observação, nesse trabalho exploraremos melhor a relação entre a teoria dos conjuntos fuzzy e a teoria dos reticulados. Especificamente, este trabalho está organizado da seguinte forma: Na seção 2 introduzimos os conceitos elementares da teoria dos reticulados completos e seus operadores. Na seção 3 apresentamos algumas noções básicas da teoria dos conjuntos fuzzy. Por fim, na seção 4, trabalhamos com relações fuzzy e sistema de regras fuzzy com objetivo de relacionar os operadores da morfologia da matemática com a continuidade de um modelo de um sistema de regras.

## 2 Reticulado Completo

Nesta seção vamos introduzir o conceito de reticulado completo e apresentar algumas noções de operador em reticulado completo.

## 2.1 Noções Básicas de Reticulado Completo

Dado um conjunto não-vazio  $\mathcal{L}$ , uma relação binária “ $\leq$ ” é chamada de *ordem parcial* se satisfaz as seguintes propriedades para todo  $x, y, z \in \mathcal{L}$ :

- $x \leq x$
- $x \leq y$  e  $y \leq z$  implica  $x \leq z$
- $x \leq y$  e  $y \leq x$  implica  $x = y$

Um conjunto munido com uma relação de ordem  $\leq$  é chamado *poset* e denotaremos por  $(\mathcal{L}, \leq)$ . Além disso, dizemos que um poset é *totalmente ordenado* se

$$x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x$$

valem para todo par  $x, y \in \mathcal{L}$ . Um poset totalmente ordenado é chamado *cadeia*. Por um *reticulado completo* entendemos um poset não vazio  $\mathcal{L}$  tal que todo subconjunto  $X \subseteq \mathcal{L}$  possui supremo e ínfimo. Denotamos o supremo e o ínfimo de  $X \subseteq \mathcal{L}$  respectivamente por

$$\bigvee X \quad \text{e} \quad \bigwedge X.$$

**Exemplo 1.** É de fácil verificação que  $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$  (*reta estendida*),  $([0, 1], \leq)$  e  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$  são reticulados completos. Já a reta real  $(\mathbb{R}, \leq)$  não é um reticulado completo, mas é uma cadeia.

## 2.2 Operadores em Reticulados Completos

Dado um conjunto  $\mathcal{L}$  e um reticulado completo  $\mathcal{M}$ , denotamos o conjunto de todas as funções  $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  por  $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ . Em particular, denotamos  $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$  por  $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ . O conjunto  $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$  herda a estrutura de ordem parcial de  $\mathcal{M}$ . De fato, sejam  $\phi, \psi \in \mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ . Definimos uma relação de ordem “ $\leq_{\mathcal{O}}$ ” por  $\phi \leq_{\mathcal{O}} \psi$  se  $\phi(x) \leq \psi(x)$  para todo  $x \in \mathcal{L}$ . Observe que usamos fortemente a ordem de  $\mathcal{M}$ . Além disso, para um reticulado completo  $\mathcal{L}$ , dizemos que um operador  $\psi \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$  é

- *crecente* se  $x \leq y$  implica  $\psi(x) \leq \psi(y)$ , para todo  $x, y \in \mathcal{L}$ ;
- *decrecente* se  $x \leq y$  implica  $\psi(x) \geq \psi(y)$ , para todo  $x, y \in \mathcal{L}$ ;
- *extensivo* se  $\psi(x) \geq x$ , para todo  $x \in \mathcal{L}$ ;
- *anti-extensivo* se  $\psi(x) \leq x$ , para todo  $x \in \mathcal{L}$ ;
- *idempotente* se  $\psi^2 = \psi$ ;
- *abertura* se  $\psi$  é crescente, anti-extensivo e idempotente;
- *fechamento* se  $\psi$  é crescente, extensivo e idempotente.

**Observação.** Quando nos referirmos a um elemento de  $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ , usaremos o termo *operador* ao invés de *função*.

Vamos definir agora dois conjuntos essenciais para este trabalho. Seja  $\psi \in \mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ . Definimos a *imagem* de  $\psi$  por

$$Im(\psi) = \{\psi(x) \in \mathcal{M} \mid x \in \mathcal{L}\}.$$

Além disso, se  $\psi \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$ , definimos o *domínio invariante* de  $\psi$  por

$$Inv(\psi) = \{x \in \mathcal{L} \mid \psi(x) = x\}.$$

No caso em que  $\psi \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$ , segue que  $Inv(\psi) \subseteq Im(\psi)$ .

## 2.3 Adjunção

Agora mostraremos alguns tipos especiais de operadores de  $\mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$  e suas propriedades.

Sejam  $\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$  e  $\delta \in \mathcal{O}(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ . O par  $(\varepsilon, \delta)$  é chamado uma *adjunção* entre  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  se

$$\delta(y) \leq x \iff y \leq \varepsilon(x),$$

para todo  $x \in \mathcal{L}, y \in \mathcal{M}$ . Se  $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ , então  $(\varepsilon, \delta)$  é chamado *adjunção em  $\mathcal{L}$* .

Uma *erosão* é um operador  $\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$  tal que

$$\varepsilon \left( \bigwedge_{i \in I} x_i \right) = \bigwedge_{i \in I} \varepsilon(x_i),$$

para toda coleção  $x_i \in \mathcal{L}, i \in I$ . Uma *dilatação* é um operador  $\delta \in \mathcal{O}(\mathcal{M}, \mathcal{L})$  tal que

$$\delta \left( \bigvee_{i \in I} y_i \right) = \bigvee_{i \in I} \delta(y_i),$$

para toda coleção  $x_i \in \mathcal{L}, i \in I$ .

Vejamos alguns resultados que relacionam uma adjunção com os operadores de erosão e dilatação.

**Proposição 1.** *Seja  $(\varepsilon, \delta)$  uma adjunção entre  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$ . Então  $\varepsilon$  é uma erosão e  $\delta$  é uma dilatação.*

O teorema.1 nos mostra que o operador da esquerda em uma adjunção é uma erosão e que o operador da direita de uma adjunção é uma dilatação.

**Proposição 2.** *Para toda erosão  $\varepsilon$  existe uma única dilatação  $\delta$  tal que o par  $(\varepsilon, \delta)$  constitui uma adjunção. Reciprocamente, para toda dilatação  $\delta$  existe uma única erosão  $\varepsilon$  tal que  $(\varepsilon, \delta)$  constitui uma adjunção.*

**Proposição 3.** *Sejam  $(\varepsilon, \delta)$  e  $(\varepsilon', \delta')$  duas adjunções entre  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$ . Então  $\varepsilon' \leq \varepsilon$  se, e somente se,  $\delta' \geq \delta$ .*

**Proposição 4.** *Se  $(\varepsilon, \delta)$  é uma adjunção entre dois reticulados completos  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$ , então  $\delta\varepsilon$  é uma abertura em  $\mathcal{L}$  e  $\varepsilon\delta$  é um fechamento em  $\mathcal{M}$ . Mais que isso, vale*

$$\text{Inv}(\delta\varepsilon) = \text{Im}(\delta) \quad \text{e} \quad \text{Inv}(\varepsilon\delta) = \text{Im}(\varepsilon).$$

Dizemos que  $X \subseteq \mathcal{L}$  é um *aberto* com respeito a uma abertura  $\alpha$  se,  $\alpha(X) = X$ . Analogamente, um elemento  $X \subseteq \mathcal{M}$  é chamado *fechado* com respeito ao fechamento  $\beta$  se  $\beta(X) = X$ .

**Proposição 5.** *Seja  $(\varepsilon, \delta)$  uma adjunção entre dois reticulados completos  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$ .*

- (a)  $X \in \mathcal{L}$  é aberto com respeito a abertura  $\delta\varepsilon$  se, e somente se,  $X = \delta(Y)$ , para algum  $Y \in \mathcal{M}$ ;
- (b)  $Y \in \mathcal{M}$  é fechado com respeito ao fechamento  $\varepsilon\delta$  se, e somente se,  $Y = \varepsilon(X)$ , para algum  $X \in \mathcal{L}$ .

## 2.4 Reticulado residual

Dizemos que uma estrutura  $\langle \mathcal{L}, \vee, \wedge, *, \Rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}, e \rangle$  é um *reticulado residual* se satisfaz as seguintes condições:

1.  $\langle \mathcal{L}, \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$  é um reticulado completo sendo  $\mathbf{1}$  o maior elemento e  $\mathbf{0}$  o menor elemento ;
2.  $\langle \mathcal{L}, *, e \rangle$  é um semigrupo comutativo com identidade  $e \in \mathcal{L}$ ;
3. As operações  $*$  e  $\Rightarrow$  formam uma adjunção em  $\mathcal{L}$ , ou seja, para  $x, y, z \in \mathcal{L}$  temos que

$$x * z \leq y \text{ se, e somente se, } z \leq x \Rightarrow y$$

**Observação.** Dado um reticulado residual  $\langle \mathcal{L}, \vee, \wedge, *, \Rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}, e \rangle$  e  $a \in \mathcal{L}$  fixado, podemos definir os operadores

$$\delta_a : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \quad e \quad \varepsilon_a : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

dados por  $\delta_a(x) = a * x$  e  $\varepsilon_a(x) = a \Rightarrow x$ .

**Proposição 6.** Sejam  $\langle \mathcal{L}, \vee, \wedge, *, \Rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}, e \rangle$  um reticulado residual,  $X \subset \mathcal{L}$  e  $a \in \mathcal{L}$  fixo. Os operadores  $\delta_a$  e  $\varepsilon_a$  satisfazem

$$\delta_a \left( \bigvee X \right) = \bigvee_{x \in X} (a * x) \quad e \quad \varepsilon_a \left( \bigwedge X \right) = \bigwedge_{x \in X} (a \Rightarrow x),$$

ou seja,  $\delta_a$  é uma dilatação e  $\varepsilon_a$  é uma erosão.

## 3 Noções Básicas da Teoria dos Conjuntos Fuzzy

### 3.1 Conjuntos Fuzzy

Seja  $U$  um conjunto classico de objetos, chamado *universo de discurso*, em que os elementos são genericamente denotados por  $x$ . Um subconjunto clássico  $A \subset U$  pode ser visto como uma função  $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$  definida como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

A função  $\chi_A$  definida acima é chamada *função característica* e o conjunto  $\{0, 1\}$  é chamado de *conjunto de valores*. Podemos generalizar a idéia de função característica substituindo o conjunto de valores pelo intervalo real  $[0, 1]$ . Uma função  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$  é chamada *função de pertinência* e o valor  $\mu_A(x)$  representa o *grau de pertinência* de  $x$  em  $A$ . Assim, um *conjunto fuzzy*  $A$  em um universo de discurso  $U$  é definido por uma função de pertinência  $\mu_A$  que assume valores em um intervalo  $[0, 1]$ . A família de todos os subconjuntos fuzzy é denotada por  $\mathcal{F}(U)$ .

**Exemplo 2.** Seja  $U$  o conjunto de todas as idades possíveis de pessoas, ou seja, os números reais positivos. O conjunto dos jovens  $A$  pode ser modelado através da seguinte função de pertinência

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 25 \\ \frac{40-x}{15} & \text{se } 25 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{se } 40 < x \end{cases}$$

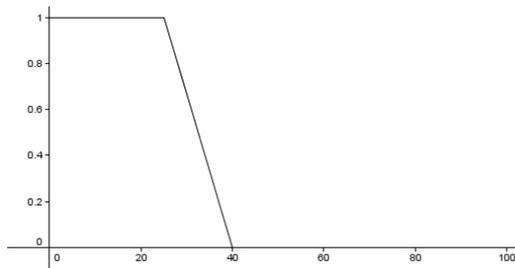


Figura 1: Uma função de pertinência para "jovem"

**Observação.** O conjunto  $\mathcal{F}(U)$  é um reticulado completo com a ordem de  $\mathcal{O}(\mathcal{L}, [0, 1])$  [5].

### 3.2 Operadores em Conjuntos Fuzzy

Considere o operador “E” da lógica clássica. A tabela

$E$	0	1
0	0	0
1	0	1

especifica uma aplicação  $E : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ . Podemos estender o operador “E” para uma aplicação  $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Observe que essa aplicação satisfaz a tabela acima quando  $x$  e  $y$  pertencem a  $\{0, 1\}$ . Além disso, para todo  $x, y, z \in [0, 1]$  assumimos que

- $1\Delta x = x;$  (*identidade*)
- $x\Delta y = y\Delta x;$  (*comutatividade*)
- $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z;$  (*associatividade*)
- $v \leq w$  e  $x \leq y$ , então  $v\Delta x \leq w\Delta y.$  (*monotonicidade*)

Toda operação binária

$$\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

satisfazendo a propriedades acima é candidato para modelar o conectivo “E” em conjuntos fuzzy. Estes operadores são chamados de *normas triangulares* ou *t-normas*. Formalmente, uma *t-norma* é uma operação binária  $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz as quatro condições acima para todo  $x, y, z \in [0, 1]$ .

**Exemplo 3.** As operações binária abaixo são t-normas

- $x\Delta_0 y = \begin{cases} x \wedge y & \text{se } x \vee y = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$  (*drástica*)
- $x\Delta_1 y = x \cdot y.$  (*produto*)
- $x\Delta_2 y = x \wedge y.$  (*mínimo*)

Uma *implicação fuzzy* é a generalização da implacação da lógica clássica, ou seja, é uma aplicação

$$\Rightarrow : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

que satisfaz a tabela

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Vejam alguns exemplos.

**Exemplo 4.** As aplicações abaixo são implicação fuzzy

- $(x \Rightarrow y) = (1 - x) \vee y.$
- $(x \Rightarrow y) = (1 - x + y) \wedge y.$

**Observação.** Seja um reticulado residual  $\langle \mathcal{L}, \vee, \wedge, \Delta, \Rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}, e \rangle$ . O operador  $\Rightarrow$  é uma implicação da forma

$$(x \Rightarrow y) = \bigvee \{z \in [0, 1] : x\Delta z \leq y\}$$

onde  $\Delta$  é uma t-norma. Além disso, podemos definir a *operação de equivalencia* em  $[0, 1]$  como

$$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x).$$

Para mais detalhes sobre os operadores acima ver [6, 5].

Seja  $S : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ , onde  $\mathcal{P}(X)$  é o conjunto das partes de um conjunto não vazio  $X$ . Dizemos que  $S$  é uma *medida de similaridade* se satisfaz

1.  $S(A, A) = 1, \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$ ;
2.  $S(A^c, A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$ ;
3.  $S(A, B) = S(B, A), \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ ;
4. Se  $A \subseteq B \subseteq C$ , então  $S(A, C) \leq S(A, B)$  e  $S(A, C) \leq S(B, C), \quad \forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ .

**Exemplo 5.** A aplicação  $S : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$  definida como

$$S(A, B) = \bigwedge_{x \in U} (\mu_A(x) \Leftrightarrow \mu_B(x))$$

é uma medida de similaridade.

## 4 Relações Fuzzy

### 4.1 Propriedades Básicas das Relações Fuzzy

Uma *relação fuzzy n-ária* em  $V = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  é um subconjunto fuzzy  $R$  de  $V$ . Em particular, uma *relação fuzzy 2-ária* é chamada *relação fuzzy binária*. O número  $\mu_R(u_1, u_2, \dots, u_n)$  representa o grau de compatibilidade de cada n-upla  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  com a relação  $R$ .

**Exemplo 6.** Se  $R$  é modelado por "mais jovem que", então  $R(10, 15)$  é o grau que uma pessoa de 10 anos é mais jovem que uma pessoa de 15 anos.

**Exemplo 7.** Se  $R$  é a relação "o quanto próximo de", então uma possível relação fuzzy é dada por  $R(x, y) = e^{-|x-y|}$ .

Sejam  $R$  e  $S$  relações fuzzy em  $U \times V$  e  $V \times W$  respectivamente, e seja  $\Delta$  uma t-norma. A *composição sup- $\Delta$*  de  $R$  e  $S$  com respeito a  $\Delta$ , denotada por  $R \circ S$ , é uma relação fuzzy em  $U \times W$  cuja função de pertinência é definida por

$$\mu_{R \circ S}(u, w) = \bigvee_v \{\mu_R(u, v) \Delta \mu_S(v, w)\}.$$

### 4.2 Relação Fuzzy como um Modelo de Regras Fuzzy SE-ENTÃO

Um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO é um conjunto de expressões da forma

$$\text{SE } x \text{ é } A_i \text{ ENTÃO } y \text{ é } B_i \tag{1}$$

onde  $A_i, B_i, i = 1, \dots, n$  são restrições fuzzy nas variáveis  $x, y$ , respectivamente. Dada uma relação fuzzy  $R$ , definimos a função  $f_R : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  induzida por  $R$  como

$$f_R(A) = B \text{ se, e somente se, } \mu_B(y) = \bigvee_{x \in U} (\mu_A(x) \Delta \mu_R(x, y)).$$

Dizemos que a função  $f_R$  induzida pela relação fuzzy  $R \in \mathcal{F}(U \times V)$  é um *modelo correto* de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO, se  $f_R(A_i) = B_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Um outro modo de representar a função  $f_R$  é com a composta sup- $\Delta$  de  $R$  e  $A$ , ou seja

$$\mu_{f_R(A)}(y) = \bigvee_{x \in U} (\mu_A(x) \Delta \mu_R(x, y)) = \mu_{A \circ R}(y).$$

Vejamos alguns resultados importantes que relacionam os operadores de dilatação e erosão com a função  $f_R$ .

**Teorema 7.** O operador  $f_R : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  é uma dilatação. Além disso, o operador  $f_R^a : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  definido por

$$f_R^a(B)(x) = \bigwedge_{y \in V} (B(y) \Rightarrow R(x, y))$$

é uma erosão tal que o par  $(f_R, f_R^a)$  forma uma adjunção.

O Teorema acima permite introduzir, com base na Proposição 4 os seguintes conceitos:  $A \in \mathcal{F}(U)$  é fechado com respeito ao fechamento  $f_R^a \circ f_R$  se, e somente se,  $A = f_R^a(B)$ , para algum  $B \in \mathcal{F}(V)$  e,  $C \in \mathcal{F}(V)$  é aberto com respeito a abertura  $f_R \circ f_R^a$  se, e somente se,  $C = f_R(D)$ , para algum  $D \in \mathcal{F}(U)$ .

**Teorema 8.** Seja  $R \in \mathcal{F}(U \times V)$  uma relação fuzzy e seja  $f_R : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  um modelo correto de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO, ou seja,  $f_R(A_i) = B_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Então,  $f_R^a$  é um modelo correto se, e somente se,  $A_i \in \mathcal{F}(U)$  é fechado com respeito ao operador  $f_R^a \circ f_R$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema 9.** Seja  $R \in \mathcal{F}(U \times V)$  uma relação fuzzy e seja  $f_R^a : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  um modelo correto de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO, ou seja,  $f_R^a(B_i)(x) = A_i(x)$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Então,  $f_R$  é um modelo correto se, e somente se,  $B_i \in \mathcal{F}(V)$  é aberto com respeito ao operador  $f_R \circ f_R^a$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema 10.** Seja  $R \in \mathcal{F}(U \times V)$  uma relação fuzzy. Definimos a relação fuzzy  $\widehat{R}$  por

$$\widehat{R}(x, y) = \bigwedge_i (A_i(x) \Rightarrow B_i(y)).$$

Se  $f_R$  é um modelo correto para um sistemas de regras fuzzy SE-ENTÃO, então  $f_{\widehat{R}}$  também será um modelo correto para o mesmo sistema de regras.

Dada uma relação fuzzy  $R$ , dizemos que uma função  $f_R : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  é um *modelo contínuo* de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO se para cada  $i$  e para cada conjunto fuzzy  $A \in \mathcal{F}(U)$  vale a desigualdade

$$S(B_i, f_R(A)) \geq S(A_i, A)$$

onde  $S(A_i, A)$  é a medida de similaridade definida no Exemplo 1 da seção 3.2. Agora, enunciaremos o seguintes resultado que relaciona um modelo ser correto e ser contínuo [6].

**Lema 11.** Seja  $R$  uma relação fuzzy. Então para todo  $A, A_i \in \mathcal{F}(U)$ ,  $B_i \in \mathcal{F}(V)$ ,  $y \in V$  e para todo  $i = 1, \dots, n$ , vale a desigualdade

$$B_i(y) \Leftrightarrow f_R(A)(y) \geq [B_i(y) \Leftrightarrow f_R(A_i)(y)] \Delta S(A_i, A).$$

**Proposição 12.** Seja  $R$  uma relação fuzzy. Então,  $f_R : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  é um modelo correto de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO se, e somente se, é um modelo contínuo.

## 5 Conclusões

A relação entre um modelo de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO e os operadores da morfologia matemática possibilita mostrar que um modelo de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO é um operador de dilatação. Assim, podemos estudar as relações entre um modelo correto e contínuo e as propriedades dos operadores da morfologia matemática, como por exemplo, a existência e unicidade de uma erosão correspondente a um modelo de um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO.

## Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Prof.º Dr. Marcos Eduardo R. do Valle Mesquita, o qual me orientou durante os estudos neste projeto, pela compreensão e também pelo conhecimento transmitido. Manifesto também minha gratidão a organização deste evento. Muito obrigado a todos!

## Referências

- [1] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [2] DUBOIS, D.; PRADE, H. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [3] GOMIDE, F.; PEDRYCZ, W. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press, New York, 2007.
- [4] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [5] NGUYEN, H. T.; WALKER, E. A. *A First Course in Fuzzy Logic*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [6] PERFILIEVA, I. *Correct models of fuzzy IF-THEN rules are continuous*, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 3188-3197.

C17

## Uma Introdução aos Corpos Quadráticos

Tavares, E. H. G., Savioli, A. M. P. D.

# Uma Introdução aos Corpos Quadráticos

Eduardo Henrique Gomes Tavares (e-mail: dudyz1@hotmail.com)

Departamento de Matemática – CCE, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR – Brasil

Angela Marta P. das Dores Savioli (e-mail: angelamarta@uel.br)

Departamento de Matemática – CCE, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR – Brasil

## Resumo

Neste trabalho vamos mostrar a existência de uma base integral de um corpo quadrático  $L$ , ou seja, vamos mostrar que existe uma base  $v_1, v_2$  de  $L \mid \mathbb{Q}$  tal que  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$  se, e somente se,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ . Além disso, sendo  $L$  um corpo quadrático imaginário, mostraremos uma caracterização do grupo  $U(I_L)$  dos elementos invertíveis do anel  $I_L$ .

**Palavras-chave:** Corpos quadráticos, bases integrais, elementos invertíveis.

## 1 Introdução

Denotando  $A$  por um anel e  $K$  por um corpo, um  $A$ -módulo  $M$ , nada mais é que a generalização de um  $K$ -espaço vetorial  $M$ , isto é, um  $A$ -módulo  $M$  satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, mas o conjunto dos escalares é um anel  $A$  e não um corpo  $K$ . Assim, certas propriedades dos  $K$ -espaços vetoriais nem sempre serão válidas para  $A$ -módulos, como por exemplo, a existência de uma base. Em caso afirmativo, dizemos que o  $A$ -módulo  $M$  é livre. Além disso, dado um corpo  $L \subseteq \mathbb{C}$  tal que  $[L : \mathbb{Q}] = n$ , a dúvida é: sendo  $I_L$  o anel dos inteiros algébricos de  $L$ , será que existe uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  da extensão  $L \mid \mathbb{Q}$  tal que  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in I_L$  se e somente se  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ ? Ou equivalentemente, será que existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $L \mid \mathbb{Q}$  tal que o anel  $I_L$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre com base  $\mathcal{B}$ ? Uma base  $\mathcal{B}$  que satisfaz essas condições é chamada de base integral de  $L$ . No caso em que  $L$  é um corpo quadrático, a resposta é afirmativa. Para vermos isto, estudaremos algumas propriedades dos anéis dos inteiros algébricos  $I_L$  de um corpo quadrático  $L$ , admitindo um breve conhecimento da teoria de grupos, anéis, e polinômios em uma indeterminada. Com isso em mãos, provaremos que  $I_L$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre e exibiremos uma base integral de  $L$ . Por fim, dado um corpo quadrático imaginário  $K$ , vamos caracterizar o grupo  $U(I_K)$  dos elementos invertíveis do anel  $I_K$ .

## 2 Noções Básicas de Corpos, Anéis e Módulos

Nesta seção reunimos alguns fatos básicos que serão utilizados neste trabalho.

### 2.1 Corpos

Um *corpo* é um conjunto não-vazio  $L$  munido das operações de adição (+) e de multiplicação ( $\cdot$ ) tal que

1.  $(L, +)$  é um grupo abeliano,
2.  $(L - \{0\}, \cdot)$  é um grupo abeliano,
3. vale a distributividade: para todo  $a, b, c \in L$ ,  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Além disso, um subconjunto  $K \subseteq L$  é dito um *subcorpo* de  $L$ , se as operações de adição (+) e de multiplicação ( $\cdot$ ) de  $L$  restritas a  $K$ , fazem de  $K$  um corpo.

**Exemplo 1.** É de fácil verificação que os conjuntos  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  são corpos com a adição e multiplicação usuais. Já o conjunto  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  das matrizes quadradas de ordem  $n$  com entradas reais, não é um corpo com a adição e multiplicação usuais de matrizes, pois a multiplicação de matrizes nem sempre é comutativa.

Os corpos desempenham um papel fundamental neste trabalho. Vejamos algumas propriedades. Sejam  $L$  um corpo e  $K$  um subcorpo de  $L$ . Consideramos  $K$  como  $L$ -espaço vetorial. Assim, dizemos que  $L$  é uma *extensão* de  $K$  (ou  $L | K$  é uma extensão). Se  $[L : K] = \dim_L K = n$ , diremos que  $L$  é uma *extensão finita* de  $K$  de grau  $n$ . Observamos que  $[L : K] = 1$  se, e somente se,  $K = L$  e se  $L, M, K$  são corpos tais que  $K \subseteq M \subseteq L$ , então  $[L : K] = [L : M] \cdot [M : K]$ .

**Exemplo 2.** Sabemos da álgebra linear que  $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ ,  $[\mathbb{C} : \mathbb{C}] = 1$ ,  $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = +\infty$ .

Dado um subconjunto de  $\mathcal{A}$ , denotaremos por  $K(\mathcal{A})$  o corpo obtido de  $K$  pela *adjunção* de  $\mathcal{A}$ , ou seja, o menor corpo entre  $K$  e  $L$  que contém  $\mathcal{A}$ . No caso  $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$  escrevemos  $K(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  em lugar de  $K(\mathcal{A})$ .

**Exemplo 3.** Sendo  $p$  um número primo, o corpo  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b \cdot \sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  é obtido de  $\mathbb{Q}$  pela adjunção de  $\mathcal{A} = \{\sqrt{p}\}$ , com  $[L : \mathbb{Q}] = 2$ .

Agora, considere  $L | K$  uma extensão finita de grau  $n$ . Para cada  $v \in L$ , o *polinômio característico*  $F_{v,L|K}$  de  $v$  em relação a extensão  $L | K$  é definido por  $\det(X \cdot \delta_{ij} - a_{ij})$ , onde os elementos  $a_{ij} \in K$ , são determinados por  $v \cdot v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot v_j$ , sendo  $v_1, \dots, v_n$  uma base da extensão  $L | K$  e  $\delta_{ij}$  o *delta de Kronecker*. Note que,  $F_{v,L|K}$  é um polinômio mônico de grau  $n$ , digamos  $F_{v,L|K} = X^n + f_{n-1}X^{n-1} + \dots + f_0$ . Definimos o *traço* e a *norma* de  $v$  em relação a  $L | K$  por

$$\mathcal{T}_{L|K}v = -f_{n-1} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$$

e

$$\mathcal{N}_{L|K}v = (-1)^n \cdot f_n = \det(a_{ij}).$$

Usando as propriedades do determinante e do traço de uma matriz segue que

- (i)  $\mathcal{N}_{L|K}(v \cdot u) = \mathcal{N}_{L|K}v \cdot \mathcal{N}_{L|K}u$ ;
- (ii)  $\mathcal{N}_{L|K}a = a^n$ ;
- (iii)  $\mathcal{T}_{L|K}(a \cdot v + b \cdot u) = a \cdot \mathcal{T}_{L|K}v + b \cdot \mathcal{T}_{L|K}u$ ;
- (iv)  $\mathcal{T}_{L|K}a = na$ .

para todo  $v, u \in L$  e  $a, b \in K$ .

**Exemplo 4.** Seja  $p$  um número primo. Considere  $\{1, \sqrt{p}\}$  como base de  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$  e  $v = r + s \cdot \sqrt{p} \in L$ . Então

$$F_{v,L|\mathbb{Q}} = X^2 - \mathcal{T}_{L|\mathbb{Q}}vX + \mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}v.$$

De fato,  $v \cdot 1 = r \cdot 1 + s \cdot \sqrt{p}$  e  $v \cdot \sqrt{p} = s \cdot p + r \cdot \sqrt{p}$  implica que

$$F_{v,L|\mathbb{Q}} = \det \begin{pmatrix} X - r & -s \\ -s \cdot p & X - r \end{pmatrix} = X^2 - 2r \cdot X + r^2 - s^2 \cdot p.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{T}_{L|\mathbb{Q}}v = 2r \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}v = r^2 - s^2 \cdot p.$$

Logo,  $F_{v,L|\mathbb{Q}} = X^2 - \mathcal{T}_{L|\mathbb{Q}}vX + \mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}v$ , como queríamos.

## 2.2 Anéis

Por um *anel*  $R$  entendemos sempre um anel comutativo com identidade com unidade e sempre consideremos subanéis  $R'$  de  $R$  que contêm a unidade de  $R$ . Além disso, dizemos que um elemento  $v$  de um anel  $R$  é *invertível* se existe  $u \in R$  tal que  $v \cdot u = 1$ . O conjunto dos elementos invertíveis de um anel  $R$  é um grupo multiplicativo denotado por  $U(R)$ .

**Exemplo 5.** No anel dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ , o grupo  $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$ .

## 2.3 Módulos

Um  $A$ -módulo  $M$  é um conjunto não-vazio  $M$ , munido de duas operações (adição e multiplicação) em que vale os axiomas de um espaço vetorial, onde o conjunto dos escalares  $A$  é um anel. A grande diferença entre um  $A$ -módulo e um  $K$ -espaço vetorial, é que nem todas as propriedades de um  $K$ -espaço vetorial são válidas para  $A$ -módulos, como por exemplo, a existência de uma base. Quando um  $A$ -módulo  $M$  possui uma base, dizemos que  $M$  é um  $A$ -módulo *livre*. Para mais contraexemplos de propriedades não válidas para  $A$ -módulos veja [4].

**Exemplo 6.** Todo  $K$ -espaço vetorial é um  $K$ -módulo livre.

## 3 Anéis dos Inteiros Algébricos

Por um *número algébrico* entendemos qualquer  $v \in \mathbb{C}$  que é algébrico sobre  $\mathbb{Q}$ . Um subcorpo  $L$  de  $\mathbb{C}$  será chamado de *corpo de números algébricos* se for uma extensão finita de  $\mathbb{Q}$ . Será que podemos estender o conceito de número algébrico para anéis? Vejamos, sejam  $S$  um anel e  $R$  um subanel de  $S$ . Diremos que um elemento  $v \in S$  é *inteiro* sobre  $R$  se existir um polinômio mônico  $P \in R[X]$  tal que  $P(v) = 0$ . Em particular, quando  $S = \mathbb{C}$  e  $R = \mathbb{Z}$ , os números inteiros sobre  $\mathbb{Z}$  são chamados *inteiros algébricos*. Denotaremos o conjunto dos elementos de  $S$  que são inteiros sobre  $R$  por  $I_S(R)$ .

**Exemplo 7.** Os números  $i$ ,  $\sqrt[3]{12}$ ,  $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ,  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  são inteiros algébricos, pois são raízes dos polinômios  $X^2 + 1$ ,  $X^3 - 12$ ,  $X^3 - 1$ ,  $X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ , respectivamente.

Vamos agora ao primeiro resultado que será usado neste trabalho.

**Proposição 1.** *Sejam  $S$  um anel e  $R$  um subanel de  $S$ . Então  $I_S(R)$  é um subanel de  $S$  que contém  $R$ .*

O anel  $I_S(R)$  é chamado de *fecho inteiro* de  $R$  em  $S$ . No caso em que  $S = L$  é um corpo de números algébricos, o anel  $I_L(\mathbb{Z})$  é chamado o *anel dos inteiros algébricos* de  $L$  e será denotado por  $I_L$ .

**Proposição 2.** *Sejam  $L$  um corpo de números algébricos e  $S$  um subanel de  $I_L$ . Para qualquer  $w \in S$  temos que:*

- $F_{w,L|\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $\mathcal{T}_{L|\mathbb{Q}}w \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}w \in \mathbb{Z}$ ;
- $\mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}w$  é um múltiplo de  $w$  no anel  $S$ ;
- $w \in U(S)$  se e somente se  $|\mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}w| = 1$ ;
- Se  $|\mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}w|$  for um número primo então  $w$  será irredutível em  $S$ .

É natural perguntarmos se existem métodos para decidir se um número algébrico  $w \in L$  é um inteiro algébrico ou não. Ou ainda, se existe uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  da extensão  $L | \mathbb{Q}$  tal que

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i \in I_L \text{ se e somente se } \alpha_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n.$$

Se existe uma base  $\mathcal{B}$  que satisfaça a condição acima, então  $\mathcal{B}$  é chamada de *base integral* de  $L$ .

## 4 Corpos Quadráticos

Consideraremos nesta seção um caso particular de corpo de números algébricos  $L$ , onde  $[L : \mathbb{Q}] = 2$ . Tal corpo é chamado de *corpo quadrático*. Vejamos um resultado que caracteriza os corpos quadráticos.

**Teorema 3.** *Seja  $\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{Z} \mid d \not\equiv 1 \pmod{4}, \forall c \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}\}$  e  $\mathcal{D} = \{L \subset \mathbb{C} \mid [L : \mathbb{Q}] = 2\}$ . A aplicação  $\mathbb{Q}(\sqrt{\cdot}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  definida por*

$$d \mapsto \mathbb{Q}(\sqrt{d})$$

*é uma bijeção.*

**Observação.** Usando  $1, \sqrt{d}$  como base da extensão  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  de  $\mathbb{Q}$ , podemos generalizar o exemplo 4. De fato, para qualquer elemento  $v = r + s \cdot \sqrt{d} \in L$  o polinômio característico  $F_{v,L|\mathbb{Q}}$  é obtido como

$$F_{v,L|\mathbb{Q}} = \det \begin{pmatrix} X - r & -s \\ -s \cdot d & X - r \end{pmatrix} = X^2 - 2r \cdot X + r^2 - s^2 \cdot d = X^2 - \mathcal{T}_{L|\mathbb{Q}}v + \mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}v.$$

É importante observar que se  $d < 0$  então a norma será sempre não-negativa.

Ainda usando esta base, vamos determinar o anel  $I_L$  dos inteiros algébricos de  $L$ .

**Proposição 4.** *Seja  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  com  $d \in \mathcal{D}$ . Então*

$$I_L = \left\{ \frac{m}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{d} \mid m^2 \equiv n^2 \cdot d \pmod{4} \right\}.$$

*Demonstração.* ( $\supseteq$ ): Se  $v = \frac{m}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{d}$  tal que  $m^2 \equiv n^2 \cdot d \pmod{4}$ , então  $\mathcal{T}_{L|\mathbb{Q}}v = m \in \mathbb{Z}$  e  $\mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}v = \frac{m}{4} - \frac{n}{4} \cdot d \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $F_{v,L|\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}[X]$  e assim  $v \in I_L$ . ( $\subseteq$ ): Sejam  $r, s \in \mathbb{Q}$  tais que  $v = r + s \cdot \sqrt{d} \in I_L$ . Então, pela Proposição 2.a,  $\mathcal{T}_{L|\mathbb{Q}}v = 2r \in \mathbb{Z}$  e  $\mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}v = r^2 - s^2 \cdot d \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $(2s)^2 \cdot d = (2r)^2 - 4 \cdot (r^2 - s^2 \cdot d) \in \mathbb{Z}$ . Sendo  $k_p, e_p \in \mathbb{Z}$  os expoentes do número primo  $p$  na fatoração de  $2s$  e  $d$  respectivamente. Como  $e_p \in \{0, 1\}$ , temos que  $2k_p + e_p \geq 0$ . Logo  $k_p \geq 0$ . Portanto  $2s \in \mathbb{Z}$ . Resulta que  $v = \frac{m}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{d}$  onde  $m = 2r \in \mathbb{Z}$  e  $n = 2s \in \mathbb{Z}$ , e que  $m^2 - n^2 \cdot d = 4 \cdot (r^2 - s^2 \cdot d)$  é múltiplo de 4. Ou seja,  $m^2 \equiv n^2 \cdot d \pmod{4}$ . □

A Proposição 4 nos mostra uma caracterização do anel dos inteiros algébricos  $I_L$  de um corpo quadrático  $L$ . Mas, será essa a melhor caracterização do anel  $I_L$ ? Como resposta, mostraremos a seguir que  $I_L$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre e exibiremos uma base integral de  $L$ .

**Teorema 5.** *Seja  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  onde  $d \in \mathcal{D}$ . Então  $1, \delta$  formam uma base do  $\mathbb{Z}$ -módulo  $I_L$ , onde*

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{d} & \text{se } d \equiv 2 \text{ ou } 3 \pmod{4} \\ \frac{1 + \sqrt{d}}{2} & \text{se } d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

*Demonstração.* Os elementos  $1, \delta$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{Z}$ . De fato, sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ . Suponhamos por absurdo que  $\alpha \neq 0$ . Temos que

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot \delta = 0 \implies 1 = -\frac{\beta \cdot \delta}{\alpha} \implies -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\delta} \notin \mathbb{Z}.$$

O que é um absurdo. Logo,  $1, \delta$  são linearmente independentes. Agora note que, pela Proposição 4,  $\delta \in I_L$ . Assim  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \delta \subseteq I_L$ . Por outro lado, seja  $v \in I_L$ . Pela Proposição 4,  $v$  é da forma  $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{d}$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}$  e  $m^2 \equiv n^2 \cdot d \pmod{4}$ . No caso em que  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , temos que  $m^2 \equiv n^2 \pmod{4}$ . Assim,  $m$  e  $n$  tem a mesma paridade. Com efeito, se  $m = 2k$  e  $n = 2k' + 1$  com  $k, k' \in \mathbb{Z}$ , então  $m^2 \equiv 0 \pmod{4}$  e  $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$ . Concluimos que  $0 \equiv 1 \pmod{4}$ , o que é um absurdo! Assim  $m = 2l + n$ , com  $l \in \mathbb{Z}$ . Logo

$$v = \frac{m}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{d} = \frac{2l + n}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{d} = l + n \cdot \frac{1 + \sqrt{d}}{2} = l + n \cdot \delta.$$

No caso em que  $d \equiv 2$  ou  $3 \pmod{4}$ , temos que  $m$  e  $n$  são pares. De fato, se  $n$  fosse ímpar, teríamos que  $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$ . Assim,  $m^2 \equiv n^2 \cdot d \equiv d \pmod{4}$ , ou seja,  $d \equiv 0$  ou  $1 \pmod{4}$ , o que é uma contradição. Logo,  $n$  é par e de  $m^2 \equiv n^2 \cdot d \equiv 0 \pmod{4}$  decorre que  $m$  é par, digamos  $n = 2l$  e  $m = 2l'$ . Portanto

$$\frac{m}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{d} = \frac{2l'}{2} + \frac{2l}{2} \cdot \sqrt{d} = l' + l \cdot \delta.$$

Em ambos os casos,  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \delta \supseteq I_L$ . □

Diremos que um corpo quadrático  $L$  é *real* quando  $L \subseteq \mathbb{R}$ . Caso contrário, ele é chamado *imaginário*. Ou seja, sendo  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , com  $d \in \mathcal{D}$ , o corpo  $L$  será real se  $d > 0$  e será imaginário se  $d < 0$ . Agora, iremos caracterizar o grupo  $U(I_L)$  dos elementos invertíveis do anel  $I_L$ , onde  $L$  é um corpo quadrático imaginário.

**Teorema 6.** *Seja  $L$  um corpo quadrático imaginário. Então*

$$U(I_L) = \begin{cases} \{1, i, -1, -i\} & \text{se } d = -1 \\ \{1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5\} & \text{se } d = -3 \\ \{1, -1\} & \text{se } d \notin \{-1, -3\} \end{cases}$$

onde,  $\zeta^6 = 1$ .

*Demonstração.* Lembremos que  $\mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}(u + w \cdot \sqrt{d}) = u^2 - w^2 \cdot d = u^2 + w^2 \cdot |d| \geq 0$  para todo  $u, w \in \mathbb{Q}$ .

*Caso 1:  $d \equiv 2$  ou  $3 \pmod{4}$ .* Pelo Teorema 5, todo  $v \in I_L$  é da forma  $m + n \cdot \sqrt{d}$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}$  e pela Proposição 2.c, teremos que  $v \in U(I_L)$  se e somente se  $|\mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}v| = \mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}(m + n \cdot \sqrt{d}) = m^2 + n^2 \cdot |d| = 1$ . Temos que  $d = -1$  se e somente se  $(m, n) \in \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ , se e somente se,  $v \in \{1, i, -1, -i\}$ . Quando  $d \neq -1$ ,  $v \in U(I_L)$  se e somente se  $(m, n) \in \{(1, 0), (-1, 0)\}$  se e somente se  $v \in \{1, -1\}$ .

*Caso 2:  $d \equiv 1 \pmod{4}$ .* Novamente pelo Teorema 5, todo  $v \in I_L$  é da forma  $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{d}$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}$  e pela Proposição 2.c teremos que  $v \in U(I_L)$  se e somente se  $|\mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}v| = \mathcal{N}_{L|\mathbb{Q}}(\frac{m}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{d}) = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} \cdot |d| = 1$ , ou seja,  $m^2 + n^2 \cdot |d| = 4$ . Temos que  $d \neq -3$  se e somente se  $(m, n) \in \{(2, 0), (-2, 0)\}$ , se e somente se,  $v \in \{1, -1\}$ . Quando  $d = -3$ ,  $v \in U(I_L)$  se e somente se  $(m, n) \in \{(2, 0), (1, 1), (-1, 1), (-2, 0), (-1, -1), (1, -1)\}$  se e somente se

$$v \in \left\{ 1, \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, -1, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \right\} = \{1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5\},$$

onde  $\zeta^6 = 1$ .

□

Uma aplicação do teorema acima é: Se  $p$  é um número primo e  $m, n \in \mathbb{Z}$ , então

$$p = m^2 + n^2 \iff m + n \cdot i \text{ é um divisor próprio de } p, \text{ não invertível em } \mathbb{Z}[i].$$

Para detalhes da demonstração, ver [5].

**Observação.** Podemos caracterizar o grupo  $U(I_L)$  no caso em que  $L$  é um corpo quadrático real como caso particular do teorema de invertíveis de Dirichlet [5].

## 5 Conclusões

O fato de que um corpo quadrático  $L$  ser da forma  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , com  $d \in \mathcal{D}$ , é importante na teoria dos corpos quadráticos. Sendo assim, tomando  $\{1, \sqrt{d}\}$  como base da extensão  $L | \mathbb{Q}$ , mostramos que o anel  $I_L$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre e exibimos uma base integral de  $L$ . Além disso, a caracterização do grupo  $U(I_L)$  quando  $L$  é um corpo quadrático imaginário, que nos fornece uma poderosa ferramenta para mostrarmos a irreducibilidade de um número primo  $p$  no anel  $\mathbb{Z}[i]$ . Finalmente, a teoria dos corpos quadráticos é intimamente ligada à teoria dos números e fortemente utilizada em várias aplicações na teoria de códigos lineares.

## Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Prof.<sup>a</sup> Dra. Angela Marta P. das Dores Savioli, o qual me orientou durante os estudos neste projeto, pela compreensão e também pelo conhecimento transmitido. Manifesto também minha gratidão a organização deste evento. Ao MEC-SESU pelo apoio financeiro via projeto PET e a Fundação Araucaria via projeto Pensamento Matemático Álgebraico, protocolo 19179, chapa 05/2011.

## Referências

- [1] Adilson Gonçalves. *Introdução à álgebra*. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [2] Arnaldo Garcia & Yves Lequain. *Elementos de álgebra*. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [3] Flavio Ulhoa Coelho & Mari Lilian Lourenço. *Um Curso de Álgebra Linear*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.
- [4] Francisco Cesar Polcino Milies . *Anéis e Módulos*. Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1972.
- [5] Otto Endler. *Teoria dos números algébricos*. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [6] Richard A. Dean. *Elementos de Álgebra Abstrata*. LTC, Rio de Janeiro, 1974.

C18

**Algoritmo Genético e Aprendizagem  
Competitiva Aplicados ao Treinamento do  
Perceptron Morfológico**

Valente Neto, R. A., Mesquita, M. E. R. V.

# Algoritmo Genético e Aprendizagem Competitiva Aplicados ao Treinamento do Perceptron Morfológico

Marcos Eduardo Valle (e-mail: valle@uel.br)

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil

Raul Ambrozio Valente Neto (e-mail: valente@ieee.org)

Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil

## Resumo

O Perceptron Morfológico com Aprendizagem Competitiva (MP/CL) introduzido recentemente por Sussner e Esmi é uma rede neural utilizada para classificação de padrões, sendo seus operadores baseados na morfologia matemática. Dentre suas principais características está o fato do treinamento não depender da ordem com que os padrões são apresentados. Porém, ela classifica corretamente todos os padrões de treinamento. Esta última característica pode levar o MP/CL à um *over-fitting*, ou seja, uma sobre aprendizagem, assimilando características peculiares dos dados de treinamento, o que aumenta a quantidade de neurônios e pode acarretar erros na classificação de novos padrões. Buscando solucionar este problema, apresentamos neste trabalho algumas ferramentas, algoritmo genético e aprendizagem participativa, que tentaram levar evitar uma sobre aprendizagem da rede. Os resultados dos experimentos computacionais mostraram que é possível obter um erro similar ao MP/CL, entretanto, com um número bem reduzido de neurônios.

**Palavras-chave:** Redes neurais artificiais, morfologia matemática, problemas de classificação, análise de componentes principais, algoritmos genéticos, aprendizagem participativa.

Redes neurais artificiais são modelos matemáticos inspirados no cérebro humano, onde as unidades básicas de processamento são os neurônios [1, 8, 14]. Os estudos das redes neurais artificiais iniciaram em 1943 quando o biólogo Warren McCulloch e o matemático Walter Pitts apresentaram um modelo matemático de um neurônio biológico [11]. Cerca de 15 anos após a publicação do clássico artigo de McCulloch e Pitts, uma nova abordagem para o problema de reconhecimento de padrões foi introduzida por Rosenblatt [23] em seu trabalho conhecido como *perceptron*. O perceptron de Rosenblatt possui sérias limitações computacionais [13]. Tais limitações, entretanto, podem ser superadas quando o perceptron é organizado em uma rede neural com múltiplas camadas. De fato, o perceptron de múltiplas camadas, com pelo menos uma camada oculta, é capaz de aproximar qualquer função contínua definida sobre um conjunto compacto [7, 8, 14].

Nas décadas de 1970 e 1980, foi desenvolvido um método inovador para o treinamento do perceptron de múltiplas camadas chamado *algoritmo de retropropagação* (back-propagation). Este algoritmo foi descoberto por diversos pesquisadores. Bryson e Verbois talvez tenham sido os primeiros a investigar o algoritmo de retropropagação [2, 31]. Entretanto, a publicação mais influente foi o livro em dois volumes "Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructures of Cognition", editado por Rumelhart e McClelland [24, 25]. Este livro exerceu uma grande influência na utilização da aprendizagem por retropropagação, que emergiu como o algoritmo de aprendizagem mais popular para o treinamento do perceptron de múltiplas camadas devido a sua simplicidade computacional e eficiência.

Na década de 1990, Sussner e Ritter introduziram as primeiras redes neurais morfológicas [16–19]. As redes neurais morfológicas são baseadas na álgebra de imagens [15, 20, 21], uma teoria que unifica diversas técnicas usadas para o processamento de imagens, incluindo a álgebra linear tradicional, a álgebra minimax de Cuninghame-Green [3] e a morfologia matemática [26–28]. O perceptron morfológico é análogo ao perceptron de Rosenblatt mas efetua operações elementares da morfologia matemática como dilatação e erosão. Diversos algoritmos de treinamento para o perceptron morfológico de múltiplas camadas foram apresentados no final dos anos 1990 e início dos anos 2000 [16, 19, 22]. Em geral, os algoritmos para o treinamento do perceptron morfológico de múltiplas camadas representam um processo adaptativo da topologia da rede que aumenta para ajustar novos dados. Pode-se mostrar que tais algoritmos produzem uma rede capaz de classificar corretamente qualquer conjunto de treinamento finito. Todavia, como muitos modelos de redes neurais artificiais, a ordem na qual os dados são apresentados influencia no número de neurônios e, conseqüentemente, na superfície de classificação do modelo [16, 22]. Recentemente, Sussner e Esmi desenvolveram um algoritmo competitivo para o perceptron morfológico de

múltiplas camadas que mantém as características das outras regras de treinamento, mas não dependente da ordem na qual os dados são apresentados a rede [29, 30].

Através de estudos realizados sobre o perceptron morfológico de Sussner e Esmi, notamos que pode ocorrer um *over-fitting* da rede, ou seja, ela aprende características particulares dos dados de treinamento. Isto leva à um aumento do número de neurônios e também ao aumento do erro de classificação para um conjunto de dados diferentes do conjunto de treinamento.

Neste trabalho buscamos modificar o perceptron morfológico de aprendizagem competitiva com intuito de melhorar o algoritmo de treinamento evitando ou contornando o *over-fitting*. Dentre as abordagens utilizadas estão: algoritmo genético e aprendizagem participativa.

Desenvolvemos dessa forma, dois novos algoritmos de treinamento para o perceptron morfológico: Perceptron Morfológico com Aprendizagem Genética Competitiva e o Perceptron Morfológico com Aprendizagem Participativa. Os quais foram submetidos à alguns problemas clássicos na literatura, visando validar os algoritmos apresentados.

## 1 Conceitos Básicos de Redes Neurais

As redes neurais artificiais são modelos inspiradas na arquitetura do cérebro humano. O cérebro humano é um computador, sistema de processamento de dados, altamente complexo, não-linear e paralelo. Ele realiza diversas tarefas complexas de forma muito rápida, pois tem a capacidade de organizar seus elementos estruturais, os neurônios, de formas convenientes. Por exemplo, o nosso cérebro consegue identificar um rosto familiar em uma cena não familiar em aproximadamente 100-200 ms, enquanto que um computador convencional pode levar dias para resolver problemas bem mais elementares que esse [9].

Uma característica muito importante e interessante do cérebro, ou melhor, de uma rede neural é a capacidade de aprender a partir da experiência, ou seja, ela se adapta ao ambiente que ela está.

Uma rede neural artificial pode ser definida como um sistema de processamento de informações formado por unidades menores, os neurônios, interligadas. Essa rede neural possui características semelhantes ao cérebro humano: a capacidade de obter o conhecimento através de um processo de aprendizagem. Os pesos das conexões entre os neurônios, chamados pesos sinápticos, são os responsáveis para armazenar o conhecimento adquirido.

Outra característica de uma rede neural é a capacidade de generalização, ou seja, a rede neural consegue produzir respostas ou saídas adequadas para entradas que não foram apresentadas anteriormente. Sua estrutura dividida em unidades menores atribui um grande poder operacional, assim é possível resolver problemas computacionais muito grandes através do uso de uma rede neural.

## 2 Perceptron Morfológico com Aprendizagem Competitiva

O Perceptron Morfológico com Aprendizagem Competitiva (*Morphological Perceptron with Competitive Learning - MP/CL*) é uma rede neural utilizada para classificação de padrões, ou seja, ela é capaz de determinar à qual classe um dado padrão pertence. A classificação é baseada em operações da morfologia matemática (*Mathematical Morphology - MM*): erosão, dilatação, anti-erosão e anti-dilatação, seguidas por operações de máximo e mínimo.

Especificamente, cada módulo da rede é composto por dois neurônios: um realiza uma erosão e o outro uma anti-dilatação da MM. A saída do módulo é obtida tomando o mínimo de cada neurônio. Em termos geométricos, cada módulo pode ser interpretado como um hiper-paralelepípedo no espaço  $\mathbb{R}^n$ . Finalmente, as saídas dos módulos competem entre si de modo que a saída final do MP/CL corresponde à classe do módulo que produziu o maior valor de saída. O caráter competitivo da rede vem desse último estágio, em que o neurônio que produzir a maior saída será o vencedor.

Precisamente, dado um conjunto de treinamento  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  e  $\mathbf{y} \in \{1, 2, \dots, s\}^k$ , sendo  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k]$  uma matriz tal que  $\mathbf{x}^i$  pertence à classe  $y_i$  e  $s$  o número de classes do problema. Usando o algoritmo de treinamento MP/CL (descrito em [5] e [30]) determina-se a família de parâmetros de erosão e anti-dilatação (ou família de hiper-paralelepípedo, *hiperboxes*)  $\mathcal{F}^1 = \{[\mathbf{a}_1^1, \mathbf{b}_1^1], \dots, [\mathbf{a}_{m_1}^1, \mathbf{b}_{m_1}^1]\}, \dots, \mathcal{F}^s = \{[\mathbf{a}_1^s, \mathbf{b}_1^s], \dots, [\mathbf{a}_{m_s}^s, \mathbf{b}_{m_s}^s]\}$ , sendo  $m_i$  o número de módulos para a  $i$ -ésima classe,  $\mathbf{a}_m^i$  e  $\mathbf{b}_m^i$  os parâmetros da erosão e anti-dilatação para o  $m$ -ésimo módulo e  $i$ -ésima classe, respectivamente.

Os parâmetros  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  podem ser vistos geometricamente como os vértices inferior e superior do hiper-paralelepípedo, respectivamente.

Apresentando à rede um vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  cuja classe é desconhecida, calculamos para cada módulo  $m$  os valores  $d_m^1$  e  $d_m^2$ :

$$d_1^m(\mathbf{x}) = \min\{(x_j - a_j) : j = 1, \dots, n\} \quad (2.1)$$

e

$$d_2^m(\mathbf{x}) = \min\{(b_j - x_j) : j = 1, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

Depois, definimos a saída do módulo  $m$  como sendo:

$$\eta_m = \min\{d_1, d_2\}. \quad (2.3)$$

O módulo com o maior valor  $\eta_m$  vence, e a classe do padrão de entrada  $\mathbf{x}$  é atribuído à classe do módulo vencedor.

O algoritmo MP/CL consiste em um aprendizado supervisionado, ou seja, é necessário a apresentação de um conjunto de dados conhecidos para determinar os parâmetros  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  para cada módulo.

Uma característica do MP/CL é que, após o treinamento, ele é capaz de classificar corretamente todos os dados do treinamento. Esse fato resulta na criação de módulos (até mesmo) para pontos isolados ou “outliers” e pode acarretar à um *over-fitting* da rede, ou seja, ela aprende características particulares dos dados de treinamento, levando a um aumento do número de neurônios e também a um aumento do erro para um conjunto diferente do de treinamento.

### 3 Perceptron Morfológico com Aprendizagem Genética

Um algoritmo genético (*Genetic Algorithm - GA*) é um algoritmo probabilístico de otimização baseado na teoria da evolução. Em termos gerais, há uma população de indivíduos que se reproduzem e competem entre si. A cada geração somente os indivíduos mais aptos sobrevivem e se reproduzem com uma certa probabilidade [12]. A reprodução é baseada nos operadores *cross-over* e *mutação*.

Nesse trabalho, cada indivíduo corresponde à um MP. O desempenho de um indivíduo no ambiente, chamado *fitness*, corresponde ao erro de classificação do MP/CL. A operação de *cross-over* entre dois indivíduos foi definida como sendo uma troca dos parâmetros das operações de erosão e anti-dilatação. Quando um indivíduo sofre mutação, os parâmetros são substituídos por um dado aleatório do conjunto de treinamento. No final do processo, teremos o MP que resulta no menor erro de classificação. Este novo algoritmo de treinamento é chamado perceptron morfológico com aprendizagem genética (*Morphological Perceptron with Genetic Learning - MP/GL*).

Formalmente, um algoritmo genético mantém uma população de indivíduos  $\mathcal{P}(t) = \{\mathbf{v}_1^t, \mathbf{v}_2^t, \dots, \mathbf{v}_{pop\_size}^t\}$  sendo  $t$  a iteração ou geração. Cada cromossomo, ou indivíduo,  $\mathbf{v}$  é uma possível solução, e esses são medidos através do *fitness* (que será feito através das (2.1), (2.2) e (2.3)).

O cromossomo será um vetor  $\mathbf{v} = \{i_1 i_2 \dots i_N\}$ , sendo  $N$  o número total de módulos, e  $i$  o índice do padrão que será usado no algoritmo de treino MP/GL para determinar os parâmetros  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . O número de módulos  $N$  será determinado no início, portanto o algoritmo não será capaz de criar módulos indeterminadamente.

O processo de seleção dos indivíduos a cada nova geração é dada pelos seguintes passos:

- Calcule o *fitness eval*( $\mathbf{v}_i$ ) para cada cromossomo  $\mathbf{v}_i (i = 1, 2, \dots, pop\_size)$ ;
- Encontre o valor total do *fitness* para a população:

$$F = \sum_{i=1}^{pop\_size} eval(\mathbf{v}_i). \quad (3.1)$$

- Calcule a probabilidade de seleção  $p_i$  para cada cromossomo  $\mathbf{v}_i (i = 1, 2, \dots, pop\_size)$ :

$$p_i = \frac{eval(\mathbf{v}_i)}{F}. \quad (3.2)$$

- Calcule a probabilidade acumulada  $q_i$  para cada cromossomo  $v_i (i = 1, 2, \dots, pop\_size)$ :

$$q_i = \sum_{j=1}^i p_j. \quad (3.3)$$

- Gere um número (float) aleatório  $r$  no intervalo  $[0, 1]$ .
- Se  $r < q_1$  então selecione o primeiro cromossomo ( $v_1$ ); caso contrário selecione o  $i$ -ésimo cromossomo  $v_i (2 \leq i \leq pop\_size)$  tal que  $q_{i-1} < r \leq q_i$ .

Use esses passos para gerar uma nova população.

Cada indivíduo da nova população pode ser transformado pelo *cross-over*. O *cross-over* é o processo onde dois indivíduos trocam material genético em um ponto aleatório do seu código. A probabilidade do *cross-over* é denotada por  $p_c$ .

Para cada indivíduo da nova população faça:

- Gere um número (float) aleatório  $r$  no intervalo  $[0, 1]$ .
- Se  $r < p_c$  então selecione o indivíduo para o *cross-over*.
- Selecione dois cromossomos randomicamente para fazer o *cross-over*:
  - Gere um número (inteiro)  $pos$  dentro do intervalo  $[1, N]$ .
  - Re-escreva os dois indivíduos de:

$$(i_1 i_2 \dots i_{pos} i_{pos+1} \dots i_N) \quad \text{e} \quad (j_1 j_2 \dots j_{pos} j_{pos+1} \dots j_N) \quad (3.4)$$

como

$$(i_1 i_2 \dots i_{pos} j_{pos+1} \dots j_N) \quad \text{e} \quad (j_1 j_2 \dots j_{pos} i_{pos+1} \dots i_N) \quad (3.5)$$

O outro operador genético é a *mutação*. Biologicamente, a mutação seria um erro ao copiar o código genético. A probabilidade de mutação é denotada por  $p_m$ .

Para cada indivíduo na nova população e para cada índice dentro do cromossomo faça:

- Gere um número (float) aleatório  $r$  no intervalo  $[0, 1]$ .
- Se  $r < p_m$ , o índice sofre mutação.

Todos esses passos devem ser feitos várias vezes.

## 4 Perceptron Morfológico com Aprendizagem Participativa

Em vários ambientes, o aprendizado não ocorre de forma definitiva e imutável. O sistema deve aprender e estar constantemente revendo o que ele toma como verdade. Este é um ambiente de aprendizado participativo. A principal ideia do aprendizado participativo é que o impacto de uma observação em causar aprendizado ou revisá-lo depende da compatibilidade dessa observação de acordo com a crença do atual sistema [32] e [4]. Aplicando esse algoritmo ao MP/CL, chamado (*Morphological Perceptron with Participative Learning - MP/PL*), o qual descrevemos abaixo.

Seja  $v$  o vetor que representa o que o sistema acredita, no nosso caso  $v = [a, b]$  onde  $a$  e  $b$  são a erosão e anti-dilatação, respectivamente. Portanto há um vetor  $v^i$  para cada módulo da rede. O objetivo do algoritmo é a determinação dos vetores  $v^i$ .

O algoritmo utilizará os padrões  $x$  para realizar o treinamento. O processo é chamado participativo pois cada padrão  $x$  irá contribuir para a determinação de  $v$ .

Quanto mais próximo  $x$  estiver de  $v$ , mais aceito este padrão será, ou seja, mais relevante é essa informação, que está confirmando as crenças da rede. De forma semelhante, caso  $x$  estiver afastado de  $v$  a rede irá ver que esta informação é nova

e tentará aprender algo novo, afetando menos a rede. Assim um mecanismo eficiente para a atualização dos vetores  $v_t^j$  é dado pela equação

$$v_{t+1} = v_t + \alpha \rho_t (x_t - v_t), \quad (4.1)$$

sendo  $r = 1, 2, \dots, k$ ,  $k$  o número de padrões apresentados,  $v_{t+1}$  a nova crença do sistema, no caso, os novos hiper-paralelepípedo,  $\alpha \in [0, 1]$  a taxa de aprendizagem e  $\rho_t \in [0, 1]$  a taxa de compatibilidade entre  $x_t$  e  $v_t$  dado. Neste trabalho, definimos

$$\rho_t = \frac{1}{1 - \min\{\eta, 0\}}, \quad (4.2)$$

sendo  $\eta$  o valor da saída do módulo, determinado por (2.3).

A equação 4.1 pode ser interpretada como a equação de reta que liga  $v_t$  à  $x_t$  e os parâmetros  $\alpha \rho_t$  como o tanto que  $v_t$  irá caminhar se tornando  $v_{t+1}$ .

O parâmetro  $\eta$  será negativo sempre que o padrão apresentado estiver fora do hiper-paralelepípedo, e será positivo quando este estiver dentro. Desta forma, quando o padrão estiver dentro,  $\rho_t = 1$ , o que levará o hiper-paralelepípedo à diminuir. Quando o padrão estiver fora, o hiper-paralelepípedo tenderá a aumentar seu tamanho.

A taxa de aprendizagem  $\alpha$  diz respeito à quanto rápido a rede irá aprender. Quanto maior for esse fator, maior serão as atualizações sobre  $v$ , ou seja, mais o sistema irá mudar. E quanto menor, mais lentamente  $v$  irá se atualizar.

Caso haja uma seqüências de valores baixos de  $\rho_r$ , a rede é levado a pensar que suas crenças estão erradas, algo novo está acontecendo. Assim é necessário criar uma forma de detectar esta mudança e define-se o índice de excitação, denotado por  $a_t \in [0, 1]$ . Quanto maior este índice, mais suscetível à mudanças a rede estará. Este índice é atualizado seguindo

$$a_{t+1} = a_t + \beta[(1 - \rho_{t+1}) - a_t], \quad (4.3)$$

sendo  $\beta \in [0, 1]$  o parâmetro que controla a taxa de mudança da excitação. Quanto mais próximo de 1, mais rápido o sistema sente as variações.

Adicionando o índice de excitação da rede à equação de atualização de  $v_t$ , tem-se:

$$v_{t+1} = v_t + \alpha(\rho_t)^{1-a_t} (x_t - v_t). \quad (4.4)$$

Desta forma, mesmo a rede estando inclinada à mudança, através de  $\rho_t$ , o índice  $a_t$  irá determinar se esta nova crença irá ser absorvida pela rede ou não.

## 5 Experimentos Computacionais e Discussões

Os problemas utilizados são clássicos na literatura [5]: Problema Sintético de Ripley [14], Flores de Iris [6] e Diagnóstico de Câncer de Mama [10]. Todas os erros são apresentados em porcentagem, sendo  $E_{tr}$  o erro de treinamento,  $E_{te}$  o erro de teste e  $N$  o número de neurônios utilizados (módulos).

A tabela 5.1 mostra os resultados para o MP/CL, MP/CGL e MP/PL.

Tabela 5.1: Resultados para o MP/CL, MP/GL, MP/PL e as demais ferramentas propostas.

		Problemas		
		Ripley	Iris	Câncer
MP/CL	$N$	55	14	64
	$E_{tr}$	0	0	0
	$E_{te}$	10,2	0	4,07
MP/GL	$N$	2	6	40
	$E_{tr}$	13,2	2,86	6,02
	$E_{te}$	9,7	0	4,07
MP/PL	$N$	6	6	40
	$E_{tr}$	13,1	2,22	4,28
	$E_{te}$	12,4	1,90	4,07

Tanto o MP/GL e o MP/PL apresentaram resultados próximos um ao outro e estes resultados também se aproximaram

bastante do MP/CL, entretanto para os dois primeiros algoritmos a quantidade de neurônios foi bem menor que a utilizada pelo MP/CL. Isso mostra que os neurônios que detinham informações supérfluas dos dados foram removidos.

## 6 Conclusão

As redes neurais artificiais são modelos matemáticos inspirados no cérebro humano. Uma de suas principais características é a capacidade de aprender a partir da experiência.

Recentemente, Sussner e Esmi apresentaram uma rede neural chamada Perceptron Morfológico de Aprendizagem Competitiva, cuja operações são baseadas na morfologia matemática para realizar a classificação de padrões. Algumas de suas principais características são: o treinamento não depender da ordem na qual os padrões são apresentados; e a rede classifica corretamente todos os padrões de treinamento. Esta última característica pode levar a um *over-fitting*, que é um aprendizado excessivo dos dados de treinamento, assimilando características peculiares dos dados, o que aumenta a quantidade de neurônios da rede e pode elevar o erro na classificação.

Apresentamos algumas ferramentas para evitar tal problema: algoritmo genético e aprendizagem participativa.

O algoritmo genético e a aprendizagem participativa tiveram erros e quantidade de neurônios bastante semelhantes. Reduziram bastante a quantidade de neurônios utilizados, mantendo o mesmo erro para o conjunto de teste do MP/CL. Já o erro de treinamento aumentou, pois a quantidade de neurônios reduziu.

## Referências

- [1] J.A. Anderson. *An Introduction to Neural Networks*. MIT Press, MA, 1995.
- [2] Arthur E. Bryson and Yu-Chi Ho. *Applied Optimal Control: Optimization, estimation, and control*. Taylor and Francis, 1 edition, 1975.
- [3] R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 166*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [4] Jose Valente de Oliveira and Witold Pedrycz, editors. *Advances in Fuzzy Clustering and its Applications*. John Wiley and Sons, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, UK, 2007.
- [5] Estevão Laureano Esmi. Modelos modificados de redes neurais morfológicas. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Departamento de Matemática Aplicada - IMECC, 2010.
- [6] R. A. Fisher. The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics*, 7(7):179–188, 1936.
- [7] M. H. Hassoun. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [8] S. Haykin. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [9] S. Haykin. *Redes Neurais: Princípios e Prática*. Bookman, Porto Alegre, 2001.
- [10] O. L. Mangasarian, W. Nick Street, and William H. Wolberg. Breast cancer diagnosis and prognosis via linear programming. *Operations Research*, pages 570–577, 1995.
- [11] W.S. McCulloch and W. Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5:115–133, 1943.
- [12] Zbigniew Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer, 1998.
- [13] M.L. Minsky and S.A. Papert. *Perceptrons*. MIT Press, Cambridge, MA, 1969.
- [14] B. D. Ripley. *Pattern Recognition and Neural Networks*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [15] G. X. Ritter. Image algebra. Unpublished manuscript, available at <http://www.cise.ufl.edu/jnw/CVAIA/>, 1997.

- [16] G. X. Ritter and P. Sussner. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pages 709–717, Vienna, Austria, 1996.
- [17] G. X. Ritter and P. Sussner. Morphological neural networks. In *Intelligent Systems: A Semiotic Perspective; Proceedings of the 1996 International Multidisciplinary Conference*, pages 221–226, Gaithersburg, Maryland, 1996.
- [18] G. X. Ritter and P. Sussner. Associative memories based on lattice algebra. In *Computational Cybernetics and Simulation*, Orlando, Florida, 1997. 1997 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics.
- [19] G. X. Ritter and P. Sussner. Morphological perceptrons. In *ISAS'97, Intelligent Systems and Semiotics*, Gaithersburg, Maryland, 1997.
- [20] G. X. Ritter and J. N. Wilson. *Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra*. CRC Press, Boca Raton, 2 edition, 2001.
- [21] G. X. Ritter, J. N. Wilson, and J. L. Davidson. Image algebra: An overview. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 49(3):297–331, March 1990.
- [22] Gerhard X. Ritter and Gonzalo Urcid. Lattice algebra approach to single-neuron computation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(2):282–295, 2003.
- [23] F. Rosenblatt. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, 65:386–408, 1958.
- [24] D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, and R.J. Williams. *Learning internal representation by error propagation*. Parallel Distributed Processing. MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- [25] D.E. Rumelhart and J.L. McClelland. *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructures of Cognition*, volume 1. MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
- [26] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [27] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [28] P. Soille. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [29] Peter Sussner and Estevão Laureano Esmi. Introduction to morphological perceptrons with competitive learning. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks 2009*, pages 3024–3031, Atlanta, GA, U.S.A., June.
- [30] Peter Sussner and Estevão Laureano Esmi. Morphological perceptrons with competitive learning: Lattice-theoretical framework and constructive learning algorithm. *Information Sciences, in Press*.
- [31] Paul John Werbos. *The Roots of Backpropagation*. John Wiley and Sons, 1994.
- [32] Ronald R. Yager. A model of participatory learning. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 20(5):1229–1234, 1990.

**C19**

**Interfaces entre o PIBID Matemática Ensino  
Médio e o seu BLOG**

Yamamoto, T. A. S. U. *Et al.*

## Interfaces entre o PIBID Matemática Ensino Médio e o seu BLOG

Tiago A. S. Umek Yamamoto<sup>†</sup> ([silver\\_rider2@hotmail.com](mailto:silver_rider2@hotmail.com))

Rodolfo Favretto Mileski <sup>†</sup> ([rodolfomileski@hotmail.com](mailto:rodolfomileski@hotmail.com))

Weberty Domingos Silva <sup>†</sup> ([w.domingos@hotmail.com](mailto:w.domingos@hotmail.com))

Rodrigo Verri Pitta <sup>†</sup> ([rodrigo.verri@hotmail.com](mailto:rodrigo.verri@hotmail.com))

Maria Aparecida da Silva de Carvalho <sup>†</sup> ([marryyaa@gmail.com](mailto:marryyaa@gmail.com))

Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho<sup>†</sup> ([tucci@uel.br](mailto:tucci@uel.br))

Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil

### Resumo

A ideia de criar um blog de matemática para o PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – Matemática da UEL surgiu no I Encontro do PIBID UEL, realizado em novembro de 2011, com a participação de todas as áreas do PIBID da UEL. Após apresentarmos a criação do Laboratório de Matemática em um dos Colégios dos quais participamos, alguns professores nos perguntaram como poderiam entrar em contato conosco para terem acesso às atividades lúdicas que foram apresentadas, além disso também notamos que vários outros PIBIDs já possuíam um blog. Percebemos então que um BLOG poderia facilitar, e muito, nossa comunicação com os professores e alunos. Assim criamos o BLOG <http://pibidmatuel.blogspot.com.br/>. Posteriormente, começamos a usar o blog também como ferramenta de ensino. Atualmente, contém as seguintes páginas: Início, Sobre o PIBID de matemática, Galeria de fotos, Arquivos e Contatos. Na página *Início*, é postado vários artigos curiosos, com conteúdos diversos, os quais achamos interessantes, tanto para os professores quanto para os alunos. Na página *Sobre o PIBID* de matemática, explicamos a concepção do PIBID Matemática da UEL para o Ensino Médio. Na *Galeria de Fotos*, são postados alguns dos bons momentos que aconteceram no decorrer no projeto, além de mostrarmos um pouco do nosso trabalho. Em *Arquivos*, postamos alguns planos de aula, oficinas e atividades que foram elaborados e aplicados pelos bolsistas. A última página é a *Contato*, pela qual qualquer pessoa que deseje poderá facilmente entrar em contato conosco. Em breve, pois em fase de acabamento, o blog terá uma página com *Atividades no Geogebra*, para que alunos e professores possam aproveitar ainda mais esta ferramenta de ensino.

**Palavras-chave:** BLOG, Educação Matemática, Tecnologia.

### Abstract

The idea of the creation of the BLOG from Mathematics area to PIBID \_ Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, was born during the I Encontro PIBID UEL, that was hold in November, 2011, with the totality of the areas of the PIBID UEL. After the presentation of Mathematics Laboratory inside one of our partner School, some teachers have made questions about how to contacts us, in behind to have access to the activities that where hold; besides we have noted that many others PIBIDs from UEL had already a BLOG, so we decided to do one too. We realize that a BLOG could bring so many facilities to our communication with teachers and students. So we made the BLOG <http://pibidmatuel.blogspot.com.br/>. After that, we also use the blog as a learning instrument. Right now, it has the following folders: Início, Sobre o PIBID de matemática, Galeria de fotos, Arquivos e Contatos. Inside the folder Início, there are many curious articles about different things, that we judge interesting to our teachers and students. Inside *Sobre PIBID de matemática*, we explain our conception of Mathematics PIBID – Secondary School. In *Galeria de Fotos*, there are many pictures from us, some good moments that happened during the project. Inside *Arquivos* we had post some class scheme and activities, elaborated by our students. Finally, in *Conato*, someone who desires can contact us very easily. Further it will have another page, *Atividades no Geogebra*, to teachers and students could enjoy more this learning tool.

**Key-words:** BLOG, Mathematics Education, Tecnology.

---

<sup>†</sup> Bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID, da CAPES – Brasil.

†  
†  
†  
†  
†

## **1. Introdução**

Com o avanço da tecnologia e o crescente interesse dos alunos por diferentes meios de comunicação, cabe à escola adaptar-se a esse avanço e procurar utilizá-lo de modo a diversificar e tornar mais atraente o ensino e a aprendizagem de conteúdos historicamente acumulados.

Grande parte dos alunos que frequentam a escola tem acesso à celulares, computadores e à internet. Dentre as barreiras encontradas pelos professores no processo de mediação de conhecimentos, a maior delas é competir com a tecnologia, presente nos celulares da maioria dos alunos, e utilizá-la como ferramenta pedagógica em sala de aula, o blog pode inverter esta situação, aproveitando-se deste interesse estudantil para tornar a tecnologia como instrumento para a aprendizagem.

Neste sentido, Borba e Penteadó (2001) também apontam a inserção da tecnologia como um estímulo para o aperfeiçoamento profissional, desencadeando novas possibilidades para a atuação do professor, servindo também como meio de estímulo ao estudo.

Para tanto, o professor deve estar conectado com essa nova abordagem de ensino, mais tecnológica e disposto a rever conceitos e estratégias de ensino. De acordo com Fainguelernt (1999), ensinar através da computação reduz a dificuldade de aprendizagem, permite a criação de espaços para exploração e construção do conhecimento, e gera um novo envolvimento com a aprendizagem, tornando-a dinâmica e agradável, além de aguçar a curiosidade.

Procurando contribuir com essa nova vertente de ensino, idealizamos a criação de um blog para o uso pedagógico da disciplina de matemática: o BLOG <http://pibidmatuel.blogspot.com.br/>, dentro do PIBID Matemática UEL, Ensino Médio.

Todavia, ainda há muitos problemas com relação ao uso dos laboratórios de informática nas escolas: falta de recursos para a manutenção dos computadores, número insuficiente de máquinas com relação ao número de alunos; tecnologia ultrapassada das máquinas disponíveis, falta de projetos pedagógicos que se utilizem das tecnologias, recursos usados de maneira pouco eficaz – por exemplo, máquinas em redes: quando uma trava, todas as outras da rede travam.

## **2. O Blog de matemática**

O Blog de Matemática do PIBID tem sido utilizado pelos professores e estagiários do PIBID, desde sua criação, 05 de novembro de 2011, como meio para a divulgação da produção de

materiais didáticos e participação em eventos. Recentemente, tem sido utilizado também como complemento das atividades desenvolvidas nas aulas de matemática, seja como leitura de textos complementares, resolução de exercícios do ENEM ou questões da OBMEP.

Os computadores são partícipes no nosso dia-a-dia, em casa, no trabalho e na escola. Assim, o ambiente interativo torna diferente e excitante aprendizagem realizada através do computador, que constitui, assim, uma eficiente ferramenta. O uso do computador gera um novo envolvimento com a aprendizagem e faz com que surjam novos desafios, ideias e caminhos de construção do conhecimento e desenvolvimento do pensamento.

Segundo Fainguelernt (1999, p. 63)

o computador pode ser um catalisador para mudar a dependência e, em um ambiente interativo, envolver os alunos em atividades matemáticas durante as quais eles podem propor os seus próprios problemas, tomar suas próprias decisões e depurar suas representações baseados no feedback proporcionado pelo computador.

As salas de informática das escolas, muitas vezes com uso precário e esporádico, tem-se mostrado um espaço importante para o desenvolvimento das atividades de matemática, desde que o PIBID foi implantado nestes colégios. A revitalização do Laboratório de Informática e o uso do Blog como instrumento para o ensino de conteúdos diversos incentiva a participação dos estudantes e constitui um desafio para os professores, tornando a discussão de vários conteúdos um processo mais dinâmico. Por exemplo, ao invés de gastar muitos minutos preciosos da aula – que tem duração de apenas 50 minutos – para a construção de um gráfico de uma função qualquer (a seno, por exemplo), o uso do recurso tecnológico possibilita a construção em apenas uns poucos minutos, permitindo também a visualização imediata de variação dos parâmetros da função.

### **3. O papel do professor no uso do Blog como ferramenta pedagógica**

Diante do novo universo que a tecnologia possibilita na mediação de conteúdos é necessário que o professor se adeque a esse novo contexto. Segundo Borba e Penteadó (2010), os professores

acabam cristalizando sua prática numa zona dessa natureza e nunca buscam caminhos que podem chegar a incerteza e imprevisibilidade. Esses professores nunca avançam para o que chamamos de uma zona de risco, na qual é preciso avaliar constantemente as consequências das ações propostas. (p. 56)

Os professores precisam mover-se em direção ao desconhecido, ao novo, afim de que o seu ensino se torne mais eficaz. A isto, Borba e Penteadó chama de zona de risco. A tecnologia desperta a necessidade de o professor sair de sua zona de conforto em direção à sua zona de risco. O uso da

tecnologia nas aulas, portanto, pressupõe uma mudança no professor que está disposto a utilizá-la como ferramenta pedagógica em suas aulas.

Para que o Blog torne-se de fato um instrumento pedagógico é necessário que este não apenas apresente o conteúdo da mesma forma que ocorre em um livro didático. É fundamental que haja uma interação entre docente e discente através do Blog. Se não houver esta interação com o aluno e a intervenção do professor na construção do conhecimento os objetivos pedagógicos do Blog não serão alcançados.

O Blog deve possibilitar a interação entre os alunos e entre aluno e professor. O professor deve utilizar o Blog também para direcionar e orientar o aluno em pesquisas e resoluções de problemas, por exemplo. Cabe ao professor usar essa ferramenta para sugerir ao aluno formas de pesquisa e ensiná-lo a filtrar o conteúdo encontrado na internet e pesquisar em sites seguros e confiáveis, pois na internet há muito conteúdo que não é digno de confiança e possui informações falsas. A intervenção do professor através do Blog, portanto, é imprescindível.

Dessa forma, a introdução do uso de tecnologia nas aulas da matemática altera todo o contexto escolar, isto é, não somente os alunos, mas também os professores. Todos precisam alterar e melhorar sua maneira de pensar e agir dentro da escola. Logo, a tecnologia afeta a todos e, se utilizada de maneira adequada pode trazer muitos benefícios e serem descobertos novos caminhos e possibilidades para o aprendizado da matemática tornando-o muito mais interessante e prazeroso.

#### **4. Considerações finais**

Desde o início do ano letivo, o Blog vem sendo utilizado como complemento das atividades. Essa experiência tem sido muito interessante, pois através dela foi possível perceber que os alunos sentem-se mais motivados a participarem das atividades. Alguns alunos não estão tão familiarizados com o computador, dependendo da região onde a escola se localiza, porém isto não se torna uma dificuldade, pois os alunos ajudam uns aos outros e, geralmente, o aluno do lado acaba ajudando.

Outro aspecto positivo que o Blog trouxe à escola foi que os professores descobriram a necessidade de interar-se com essas inovações tecnológicas, contribuindo para a sua formação continuada.

Novos horizontes poderão ser descobertos e explorados quando os professores perceberem que os recursos tecnológicos podem ser usados como ferramenta de auxílio que contribuem para o processo de ensino e aprendizagem do aluno. A tecnologia, que geralmente, tem sido considerada

como um inimigo na sala de aula, na verdade, se constitui um grande aliado. Para isso, é necessário que tanto alunos quanto professores descubram que a internet vai além das redes sociais e é uma fonte inesgotável de conhecimento que deve ser usado com sabedoria, sabendo filtrar seu conteúdo, a fim de despertar o interesse do aluno e tornar a aprendizagem mais dinâmica.

#### **4. Referências Bibliográficas**

Borba, M.C.; Pentead, Miriam G. *Informática e Educação Matemática*. 4ª. Ed, Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

Fainguelernt, Estela Kaufman. *Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

[http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/Dissertacao\\_Cabri.pdf](http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/Dissertacao_Cabri.pdf). Acesso em 04/09/2012

# Poster

## P1

# **Materiais manipuláveis: uma proposta didática para o Ensino Fundamental à luz da Educação Matemática Recreativa**

Carneiro, K. M., Gomes, M. T.

# Materiais manipuláveis: uma proposta didática para o Ensino Fundamental à luz da Educação Matemática Recreativa.

Karina Manuella Carneiro (e-mail: karina.manuella@gmail.com)  
Marilda Trecenti Gomes (e-mail: trecenti@sercomtel.com.br)  
FAP – Faculdade de Apucarana, PR – 2012.

## 1. Proposta

Este trabalho apresenta o resultado de uma das atividades de um projeto (LEM-FAP)<sup>1</sup>, com objetivo de auxiliar na alfabetização matemática de crianças com dificuldades de aprendizagem de um terceiro ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de Araçongas – PR.

Desenvolvemos este trabalho inicialmente utilizando a observação direta dos alunos, a fim de diagnosticarmos suas dificuldades mais frequentes. Pudemos notar que embora os alunos integrassem uma turma regular de terceiro ano, suas dificuldades eram referentes a conteúdos indicados ao primeiro ano, onde há introdução de conceitos matemáticos. Foi possível notar a falta do senso de direção e distância, confusão com os sinais de operações (+,-), inabilidade em reconhecer números maiores que dez e identificar antecessor e sucessor, falhas em perceber a passagem do tempo, de manter a concentração durante as atividades, dificuldades em contagem ao brincar e relutância à disciplina de matemática.

Com o intuito de promovermos a aprendizagem dos alunos, planejamos aulas que aprimorassem o desenvolvimento cognitivo e possibilitassem a construção do conceito numérico, bem como as operações de adição e subtração.

Baseamo-nos em Piaget [2012], que afirma ser necessário desenvolver conhecimento físico, lógico matemático e social para a formação de conceito de números. Conhecimento físico diz respeito ao conhecimento das propriedades físicas de objetos, notadas a partir da observação; o conhecimento lógico matemático possibilita estabelecer relações mentais sobre os objetos (comparação, classificação, conservação, por exemplo), e conhecimento social, por sua vez, refere-se aos acordos estabelecidos pelas pessoas de forma facultativa transmitidos socialmente. Partindo destes pontos, elaboramos atividades que contaram com o auxílio de materiais manipuláveis: Jogo dos cilindros coloridos, Jogo do cubos e garrafas, Dominó, Botões matemáticos, Bingo Antecessor e Sucessor, Dança dos números pares e ímpares, Material dourado e Ábaco.

Além destes recursos, optamos ministrar aulas utilizando resolução de problemas, buscando situações de aplicação diversificadas da matemática de forma recreativa (lúdica). Gallagher afirma que o uso da recreação oportuniza meios eficazes para os alunos interagirem em resolução de problemas

---

<sup>1</sup> O LEM FAP é o projeto do Laboratório de Ensino da FAP – Faculdade de Apucarana, coordenado pelas professoras Marilda Gomes Trecenti, Loreni Baldini Ferreira

(2005, p. 245).

As primeiras atividades propostas visavam direcionar os alunos às noções de tamanho (pequeno, grande, fino, grosso - ordem crescente e decrescente) formalizando conceitos perceptíveis às noções de espaço. Sem orientação de como deveriam prosseguir com os Cilindros Coloridos e o Jogo das Garrafas, os alunos os organizaram seguindo uma ordem, alguns por tamanhos outros por cores (da mais clara para a mais escura, por exemplo).

Sequencialmente, trabalhamos com jogos para fixar a relação entre símbolo e número. Separamos os alunos em grupos e distribuimos vinte fichas com números aleatórios de zero a cem, em seguida, solicitávamos aos alunos o número seguinte da sequência numérica, por exemplo, ao requisitarmos o número 27, o grupo de alunos que continha esta ficha teria de fixá-la na tabela que era comum a todos os grupos. Nesta etapa, o Jogo Dominó contribuiu a desenvolver a percepção, promover a noção de sequência e a contagem.

O restante das atividades tiveram como objetivo proporcionar a formalização dos conceitos de unidade, dezena, centena e unidade de milhar, como também verificar as noções de números pares e ímpares. Tanto para estas, como para a introdução das operações de adição e subtração, utilizamos Material Dourado e o Ábaco, simultaneamente.

Tendo em vista que as atividades foram realizadas em apenas dez aulas, podemos considerar que obtivemos resultados satisfatórios, pois, apesar de toda a dificuldade apresentada pelos alunos no início do projeto, fez-se notável que compreenderam os conceitos básicos da Matemática abordados por nós através da Matemática Recreativa.

### **Referências Bibliográficas**

GALLAGHER, Kevin. Resolvendo problemas com o uso da matemática recreativa: In: KRULIK, Stephen & REYS, Robert E. A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Saraiva 2005. Disponível em:<<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/495-4.pdf>>. Acesso em: 01 set. 2012.

TERRA, Maria Regina. **O desenvolvimento humano na teoria de Piaget**. Disponível em:<<http://www.unicamp.br/iel/site/alunos/publicacoes/textos/d00005.htm>>. Acesso: 01 set. 2012.

## P2

# A sequência didática e a aprendizagem de conceitos estatísticos

Danim, W., Pereira, R. S. G.

# A sequência didática e a aprendizagem de conceitos estatísticos

Willian Damin (daminmatematica@hotmail.com)  
Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil.

Rudolph dos Santos Gomes Pereira (rudolph.matematica@gmail.com)  
Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil.

## Resumo

Pretende-se com este trabalho apresentar o resultado parcial da aplicação de uma sequência didática cujo objetivo é de analisar a aprendizagem de conceitos por meio desta tendência. Trata-se de uma pesquisa qualitativa que busca compreender, pela interpretação do pesquisador, a apropriação de conceito de Tratamento de Informação em alunos do oitavo ano de uma escola estadual situado no norte do Paraná. Sendo que a sequência didática aplicada envolve conhecimentos relacionados diretamente com a prática e com a solução de problemas presentes no cotidiano dos alunos. Pode-se perceber que os alunos tiveram um comportamento positivo em relação ao desenvolvimento da atividade bem como uma maior apropriação dos conceitos mesmo com a sequência didática disposta em nível crescente de conceitos.

**Palavras-chave:** Sequência didática, Ensino de Estatística, Aprendizagem de conceitos.

## Abstract

This paper present the result of the partial application of a didactic sequence whose goal is to analyze the learning of concepts through this trend. This is a qualitative research that seeks to understand the interpretation of the researcher, the concept of ownership Treatment Information eighth graders from a public school located in northern Paraná. Since the sequence involves teaching applied skills directly related to practice and problem solving in the daily lives of students. It can be noticed that the students had a positive attitude towards the development of the activity and greater ownership of concepts with the same didactic sequence arranged in increasing level of concepts.

**Keywords:** Didactic sequence. Teaching Statistics, Learning concepts.

## 1. Introdução

Este trabalho é parte de uma pesquisa em andamento cujo título é *Educação Estatística e Sequências Didáticas: uma proposta para a aprendizagem de conceitos*. Nessa pesquisa objetiva-se investigar a utilização da sequência didática na aprendizagem de conhecimentos estatísticos pelos alunos do oitavo ano. Para atingir tal objetivo, utilizou-se da Engenharia Didática e as suas quatro fases. Cabe salientar que por meio desta o professor pode refletir e avaliar sua prática em sala de aula, bem como analisar o comportamento e aproveitamento escolar dos alunos.

## 2. Referencial Teórico

Campos (2007) considera que, apesar de a Estatística ser uma parte da Matemática, elas se diferenciam, por apresentarem aspectos e valores, que na Estatística aparece em primeiro plano. Tais como, organização dos dados, a interpretação, a reflexão, a análise e a tomada de decisões. A Estatística ainda nos apresenta seus eventos aleatórios, a variabilidade, chance maior ou menor de ocorrência Sendo esses itens de tal importância para uma pessoa, tal que ela seja capaz de argumentar com confiança, compreenda e faça conclusões de suas investigações. Para Lopes (2008), Estatística, Matemática e Educação mantêm uma relação dependente, dando origem assim à Educação Estatística que centraliza seus objetivos no desenvolvimento do pensamento probabilístico e estatístico. “A Educação Estatística não apenas auxilia na leitura e interpretação de dados, mas fornece a habilidade para que uma pessoa possa analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade” (LOPES, 2008, p. 73).

## 3. Metodologia

Considera-se que para garantir que o aluno aprenda, é necessário que ele mesmo construa suas associações. Para Almoloud (2008), a Engenharia Didática em relação ao ensino de Estatística, pode ser utilizada de modo a fornecer ferramentas para análise das situações didáticas, bem como instigar a reflexão da prática docente do professor. Acredita-se que a construção de uma sequência didática pode facilitar o planejamento da ação educacional, de modo a atingir o objetivo educacional esperado. Tendo em vista tanto a prática docente quanto a aprendizagem de conceitos estatísticos.

A construção de uma sequência didática para o ensino de Estatística envolve um conjunto de atividades pedagógicas ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo etapa por etapa. A organização das atividades em sequência tem o objetivo de possibilitar aos alunos a experiência de um processo estatístico, quais sejam, coleta, organização, apresentação, análise e interpretação dos dados, capaz de realizar a leitura e interpretação de gráficos e tabelas, cuja finalidade é desenvolver seu raciocínio estatístico (ESTEVAN, 2010). Segundo (PAIS, 2002, p. 102) uma “sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.”

#### **4. Considerações parciais**

Tendo em vista que se trata de uma pesquisa em que se utiliza a sequência didática para apropriação de conceitos estatísticos e que esta ainda se encontra em desenvolvimento, apresentam-se resultados parciais decorrentes das primeiras aplicações. Percebeu-se uma maior disposição dos alunos na resolução das atividades por se tratar de questões do seu cotidiano, um melhor aproveitamento e assimilação dos conteúdos em relação às aulas tradicionais, mesmo estes sendo apresentados em nível crescente de dificuldade. Assim, com base nos resultados parciais, pode-se dizer que a utilização da sequência didática no ensino de Estatística favorece o processo de ensino e aprendizagem de conceitos.

#### **Referências**

ALMOULOU, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos. Revista Eletrônica de Educação Matemática, vol. 3, n. 1, jul/2008. Disponível em:

<<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/13031/12137>>. Acessado em: 10 de ago. 2012.

CAMPOS, S. R. A educação estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação. Tese (Doutorado) Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

ESTEVAN, E. J. G. (Res)significando a Educação Estatística no Ensino Fundamental: análise de uma sequência didática apoiada nas Tecnologias de Informação e Comunicação. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Presidente Prudente. 2010.

LOPES, C. A. E. Reflexões teórico-metodológicas para a Educação Estatística. In: LOPES, C. E.; CURI, E. (Org.) Pesquisas em Educação Matemática: Um encontro entre a teoria e a prática. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

**P3**

**PIBID ENSINO MÉDIO DA UEL: JOGOS E  
O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA**

Jorge, J. L. *Et al.*

## **PIBID ENSINO MÉDIO DA UEL: JOGOS E O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA**

Jair Lucas Jorge\* (lucasjorge@sercomtel.com.br)  
Talita Paiva Corrêa\* (lita.paiva@hotmail.com)  
Gustavo Henrique Corazza de Moura\* (esq-sito@hotmail.com)  
Fabiana Tamires Foglie\* (faby\_didi@hotmail.com)  
Maria Aparecida da Silva de Carvalho\* (marryyaa@gmail.com)  
Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho\* (tucci@uel.br)

Idealizado já na proposta inicial do Projeto PIBID Matemática da UEL para o Ensino Médio, a construção e implementação do Laboratório de Matemática do Colégio Estadual Vicente Rijo, em Londrina, foi ao encontro de anseio coletivo do grupo e do colégio, e contou, efetivamente, com a participação dos estagiários do PIBID, o apoio da direção e da equipe pedagógica e de professores de matemática do colégio.

LORENZATO (2006) aponta a necessidade de um local apropriado para pesquisa, investigação e manipulação de objetos, além da sala de aula, no qual o professor oportunize aos alunos vivenciarem situações desafiadoras que possam contribuir para a aprendizagem. Em particular, na disciplina de Matemática, dada ao seu rigor e abstração, a utilização desse espaço, permite aos alunos questionar, estabelecer relações, manusear, experimentar e verificar hipóteses, contribuindo para uma nova forma de perceber os conceitos matemáticos.

A experiência diária em sala de aula permite-nos afirmar que resolver e interpretar problemas matemáticos acaba se tornando difícil para a maioria dos alunos, por exemplo, devido à dificuldade que têm em identificar as operações que devem ser utilizadas para a resolução. A utilização de materiais manipuláveis ou jogos permite o diagnóstico das dificuldades de aprendizagem dos alunos, verificadas em cada lance do jogo, e a futura intervenção do professor, com a apresentação do conteúdo necessário. Dessa forma, a introdução dos jogos matemáticos educativos torna-se um recurso eficaz, possibilitando aprendizagem de forma eficiente. O jogar, por sua vez, permite questionar, refletir, estabelecer novas relações, levantar hipóteses, buscar novos caminhos, encontrar diferentes alternativas, portanto, amplia a visão do nosso aluno.

A construção dos materiais manipuláveis e jogos para o laboratório, pelos estagiários PIBIDIANOS, evidenciou a necessidade de uma retomada de conteúdos pertinentes a Educação Básica, uma vez que além de produzir o material, cada aluno elaborou uma aula com a utilização do

---

\* Bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID, da CAPES – Brasil.

material escolhido. A seleção dos materiais e jogos procurou contemplar todos os segmentos da Educação Básica. Alguns jogos, como os que envolvem Geometria, foram confeccionados pelos estagiários visando alunos com problemas de aprendizagem e/ou superdotação. Além da participação dos estagiários, a implementação do laboratório contou com apoio de professores da equipe de matemática, os quais contribuíram sugerindo jogos e conteúdos. Para estes professores que atuam no colégio, a construção do laboratório evidenciou a necessidade de uma nova forma de pensar o ensino de matemática, tornando-o mais dinâmico, e levando-os a retomar o hábito perdido ao longo dos anos de preparar as aulas de matemática.

Os jogos que hoje constituem o acervo do Laboratório foram elaborados de acordo com as Diretrizes Curriculares de Matemática, com ênfase em conteúdos do Ensino Médio e, com adaptações, podem perfeitamente serem utilizados no Ensino Fundamental. Toda a produção de materiais prioritariamente procurou atender às necessidades pedagógicas do referido Colégio, contemplando os eixos Álgebra, Geometria e Números e abordando tópicos a eles relacionados, os quais permitem ao aluno aprender (ou revisar) conteúdos de matemática de forma lúdica. Todos os jogos, construídos em sua maioria pelos bolsistas do PIBID em número suficiente para atender simultaneamente uma sala de 30 alunos, são acompanhados com respectivos planos de aula, para explorar o conteúdo matemático contemplado pelo material manipulável.

**Palavras-chave:** Laboratório de Matemática, Jogos, Educação Matemática.

### **Referências Bibliográficas**

Lorenzato, S.O. *O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. 3ª Ed- Campinas, SP : Autores Associados 2010

## **P4**

# **Um estudo sobre aplicação da teoria fuzzy na engenharia: escolha de projetos**

Lima, R. V.

# Um estudo sobre aplicação da teoria fuzzy na engenharia: escolha de projetos

Rosana Viomar de Lima (e-mail: rosanalima@unicentro.br)  
Universidade Estadual do Centro-Oeste - UNICENTRO, Guarapuava, PR, Brasil

## Resumo

Este trabalho apresenta o projeto de pesquisa: Utilizando Fuzzy na escolha de casas populares, que foi idealizado devido à percepção das dificuldades dos futuros proprietários de casas populares em escolher, de um banco de projetos, aquele que mais se adequasse às suas necessidades. Para auxiliar a decisão, foi utilizada base de regras da Lógica Fuzzy. Foram elaborados 30 modelos de casas de até 70m<sup>2</sup>, os quais foram submetidos a vários especialistas para atribuírem graus de pertinência em relação a nove características elencadas (bonita, econômica, etc.). Com essa matriz de pertinência e a matriz de preferência obtida a partir dos dados fornecidos pelo proprietário, foi aplicada a relação max-min para obter o(s) modelos que mais se aproxima(m) da preferência do morador.

**Palavras-chave:** lógica fuzzy, tomada de decisão, projetos arquitetônicos, modelos matemáticos.

## Abstract

This paper presents the research project: Using Fuzzy in the choice of popular houses, which was idealized considering the perception of the difficulties of the future owners of those houses to choose, from a series of projects, the one that is more suitable for his needs. To assist the decision-making, Fuzzy Logic and the rules base were used. Thirty models of houses up to 70m<sup>2</sup> each were used, which were submitted to experts to establish pertinence levels related to nine characteristics listed (nice, economic, etc.). The arithmetic average of the experts answers was made and the pertinence matrix was obtained. This way, a matrix with the preferences is built and it is applied a pertinence matrix to it. By the max-min relation of the Fuzzy Theory, the satisfaction matrix is obtained, which provides the closest models to the dweller's preference.

## 1. Introdução

A percepção das dificuldades enfrentadas pela maioria das pessoas que procuravam o convênio “casa fácil”<sup>1</sup> para escolher, dentre os modelos de projetos arquitetônicos disponibilizados, aquele que mais se adequasse às suas necessidades, inspirou o desenvolvimento dessa pesquisa: **Utilizando Fuzzy na escolha de projetos de casas populares**, que pretendeu auxiliar na solução da seguinte questão: “Como poderia ser viabilizada ao futuro morador a escolha rápida e eficiente de um projeto que se aproxime da sua preferência em relação às necessidades de espaço, gosto, poder aquisitivo e tamanho do terreno, e que atenda as especificações do convênio entre o CREA- PR e Prefeitura Municipal?”. Para auxiliar a tomada de decisão, foi utilizada a Lógica Fuzzy, que tem se mostrado muito útil quando se trabalha com incerteza ou com termos subjetivos como: grande, fraco, bonito, etc. A lógica fuzzy, introduzida por L. A. Zadeh<sup>2</sup>, em 1965, permite trabalhar com aproximações que forneçam respostas aceitáveis, suficientes para cada situação proposta, e, também, nos casos em que não se dispõe de dados suficientes para resolver determinados problemas ou fazer previsões, mas para os quais é suficiente uma boa aproximação, baseada em dados e opiniões de especialistas da área, o que não poderia ser feito pela matemática usual. Para esta pesquisa, foi utilizada a base de regras, com um banco de dados de 30 modelos de casas de até 70m<sup>2</sup>, que foram submetidos a especialistas (engenheiros, arquitetos, projetistas) para atribuírem graus de pertinência em relação a nove características de casas (simples, completa, ampla, flexível, grande, ampliável, bonita, econômica,

---

<sup>1</sup> Convênio entre a Prefeitura, a Associação dos Engenheiros e Arquitetos e o Conselho Regional de Engenharia para oferecer projetos de casas populares (até 70m<sup>2</sup>) para pessoas de baixa renda.

<sup>2</sup> Zadeh, L. A. *Fuzzy sets*, Information and Control. 1965, V. 8, 338-353.

arrojada). Foi feita a média aritmética das respostas dos especialistas e obtida a matriz de pertinência. Assim, para auxiliar na tomada de decisão do futuro proprietário, constrói-se uma matriz com as preferências do proponente e aplica-se a esta matriz a matriz de pertinência, por meio da relação max-min. Dessa forma, obtém-se a matriz de satisfação que permite que seja(m) selecionada(s) o(s) modelos que mais se aproximam do gosto e/ou necessidade do futuro morador.

## **2. Metodologia**

Este trabalho foi desenvolvido tendo por base abordagem qualitativa. Esta abordagem permite que o pesquisador esteja presente no ambiente investigado, e possa compreender melhor os problemas a que se propõe resolver. Nessa abordagem, os dados podem ser analisados qualitativamente, e não só o resultado é considerado, mas, sobretudo o processo.

Considerando os convênios que prevêm projetos de até 70m<sup>2</sup>, inicialmente foram elaborados 30 modelos de casas diversificados, tendo em vista abranger as características. Tomando por base as características elencadas, foram consultados vinte especialistas que atribuíram grau de pertinência em relação às características. Foi feita a média para construção da matriz de pertinência e aplicada a relação max-min a partir da matriz preferência do proprietário.

## **3. Resultados**

Ao se fazer a análise das planilhas de respostas dos especialistas sobre o grau de pertinência de cada projeto em relação às características elencadas, percebeu-se a necessidade de se descartar algumas respostas que se mostraram incoerentes. Por exemplo, alguns modelos de projetos eram semelhantes no que diz respeito a algumas características, divergindo apenas na fachada ou no modelo e tipo de telhado.

O modelo matemático para a escolha utiliza uma composição entre relações *fuzzy* para estabelecer uma escolha que satisfaça melhor (com maior grau de pertinência) as exigências estabelecidas pelo comprador e se ajuste às suas necessidades. Constrói-se, então, uma matriz com as preferências do futuro proprietário.

## **4. Considerações Finais**

Esta pesquisa trouxe indícios significativos da importância da utilização da lógica fuzzy na resolução de problemas reais (mais especificamente, neste caso, na engenharia), sobretudo como auxílio na tomada de decisão. Porém, é necessário observar que este não é um resultado definitivo, e não se pretende considerá-lo totalmente satisfatório, mesmo porque o próprio conceito de *satisfatório* é subjetivo. O banco de projetos proposto pode e deve ser melhorado, e à medida que forem utilizados os modelos surgirão evidências do que precisa ser repensado ou complementado.

## **5. Bibliografia**

BARROS, L; BASSANEZI, C. R. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Campinas: UNICAMP/IMECC, 2010.

BARROS, *et al.* **Introdução à lógica fuzzy**. Minicurso. Simpósio de Aplicações e Lógica Fuzzy. Sorocaba, 2006.

GRAÇA, V. A. C, *et al.* **Qualificação subjetiva de imagens arquitetônicas utilizando a teoria de sistema nebuloso**. *Revista Escola de Minas*, vol. 54(1), 2001.

LIMA, R. V; CASTANHO, M. J. P. **Sistema fuzzy na escolha de projetos populares**. Anais do Simpósio de aplicações de lógica fuzzy. Sorocaba: UNESP, 2006, PP. 74-75.

OLIVEIRA JUNIOR; AGUIAR, H. **Lógica Difusa: aspectos práticos e aplicações**. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

SIMÕES, M. G; SHAW, I. S. **Controle e modelagem fuzzy**. São Paulo: Blucher: FAPESP, 2007.

**P5**

**MÉTODOS E ANÁLISES  
COMPUTACIONAIS DE EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES EM  
DINÂMICAS POPULACIONAIS**

Luciano, C. M. *Et al.*

# MÉTODOS E ANÁLISES COMPUTACIONAIS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES EM DINÂMICAS POPULACIONAIS

Carollyne de Macêdo Luciano(e-mail: carollyne.91@hotmail.com)  
Rua Prefeito José Mario Junqueira, 691, Bandeirantes, Paraná, Brasil

Leonardo Chies Gilli (e-mail:Leonardo.gilli@hotmail.com)  
Rua Frei Rafael Pronner, 1759, Bandeirantes, Paraná, Brasil

Christian James de Castro Bussmann (e-mail: christian@uenp.edu.br)  
Rua São Salvador, 456, Londrina, Paraná, Brasil  
Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus Luiz Meneghel.  
End: BR 369, km 54, Vila Maria, Bandeirantes, Paraná, Brasil.

## Resumo

O nosso trabalho se baseia no estudo da Dinâmica Populacional e a sua correlação com modelos matemáticos. Para encontrar um método que estabeleça uma similaridade entre ambos, no período decorrido, estudamos princípios matemáticos que propiciaram a base para os estudos necessários para realização da pesquisa, como derivação, integração numérica, interpolação, truncamento e equações diferenciais. Paralelamente estudamos uma ferramenta computacional, a qual nos auxiliou em testes e nos estudos dos conteúdos..

Agora o projeto esta em uma nova fase que é a análise de uma população e a aplicação da mesma em um método que gere suas próximas variações em um tempo  $T$  estipulado. A população estudada é a população de Bandeirantes – PR e os estudados forma modelos de Malthus, Verhulst.

**Palavras-chave:** Dinâmicas Populacionais, Equações Diferenciais, Modelos Matemáticos..

## 1. Introdução

O estudo da Dinâmica de População se aplica nas variações no número de indivíduos da população e dos fatores que influenciam essas, ou segundo Maurice (1980), a investigação das taxas em que se verificam as perdas e repetições de indivíduo e de qualquer processo regulador que tenta a manter o tamanho da população em equilíbrio, ou pelo menos evite uma variação excessiva.

A dinâmica populacional trata também das influências ambientais sobre a população, por outro lado, trata das influências favoráveis ou adversas de membros da população, um sobre os outros.

Por outro lado, podem ocorrer problemas e estes surgem em decorrência de novos interesses econômicos como caçadores, pescadores, pecuaristas, fazendeiros ou horticultores que podem influenciar no decorrer natural da população.

Os experimentos de laboratório têm sido de grande valor para a compreensão da Dinâmica de população e tem sugerido ideias que podem ser testadas em experimentos de campo. Eles têm sido a mais valiosa fonte de ideias para serem testadas na prática e têm fornecido pontos de partida para uma boa parte de pesquisas produtivas (Maurice, 1980).

Geralmente esse estudo desenvolve-se sobre forma matemática para descobrir as implicações de um simples conjunto de condições que ele imaginou para dar início ao estudo. Ele precisa naturalmente de pelo menos, um modelo de matemático, no caso desta pesquisa foi utilizado o Modelo de Verhulst, pois apresenta soluções de equilíbrio, no qual verifica-se a possibilidade de estabilidade desta população.

## 2. Dinâmica de Populações e Alguns Problemas Correlatos

Analisar o declínio ou crescimento de uma população, é uma questão importante em campos que vão da medicina à ecologia e à economia mundial (Boyce e DiPrima, 1996). Neste contexto, existem estudos sobre o crescimento exponencial e o logístico de uma população. Optamos pelo crescimento logístico, também conhecido como equação de Verhulst (Figura 01), pois este leva em conta o nível de saturação ou a capacidade ambiental de sustentação da população estudada.

$$\frac{dN}{dt} = r \left( 1 - \frac{N(t)}{k} \right) N(t) \Rightarrow N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0) e^{-rt}}$$

Figura 01 – Equação de Verhulst

Onde:

$\frac{dN}{dt}$

= Variação populacional em função do tempo;

r = taxa intrínseca do crescimento;

N(t) = População em um determinado tempo t;

k = Nível de Saturação ou Capacidade Ambiental de Sustentação de Determinada Espécie.

Para realizar nossos estudos utilizamos o número da população de Bandeirantes nos anos de 1996, 2001, 2006 e 2011, os quais foram retirados do sítio do IBGE.

Para encontrar a taxa intrínseca do crescimento foi utilizado o conceito de Regressão no qual obteve o valor de  $r = 1,0002$ . Com este resultado foi aplicado no Modelo de Verhulst, e resolveu a Equação Diferencial com valor inicial  $P(0) = 34310$ , das operações realizadas encontrou-se o valor de  $k = 32606,24$ . Com este resultado obteve a função

:=

f

0.1118720094

10

10

-

34310

1703.76

e

(

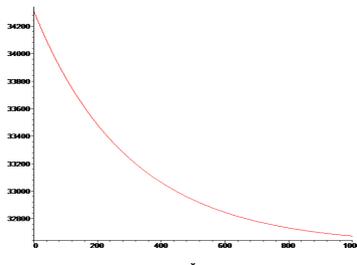
)

-

1.0002

x

Graficamente:



Aplicando o limite tendendo ao infinito  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 32606,23999$ . Assim pode-se dizer que a população de Bandeirantes se estabilizará próximo anos e com 32606 habitantes aproximadamente.

### 3. Conclusão:

Após a resolução da equação diferencial ordinária, notou-se que esta população está diminuindo. No entanto, vale ressaltar que este trabalho faz parte de um projeto de iniciação científica em que os resultados obtidos necessitam de aprimoramento.

Portanto, nota-se a necessidade de aprofundar o estudo tanto das Equações Diferenciais como de outros modelos que possam trazer uma melhor aproximação da realidade.

### 4 Referências Bibliográficas

BOYCE, W. E, DIPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.  
MAURICE E. SOLOMON, **Dinâmica de Populações**. Vol. 3. São Paulo: EPU, 1980.

**P6**

**ESTUDO DE CASO: DESENVOLVIMENTO  
DE UM APLICATIVO DE MODELAGEM E  
ENCAIXE**

Marcucci, K. *Et al.*

## ESTUDO DE CASO:

### DESENVOLVIMENTO DE UM APLICATIVO DE MODELAGEM E ENCAIXE

Marcucci, Karen\*; Zatta, Andrea M.\*\*; Silva, Luis C. A\*\*\*.

#### RESUMO

MEG é um sistema para informatizar o desenvolvimento de modelos para empresas de confecção resultante de uma parceria entre Senai Londrina e CNPq. O maior desafio do projeto foi obter um algoritmo de encaixe adequado ao setor têxtil. Três métodos foram desenvolvidos e aplicados, sendo que o método *bottom left* com rotação foi considerado o mais eficiente até o momento.

Palavras chaves: meg, encaixe, algoritmo, corte, empacotamento.

#### 1 INTRODUÇÃO

O setor têxtil responde por 17,3% dos empregos na indústria nacional de transformação mas, apesar da importância econômica, o segmento é composto principalmente por pequenas e médias empresas com baixa informatização e capacidade técnica (COSTA, 2009). Na produção manual, cada modelo é transformado em molde planejado, encaixado no tecido, cortado e montado. Diversos softwares de modelagem e encaixe automáticos são comercializados, mas de modo geral são utilizados por grandes indústrias e não são acessíveis para a maioria dos confeccionistas.

Este panorama orientou o desenvolvimento de um aplicativo economicamente acessível e com funções específicas para o desenho de moldes, gradação e encaixe automáticos, estoque, ficha técnica e simulação de custos. Desde setembro de 2010, uma equipe multidisciplinar com designers de moda, designers gráficos, bolsistas, programadores e matemáticos trabalha no aplicativo denominado Meg - Modelagem, Encaixe e Gestão, já implantado em algumas empresas para beta teste.

#### 2 ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS

MEG opera em ambiente Windows, é composto por um banco de dados em C# e um plug-in do programa Corel Draw (X4 e posteriores) em Visual Basic for Application, com Crystal Reports para relatórios e Access para banco de dados.

#### 3 RESULTADOS PARCIAIS: ENCAIXE

O encaixe de itens em uma área é um problema de diversas indústrias (aço, madeiras, vidro, papel)

---

\*Bolsista CNPq, karen.marcucci@pr.senai.br

\*\*Consultora Senai Londrina, Mestranda em Design UNESP, andrea.zatta@pr.senai.br

\*\*\*Programador, Level Software, luiscaas@levelsoftware.com.br

com repercussões ambientais e econômicas. Conforme a especificidade do produto (simetria, possibilidade de rotação e sobreposição), recebe denominações como problema de corte e empacotamento, da mochila bidimensional ou *knapsack*, *strip packing*, *nesting* e *cutting stock-lot sizing problem*, entre outras. Várias teorias e abordagens são propostas, tais como meta-heurística, operações booleanas, soluções K, NFP (*no-fit-polygon*), algoritmos genéticos ou ainda modelo mistos.

Na indústria têxtil, o encaixe é feito com objetos irregulares (moldes), com orientação espacial (fio) dentro de um retângulo com largura fixa e comprimento variável (tecido). Além dessas características, a rotina deve ser escrita em VBA (*Visual Basic for Application*) para operar no Corel Draw, programa gráfico de uso disseminado para desenho técnico de moda. Após pesquisa bibliográfica, três métodos foram escolhidos, desenvolvidos e aplicados, e a tabela abaixo demonstra os resultados obtidos:

Tabela 1: Técnicas testadas no encaixe e resultados obtidos (Fonte: elaboração dos autores).

TÉCNICA	AÇÃO	RESULTADO
Delphi-protótipo Riscare (ALVES,2009)	Ordena do maior objeto para o menor, inserindo cada um dentro de um retângulo conforme sua maior largura e comprimento.	Demonstrou que é possível fazer encaixe no Corel Draw, mas o aproveitamento foi considerado baixo.
<i>Bottom left placement</i>	Ordenação do maior para o menor, com deslizamento de cima para baixo e da esquerda para direita.	Demonstrou que é possível melhorar o aproveitamento, mas foi considerado mais demorado.
Método atual: <i>bottom left</i> com rotação	Algoritmo que utiliza o método <i>bottom left</i> e analisa quais figuras permitem rotação, e se as mesmas se encaixam em algum espaço remanescente dentro do encaixe.	Os resultados ainda não estão finalizados, pois o mesmo está em fase de testes, mas há indicações de aumento do aproveitamento.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A existência de bibliografia orientou a escolha das linguagens de programação e algoritmos utilizados, mesmo quando a demonstração matemática não era mostrada de modo completo nos artigos pesquisados. O uso da plataforma *Visual Basic for Application* foi uma escolha adequada para realizar encaixe no Corel Draw. Os algoritmos testados foram alterados conforme performance apresentada, sendo mais eficientes a cada modificação, indicando que o aperfeiçoamento do algoritmo de encaixe é um processo contínuo e passível de aperfeiçoamento.

#### REFERÊNCIAS

- ALVES, Andressa Schneider; AYMONE, José Luís Farinatti; TEIXEIRA, Fábio Gonçalves. Design do Vestuário: metodologia e software de encaixe de modelagens no tecido. In: V CIPED, 2009, Bauru. Anais do V CIPED, 2009, ISS 2175-0289. 1677-1684
- COSTA, Ana Cristina Rodrigues; ROCHA, Érico Rial Pinto da. Panorama da Cadeia Produtiva Têxtil e de Confecções e a Questão da Inovação. BNDES Setorial, Rio de Janeiro, n.29, p. 159-202, mar. 2009. Disponível em: <[www.bndes.gov.br/SiteBNDES/export/sites/default/.../Set2905.pdf](http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/export/sites/default/.../Set2905.pdf)>, Acesso em 02/09/2012.

**P7**

## **Introdução do Software Geométrico Geogebra**

Matos, I. E., Santos, J. F.

## **Introdução do Software Geométrico Geogebra**

Israel Emanua de Matos (e-mail: [3m.manuamat@gmail.com](mailto:3m.manuamat@gmail.com))

Jean Felipe dos Santos (e-mail: [Jean\\_jfs1@hotmail.com](mailto:Jean_jfs1@hotmail.com))

Rod. Celso Garcia Cid Km 380, Jardim Perobal, Londrina, Paraná, Brasil

Av. Madre Leônia Milito nº 1200, Londrina, Paraná, Brasil

### **Resumo**

O projeto PIBID Matemática UEL atua, em uma de suas ações, com seis bolsistas na Escola Estadual Vicente Rijo, em Londrina, juntamente com a professora responsável por supervisionar as atividades no colégio Rachel Santos Borges David. Estamos atuando há pouco mais de um ano e alguns resultados já podem ser sentidos em sala de aula. Relataremos aqui algumas de nossas atividades, com os alunos do 8º ano. Teríamos que levar os alunos no laboratório de informática e introduzir o software de geometria.

**Palavras-chave:** Matemática; Geogebra.

### **1. Introdução**

Como foi proposto para que nos os monitores desse uma introduzida para os alunos do 8ª ano no software geométrico. Então Levamos os alunos no laboratório de informática para que eles pudessem conhecer o Geogebra, um software de geometria.

Queríamos que os alunos aprendessem as principais ferramentas e algumas construções básicas, para que, nos próximos meses, pudessem utilizar esse software a fim de trabalhar com conceitos matemáticos que estão estudando.

Como nosso objetivo no laboratório foi introduzir conceitos estudados pelo os alunos na sala de aula de maneira dinâmica, com a utilização de softwares e sólidos geométricos, de maneira a inspirar os alunos ao ensino da mesma e proporcionar experiência aos estagiários do curso. O objetivo específico desta aula foi dar aos alunos uma primeira experiência com o software Geogebra.

Deste modo foi introduzido aos alunos de uma forma muito dinâmica, em que após a introdução das ferramentas, fizemos algumas investigações com o intuito de ‘iniciar’ os alunos na utilização do software e assim fazer com que fiquem familiarizados com ele, para que atividades futuras fluam mais naturalmente.

Como tivemos dois tempos com todas as salas, trabalhamos na primeira a parte com que eles pudessem aprende mais sobre o software, depois no segundo tempo ensinamos as ferramentas do software trabalhamos conceitos de ângulo, polígono, retas paralelas e perpendiculares, diferenças entre quadrilátero, quadrado e retângulo, dentre outros conteúdos matemáticos e coisas que eles já haviam aprendido em sala de aula. Ficamos muitos feliz com a relação dos alunos com o software, parece que eles até conhecia, pois fizeram com que a aula fluísse de uma forma muito prazerosa.

É com muita satisfação que podemos fazer alguns trabalhos bem diferentes que o PIBID nos permite realizar, promovemos muitas atividades diferentes para os alunos, e também diferentes para nós, enriquecendo a formação de todos os bolsistas como professores. O trabalho em grupo nos possibilita ver as dificuldades de cada aluno, e isso é importante para corrigi-las e para nos estagiários conhecer melhor a situação do Ensino Fundamental em sua prática, promovendo uma maior interação entre os bolsistas da universidade e os alunos e professores da escola.

Sabemos que muitas dessas atividades só foram possíveis com a presença dos 6 monitores juntos. Por isso, acreditamos que, mesmo que na maioria dos dias de atividades de PIBID os bolsistas as realizam em duplas, é interessante realizar algumas atividades como esta, em que conseguimos trabalhar mais individualmente com as necessidades de cada aluno.

## **2. Método**

Queríamos que os alunos do 8º ano colocassem em prática tudo que eles haviam aprendido em sala de aula de uma forma bem dinâmica e descontraída. Como previsto, os alunos interagiram com nos os monitores. Ficamos muito satisfeito com a aula no laboratório de informática.

Deste modo quando formos para o laboratório de novo e dermos sequência na matéria, podemos ir muito mais tranquilo, pois saberemos que os alunos já foram muito bem instruídos.

## **Conclusão**

Concluimos que, nesses trabalhos diferentes que o PIBID nos permite realizar, promovemos atividades diferentes para os alunos, e também diferentes para nós, enriquecendo a formação dos bolsistas como professores. O trabalho em grupo possibilita ver as dificuldades de cada aluno, e isso é importante para corrigi-las e para os estagiários conhecer melhor a situação do Ensino Fundamental em sua prática, promovendo uma maior interação entre os bolsistas da universidade e os alunos e professores da escola.

Sabemos que essas atividades só foram possíveis com a presença dos 6 monitores juntos. Por isso, acreditamos que, mesmo que na maioria dos dias de atividades de PIBID os bolsistas as realizam em duplas, é interessante realizar algumas atividades como essas, em que conseguimos trabalhar mais individualmente com as necessidades de cada aluno.

## **Agradecimento**

Queríamos agradecer a Capes pelo apoio financeiro ao PIBID de Licenciatura em Matemática, pois sabemos que se não fossem por eles não poderíamos desempenhar um papel de grande conhecimento tanto quanto para nós os monitores quanto para com os alunos.

## **Referências**

PASSERINI, G. A. **O estágio supervisionado na formação inicial do professor de Matemática na ótica de estudantes do curso de licenciatura em Matemática da UEL**. 2007. 120 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, 2007.

[http://wiki.geogebra.org/en/Tutorial%3AMain\\_Page](http://wiki.geogebra.org/en/Tutorial%3AMain_Page)

**P8**

**Uma experiência de ensino com o jogo Hora do  
Rush**

Moreira, D. T., Silva, G. S.

# Uma experiência de ensino com o jogo Hora do Rush

Prof<sup>ª</sup>. Ms. Denise Trindade Moreira (e-mail: dtmoreira2000@yahoo.com.br)  
Gabriel dos Santos e Silva (gabriel.santos22@gmail.com)  
Colégio Educar, Londrina-PR, Brasil.

## Resumo

Neste pôster, apresentaremos um relato sobre o jogo “Hora do Rush”, suas regras e a sua importância no desenvolvimento cognitivo do aluno, compreensão de problemas e levantamento de hipóteses, bem como produções dos alunos que apresentam uma linguagem que demonstra conhecimento sobre orientação espacial.

**Palavras-chave:** Jogo “Hora do Rush”, Jogos no Ensino de Matemática, Jogos de Raciocínio.

## 1. INTRODUÇÃO

Desde o início de 2011, o Colégio Educar adotou um projeto de aprendizagem que utiliza diversos tipos de jogos de raciocínio para ampliar as possibilidades de desenvolvimento cognitivo, social, afetivo e psicológico nos alunos da Educação Infantil ao 9º ano. A realização do projeto se dá durante o ano letivo, no tempo de uma aula de 50 minutos por semana, contando com o trabalho de um professor aplicador e a professora regente da sala (nas turmas do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental). Nas aulas, são discutidos os jogos, estratégias e relações entre o que é aprendido no jogo e situações do cotidiano.

Este projeto visa o desenvolvimento do aluno através das relações interpessoais, jogos de raciocínio e métodos metacognitivos. A metodologia aplicada é derivada da Teoria da Experiência da Aprendizagem Mediada de Reuven Feuerstein, pesquisador da Psicologia do Desenvolvimento, cujos trabalhos têm como base a noção de modificabilidade cognitiva, por meio da qual as faculdades intelectuais de um indivíduo podem ser expandidas não somente na idade evolutiva, mas durante todo o curso de uma vida, fazendo uso principalmente das ideias de mediação da aprendizagem (Meier, Garcia, 2007). Também baseia-se em ideias e estudos de vários investigadores e educadores proeminentes tais como John Dewey, Howard Gardner, Vigotsky, David Perkins e Robert Sternberg.

## 2. METODOLOGIA

Embasados no Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (BRASIL, 1998), nas Orientações Para a Inclusão da Criança de Seis Anos de Idade (BEAUCHAMP, PAGEL E NASCIMENTO, 2007) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), bem como nas ideias de Borin (2002), Kishimoto (2003), Meier e Garcia (2010) e Miguel (2005), aplicamos o jogo “Hora do Rush” em turmas do EI5 (Educação Infantil), 1º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental. Neste trabalho, apresentaremos os resultados para as turmas do 5º e 6º anos.

Nosso trabalho foi desenvolvido em três etapas: inicialmente, apresentamos o jogo, através de uma narrativa sobre uma menina que havia perdido um trabalho muito importante; por meio de perguntas dos alunos, fomos modelando a situação, de modo que os alunos puderam ajudá-la a encontrar seu trabalho.

Com isso, trabalhamos intuitivamente o método heurístico de resolver um problema. Em um segundo momento, apresentamos o jogo “Hora do Rush” para que os alunos tivessem contato com os desafios e estratégias. Fizemos uma correlação entre o método heurístico e uma forma de melhor compreender o desafio proposto. Por fim, relacionamos o método, o jogo e os desafios com situações de matemática onde há a necessidade da utilização da heurística para a resolução.

### 3. RESULTADOS

“Hora do Rush” é um jogo de tabuleiro composto por 12 carrinhos de cores distintas, que ocupam duas casas do tabuleiro, 2 caminhões e 2 ônibus que ocupam três casas do tabuleiro e 40 cartas-desafio que indicam posições que os carros, caminhões e ônibus devem ser posicionados. O aluno deve montar essa carta no tabuleiro e, movendo os veículos para frente ou para trás (sem retirá-los), deve levar o carro vermelho (que está presente em todas as cartas-desafio) em direção à saída.

Notamos que os alunos apresentam registro oral adequado, embora com linguagem própria da idade, comunicando questões de orientação espacial. Além disso, percebemos que as crianças do 6º ano apresentaram menor grau de dificuldade em relacionar o pensamento hermenêutico do jogo com as questões de matemática. Nesse aspecto, foi notório que grande parte dos alunos recorria ao pensamento hermenêutico somente nos momentos em que já haviam manipulado os carrinhos de um determinado desafio vezes suficientes para perceberem que a manipulação por si só não solucionava o problema. Então, foi determinante que o professor incentivasse os alunos a recorrerem ao pensamento para que o jogo fosse resolvido, o que muitas vezes reforçava que esta era uma boa saída para todos os desafios.

### REFERÊNCIAS

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME/USP, 2002.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC, 1998.

\_\_\_\_\_. *Referencial curricular nacional para a educação infantil*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CORSINO, P. As crianças de seis anos e as áreas do conhecimento. In: BEAUCHAMP, J. PAGEL, S. D. NASCIMENTO, A. R. (orgs.) *Ensino fundamental de nove anos: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007.

KISHIMOTO, T. M. *Jogo, Brinquedo, Brincadeira e a Educação*. São Paulo: Cortez, 2003.

MEIER, M. e GARCIA, S. *Mediação da aprendizagem: contribuições de Feuerstein e de Vygotsky*. Curitiba: Grafiven, 2010.

MIGUEL, J. C. *O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas*. 2005. Disponível em: <<http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/Ensino-Matematica-Enfoque-Conceitos.pdf>>. Acesso em: 01/04/2011.

P9

**PIBID, MEDIAÇÃO DE CONTEÚDOS E  
JOGOS**

Nakai, F. E. F. *Et al.*

## **PIBID, MEDIAÇÃO DE CONTEÚDOS E JOGOS**

Fernanda Emmy Fukabori Nakai\* ([fe\\_nakai@hotmail.com](mailto:fe_nakai@hotmail.com))  
Mônica Letícia de Souza\* ([letícia-monica84@hotmail.com](mailto:letícia-monica84@hotmail.com))  
Renata Graciele Rodrigues\* ([renata.graciele@hotmail.com](mailto:renata.graciele@hotmail.com))  
Rodrigo Verri Pitta\* ([rodrigo.verri@hotmail.com](mailto:rodrigo.verri@hotmail.com))  
Rebeka Bignardi de Abreu\* ([re\\_bignardi@hotmail.com](mailto:re_bignardi@hotmail.com))  
Danilo Augusto\* ([dan.augusto.c.b@hotmail.com](mailto:dan.augusto.c.b@hotmail.com))  
Samuel Jefte Vaz dos Santos\* ([samuel-jefte@hotmail.com](mailto:samuel-jefte@hotmail.com))  
Sibeli Aparecida Castanheiro\* ([sih\\_castanheiro@hotmail.com](mailto:sih_castanheiro@hotmail.com))  
Tamara Cristina Santi\* ([tamaraformiga@hotmail.com](mailto:tamaraformiga@hotmail.com))  
Fernando Henrique\* ([ferp-910@hotmail.com](mailto:ferp-910@hotmail.com))  
Luciane Mayumi Shiroma\* ([Luciane\\_Ims@hotmail.com](mailto:Luciane_Ims@hotmail.com))  
Maria Aparecida da Silva de Carvalho\* ([marryyaa@gmail.com](mailto:marryyaa@gmail.com))  
Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho\* ([tucci@uel.br](mailto:tucci@uel.br))

A utilização dos jogos nas aulas de matemática pode trazer muitos benefícios para os alunos. Este é um recurso que bem explorado pelos professores permite aos alunos o desenvolvimento de novas habilidades, raciocínio lógico e criatividade.

Ao inserir o jogo como uma estratégia de ensino em suas aulas, o professor proporciona a seus alunos o desenvolvimento da linguagem, a observação, tomada de decisão, organização de pensamento. Em cada lance, os alunos têm que investigar a melhor jogada, interpretar as regras e o mais importante, estabelecer relações entre o jogo e os conteúdos matemáticos.

Para alcançar os objetivos pretendidos com os jogos, estes não devem simplesmente ser apresentados aos alunos e, dessa forma, fazer com que joguem sem que haja planejamento algum. O jogo pode, e deve ser usado para desenvolver habilidades e alcançar objetivos específicos. Para tanto, é fundamental que este seja atrelado e vinculado a um planejamento, seja para introduzir ou fixar um conteúdo.

O jogo não deve ser usado ao acaso, aleatoriamente, sem conexão alguma com os conteúdos desenvolvidos e com o que se espera que os alunos aprendam. Se os alunos apenas jogarem pelo simples fato de jogar, isto é, sem que haja orientação do professor, o jogo não terá valor algum para a mediação de conhecimento. Por isso, é necessário que o jogo seja usado da maneira correta. Dessa forma, ele será um poderoso instrumento para o desenvolvimento de habilidades nos alunos.

Durante os jogos os alunos são instigados a resolverem problemas, refletir sobre qual é a melhor jogada, quais são os conteúdos que poderão lhes ser úteis para ganhar o jogo, analisar a

---

\* Bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência ó PIBID, da CAPES ó Brasil.

situação que está a sua volta. A dinâmica que envolve os jogos pode ser uma experiência muito rica para os alunos.

Outro aspecto muito importante dos jogos é o desenvolvimento da socialização dos alunos durante este processo. O aluno sempre é desafiado a perceber o que os outros alunos estão fazendo e pensando. O jogo é um trabalho em grupo e isto possibilita uma troca de conhecimento entre eles, além deles incentivarem e encorajarem uns aos outros a prosseguirem em sua busca pelo conhecimento. O aluno também desenvolve a capacidade de defender seu ponto de vista e explicar aos colegas a sua justificativa. O jogo possibilita uma análise crítica da situação, dos fatores que a envolvem e como responder a essa realidade de forma adequada. O aluno precisa avaliar quais conteúdos e conhecimentos podem ser usados em seu favor e quais não são relevantes para o momento.

UOQNG"\*422:+"chkt oc"swg."õrctc"p»u"q"lqi o nas aulas de matemática é uma atividade séria, que exige planejamento cuidadoso, avaliação constante das ações didáticas e das aprendizagens dos alunos.<sup>1</sup> O jogo, portanto, não deve ser encarado como brincadeira ou momentos de descontração, mas sim como uma estratégia séria, com objetivos a serem alcançados. Deve ser inserido dentro da sala de aula e em período letivo, pois faz parte da aula de matemática.

Com a utilização consciente dos jogos todos saem ganhando. Ganha o professor pois, possibilita uma maneira diferenciada de apresentação do conteúdo em sala de aula na qual há um maior envolvimento da parte dos alunos; e ganham os alunos, pois estes aprender melhor os conteúdos trabalhos e desenvolvem habilidades que serão úteis, não apenas para a matemática, mas para suas vidas como um todo. Por isso é importante que ele seja valorizado no contexto escolar e seja levado a sério como um importante instrumento pedagógico.

Baseado nisto, o PIBID - Ensino Médio tem trabalhado com a inclusão dos jogos nas aulas de matemática. Os resultados obtidos com isto têm sido muito gratificantes. Por isso, vários jogos têm sido fabricados pelos bolsistas do PIBID para serem aplicados, tais como: Bingo de Funções, Poliedros, Capturando Poliedros, Corrida Algébrica, Dominó de Potencias, Baralho de Monômios, etc. Estes jogos são sempre aplicados dentro de um plano de aula buscando, desta forma, alcançar todos os objetivos previamente estabelecidos.

**Palavras-chave:** Jogos de Matemática, Educação Matemática.

## Referências Bibliográficas

---

<sup>1</sup>SMOLE, Kátia Stocco [et al]. *Cadernos do mathema*: jogos de matemática de 1º a 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008, p. 27.

SMOLE, Kátia Stocco [et al]. *Cadernos do mathema*: jogos de matemática de 1º a 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008

## **P10**

# **Teorema do completamento para espaços métricos**

Pimenta, M. T. O., Saito, T. O.

# Teorema do completamento para espaços métricos

Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta (e-mail: mtopimenta@uel.br)

Tais de Oliveira Saito (e-mail: taissaito@hotmail.com)

Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil

## Resumo

Nesse trabalho estudamos o teorema do completamento, que constitui-se num dos mais importantes resultados na teoria de Espaços Métricos. Tamaña importância reside no fato de ser um resultado básico, que consta como pré-requisito obrigatório para o estudo de Espaços de Banach na maioria dos livros clássicos de Análise Funcional.

**Palavras-chave:** espaços de Banach, teorema do completamento.

## 1. Introdução

No estudo inicial sobre Análise Funcional, figura em quase todos os livros clássicos alguns resultados a respeito de espaços métricos completos. Entre esses resultados, sem dúvida o que mais se destaca é o Teorema do Completamento, onde é provado que todo espaço métrico admite um completamento, num sentido a ser definido.

Embora tal resultado possua várias formas de ser demonstrado, escolhemos para expor neste trabalho uma que é particularmente interessante por explorar funções definidas em conjuntos de classes de equivalência de um conjunto, por uma determinada relação de equivalência. De fato, tal prova mostra-se muito interessante justamente pelo fato de introduzir, ou mesmo relembrar, argumentos comuns a demonstrações utilizadas em diversas áreas da matemática como por exemplo o Teorema dos Homomorfismos de Grupos em álgebra e o Teorema dos Isomorfismos de espaços vetoriais. Ainda, esta requer certo domínio dos conceitos de Análise Real, bem como de resultados gerais de Espaços Métricos.

**P11**

**OFICINAS DE RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS**

Sacamoto, A. *Et al.*

# OFICINAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

**Angela Sacamoto**

**Olívio Augusto Weber**

*angelasacamoto@yahoo.com.br*

*weberoa@sercomtel.com.br*

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina

Caixa Postal 6001, 86051-990, Londrina – PR Brasil

**Renata Mara Sanches**

**Tiago A. S. U. Yamamoto**

*Renata\_mara90@hotmail.com*

*Silver\_rider2@hotmail.com*

## **RESUMO:**

Na atualidade as instituições de ensino superior e a própria sociedade, através das câmaras legislativas, estão promovendo intensos debates sobre políticas afirmativas de acesso ao ensino superior e que tem desembocado nas polêmicas cotas para alunos provenientes da escola pública e algumas classes raciais. O outro lado da moeda representa o enorme abismo existente entre os níveis de formação dos alunos que ingressam no ensino superior e o mínimo desejado para que os mesmos possam lograr êxito no curso escolhido. No Curso de Matemática e outros da área exata básica esta realidade assume proporções alarmantes. O projeto tem por proposta ser uma ação afirmativa no projeto político-pedagógico do Curso de Matemática, preferencialmente, com o intuito de minimizar os problemas enfrentados.

## **OBJETIVO GERAL:**

Oferecer aos alunos do Curso de Matemática, preferencialmente, uma oportunidade de minimizar deficiências de formação em conteúdos de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e, muito mais que recuperar conteúdos, desenvolver a capacidade de interpretar, equacionar e desenvolver estratégias de soluções de problemas, habilidades que não foram desenvolvidas ao longo dos anos anteriores de suas formações.

## **OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

1. Recuperar conteúdos programáticos dos ensinos fundamental e médio, não adequadamente compreendidos e aprendidos.
2. Desenvolver o raciocínio analítico e dedutivo-lógico, inerente ao processo de construção do conhecimento matemático.
3. Desenvolver a criatividade e a capacidade de compreender e elaborar conceitos abstratos e argumentações matemáticas.
4. Desenvolver a capacidade de se expressar em linguagem matemática.
5. Aumentar o grau de envolvimento do espírito de colaboração, solidariedade e sociabilidade dos alunos, levando-os a compreender a importância das relações humanas para o progresso pessoal e da ciência.
6. Fornecer experiência de ensino ao longo do Curso de Matemática, em especial aos alunos monitores.
7. Elevar o desempenho acadêmico dos alunos.
8. Reduzir os índices de reprovação nas disciplinas do curso de matemática.
9. Reduzir os índices de evasão dos alunos do Curso de matemática.

## **PROCEDIMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS**

O projeto é desenvolvido através de oficinas de resolução de problemas, onde diferenciados temas são abordados sob diferentes heurísticas, além de propor situações problemas onde novos conceitos podem ser investigados e explorados. As oficinas têm periodicidade semanal, realizadas sob a orientação dos docentes membros da equipe e dos alunos monitores.

A resolução de problemas é uma proposta metodológica introduzida por G. Polya em *A Arte de Resolver Problemas*. Nesta metodologia de ensino o professor propõe ao aluno situações problemas, caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos. Através de experiências com problemas de naturezas diferentes o aluno interpreta o fenômeno e tenta explicá-lo dentro de sua concepção da matemática envolvida. Neste processo o aluno envolve-se com o “fazer matemática”, no sentido de criar hipóteses e conjecturas e investigá-las a partir da situação problema proposta.

Segundo Polya resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente por meios adequados.

## **RESULTADOS ESPERADOS:**

Espera-se que o aluno participante, ao remover deficiências de formação, tanto nos conteúdos programáticos envolvidos, quanto na capacidade de se expressar na linguagem matemática, melhore a sua auto-estima, sinta-se mais motivado a prosseguir no curso e, através da

participação nas oficinas resolvendo problemas interessantes, motivadores, descubra o prazer de fazer matemática, se familiarize com o método de construção do conhecimento matemático e, por consequência, melhore o seu desempenho acadêmico

Considerando que o projeto foi implantado em abril de 2010 e está em seu terceiro ano de execução, com muita satisfação podemos constatar o progresso dos alunos participantes, em especial dos mais assíduos e aplicados, demonstrando maior capacidade de raciocínio lógico e maior habilidade de manejo com a simbologia e linguagem algébrica.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**

- [1] BASSANEZI, R. C. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002
- [2] LIMA, E. L et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol 1, 2, 3, 4 Coleção do Professor de Matemática. S.B.M. R.J. 1997
- [3] POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- [4] S.B.M. (Sociedade Brasileira de Matemática) (**Revista do Professor de Matemática**)
- [5] SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. New York: Academic Press, 1985

**P12**

## **Problemas de Dimensionamento de Lotes**

Souza, W. S., Santos, S. G.

# Problemas de Dimensionamento de Lotes

William Steigenberger de Souza(e-mail: w.will 14@hotmail.com)  
Departamento de Matemática CCE-UEL, Londrina-Pr, Brasil

Silvia Maria Pereira Grandi dos Santos(e-mail: silviagsantos@uel.br)  
Departamento de Matemática CCE-UEL, Londrina-Pr, Brasil

## Resumo

Neste trabalho abordaremos alguns modelos para Problemas de Dimensionamento de Lotes, utilizando programação inteira para modelar o problema, e apresentaremos também alguns exemplos numéricos com os resultados foram obtidos através de um software de otimização.

**Palavras-chave:** Dimensionamento de Lotes, monoestágio, multiestágio, programação inteira.

## 1 Introdução

Com a modernização da indústria de manufatura, as empresas são estimuladas a fazerem algumas mudanças no setor produtivo no que tange a melhoria do processo produtivo e a racionalização administrativa. Assim, esse processo de conversão da matéria-prima em produto final, deve ser bem gerenciada, para que se entregue o produto final com alta qualidade, dentro do prazo e com o menor custo possível.

Esse gerenciamento é responsável pelo Planejamento e Controle da Produção, em que sua estrutura hierárquica pode ser dividida em três níveis de planejamentos distintos: estratégico, tático e operacional, onde cada nível possui responsabilidades, objetivos e metas.

Com isso o problema de dimensionamento de lotes consiste em determinar a quantidade de itens a ser produzida em uma máquina ou mais, em cada período ao longo de um horizonte de planejamento finito, de modo a atender uma certa demanda e a otimizar uma função objetivo (por exemplo, minimizar os custos). Um exemplo deste tipo de problema consiste em fazer um dimensionamento semanal definindo quais itens serão produzidos a cada dia, de forma que os custos de produção sejam os menores possíveis.

O problema de dimensionamento de lotes pode ser dividido em monoestágio e multiestágio:

### Monestágio

Diz-se que um sistema de produção é monoestágio quando os itens a serem produzidos são independentes, ou seja, nenhum item depende da produção de outro item, e ainda o problema monoestágio pode ser subdividido em várias categorias, por exemplo: pode ser considerado para um único item ou para vários itens com ou sem restrição capacidade.

### Multiestágio

Denomina-se sistema de produção multiestágio quando os itens a serem produzidos são dependentes, isto é, a produção de determinado item depende da produção prévia de outro item, que será chamado de item componente.

Os modelos que iremos abordar são: único item sem restrição de capacidade e um modelo multiestágio. Os resultados que serão apresentados foram obtidos utilizando o software XPRESS-MOSEL.

## Referências

- [1] <http://www.ufjf.br/epd015/les/2010/06/>. *ProgramacaoInteira.pdf*.
- [2] <http://www.ecnsoft.net/wp-content/plugins/downloads-manager/upload/Apostila20INF28020-20Pesquisa20Operacional20-20UFVicoso20-20127pg.pdf>.
- [3] <http://www.igm.mat.br/cursos/a-linear/al-01/sistemas-lineares/t-frobenius.htm>.

- [4] Araujo, S. A., and Arenales, M. N. Estudos de problemas de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade. USP, São Carlos (1999).
- [5] Arenales, M., Armetano, V., Morabito, R., and Yanasse, H. Pesquisa Operacional. Elieser editora Ltda, 2007.
- [6] Rangel, S. Algoritmo branch and bound. Notas de aulas (2008).

## P13

# Demonstração do Teorema de Pitágoras a partir de materiais manipuláveis

Steigenberger, A. L, Huss, A. A.

# **Demonstração do Teorema de Pitágoras a partir de materiais manipuláveis**

André Luiz Steigenberger (e-mail: andre\_alst@hotmail.com)  
Anelize de Angelis Huss (e-mail: ne\_huss@hotmail.com)  
Universidade Estadual de Londrina – Londrina/PR, Brasil

## **Resumo**

O Teorema de Pitágoras é considerado uma das principais criações da Matemática. Por meio dele podemos verificar relações métricas existentes nos triângulos retângulos e utilizá-las em problemas do cotidiano. Ao trabalhar esse conteúdo é importante que o aluno compreenda e identifique os catetos e a hipotenusa em um triângulo retângulo para que possa utilizar corretamente as relações trigonométricas. Neste trabalho apresentamos o relato de uma oficina a respeito do teorema de Pitágoras realizada com estudantes do nono ano de uma escola estadual de Londrina, PR.

**Palavras-chave:** Investigação, Teorema de Pitágoras.

## **1. Introdução**

Relatamos uma oficina realizada com os alunos no 9º do Colégio Estadual Vicente Rijo, localizado na cidade de Londrina no estado do Paraná, pelo PIBID Matemática.

Esse trabalho foi efetivado por seis alunos de graduação em Matemática da Universidade Estadual de Londrina juntamente com a docente supervisora que leciona no colégio onde o trabalho se desenvolveu.

## **2. Objetivo**

O tema tratado foi o Teorema de Pitágoras. A oficina tinha o intuito de que os alunos compreendessem de uma maneira simples a demonstração do Teorema. Essa demonstração foi realizada pelos alunos sem mesmo estarem cientes que a estavam realizando, pois esta foi feita com material manipulável e se decorreu a partir de um tangran.

## **3. Confeção do material**

O material utilizado nessa oficina foi confeccionado pelos alunos juntamente aos monitores. Primeiramente foram construídos em cartolinas os moldes. Esses moldes eram compostos por um triângulo retângulo e três quadrados obtidos a partir de seus catetos e sua hipotenusa. Essa construção teve a participação ativa dos alunos, os quais fizeram uso de régua, transferidores e compassos. Através de orientações os alunos puderam aprender os passos necessários para construir

uma figura geométrica utilizando apenas os materiais já citados. A partir dos moldes, as peças foram cortadas no isopor e depois encapadas pelos alunos com papéis coloridos.

#### **4. Conclusão**

Nosso objetivo era de que os alunos através do material pudessem perceber que a soma das áreas dos quadrados formados a partir dos catetos é igual a área do quadrado formado a partir da hipotenusa e sendo assim chegassem na forma algébrica que conhecemos como o Teorema de Pitágoras. Pudemos perceber que o objetivo foi alcançado, pois concluíram o esperado e também houve um grande interesse dos alunos durante a realização da oficina.

#### **Agradecimentos**

Agradecemos a Capes pelo apoio financeiro via o projeto PIBID Matemática – UEL.

#### **Referências**

**Alunos Online.** Disponível em: <<http://www.alunosonline.com.br/matematica/teorema-de-pitagoras.html>>

**OLIVEIRA, Juliane Amaral de.** Teorema de Pitágoras. Belo Horizonte, MG. 2008. Disponível em: <[http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia\\_Juliane.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Juliane.pdf)>

# Minicursos

MC 1

# Integração e Diferenciação Numérica com o SciLab

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Neyva Maria Lopes Romeiro - UEL

# Derivação e Integração Numérica usando o SciLab

Neyva Maria Lopes Romeiro (e-mail: nromeiro@uel.br)  
Universiade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil

## Resumo

Este mini curso refere-se a compreender, programar e implementar códigos utilizando o SciLab tendo como equações básicas resoluções de derivadas e de integrais, assim como os diferentes métodos que derivam do método de diferenças finitas.

**Palavras-chave:** Derivada, integral, diferenças divididas, SciLab.

## 1. Derivação Numérica

Frequentemente, confronta-se com a necessidade de determinar valores da derivada de uma função num conjunto de pontos conhecendo apenas o valor da função nesses pontos. Na impossibilidade de obter esses valores de forma exata, pode-se considerar a sua aproximação através do valor da derivada usando um polinômio interpolador da função nos referidos pontos. Para este mini-curso, será considerado uma função  $f \in C^m([a, b])$ , com  $m$  suficientemente grande de tal forma que as deduções das fórmulas possam ser efetuadas. Dado um conjunto de pontos de uma partição uniforme

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (1)$$

com  $h = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Para uma melhor compreensão do conteúdo a ser abordado, inicia-se definindo a expansão em série de Taylor.

### 1.1. Expansão em série de Taylor

Um conceito fundamental, em uma análise da propriedade de uma função, é a expansão em série de Taylor. Seja então,  $y = f(x)$  uma função arbitrária, contínua e suave. Pode-se verificar que o comportamento de  $f$  em torno de um ponto fixo,  $x = x_0$ , naturalmente este valor será  $f(x_0)$ , o objetivo encontra-se em determinar o valor de  $f$  quando  $x = x_0 + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é uma quantidade bem pequena. Para isto, estuda-se o problema considerando  $y = f(x)$  e a reta tangente a essa função no ponto  $x_0$ , como mostra a Figura 1. Pode-se observar que a inclinação dessa reta corresponde a derivada de  $f$  no ponto  $x = x_0$ , representada por

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (2)$$

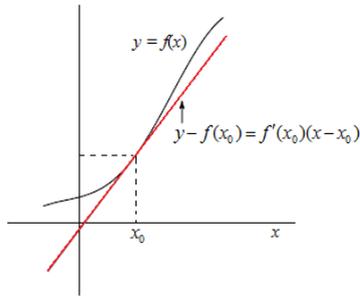


Figura 1: Função  $y = f(x)$  e a reta tangente dessa função no ponto  $x_0$

quando  $x$  está muito próximo do  $x_0$ , isto é, a reta tangente praticamente coincide com a função  $f(x)$  em  $x_0$ , logo tem-se

$$y \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

ou

$$f(x_0 + \varepsilon) \cong f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon \quad (4)$$

onde  $\varepsilon = x - x_0$ . A equação (4) representa a aproximação linear de  $f$  em  $x = x_0$ .

**Exemplo 1:** Dado  $f(x) = \text{sen}(x)$ ,  $X \in [0, \pi]$ , determine  $f(x_0 + \varepsilon)$  usando a expressão (4) para  $\varepsilon = 0.2, 0.002$  e  $0.00002$ .

**Solução:** Sendo  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $f'(x) = \text{cos}(x)$ , a aproximação linear é dada por  $f(x_k + \varepsilon) \cong \text{sen}(x_k) + \text{cos}(x_k)\varepsilon$ . Os resultados para  $\varepsilon = 0.2, 0.002$  e  $0.00002$ , encontram-se ilustrados na Figura 2 e apresentados na Tabela 1:

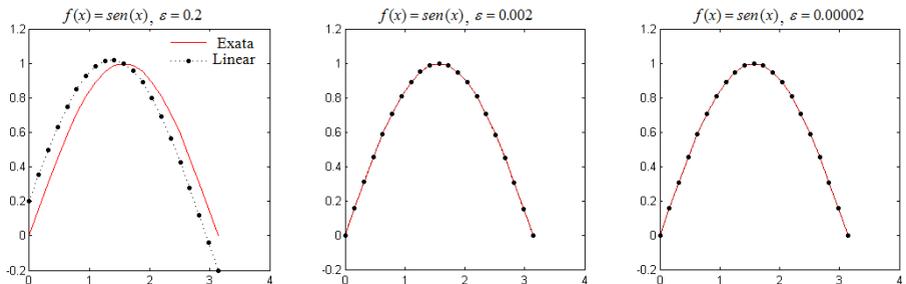


Figura 2: Gráficos comparativos de  $f(x_k) = \text{sen}(x_k)$  e  $f(x_k + \varepsilon) \cong \text{sen}(x_k) + \text{cos}(x_k)\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0.2, 0.002$  e  $0.00002$ .

Tabela 1: Valores  $f(x_k) = \text{sen}(x_k)$  e  $f(x_0 + \varepsilon) \cong \text{sen}(x_0) + \text{cos}(x_0)\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0.2, 0.002$  e  $0.00002$

$x_k$	$f(x_k)$	$f(x_k + \varepsilon)$		
		$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.002$	$\varepsilon = 0.00002$
0	0.00000	0.20000	0.00200	0.00002
$\pi/4$	0.70711	0.84853	0.70852	0.70712
$\pi/2$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$3\pi/4$	0.70711	0.56569	0.70569	0.70709
$\pi$	$1.2 \times 10^{-16}$	-0.20000	-0.00200	-0.00002

Observa-se que a aproximação (4) é bastante boa para  $\varepsilon$  pequeno. Mas, naturalmente a aproximação vai piorando na medida em que  $\varepsilon$  se torna maior, como pode ser facilmente observado Figura 2 e na Tabela 1.

**Exemplo 2:** Avalie o erro obtido no exemplo 1 considerando  $\text{erro} = |f(x_k) - f(x_k + \varepsilon)|$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Solução:** Tendo a aproximação linear dada por  $f(x_k + \varepsilon) \cong \text{sen}(x_k) + \cos(x_k)\varepsilon$  e  $f(x_k) = \text{sen}(x_k)$ , observa-se que o valor máximo do erro absoluto para  $\varepsilon = 0.2$ , 0.002 e 0.00002, é da ordem de  $10^{-1}$ ,  $10^{-3}$  e  $10^{-5}$ , respectivamente. Tais resultados podem ser observados na Figura 3.

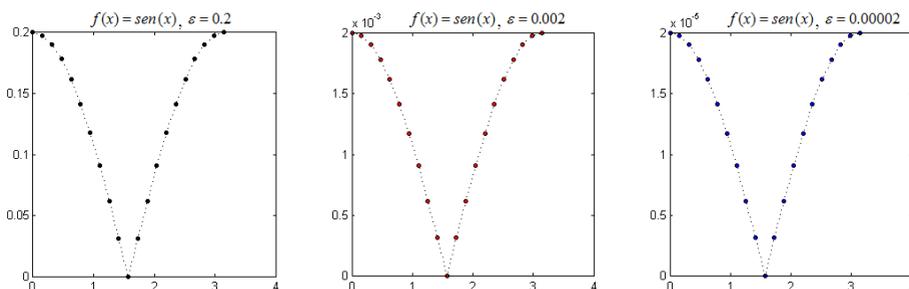


Figura 3: Gráficos do erro absoluto entre  $f(x_k) = \text{sen}(x_k)$  e  $f(x_0 + \varepsilon) \cong \text{sen}(x_0) + \cos(x_0)\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0.2$ , 0.002 e 0.00002.

---

### Código em SciLab

```
clf() // limpa a janela gráfica
N=20 // número de subdivisões
h=(xf-x0)/N; // número de partições
x0=0; xf=%pi; x=[x0:h:xf]'; // intervalo
epsilon=0.002;
f=sin(x); // função dada
fe=sin(x)+cos(x)*epsilon // função aproximada
plot(x,f,'r-'.x,fe,'ko'); // Faz o gráfico
title('f(x)=sen(x), e =0.002')
legend('f(x)',f(x+ ))
```

---

Para melhorar a aproximação da expansão em série de Taylor da função  $f(x)$  em torno do ponto  $x = x_0$ , pode-se incluir a dependência quadrática em  $\varepsilon$  como

$$f(x_0 + \varepsilon) \cong f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + C\varepsilon^2 \quad (5)$$

onde  $C$  é uma constante a ser determinada. Naturalmente esta expressão ainda é uma aproximação e não é possível que os dois lados se tornem idênticos como função de  $\varepsilon$ . Por outro lado, a aproximação linear da equação (4) já ajustava a curva no ponto  $x = x_0$  até a derivada. Assim, para melhorar a aproximação em torno de  $x = x_0$ , é interessante que o último termo na equação (5) ajustasse a segunda derivada da curva no ponto  $x = x_0$ . Assim, derivando duas vezes a equação (4), obtem-se:

$$\left. \frac{d^2 f(x_0 + \varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = f''(x_0) \quad (6)$$

que por outro lado, é equivalente a

$$\frac{d^2 f(x_0 + \varepsilon)}{d\varepsilon^2} = \frac{d^2 (f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + C\varepsilon^2)}{d\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{d^2 f(x_0 + \varepsilon)}{d\varepsilon^2} = 2C \quad (7)$$

Observando que (7) é igual a  $2C$  para qualquer valor de  $\varepsilon$  e igualando (6) e (7) obtem-se  $C = \frac{1}{2} f''(x_0)$

e, a aproximação quadrática para (5) torna-se

$$f(x_0 + \varepsilon) \cong f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{1}{2} f''(x_0)\varepsilon^2. \quad (8)$$

**Exemplo 3:** Dado  $f(x) = \text{sen}(x)$ ,  $X \in [0, \pi]$ , determine  $f(x_k + \varepsilon)$  usando a quadrática, equação (8), para  $\varepsilon = 0.2, 0.002$  e  $0.00002$ . Compare com os resultados obtido no exemplo 1, considerando o erro máximo em cada caso.

**Solução:** Sendo  $f(x) = \text{sen}(x)$ ,  $f'(x) = \cos(x)$  e  $f''(x) = -\text{sen}(x)$  temos que

$$f(x_k + \varepsilon) \cong \text{sen}(x_k) + \cos(x_k)\varepsilon - \frac{1}{2} \text{sen}(x_k)\varepsilon^2. \text{ Os resultados das aproximações linear e quadrática para}$$

$\varepsilon = 0.2, 0.002$  e  $0.00002$ , encontram-se ilustrados na Figura 3.

Observa-se uma melhora na aproximação quadrática para  $\varepsilon = 0.2$ , onde o valor máximo do erro absoluto foi 0.2006664 enquanto que para a aproximação linear o valor máximo do erro foi 0.02, para os demais valores de  $\varepsilon$  não houve diferença no erro, ou seja para  $\varepsilon = 0.002$  e  $0.00002$  a ordem máxima do erro para a ambas as aproximações são iguais e equivalentes a  $10^{-3}$  e  $10^{-5}$ , respectivamente.

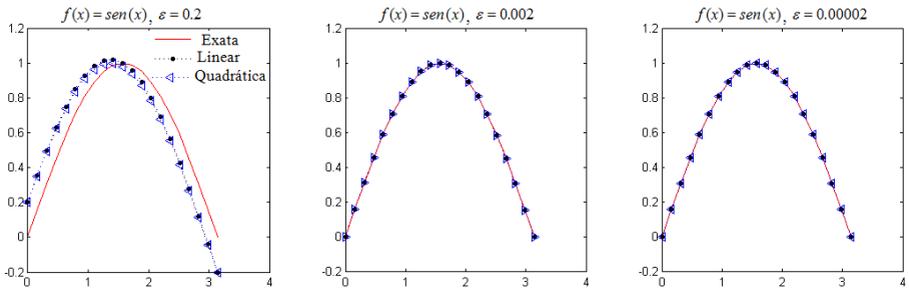


Figura 3: Valores de  $f(x_k) = \text{sen}(x_k)$ ,  $f(x_k + \varepsilon) \equiv \text{sen}(x_k) + \cos(x_k)\varepsilon$  e

$$f(x_k + \varepsilon) \equiv \text{sen}(x_k) + \cos(x_k)\varepsilon - \frac{1}{2}\text{sen}(x_k)\varepsilon^2 \text{ para } \varepsilon = 0.2, 0.002 \text{ e } 0.00002.$$

Repetindo o procedimento pode-se obter uma expressão polinomial em  $\varepsilon$  que seja idêntica à função original, assim, escrevendo

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{1}{2}f''(x_0)\varepsilon^2 + C_3\varepsilon^3 + C_4\varepsilon^4 + \dots + C_n\varepsilon^n + \dots \quad (9)$$

Derivando três vezes a equação (9) em relação a  $\varepsilon$ , tem-se

$$\frac{d^3 f(x_0 + \varepsilon)}{d\varepsilon^3} = 6C_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4C_4\varepsilon + \dots + n(n-1)(n-2)C_n\varepsilon^{n-3} + \dots \quad (10)$$

e, para  $\varepsilon = 0$  o lado direito de (10) é igual a  $6C_3$ . Lembrando que  $\left. \frac{d^3 f(x_0 + \varepsilon)}{d\varepsilon^3} \right|_{\varepsilon=0} = f'''(x_0)$  obtém-se

$$C_3 = \frac{1}{3!} f'''(x_0) \quad (11)$$

Continuando o processo tem-se

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0). \quad (12)$$

Logo (9) resulta em:

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{1}{2}f''(x_0)\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)\varepsilon^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\varepsilon^n + \dots \quad (13)$$

Fazendo  $x = x_0 + \varepsilon$ , ou  $\varepsilon = x - x_0$ , em (13) obtém-se a expressão que é conhecida como a expansão em série de Taylor da função  $f(x)$  em torno do ponto  $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots \quad (14)$$

## 1.2. Aproximação da Primeira Derivada

Desenvolvendo  $f(x)$  em série de Taylor, equação (14), em torno do ponto  $x_k$  e assumindo que  $f \in C^2([a, b])$  tem-se:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{h^2}{2} f''(\xi_1) \quad \xi_1 \in [x_k, x_{k+1}], \quad (15)$$

e

$$f(x_{k-1}) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{h^2}{2} f''(\xi_2) \quad \xi_2 \in [x_{k-1}, x_k], \quad (16)$$

onde  $h = x_{k+1} - x_k$ . Assim sendo, pode-se escrever

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi_1) \quad (17)$$

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi_2) \quad (18)$$

Obtemos assim duas fórmulas de diferenças finitas de primeira ordem em  $h$  para aproximar a primeira derivada de uma função em num ponto  $x_k$ . A equação

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} \quad (19)$$

é a fórmula de diferenças finitas progressivas (ou para frente) e a

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} \quad (20)$$

é a fórmula de diferenças finitas regressivas (ou para trás).

O erro em (19) e (20) é dado por  $E = \frac{h}{2} f''(\xi)$ , onde  $f''(\xi) = \max_{x_i \leq \xi \leq x_{i+1}} |f''(\xi)|$  ou  $f''(\xi) = \max_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_i} |f''(\xi)|$ .

Para obter fórmulas mais precisas para aproximar a primeira derivada de uma função num ponto, considera-se fórmulas com mais pontos. Assim, desenvolvendo  $f(x)$  em série de Taylor, equação (14), em torno do ponto  $x_k$  e assumindo que  $f \in C^3([a, b])$  tem-se:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{h^2}{2} f''(x_k) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1) \quad \xi_1 \in [x_k, x_{k+1}], \quad (21)$$

e

$$f(x_{k-1}) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{h^2}{2} f''(x_k) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2) \quad \xi_2 \in [x_{k-1}, x_k], \quad (22)$$

Subtraindo (21) de (22) e colocando  $f'(x_k)$  em evidência, obtem-se:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h} - h^2 \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{12} \quad (23)$$

Seja  $f'''$  contínua em  $[\alpha, b]$ , existe um  $\xi \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$  tal que

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}.$$

Desta forma pode-se afirmar que

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1}))}{2h} \tag{24}$$

é a fórmula de diferenças centrada, com erro de ordem  $h^2$  dado por  $E = \frac{f'''(\xi)}{12} h^2$ .

OBS: Observe que a fórmula centrada fornece uma aproximação de derivada na qual o erro é da ordem de  $h^2$ , enquanto nas fórmulas avançada e atrasada o erro é da ordem de  $h$ .

**Exemplo 4:** Considere os seguintes valores da função  $f(x) = xe^x$

Tabela 2: Valores da função  $f(x) = xe^x$

$x_i$	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
$f(x_i)$	10.889365	12.03199	14.778112	17.148957	19.855030

Aproxime o valor de  $f'(2)$  usando as fórmulas de diferenças finitas para frente, para trás e centrada. Compare os erros cometidos.

**Solução:** Temos  $f(x) = xe^x$  e  $f'(x) = e^x + xe^x$ , assim  $f'(2) = e^2 + 2e^2 = 22.1671683$  e os valores para diferenças finitas para frente, para trás e centrada são, respectivamente:

$$f'(2.0) \cong \frac{f(2.1) - f(2.0)}{0.1} = \frac{17.148957 - 14.778112}{0.1} = 23.708446$$

$$f'(2.0) \cong \frac{f(2.0) - f(1.9)}{0.1} = \frac{14.778112 - 12.03199}{0.1} = 20.749128$$

$$f'(2.0) \cong \frac{f(2.1) - f(1.9)}{0.2} = \frac{17.148957 - 12.03199}{0.2} = 22.2287869$$

O erro cometido é de aproximadamente:  $1.5 \times 10^{-1}$ ,  $1.4 \times 10^{-1}$ ,  $6.1 \times 10^{-2}$ , respectivamente. Observa-se que o erro cometido para diferenças finitas centrada é superior aos demais métodos.

Segue na tabela 3 os resultados das três aproximações: diferenças finitas para frente, para trás e centrada, para os valores de  $1.8 \leq x_i \leq 2.2$ .

Tabela 3 os resultados das três aproximações: diferenças finitas para frente, para trás e centrada

$x_i$	$f'(x_i)$	Diferença frente	Diferença trás	Diferença central
1.8	16.939013	18.138340	-----	-----
1.9	19.389094	20.749128	18.13834	19.443734

2.0	22.167168	23.708446	20.749128	22.228787
2.1	25.315127	27.060729	23.708446	25.384588
2.2	28.880043	-----	27.060729	-----

---

### Código em SciLab

```

clf()// limpa janela gráfica
N=4 // numero de partições
x0=1.8; xf=2.2
h=(xf-x0)/N; x=[x0:h:xf]'; // cria vetor x

f=zeros(N); // cria o vetor f
df=zeros(N); // cria o vetor f
fxfrente1=zeros(N); // cria vetor diferencas para
frente
fxtras1=zeros(N); // cria o vetor diferencas para
tras
fxcentro1=zeros(N); // cria o vetor diferencas para-
tras

// cria a função e os valores para a partição dada
for i=1:N+1
f(i)=x(i)*exp(x(i));
df(i)=exp(x(i))+ x(i)*exp(x(i));
end

fxfrente=(f(4) -f(3))/h;
fxtras=(f(3) -f(2))/h;
fxcentro=(f(4) -f(2))/(2*h);

// inicializa
for i=1:N
fxfrente1(i)=(f(i+1) - f(i))/h;
end
M=4

xx=[1.9:h:xf]
for i=2:N+1
fxtras1(i)=(f(i) -f(i-1))/h;
end

for i=2:N
fxcentro1(i)=(f(i+1) -f(i-1))/(2*h);
end

```

---

## 2. Integração Numérica

Se  $f(x)$  é uma função contínua em  $[a, b]$  então existe a função primitiva  $F(x)$  tal que  $F'(x) = f(x)$ , assim:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (25)$$

**Problema 1:** Na maioria das vezes pode não ser fácil expressar  $F(x)$  através das funções ditas elementares.

**Problema 2:** Em alguns casos tem-se apenas uma tabela de valores  $f(x)$ , logo como calcular

$$\int_a^b f(x) dx ?$$

Em ambos os casos calcula-se  $\int_a^b f(x) dx$  numericamente!!!

**Idéia básica.** Para calcular numericamente  $\int_a^b f(x) dx$  expressa-se  $f(x)$  como um polinômio no intervalo  $[a, b]$ , resultando expressões que têm a forma

$$\int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) \quad (26)$$

onde  $x_i \in [a, b]$  com  $i = 1, 2, \dots, n$ . Quando escreve-se uma integral na forma (26) tem-se implementando o formalismo de Newton-Cotes.

### 2.1. Usando o SciLab

Para obter uma aproximação de um valor de uma integral definida, por exemplo:  $\int_{0.1}^{0.5} e^{-x^2} dx$  utiliza-se *intg* no software SciLab, para isto é necessário definir a função que será integrada. Pode ser diretamente no ambiente SciLab:

---

#### Código em SciLab

```
clf()// limpa janela gráfica
deff('[y] = f53(x)', 'y = exp(-x*x)')
I = intg(0.1, 0.5, f53)
```

---

O SciLab, assim como outros softwares é muito bom, porém não é perfeito. Por exemplo a utilização do comando *intg* não funciona bem para  $\int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx$ .

Quando não se conhece a expressão da função  $f$ , mas conhece uma tabela de valores  $(x_i, f(x_i))$ , se esta lista de valores estiver ordenado de maneira crescente, pode-se utilizar o SciLab para calcular uma solução aproximada da integral. Por exemplo:

**Exemplo 5:** Considere os seguintes valores da função  $f(x) = xe^x$ , como descrito na Tabela 2. Calcule a integral usando o SciLab.

**Solução:** Para obter o valor aproximado da integral entre  $x_1 = 1.8$  e  $x_5 = 2.2$  da função  $f$  (representada pelos valores da Tabela 2) é necessário criar os vetores e integrar a função usando a fórmula do trapézio em cada subintervalo:

`x=[1.8 1.9 2.0 2.1 2.2]'`

`y = [10.889365 12.03199 14.778112 17.148957 19.855030]'`

---

**Código em SciLab**

```
clf();// limpa janela gráfica exp(-x*x
deff('[y] = f53(x)', 'y = x*exp(x)')
l = intg(1.8, 2.2, f53)

x =[1.8 1.9 2.0 2.1 2.2]'
y = [10.889365 12.03199 14.778112 17.148957
19.855030]'
ltrap= intrap(x,y)

erro=abs(l-ltrap)
```

---

Calculando a integral definida tem-se  $\int_{1.8}^{2.2} xe^x dx = 5.9902982$  e o valor da integral pelo método de trapézio, obtido pelo SciLab retorna 5.9331257. Observa-se que o erro cometido é de aproximadamente  $5.7 \times 10^{-2}$ .

Para que se possa compreender o processo utilizado no SciLab, segue a teoria sobre a Regra dos Trapézios.

## 2.2. Regra dos Trapézios

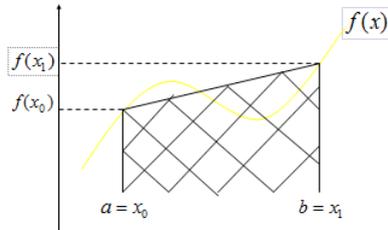
Utilizando a Forma de Lagrange para expressar o polinômio  $p_1(x)$  que interpola  $f(x)$  em  $x_0$  e  $x_1 \in [a, b]$  obtem-se

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{(x-x_1)}{-h} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{h} f(x_1) \right] dx = I_T \tag{27}$$

$$\Rightarrow I_T = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

Note que  $I_T$  é a área do trapézio de altura  $h = x_1 - x_0$  e de base  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$



Ao substituir a área sob a curva  $f(x)$  pela área do trapézio realiza-se uma aproximação e comete-se um erro. Verifica-se que este erro é dado por

$$\int_{x_0=a}^{x_1=b} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + E_T \quad (28)$$

com  $E_T = -\frac{h^3}{12} f''(c)$  onde  $c \in (a, b)$ .

### 2.3. Regra dos Trapézios Repetida

Quando o intervalo  $[a, b]$  é grande deve-se fazer várias subdivisões e aplicar a regra do trapézio repetidas vezes. Sendo  $x_{i+1} - x_i = h$  com  $i = 0, 1, 2, \dots, m$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^m \left( \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] - \frac{h^3 f''(c_i)}{12} \right) \quad (29)$$

onde  $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ .

---

#### Código em SciLab

```
// Programa para o calculo da integral
// ----- SCILAB -----
// Regra do Trapézio
clear, clc, clf
// intervalo [x0, xf]
// n = numero de subintervalos
// f(x0), f(x1), f(x2) ... f(xf)
// com h = (xf-x0)/n
// x representa os valores de
// x0, x1=x0+h, x2=x0+2h, ... xf
deff('[y]=f(x)', 'y= função ');
x0 = input('Valor de x0: ');
xf = input('Valor de x final: ');
n = input(' Numero de partições n: ');
h = (xf-x0)/n
x=x0:h:xf;
A_trapézio=0;
for i=1:n
```

---

---

```
x(i+1) = x(i)+h  
A_trapezio=A_trapezio+f(x(i))+f(x(i+1));  
end  
A_trapezio=A_trapezio*h/2
```

---

## MC 2

# Aplicação da Fatoração em Primos na Criptografia

Prof. Ms. Matias José Quadros Neto - UEL  
Prof. Dr. Naresh Kumar Sharma - UEL  
Adriano Gomes de Santana - UEL

Todo estudante de Matemática conhece os números inteiros primos e os irredutíveis, a decomposição de um número composto como produto de irredutíveis e alguns resultados decorrentes desses conceitos. Um dos objetivos deste mini-curso é reexaminar esses conceitos e estendê-los a anéis "maiores" que  $\mathbb{Z}$ . Teremos algumas surpresas: alguns números irredutíveis permanecem irredutíveis nesse ambiente maior, enquanto que outros deixam de ser irredutíveis. Em alguns desses anéis número irredutível e número primo são conceitos diferentes e a decomposição como produto de números irredutíveis únicos continua valendo e noutros deixa de valer. Poucos resultados serão provados e portanto o minicurso servirá como pré-visualização dos resultados. Um curso mais encorpado e com todas as demonstrações deverá ser procurado pelos alunos interessados.

## 1 O ANEL DOS INTEIROS $\mathbb{Z}$ .

O conjunto dos números inteiros é  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ . A estrutura desse conjunto quando consideramos a adição (+) e a multiplicação (.) é de anel comutativo com elemento unidade.

### 1.1 Norma ou valor absoluto de um número inteiro.

Se  $a \in \mathbb{Z}$  então sua norma ou valor absoluto é  $|a| = a$  se  $a$  é positivo ou  $|a| = -a$  se  $a$  é negativo.

### 1.2 Divisibilidade

Se  $a, b \in \mathbb{Z}$  dizemos que  $a|b$  ( $a$  divide  $b$ ) se existe  $q \in \mathbb{Z}$  de modo que  $b = a \cdot q$  ou popularmente falando, quando a divisão de  $b$  por  $a$  é exata. Se o referido  $q$  não existe, isto é, a divisão não é exata diremos que  $a \nmid b$  isto é,  $a$  não divide  $b$ . Se  $a$  é um inteiro então, trivialmente, temos  $1|a$ ,  $-1|a$ ,  $a|a$  e  $-a|a$ . Diremos que  $1, -1, a$  e  $-a$  são divisores impróprios de  $a$ .

O inteiro  $a$  é um divisor próprio de  $b$  se  $a|b$  e  $1 < |a| < |b|$ .

### 1.3 Unidades

Um número inteiro  $a$  é uma unidade se  $a|1$ . Mas então existe  $b \in \mathbb{Z}$  tal que  $a \cdot b = 1$  e  $a$  e  $b$  são invertíveis. As únicas unidades de  $\mathbb{Z}$  são  $1$  e  $-1$ . Uma definição alternativa para unidade é:  $a$  é uma unidade em  $\mathbb{Z}$  se  $|a| = 1$ .

### 1.4 Elementos associados

Dois inteiros  $a$  e  $b$  são associados e escrevemos  $a \sim b$  se existe uma unidade  $u \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = b \cdot u$ . Em  $\mathbb{Z}$  os associados de  $a$  são  $a$  e  $-a$ .

## 1.5 Algoritmo da divisão

Dados  $D, d \in \mathbb{Z}$ , existem  $q, r \in \mathbb{Z}$  tais que  $D = d \cdot q + r$  com  $0 \leq r < |d|$ . Os elementos  $D, d, q$  e  $r$  são chamados Dividendo, divisor, quociente e resto, respectivamente. Observe a exigência do resto  $r$  ser positivo quando não for nulo.

## 1.6 Máximo Divisor Comum

Se  $a, b$  são inteiros então seu máximo Divisor Comum,  $MDC(a, b)$ , é o maior entre os divisores positivos comuns de  $a$  e  $b$ .

### 1.6.1 Teorema 1

Se  $d = MDC(a, b)$  então existem inteiros  $x$  e  $y$  tais que  $d = x \cdot a + y \cdot b$ .

## 1.7 Números irredutíveis

Um número inteiro  $p$  (não unidade e não nulo) é irredutível se e somente se  $a|p$  acarreta  $a$  é unidade ou  $a \sim p$ . Na prática isso significa que  $p$  não tem divisores próprios. Os únicos divisores de  $p$  são as unidades  $(1, -1)$  e os associados a  $p$   $(p, -p)$ . Observe que estes conceitos são utilizados para caracterizar um número primo em muitos textos introdutórios da teoria dos números.

## 1.8 Número primo

Um número inteiro  $p$  não unidade, é primo se, e somente se,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$  se  $p|a \cdot b$  então  $p|a$  ou  $p|b$ . Assim  $q$  não é primo se, e somente se, existem  $a$  e  $b$  inteiros com  $q \nmid a$  e  $q \nmid b$  mas  $q|a \cdot b$ .

### 1.8.1 Teorema 2

No anel dos inteiros,  $p$  é irredutível se e somente se,  $p$  é primo.

Demonstração:

Suponha que  $p$  é irredutível e que  $p|a \cdot b$  mas  $p \nmid a$ . Então  $MDC(p, a) = 1$  e portanto existem inteiros  $x$  e  $y$  tais que  $px + ay = 1$ . Multiplicando todos os termos por  $b$  temos:

$$pbx + aby = b$$

Como  $p|a \cdot b$  segue que  $ab = pt$  para algum  $t \in \mathbb{Z}$ . Substituindo e colocando  $p$  em evidência teremos:

$$pbx + pty = b$$

ou

$$p(bx + ty) = b$$

e segue que  $p|b$ . Assim  $p$  é primo.

Suponha que  $p$  é primo e que  $a|p$ . Daí existe  $b$  inteiro tal que  $p = a.b$ . Então, por definição de primo,  $p|a$  ou  $p|b$ . No primeiro caso temos  $p|a$  e  $a|p$  acarretando  $a \sim p$ . No segundo caso temos  $b = pr$ . Substituindo esse valor de  $b$  em  $p = a.b$  temos:  $p = a.pr$  ou  $p - apr = 0$  ou  $p(1 - ar) = 0$  ou  $1 - ar = 0$  ou  $a.r = 1$  ou  $a|1$  e  $a$  é unidade. Assim  $p$  é irredutível.

## 1.9 Domínio de integridade

$\mathbb{Z}$  é um domínio de integridade já que vale a seguinte equivalência

$$[a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } a.b = 0] \Leftrightarrow [a = 0 \text{ ou } b = 0]$$

É impossível encontrar números inteiros não nulos com produto nulo. Isso no entanto é possível em outros anéis (que evidentemente não são domínios de integridade). No caso de  $a \neq 0, b \neq 0$  mas  $a.b = 0$  diremos que  $a$  (e  $b$ ) é um *divisor de zero*.

### 1.10 Ideal de $\mathbb{Z}$

Um subconjunto  $I$  de  $\mathbb{Z}$  é chamado ideal de  $\mathbb{Z}$  se valem as seguintes condições:

- i) Para todos  $a, b \in I, a + b \in I$ , e,
- ii) para todo  $r \in \mathbb{Z}$  e todo  $a \in I, r.a \in I$ .

### 1.11 Ideal principal

Um ideal  $I$  de  $\mathbb{Z}$  é um ideal principal se existe  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $I = \{a.z : z \in \mathbb{Z}\} = a.\mathbb{Z}$ .

#### 1.11.1 Teorema 3

Todos os ideais de  $\mathbb{Z}$  são principais.

### 1.12 Domínio Principal

O conjunto  $\mathbb{Z}$  é um domínio principal pois todos seus ideais são principais.

### 1.13 Domínio de Fatorização Única (DFU)

O domínio  $\mathbb{Z}$  é um DFU (ou fatorial) pois se  $n \in \mathbb{Z}$  então  $n = 0$  ou  $n$  é uma unidade ou  $n$  é um produto de elementos irredutíveis de modo único (exceto quanto a ordem dos fatores e unidades)

### 1.14 Domínio Euclidiano

Um domínio  $D$  é euclidiano se existe uma função  $n : D - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  verificando as duas condições a seguir:

1. Se  $a, b \in D$  e  $a|b$  então  $n(a) \leq n(b)$ ;
2. Se  $a, b \in D$  então existem  $q, r \in D$  tal que  $b = a.q + r$  onde  $r = 0$  ou  $n(r) < n(a)$

$\mathbb{Z}$  é um domínio euclidiano onde  $n : D \rightarrow \mathbb{N}$  é  $n(a) = |a|$ .

### 1.15 Corpo de frações de um domínio

O corpo de frações de  $\mathbb{Z}$  é  $\mathbb{Q}$ . Para o caso geral de um outro domínio  $D$  o corpo de frações será  $K_D = \{\frac{a}{b} : a, b \in D \text{ e } b \neq 0\}$

### 1.16 Inteiros sobre um domínio

Sejam  $R \subset S$  dois domínios. Dizemos que  $s \in S$  é *inteiro* sobre  $R$  se  $s$  é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em  $R$ . Os números racionais inteiros sobre  $\mathbb{Z}$  são precisamente os números inteiros e nenhum outro. Mas este conceito aplicado a outros domínios  $R$  e  $S$  pode produzir *inteiros* sobre  $R$  que não são elementos de  $R$ .

## 2 A PROCURA POR ANÉIS "MAIORES" QUE $\mathbb{Z}$

Vamos apresentar algumas possibilidades de ampliar o domínio  $\mathbb{Z}$ :

- $\mathbb{Q}$   
Poderíamos considerar o anel  $\mathbb{Q}$ . Mas todos os elementos não nulos de  $\mathbb{Q}$  são invertíveis e portanto unidades. Se  $a, b \in \mathbb{Q}^*$  então  $a|b$  e  $b|a$ . Não há elementos irredutíveis em  $\mathbb{Q}$  e tampouco números primos.
- $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$   
Aqui exige-se  $d \in \mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}[w]$

Aqui  $w$  é uma raiz  $n$ -ésima da unidade, isto é,  $w^n = 1$

- Outras

Vamos analisar apenas o segundo caso deixando os demais para outra ocasião.

## 2.1 Considerações globais

- De modo geral  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$  e as operações de adição e multiplicação são feitas "como operações em  $\mathbb{C}$ ".
- O corpo de frações de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  é  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ .
- Todos os  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  são domínios de integridade pois  $(a + b\sqrt{d})(a' + b'\sqrt{d}) = 0$  acarreta  $aa' + bb'd = 0$  e  $ab' + a'b = 0$  acarretando  $a' = b' = 0$ .
- Se  $d' = k^2d$  então  $\mathbb{Z}[\sqrt{d'}] \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  mas  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \mathbb{Q}[\sqrt{d'}]$ . Este é o motivo de, no estudo de  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  exigirmos  $d$  "livre de quadrados".
- Quais elementos de  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  são inteiros sobre  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ? Certamente todos de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  o são, mas temos outros?.
- Podemos adotar, para todos os domínios  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  a "norma"

$$n(a + b\sqrt{d}) = |a^2 - db^2|$$

embora possam existir outras. A função  $n$  é realmente uma norma? Verifique que se  $\alpha$  e  $\beta$  são elementos de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  então  $n(\alpha\beta) = n(\alpha)n(\beta)$ .

Se  $(a + b\sqrt{d})(m + n\sqrt{d})$  então  $(a^2 - b^2d)(m^2 - n^2d)$ . Assim  $n$  cumpre a primeira condição para ser norma

## 2.2 Equação de Pell

Equações diofantinas do segundo grau na forma  $X^2 + dY^2 = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  são chamadas equações de Pell. Vamos apresentar um rol de resultados, para uso na exposição, sem demonstrações:

### 1. $n=1$

A equação  $X^2 + dY^2 = 1$  afirma que  $n(x + y\sqrt{-d}) = 1$  ou seja,  $x + y\sqrt{-d}$  é uma unidade de  $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ .

Se  $d = 1$  então as únicas soluções inteiras são  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  isto é, as unidades de  $\mathbb{Z}[i]$  são  $1, -1, i, -i$ ;

Se  $d > 1$  então as únicas soluções são  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  ou seja, as unidades de  $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$  são  $1$  e  $-1$ ;

Se  $d < -1$  então  $X^2 - |d|Y^2 = 1$  tem  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  como solução com  $Y = 0$ . Se  $Y \neq 0$  então a equação tem uma infinidade de soluções dadas

por:  $(a, b)$  é solução se, e somente se,  $a + b\sqrt{-d} = \pm(x_1 + y_1\sqrt{-d})^m$  onde  $(x_1, y_1)$  é uma solução minimal, isto é,  $x_1 + y_1\sqrt{-d}$  com valor mínimo. Ver aplicação (\*) a seguir:

2.  $n = -1$

Se  $d \geq 1$  então a equação é impossível já que a soma de números positivos não pode ser negativa.

Se  $d \leq -1$  então  $X^2 - dY^2 = -1$  pode ser possível ou impossível. Por exemplo  $X^2 - 3Y^2 = -1$  é impossível. Para ver isso faça cálculos módulo 4 para ver que os possíveis resultados são 0, 1 ou 2, e, portanto nunca valem -1. Isso ocorre para todo  $d \equiv 3(4)$ .

Se  $X^2 - dY^2 = -1$  é possível e  $(x_0, y_0)$  é uma solução minimal então outras soluções  $(x', y')$  podem ser obtidas através da igualdade

$$x' + y'\sqrt{d} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^{2n+1}$$

3.  $n \neq \pm 1$

A situação fica complicada. Se  $(x_0, y_0)$  é solução de  $X^2 + dY^2 = n$  e  $(x_1, y_1)$  é solução de  $X^2 + dY^2 = 1$  então  $(x', y')$  é outra solução da equação se

$$x' + y'\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})$$

**2.2.1 Aplicação (\*)**

Encontre pelo menos 5 soluções de  $X^2 - 2Y^2 = 1$ . Temos  $(3, 2)$  uma solução minimal. Tomando  $m = 2$ , temos  $a + b\sqrt{2} = \pm(3 + 2\sqrt{2})^2$  ou seja

$$a + b\sqrt{2} = \pm(17 + 12\sqrt{2})$$

isto é,  $(17, 12)$ ,  $(17, -12)$ ,  $(-17, 12)$  e  $(-17, -12)$  são outras soluções. Se fizermos  $m = 3$ , obteremos outras 4 soluções que são:  $(99, 70)$ ,  $(99, -70)$ ,  $(-99, 70)$  e  $(-99, -70)$ .

**2.2.2 Exercício**

Encontre pelo menos 5 soluções de  $X^2 - 3Y^2 = 1$

Resposta:  $(2, 1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(-2, -1)$ ,  $(7, 4)$ ,  $(7, -4)$ ,  $(-7, 4)$ ,  $(-7, -4)$  etc.

**2.3 Considerações locais**

A seguir vamos examinar com proximidade alguns domínios  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

- $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$   
É um domínio.

Inicialmente  $2, 3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  e  $6 = 2 \cdot 3$ . Também  $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6$ .  
 $2$  e  $3$  são irredutíveis. Realmente, se  $(a + b\sqrt{-5})|2$  (ou  $3$ ) e não é unidade então  $(a^2 + 5b^2)|4$  (ou  $9$ ) e então  $a^2 + 5b^2 = 2$  (ou  $a^2 + 5b^2 = 3$ ). Mas estas equações são impossíveis.

Também  $(1 + \sqrt{-5})$  e  $1 - \sqrt{-5}$  são irredutíveis. A primeira conclusão é:  $6$  não pode ser escrito como produto de irredutíveis de modo único, já que existem dois modos de fazê-lo.

Assim  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  não é um DFU.

A segunda conclusão é que  $2$  (e  $3$ ) não é primo pois  $2|(1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$  mas  $2$  não divide qualquer dos dois fatores.

A terceira conclusão é que  $2$  (ou  $3$ ) primos em  $\mathbb{Z}$  não são mais primos no anel maior. Observe que  $2$  permanece irredutível.

A quarta conclusão é que irredutíveis podem não ser primos.

- $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  chamado anel dos *inteiros de Gauss*.

- É um domínio já que todo  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  o é;
- Tem norma dada por  $n(a + bi) = a^2 + b^2$ ;
- MDC e MMC podem ser determinados em  $\mathbb{Z}[i]$ .
- Consequência: O produto entre dois números inteiros que são somas de dois quadrados também é soma de dois quadrados. Prova: Se os números são  $(a^2 + b^2)$  e  $(c^2 + d^2)$  então

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = n(a + bi) \cdot n(c + di) = n((ac - bd) + (ad + bc)i) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

como queríamos demonstrar.

## MC 3

# A função de Euler e as Funções Trigonométricas

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Claudete Matilde Webler Martins - UEM

## **Título: A Função de Euler e as Funções Trigonômicas**

Claudete Matilde Webler Martins ([cmwebler@uem.br](mailto:cmwebler@uem.br))

Universidade Estadual de Maringá-UEM, Maringá-PR.

### **Resumo:**

O objeto inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos desta figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno e cosseno o status de função de uma variável real. Veremos uma maneira natural de definir as funções trigonométricas, tendo como ponto de partida a função de Euler.

**Palavras chave:** funções trigonométricas, função de Euler.

**Bibliografia:** E. L. LIMA; P. C. P. CARVALHO; A. C. MORGADO, A Matemática do Ensino Médio, volume 1, Coleção do professor de matemática. 9ª Edição. Rio de Janeiro. SBM 2006.

MC 4

# **Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias Impulsivas**

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luciene Parron Gimenes Arantes - UEM

# **28<sup>a</sup> SEMANA DA MATEMÁTICA - Minicurso MC4**

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS IMPULSIVAS

*Profa. Dra. Luciene Parron Gímenes Arantes - UEM*

# Introdução

O objetivo deste minicurso é introduzir o conceito de equações diferenciais ordinárias sujeitas à ação impulsiva.

Equações diferenciais com impulsos são apropriadas para descreverem processos de evolução que sofrem variações de estado de tão curta duração que podem ser consideradas instantâneas. Este fenômeno é chamado impulso ou ação impulsiva e corresponde às descontinuidades de primeira espécie das soluções ou de suas derivadas.

Equações com impulsos são importantes, por exemplo, em modelos que descrevem corpos viscoelásticos colidindo [11]. Um impacto é uma interação de corpos em um curto espaço de tempo e pode ser considerado como uma ação impulsiva. Nesta direção, mencionamos sistemas do tipo bilhar que podem ser modelados por equações diferenciais de segunda ordem com a ação dos impulsos agindo somente sobre a primeira derivada da solução, uma vez que as posições de bolas colidindo não mudam no momento da ação do impulso (impacto), porém suas velocidades adquirem incrementos finitos.

Na investigação de soluções de equações diferenciais impulsivas, as técnicas clássicas usadas em equações sem impulsos devem ser adaptadas a fim de levar-se em consideração os efeitos impulsivos. O interesse neste tipo de equações tem crescido muito nos últimos anos e a pesquisa nesta direção tem produzido um número considerável de publicações. Podemos citar [1, 5, 6, 7, 8, 15], entre outros.

Iniciamos este trabalho (Capítulo 1), relembrando alguns fatos básicos da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Também apresentaremos e discutiremos as consequências dos impulsos aplicados em EDOs através de exemplos interessantes.

No Capítulo 2, apresentaremos resultados sobre existência e unicidade de soluções de EDOs impulsivas.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

### 1 Problema de valor inicial

Sejam  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$  um subconjunto aberto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua.

**Definição 1.1.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Uma solução  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  da Equação Diferencial Ordinária (EDO)  $x'(t) = f(t, x(t))$  é uma função tal que*

(i)  $G(x) = \{(t, x(t)); t \in I\} \subset D;$

(ii)  $x$  é diferenciável em  $I;$

(iii)  $x'(t) = f(t, x(t)),$  para todo  $t \in I.$

**Definição 1.2.** *Um problema de valor inicial (PVI) ou Problema de Cauchy consiste de uma equação diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  e de uma condição inicial  $x(t_0) = x_0,$  com  $(t_0, x_0) \in D.$*

Resumidamente, escrevemos o PVI

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Uma solução de (1.1) deve satisfazer a Definição 1.1 e a condição inicial  $x(t_0) = x_0,$  para  $(t_0, x_0) \in D$  dado.

**Exemplo 1.3.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Consideremos o PVI

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Para cada  $c > 0$ , a função

$$x_c(t) = \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{4}, & \text{se } t \geq c \\ 0, & \text{se } t < c. \end{cases}$$

é uma solução do PVI dado.

A seguir, mostraremos em que condições o PVI em (1.1) possui solução. Para tanto, provaremos que uma solução do PVI deve satisfazer uma certa equação integral. Também vamos mostrar quando a solução será única.

**Lema 1.4.** *Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e  $(t_0, x_0) \in D$ . Então  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma solução do PVI em (1.1) se, e somente se,  $x$  é contínua em  $I$ ,  $(t, x(t)) \in D$  e satisfaz*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \text{para todo } t \in I. \quad (1.2)$$

**Demonstração:** Como  $f$  é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, de (1.1), temos

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Reciprocamente, como  $x$  é diferenciável, derivando e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, chegamos que  $x$  é solução da EDO.  $\square$

**Exemplo 1.5.** Consideremos

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Pelo Lema 1.4,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t s^2 ds = 1 + \frac{s^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{t^3}{3}$$

é uma solução do PVI acima.

Quando um PVI terá solução? Vamos responder esta pergunta com o auxílio do famoso **Teorema do Ponto Fixo de Schauder**. Mas antes, precisamos de alguns conceitos.

**Definição 1.6.** *Seja  $T : X \rightarrow X$  uma aplicação. Dizemos que  $x \in X$  é um ponto fixo da aplicação  $T$  se  $Tx = x$ , ou seja, a imagem  $Tx$  coincide com  $x$ .*

**Exemplo 1.7.** A translação  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Tx = x + 1$  não possui pontos fixos.

**Exemplo 1.8.** A aplicação identidade  $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Ix = x$  possui infinitos pontos fixos.

**Exemplo 1.9.** A rotação  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Fx = x^2$  tem dois pontos fixos: 0 e 1.

**Definição 1.10.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $A \subset X$ .  $A$  é dito convexo se, para todo  $x, y \in A$  tem-se  $\theta x + (1 - \theta)y \in A$ , para todo  $\theta \in (0, 1)$ .*

A seguir, apresentamos o resultado que garante a existência de um ponto fixo de uma função.

**Teorema 1.11** (Teorema do Ponto Fixo de Schauder). *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $A \subset X$  um subconjunto convexo e compacto e  $f : A \rightarrow A$  contínua. Então  $f$  tem um ponto fixo em  $A$ .*

Podemos exigir mais da função  $f$  e menos de  $A$ , conforme vemos no corolário abaixo.

**Definição 1.12.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach,  $A \subset X$  um subconjunto de  $X$  e  $f : A \subset X \rightarrow Y$ . Dizemos que  $f$  é completamente compacta se  $f$  leva cada limitado de  $A$  em um conjunto relativamente compacto de  $Y$ , isto é,  $\overline{f(A)}$  é compacto em  $Y$ .*

**Observação 1.13.** *Uma função compacta não é necessariamente contínua. Podemos comprovar isso, considerando a seguinte função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

*Seja  $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ . Então,  $f(B) = \left(\frac{1}{4}, 1\right) \cup \left(1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$  e  $\overline{f(B)} = \left[\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$  que é compacto, mas  $f$  não é contínua.*

**Definição 1.14.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Dizemos que  $f : X \rightarrow Y$  é completamente contínua se  $f$  for compacta e contínua.*

**Corolário 1.15.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $A \subset X$  um subconjunto limitado, fechado e convexo de  $X$  e  $f : A \rightarrow A$  completamente contínua. Então  $f$  tem um ponto fixo em  $A$ .*

Observemos que o corolário acima garante a existência de pelo menos um ponto fixo de um operador  $f$  de retorno. A unicidade não é obtida através deste resultado.

Finalmente, chegamos ao teorema que garante a existência de solução (local) de um PVI em (1.1). Também vamos precisar o teorema clássico de Ascoli-Arzelà.

**Teorema 1.16. (Ascoli-Arzelà)** *Sejam  $K$  um espaço métrico compacto e  $E \subset C(K, \mathbb{R}^m)$ . Suponhamos que exista uma constante  $N > 0$  tal que  $|f(x)| \leq N$ , para quaisquer  $x \in K$  e  $f \in E$ , e que  $E$  seja equicontínuo. Então  $E$  é relativamente compacto.*

**Demonstração:** Para a prova, veja [17]. □

**Teorema 1.17** (Teorema de Peano). *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  aberto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $(t_0, x_0) \in D$ . Então*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*tem pelo menos uma solução passando por  $(t_0, x_0)$ .*

**Demonstração:** Queremos utilizar o Corolário 1.15. Para tanto, precisaremos inicialmente, de um operador de retorno. Motivados pelo Lema 1.4, definimos

$$(T\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds. \quad (1.3)$$

Sejam  $\alpha, \beta > 0$  parâmetros os quais serão ajustados durante a prova. Definimos os seguintes conjuntos:

$$X = C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n),$$

$$R = R(\alpha, \beta, t_0, x_0) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\},$$

$$A = A(\alpha, \beta, t_0, x_0) = \{\phi \in X; \quad |\phi(t) - x_0| \leq \beta, \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \phi(t_0) = x_0\}.$$

Consideremos  $\alpha, \beta$  suficientemente pequenos de modo que  $R \subset D$ . Assim,  $T : X \rightarrow X$ . Ainda, é fácil provar que,  $A$  é fechado, limitado e convexo.

Observemos que

$$|(T\phi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds \right| \leq M\alpha,$$

onde  $M \geq \max_{(t,x) \in R} |f(t, x)|$ .

Tomando  $\alpha$  suficientemente pequeno tal que  $M\alpha < \beta$ , mostramos que, se  $\phi \in A$ ,

(a) A aplicação  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \mapsto (T\phi)(t)$  é contínua;

(b)  $|(T\phi)(t) - x_0| \leq \beta$ , para todo  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ;

(c)  $(T\phi)(t_0) = x_0$ .

Logo,  $T(A) \subset A$ .

Pelo Teorema 1.16, mostramos  $T$  é completamente contínua em  $A$ . Pelo Corolário 1.15, seguirá que  $T$  tem um ponto fixo, digamos  $x$  em  $A$ . Decorre do Lema 1.4, que  $x$  é uma solução do PVI em (1.1).  $\square$

Para a unicidade de solução do PVI, vamos utilizar o **Teorema do Ponto Fixo de Banach** ou, também conhecido como **Princípio da Contração Uniforme**. Este resultado é um dos mais importantes em espaços métricos. O teorema garante a existência de um único ponto fixo para certas aplicações de um espaço métrico completo nele mesmo. Antes de conhecê-lo, precisaremos de algumas definições.

**Definição 1.18.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma aplicação  $T : X \rightarrow X$  é dita contração sobre  $X$  se existe um número real  $0 < \alpha < 1$  tal que  $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ , para todos  $x, y \in X$ .*

**Exemplo 1.19.** *Seja  $(X, d)$  um espaço dotado da métrica  $d(x, y) = |x - y|$ . Então,  $F : X \rightarrow X$  dada por  $Fx = \frac{x}{2}$  é uma contração, pois*

$$d(Fx, Fy) = \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| = \frac{1}{2} |x - y| \leq \alpha d(x, y), \quad \text{onde } \alpha = \frac{1}{2}.$$

O Teorema do Ponto Fixo de Banach nos garante que toda contração em um espaço métrico completo possui um único ponto fixo. A ideia da prova é construir uma seqüência de Cauchy  $(x_n)$  em  $X$  e provar que ela converge para o único ponto fixo  $x \in X$ .

**Teorema 1.20** (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Sejam  $X$  um espaço métrico completo não-vazio e  $T : X \rightarrow X$  uma contração. Então,  $T$  tem um único ponto fixo em  $X$ . Além disso, a seqüência iterativa  $(x_n)$  em  $X$  dada por*

$$x_0 \in X, \quad x_{n+1} = T(x_n), \quad n \geq 0,$$

*converge para o único ponto fixo de  $T$ .*

**Demonstração:** Seja  $x_0 \in X$  e defina a seqüência iterativa  $(x_n)$  dada por

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \quad \dots, \quad x_n = T^n x_0.$$

Demonstraremos que a seqüência  $(x_n)$  é de Cauchy. Para  $m > 1$ , temos

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) = \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \leq \dots \leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Agora, para  $n > m > 1$ , segue que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1})d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^m \frac{(1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como  $0 < \alpha < 1$  e  $n - m > 1$ , temos  $1 - \alpha^{n-m} < 1$ . Logo

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).$$

Dado  $\epsilon > 0$ , uma vez que  $1 - \alpha > 0$  e  $\alpha^m \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ , temos  $d(x_m, x_n) < \epsilon$ . Logo  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy em  $X$  (completo). Portanto,  $(x_n)$  converge para algum  $x \in X$ .

Pela desigualdade triangular, tomando  $n > m$ , obtemos

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_m) \leq d(x, x_n) + \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).$$

Para  $n$  suficientemente grande, obtemos  $d(x, x_n)$  arbitrariamente pequeno, desta forma,

$$d(x, x_m) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \quad (1.4)$$

Mostraremos agora que  $x$ , o limite de  $(x_n)$ , é um ponto fixo de  $T$ . De (1.4), temos

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, Tx) < \frac{\alpha^{m+1}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) + \alpha d(x_m, x) \\ &< \frac{\alpha^{m+1}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) + \frac{\alpha^{m+1}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) = 2 \frac{\alpha^{m+1}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Fazendo  $m \rightarrow \infty$ , obtemos  $d(x, Tx) = 0$ , ou seja,  $x = Tx$ . Resta-nos mostrar que  $x$  é o único ponto fixo de  $T$ . Suponhamos que exista um outro  $x' \in X$  tal que  $x' = Tx'$ . Assim,

$$d(x, x') = d(Tx, Tx') \leq \alpha d(x, x') \Rightarrow (1 - \alpha)d(x, x') \leq 0.$$

Como  $\alpha < 1$ , temos  $d(x, x') = 0$ . Logo  $x = x'$  e, a prova do teorema está completa.  $\square$

**Exemplo 1.21.** Consideremos a seguinte equação

$$x = \lambda \cos(x),$$

onde  $0 < \lambda < 1$  é um constante dada.

Defina  $Tx = \lambda \cos(x)$ . Então  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e

$$d(Tx, Ty) = \lambda |\cos(x) - \cos(y)| = \lambda \left| \int_x^y \text{sen}(t) dt \right| \leq \lambda |x - y| = \lambda d(x, y),$$

pois  $|\text{sen}(t)| \leq 1$ . Logo,  $T$  é uma contração. Tomemos a sequência iterativa, partindo de qualquer número real  $x_0$ ,

$$x_{m+1} = \lambda \cos(x_m), \quad m = 1, 2, \dots$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, as iterações sucessivas de  $T$  convergem para o ponto fixo  $x$ . Por exemplo, se  $\lambda = \frac{1}{2}$ , podemos determinar que o ponto fixo é  $x \simeq 0.4501836\dots$

A seguir, veremos que o Teorema do Ponto Fixo de Banach é crucial para a demonstração do Teorema de Picard que garante a existência e unicidade de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs).

Para a existência e unicidade de solução exigiremos mais da função  $f$ .

**Definição 1.22.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  aberto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é Lipchitziana na segunda variável, se existe  $L > 0$  tal que*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \text{para quaisquer } x, y \in D.$$

A seguir, apresentamos o **Teorema de Picard** o qual garante a existência e unicidade do Problema de Cauchy para uma condição inicial  $(t_0, x_0)$  dada.

**Teorema 1.23** (Teorema de Picard). *Sejam  $(t_0, x_0) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  aberto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e Lipchitziana na segunda variável. Então, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

*tem uma única solução em  $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ , para algum  $\beta > 0$ .*

**Demonstração:** Escolheremos  $\alpha, \beta > 0$  parâmetros os quais serão ajustados durante a prova. Definimos os seguintes conjuntos

$$J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$$

$$C(J) = C(J, \mathbb{R})$$

$$R = R(\alpha, \beta, t_0, x_0) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\}$$

$$A = A(\alpha, \beta, t_0, x_0) = \{\phi \in C(J); \quad |\phi(t) - x_0| \leq \beta, \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \phi(t_0) = x_0\}.$$

O espaço  $C(J)$  munido da métrica

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

é completo. Como  $A$  é fechado em  $C(J)$ , também  $A$  é completo.

Definimos, agora  $T : C(J) \rightarrow C(J)$  dado por

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Notemos que  $x(t)$  será uma solução de (1.1) se e, somente se,  $x(t)$  é um ponto fixo de  $T$ .

A aplicação  $T$  é contínua e  $T(A) \subset A$ , pois, para todo  $x \in A$ ,

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq |t - t_0| M \leq M\alpha \leq \beta,$$

onde  $M \geq \max_{(t,x) \in R} |f(t, x)|$ .

Resta-nos mostrar que  $T$  é uma contração em  $A$ . Sejam  $x, y \in A$ , então

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in J} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= \max_{t \in J} \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right| \leq \max_{t \in J} \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq k \max_{t \in J} \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds \leq k \max_{t \in J} |x(t) - y(t)| \int_{t_0}^t ds \\ &\leq k|t - t_0| d(x, y) < k\beta d(x, y). \end{aligned}$$

Logo,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in A,$$

onde  $\alpha = \beta k < \frac{1}{k} k = 1$ . Portanto  $T$  é uma contração. Pelo Teorema 1.20, o problema de valor inicial (1.1) possui uma única solução em  $J$ .  $\square$

O Teorema de Ponto Fixo de Banach também afirma que a solução  $x(t)$  de (1.1) é o limite da sequência  $(x_0, x_1(t), \dots)$  obtida pela iteração de Picard,

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## Capítulo 2

# EDOs Impulsivas

Neste capítulo, vamos tratar de equações diferenciais ordinárias (EDOs) sujeitas à ação impulsiva em tempos pré-fixados. Nosso objetivo principal em tal capítulo o resultado sobre existência de solução global.

A questão da existência de soluções para Equações Diferenciais Impulsivas não é tão simples assim. Nos últimos anos, surgiram vários artigos que estudaram a existência, unicidade e continuação de soluções de equações impulsivas. Podemos citar [2, 3, 4, 6, 16].

Ainda na segunda seção deste capítulo, vamos tratar da unicidade de soluções.

### 1 Descrição de sistemas com impulsos

Vamos iniciar esta seção com o conceito de Equação Diferencial Ordinária com Impulsos (EDOs Impulsivas). Em seguida, enunciaremos resultados sobre existência e unicidade de soluções deste tipo de equações.

O modelo de Kruger-Thiemer de dois ambientes para distribuição de drogas no corpo humano é um exemplo de aplicação deste tipo de equação diferencial, veja [12]. Suponha que a droga, administrada oralmente, é primeiro dissolvida no ambiente gastrointestinal. A droga é, então, absorvida em um ambiente amorfo constituído de sangue, músculos, tecidos, etc., chamado de volume aparente de distribuição, e é finalmente eliminada do sistema pelos rins. Suponha que  $x(t)$  e  $y(t)$  são as quantidades de drogas no instante  $t$  no ambiente gastrointestinal e no volume aparente de distribuição, respectivamente, e sejam  $k_1$  e  $k_2$  taxas constantes. As equações que representam esse processo são

$$\begin{cases} x'(t) = -k_1x(t), \\ y'(t) = -k_2y(t) + k_1x(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Defina um tratamento tal que nos instantes

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < T$$

a droga é prescrita em quantidades

$$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N,$$

respectivamente. Desse modo, tem-se as seguintes condições acrescidas a (2.1)

$$\begin{cases} x(t_i^+) = x(t_i^-) + \delta_i, \\ y(t_i^+) = y(t_i^-), & i = 1, 2, \dots, N \\ x(0) = \delta_0, & y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Para se obter o efeito terapêutico esperado, é preciso que a quantidade de droga no volume aparente de distribuição nunca fique abaixo de um nível mínimo durante o tempo de tratamento.

Para representar um sistema impulsivo, para o caso ordinário, devemos considerar:

1) uma equação diferencial

$$x' = f(t, x), \quad (2.3)$$

onde  $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto;

2) conjuntos  $N(t), M(t) \subset \Omega$ , para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ ;

3) funções  $A(t) : M(t) \rightarrow N(t)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Então, o sistema impulsivo é dado por

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t) \in M(t) \Rightarrow x(t^+) = A(t)x(t). \end{cases} \quad (2.4)$$

Seja  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$  uma solução da equação diferencial (2.3) começando em  $P_{t_0} = (t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ . O processo de evolução de um problema impulsivo se dá da seguinte forma:  $P_t = (t, x(t))$  inicia seu movimento em  $P_{t_0} = (t_0, x_0)$  e move-se ao longo da curva  $\{(t, x) : t > t_0, x = x(t)\}$  até o instante  $t_1 > t_0$ , no qual o ponto  $P_t$  encontra o conjunto  $M(t)$ . Em  $t = t_1$ ,  $A(t)$  transfere o ponto  $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$  em  $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+) \in (t_1, N(t_1))$ , onde  $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$ . O ponto  $P_t$

continua percorrendo a curva com  $x(t) = x(t; t_1, x_1^+)$ , que é solução de (2.3) com a condição inicial  $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+)$ , até encontrar novamente o conjunto  $(t, M(t))$  em um momento  $t_2 > t_1$ . Em seguida, o ponto  $P_{t_2} = (t_2, x(t_2))$  é transferido para o ponto  $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+) \in (t_2, N(t_2))$ , onde  $x_2^+ = A(t_2)x(t_2)$ . Agora, o movimento de  $P_t$  se inicia em  $(t_2, x_2^+)$  ao longo da solução  $x(t) = x(t; t_2, x_2^+)$  de (2.3) e o processo continua ao longo da solução de (2.3), caso esta exista, repetindo o procedimento descrito acima.

A curva descrita acima por  $P_t$  é chamada **curva integral** e a função que define essa curva é uma solução da equação diferencial impulsiva (2.4).

Uma solução do sistema diferencial impulsivo pode ser:

- (a) uma função contínua, se a curva integral  $\{(t, x) : t > t_0, x = x(t)\}$  não encontrar  $M(t)$ , ou se ela atingir  $M(t)$  somente nos pontos fixos de  $A(t)$ ;
- (b) uma função contínua por partes, tendo um número finito de descontinuidades de primeira espécie, se a curva integral encontrar o conjunto  $M(t)$  em um número finito de pontos que não são pontos fixos de  $A(t)$ ;
- (c) uma função contínua por partes com uma quantidade enumerável de descontinuidades de primeira espécie se a curva integral encontrar  $M(t)$  em uma quantidade enumerável de pontos que não são pontos fixos de  $A(t)$ .

Os instantes  $t = t_k, k = 1, 2, \dots$ , nos quais a curva integral encontra o conjunto  $M(t)$ , são chamados de **momentos de impulso** do sistema. Os momentos de impulso de um sistema impulsivo podem ser fixos ou variáveis, de acordo com o problema a ser estudado.

## 1.1 Sistemas com impulsos em tempos pré-fixados

Nesta subseção, estudaremos as equações diferenciais impulsivas sujeitas aos momentos de impulsos em instantes conhecidos de antemão, ou seja, os impulsos ocorrem em tempos pré-fixados. Neste sistema,  $M(t)$  representa uma sequência de planos  $t = t_k$ , onde  $\{t_k\}$  é uma sequência de números reais, com  $t_k \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$ ,  $M(t) \neq \emptyset$ ,  $M(t_k) = N(t_k) = \Omega$ . Definiremos o operador  $A(t)$ , para  $t = t_k$ , com  $k = 1, 2, \dots$ , da maneira descrita a seguir. A sequência  $\{A(t_k)\}$  de operadores  $A(t_k) : \Omega \rightarrow \Omega$  será dada por

$$x \mapsto A(t_k)(x) = x + I_k(x),$$

onde  $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$ . Definimos o conjunto  $N(t)$  para  $t = t_k$  como sendo  $N(t_k) = A(t_k)M(t_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Com as escolhas de  $M(t_k), N(t_k)$  e  $A(t_k), k = 1, 2, \dots$ , podemos descrever um modelo

matemático de um sistema diferencial impulsivo simples em que cada impulso ocorre em tempos fixados da maneira abaixo:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq t_k(x) \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k(x), \end{cases} \quad (2.5)$$

onde, para cada  $t = t_k$ ,  $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$  e  $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0} x(t_k + h)$ . Então, qualquer solução  $x(t)$  de (2.5) satisfaz:

$$(a) \quad x' = f(t, x(t)), \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$(b) \quad \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Os efeitos impulsivos podem influenciar no comportamento das soluções de (2.5). A continuidade das soluções pode ser afetada pela ação impulsiva, como mostram os seguintes exemplos.

**Exemplo 2.1.** Consideremos a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} x' = 0, & t \neq k \\ \Delta x = \frac{1}{x-1}, & t = k. \end{cases} \quad (2.6)$$

Uma solução  $x(t)$  da equação diferencial ordinária  $x' = 0$  com condição inicial  $x(0) = c$  é a função constante  $x(t) = c$  que, por sua vez, é contínua para todo  $t$ . Aplicando a condição de impulso, tem-se que a solução do sistema (2.6), com condição inicial  $x(0) = 1$ , está definida somente para  $0 \leq t \leq 1$ , já que a função  $I_k(x) = \frac{1}{x-1}$  não está definida para  $x(t) = 1$  e, neste caso, vale  $x(t) = 1$ , para  $t \in [0, 1)$ .

Por outro lado, considerando a condição inicial  $x(0) = 2$ , a solução sofrerá apenas um efeito impulsivo quando  $t = 1$ , já que para  $t = 2$ ,  $x(t)$  não está definida. Logo, a solução do sistema (2.6) com condição inicial  $x(0) = 2$  está definida apenas no intervalo  $[0, 2)$ .

**Exemplo 2.2.** Consideremos a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2, & t \neq \frac{k\pi}{4}, \\ \Delta x = -1, & t = \frac{k\pi}{4}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

A solução  $x(t)$  da EDO, no sistema (2.7), com condição inicial  $x(0) = 0$  é  $x(t) = \operatorname{tg} t$  e é contínua no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Em contrapartida, a solução do sistema (2.7) com condição inicial  $x(0) = 0$  está definida para todo  $t \geq 0$  e é dada por

$$x(t) = \operatorname{tg} \left( t - \frac{k\pi}{4} \right), \quad t \in \left( \frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4} \right].$$

Tal solução é periódica de período  $\frac{\pi}{4}$  e tem descontinuidades de primeira espécie em  $t = \frac{k\pi}{4}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

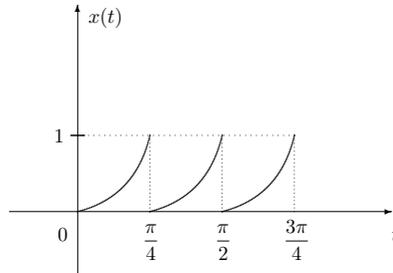


Figura 2.1: Curva integral do sistema impulsivo (2.7) com condição inicial  $x(0) = 0$ .

## 1.2 Sistemas com impulsos em tempos variáveis

Iremos analisar os sistemas com impulsos em tempos variáveis. Seja  $\{S_k\}$  uma seqüência de superfícies dadas por  $S_k := t = \tau_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , satisfazendo  $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k(x) = +\infty$ . Assim, teremos o seguinte sistema diferencial impulsivo:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.8)$$

Os momentos de efeito impulsivo para o sistema (2.8) dependem das soluções, ou seja, eles variam de acordo com as soluções do sistema (2.8). Portanto, soluções iniciadas em diferentes pontos terão diferentes pontos de descontinuidades. Devido a isso, situações peculiares podem ocorrer, se comparadas aos sistemas com momentos fixos de impulsos. Por exemplo, neste sistema, uma solução pode atingir a mesma superfície  $t = \tau_k(x)$  várias vezes. Tal comportamento é denominado **fenômeno de pulso**. Além disso, soluções diferentes podem coincidir após algum tempo e se comportar como uma solução única depois deste instante. Este fenômeno é chamado de **confluência**. O exemplo seguinte ilustra alguns destes comportamentos.

**Exemplo 2.3.** Consideremos a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} x' = 0, & t \neq \tau_k(x), \quad t \geq 0 \\ \Delta x = x^2 \operatorname{sgn}(x) - x, & t = \tau_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2.9)$$

onde  $\tau_k(x) = x + 6k$ , com  $|x| < 3$ , descreve a superfície  $S_k : t = \tau_k(x)$ , e  $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Primeiramente, observemos que as soluções  $x(t)$  com condição inicial  $x(0) = x_0$ ,  $|x_0| \geq 3$ , não sofrem impulso, já que elas não encontram a superfície  $S_k$ . As soluções  $x(t)$  que se iniciam nos pontos  $(0, x_0)$ ,  $1 < x_0 < 3$ , sofrem efeito impulsivo um número finito de vezes. Por exemplo, considere a solução  $x(t)$  com  $x(0) = \sqrt[4]{2}$ . Esta solução encontra a superfície  $S_0$  três vezes e não se choca com qualquer superfície  $S_k$  além do tempo  $t_3 = 2$ .

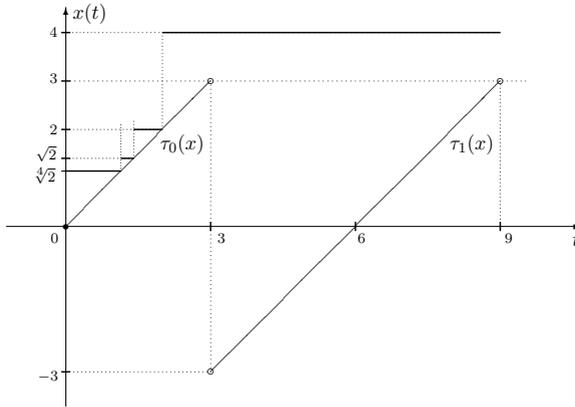


Figura 2.2: Curva integral do sistema impulsivo (2.9) com  $x(0) = \sqrt[4]{2}$ .

Se o ponto inicial  $x(0) = x_0$ ,  $0 < x_0 < 1$ , então  $\Delta x = x^2 - x \leq 0$ , o que significa que os saltos são sempre no sentido negativo. A solução  $x(t)$  encontrará a superfície  $S_k$  em um número infinito de tempos  $t_k$  e teremos  $t_k \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$  bem como  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k) = 0$ . Observemos a Figura 2.3 para  $x_0 = 1/2$ .

Por outro lado, se  $-1 < x_0 < 0$ , tem-se  $\Delta x = -x^2 - x$  e  $x^2 \leq -x$ , o que implica que  $\Delta x \geq 0$ . Logo,  $x(t)$  choca-se com  $S_k$  em um número infinito de tempos  $t_k$  mas, neste caso, temos  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = 6$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k) = 0$ . Vejamos a Figura 2.4.

As soluções que se iniciam nos pontos  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  atingem a superfície  $S_k$  em tempos  $t_k$  que são pontos fixos do operador  $A(t) = x^2 \text{sgn}(x)$  e, por esta razão, não há efeito impulsivo. Finalmente, as soluções que começam em  $(0, \sqrt[4]{2})$  e  $(0, 4)$  se unem em  $t \geq 2$  e, portanto, exibem o fenômeno de confluência.

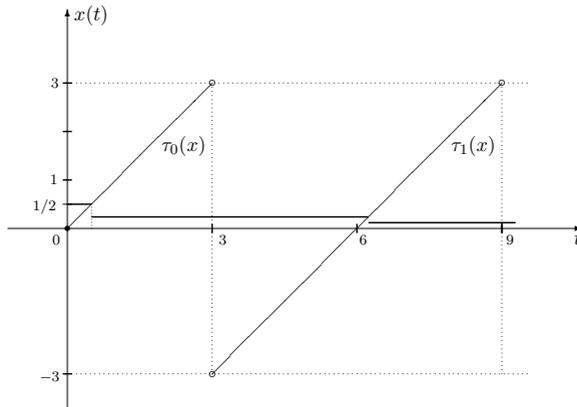


Figura 2.3: Curva integral para o sistema impulsivo (2.9) com  $x(0) = 1/2$ .

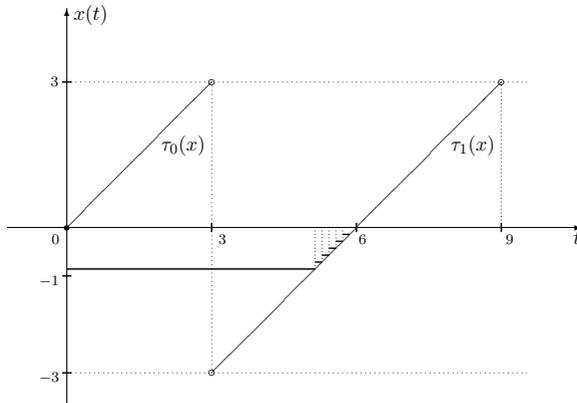


Figura 2.4: Curva integral do sistema impulsivo (2.9) para  $-1 < x(0) < 0$ .

## 2 Existência de soluções de EDOs impulsivas

A seguir, estudaremos a existência de soluções de uma classe de EDOs sujeitas à ação em tempos pré-fixados. Consideramos o problema de valor inicial para o sistema diferencial impulsivo

dado por

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \geq t_0, \quad t \neq t_k, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

onde  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ . Também consideremos, nos instantes de impulsos  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , a condição impulsiva

$$\Delta x(t) = I(t, x(t)), \quad t > t_0, \quad t = t_k, \quad (2.11)$$

onde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $I_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ .

Queremos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, a fim de garantirmos a existência de solução do problema (2.10)-(2.11). A ideia da prova é transformar nosso sistema impulsivo em um problema de ponto fixo e, depois, aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, encontrar uma solução em cada subintervalo  $[t_0 - r, t_1]$  e  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . A solução desejada será, conseqüentemente, obtida pela *colagem*, das soluções destes subintervalos. Tal procedimento é denominado *método dos passos*, por alguns autores.

Para cada  $k = 1, 2, \dots$ , temos  $t_k < t_{k+1}$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$  para  $x \in \Omega$ . Para uma função  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , usaremos a notação abreviada  $\psi(t^+) = \lim_{s \rightarrow t^+} \psi(s)$  e  $\psi(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} \psi(s)$  para indicarmos, respectivamente, os limites laterais à direita e à esquerda de  $\psi$  em  $t$ , quando existirem.

Antes de definirmos uma solução do problema (2.10)-(2.11), precisaremos de um novo espaço de funções, já que a continuidade de soluções deste tipo de problema não é mais garantida. Assim, procuraremos por soluções no espaço das funções contínuas por partes.

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$  e  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Denotamos por  $PC([a, b], D)$  o espaço formado pelas funções  $\psi : [a, b] \rightarrow D$  que são contínuas exceto em um número finito de pontos e cujos limites laterais  $\psi(t^+)$  e  $\psi(t^-)$  existem, com  $\psi(t^+) = \psi(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Esta classe de funções contém, portanto, funções que são contínuas à direita com uma quantidade finita de descontinuidades de primeira espécie à esquerda.

Denotamos por  $PC([a, \infty), D)$  o espaço das funções  $\psi : [a, \infty) \rightarrow D$  tais que para todo  $c > a$ , a restrição  $\psi|_{[a, c]} \in PC([a, c], D)$ . As funções de  $PC([a, \infty), D)$  têm, no máximo, uma quantidade enumerável de pontos de descontinuidade que formam uma seqüência crescente tendendo ao infinito.

Em  $PC([a, b], D)$ , consideramos a norma usual do supremo denotando-a por  $\|\cdot\|$ . Em  $PC([a, \infty), D)$  consideramos a topologia da convergência uniforme localmente, isto é, em cada subconjunto compacto de  $[a, \infty)$ .

**Definição 2.4.** *Sejam  $t_0 \in J$  e  $\alpha > 0$  tais que  $[t_0, t_0 + \alpha] \subset J$ . Uma solução do problema*

impulsivo (2.10)-(2.11) em  $[t_0, t_0 + \alpha]$  é uma função  $x \in PC([t_0, t_0 + \alpha], D)$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (a)  $x(t)$  é contínua em  $[t_0, t_0 + \alpha] \setminus \{t_k; k \in \mathbb{N}\}$ , os limites laterais  $x(t_k^-)$  e  $x(t_k^+)$  existem e  $x(t)$  é contínua à direita em  $t_k \in [t_0, t_0 + \alpha]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;
- (b)  $x(t)$  satisfaz a equação (2.10), para todo  $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ ;
- (c)  $x(t_k)$ , tal que  $t_k \leq t_0 + \alpha$ , satisfaz a equação (2.11), para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Denotamos por  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ , ou simplesmente  $x = x(t_0, x_0)$ , uma solução de (2.10)-(2.11).

Notemos que, no lugar da condição inicial usual  $x(t_0) = x_0$ , poderíamos impomos a condição limite  $x(t_0^+) = x_0$ , que é natural para sistemas do tipo (2.10)-(2.11) em que  $t_0$  é o primeiro instante de impulso. Quando  $t_0 \neq t_k$  para todo  $k$ , entendemos a condição inicial  $x(t_0^+) = x_0$  no sentido usual, isto é,  $x(t_0) = x_0$ .

Uma solução  $x(t)$  de (2.10)-(2.11) existindo em  $[t_0, t_0 + \alpha]$  e sofrendo efeitos de impulsos nos instantes  $\{t_k\}_{k=1}^m$ , onde  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq t_0 + \alpha$ , pode ser descrita por

$$x(t) = \begin{cases} x(t; t_0, x_0), & t \in [t_0, t_1), \\ x(t; t_k, x_{t_k}), & t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ x(t; t_m, x_{t_m}), & t \in [t_m, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Agora, se uma solução  $x(t)$  existe sobre o intervalo  $[t_0, \infty)$ , então  $x(t)$  sofrerá infinitos impulsos nos instantes  $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ , com  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ , isto é, os instantes de impulsos não se acumulam. Neste caso, podemos expressar a solução da seguinte maneira

$$x(t) = \begin{cases} x(t; t_0, \phi), & t \in [t_0, t_1), \\ x(t; t_k, x_{t_k}), & t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

isto é, para cada  $k \in \mathbb{N}$  e cada  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $x(t; t_k, x_{t_k})$  representa uma solução de (2.10)-(2.11), onde  $t_k$  denota o instante inicial e  $x_{t_k}$  representa a função inicial.

O lema a seguir nos fornece uma formulação integral de uma solução de (2.10)-(2.11).

**Lema 2.5.** *Consideremos o problema (2.10)-(2.11), onde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua. Então  $x \in PC([t_0, t_0 + \alpha], D)$ , onde  $\alpha > 0$  e  $[t_0 - r, t_0 + \alpha] \subset J$ , é uma solução de (2.10)-(2.11) se e, somente*

se,

$$x(t) = \begin{cases} x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, & t \in [t_0, t_1), \\ x(t_k^-) + I(t_k, x(t_k^-)) + \int_{t_k}^t f(s, x_s) ds, & t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ x(t_m^-) + I(t_m, t_m^-) + \int_{t_m}^t f(s, x_s) ds, & t \in [t_m, t_0 + \alpha] \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds + \sum_{k; t_k \in (t_0, t]} I(t_k, x(t_k^-)), \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Na sequência, iremos apresentar um resultado que garante a existência de uma solução local de (2.10)-(2.11). Para a prova, faremos uso do Teorema de Ascoli-Arzelà clássico e do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

**Teorema 2.6. (Teorema do Ponto Fixo de Schauder)** *Se  $U$  é um subconjunto convexo limitado de um espaço de Banach  $X$  e  $T : U \rightarrow U$  é completamente contínua, então  $T$  tem um ponto fixo em  $U$ .*

A prova do teorema, a seguir, foi baseada em resultados de [16].

**Teorema 2.7. (Existência Local)** *Consideremos o problema (2.10)-(2.11) e suponhamos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua. Então, para cada  $(t_0, x(t_0)) \in D$ , existe uma solução  $x = x(t_0, x_0)$  de (2.10)-(2.11) em  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , para algum  $\alpha > 0$ .*

# Referências Bibliográficas

- [1] S. M. Afonso; E. Bonotto; M. Federson; L. P. Gimenes, *Boundedness of solutions of functional differential equations with variable impulses via generalized ordinary differential equations*, Math. Nachr. (2011), 1-17.
- [2] M. Benchohra; J. Henderson; S. K. Ntouyas, *An existence result for first-order impulsive functional differential equations in Banach spaces*, Comput. Math. Appl. 42 (2001), 1303-1310.
- [3] M. Benchohra; J. Henderson; S. K. Ntouyas, A. Quahab, *Higher order impulsive functional differential equations with variable times*, Dynam. Systems Appl. 12 (2003), 383-392.
- [4] M. Benchohra; J. Henderson; S. K. Ntouyas, A. Quahab, *Impulsive functional differential equations with variable times*, Comput. Math. Appl. 47 (2004), 1659-1665.
- [5] E. M. Bonotto; L. P. Gimenes; M. Federson, *Oscillation for a second-order neutral differential equation with impulses*, Appl. Math. Comput. 215 (2009), 2291-2297.
- [6] L. P. Gimenes; M. Federson, *Existence and impulsive stability for second order retarded differential equations*, Appl. Math. Comput. 177 (1) (2006), 44-62.
- [7] L. P. Gimenes; M. Federson, *Oscillation by impulses for a second order delay differential equation*, Comput. Math. Appl. 52 (2006), 819-828.
- [8] L. P. Gimenes; M. Federson; P. Z. Táboas, *Impulsive stability for systems of second order differential equation*, Nonlinear Anal. 67 (2007).
- [9] J. K. Hale; S. M. V. Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [10] E. Kreiszg, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Jonh Wiley & Sons, New York, 1978.

- 
- [11] V. V. Koslov; D. V. Treshcheëv, *Billiards - A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Isle, 1991.
- [12] E. Kruger-Thiemer, *Formal theory of drug dosage regiments*, Int. J. Theo. Biology 13, 1966.
- [13] E. Lages Lima. *Espaços Métricos. Projeto Euclides*. SBM,1977.
- [14] V. Lakshmikantham; D. D. Bainov; P. S. Simeonov, *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [15] W. Li; H. Huo, *Global attractivity of positive periodic solutions for an impulsive delay periodic model of respiratory dynamics*, J. Comput. Appl. Math. 174 (2005), 227-238.
- [16] X. Liu; G. Ballinger, *Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Systems 5 (1999), 579-591.
- [17] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill.

MC 5

## Derivada Fraca $\times$ *Derivada Clássica*

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luci Harue Fatori - UEL  
Ademir Benteus Pampu - Graduando Matemática UEL

# Derivada clássica X Derivada fraca

Ademir Benteus Pampu (e-mail: ademir\_bp@hotmail.com)

Luci Harue Fatori (e-mail: lucifatori@uel.br)

Universidade estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil.

## Resumo

A teoria das distribuições foi um dos grandes desenvolvimentos matemáticos do século  $XX$ , como mote para o desenvolvimento de tal teoria, a derivada fraca, que generaliza o conceito de derivada, é obtida através de uma extensão do conceito de função e nos permitem uma nova abordagem a problemas que envolvem as derivadas de uma função, deixando assim explícito a importância desta teoria no estudo de equações diferenciais. Traçaremos nesse trabalho uma comparação entre o conceito de derivação clássico do cálculo diferencial, desenvolvido por Leibniz e Newton, e o conceito de derivação fraca na teoria das distribuições.

**Palavras-chave:** Distribuições, cálculo diferencial, derivadas fracas.

## 1 Introdução

A teoria das distribuições, desenvolvida em meados do século  $XX$ , apresenta uma nova formulação para o conceito de derivação, desenvolvida a partir de uma generalização do conceito de função. Tal teoria, que teve sua formulação rigorosa feita pelo matemático francês Laurent Schwartz é considerada um dos principais desenvolvimentos matemáticos deste século tamanha é sua importância no estudo de equações diferenciais e na descrição das funções singulares estudadas na física, assim como as funções delta de Dirac e impulso unitário.

Quando trabalhamos, por exemplo, com problemas em que envolvem derivadas de uma função real, sempre esbarramos com a questão de que nem toda função real possui uma derivada em determinado ponto ou até mesmo com funções que não possuem derivada em nenhum ponto. A noção de derivação fraca é uma ferramenta para contornar esta questão. Isto é feito considerando as funções em nosso problema como distribuições, onde sempre podemos definir a derivada de uma distribuição, podendo esta derivada ser ou não uma função no sentido usual. Esta derivada, no sentido distribucional é conhecida como derivada fraca.

Em muitas ocasiões, na física, é comum aparecerem funções cujo valor pontual não é tão relevante mas sim o comportamento que estas funções tomam quando aparecem como fator de um integrando. Um exemplo clássico de uma destas funções é a delta de Dirac, que apesar de levar o nome do físico P. A. M. Dirac foi introduzida explicitamente por G. R. Kirchoff em um trabalho publicado em 1882 acerca

da equação da onda<sup>1</sup>.

Uma das formulações comum para a função delta de Dirac é a de que  $\delta$  é definida como 0 em todo ponto  $p \neq 0$  e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p) dp = 1.$$

É relativamente fácil encontrar o problema nesta definição, já que não existe uma função, no sentido clássico do termo, que satisfaça tais propriedades. Por meio da teoria das distribuição podemos fazer uma abordagem de tal função, formalizando muitas propriedades que eram ditas como válidas mesmo quando não havia sido feita uma formulação rigorosa para a função delta.

Assim como assinalamos acima a teoria das distribuições, formulada por Schwartz, foi um dos grandes avanços matemáticos do século  $XX$ , tanto por sua grande importância em ramos da matemática como as equações diferenciais quanto por sua alta aplicabilidade na física matemática. Em homenagem ao trabalho acerca da teoria das distribuições Laurent Schwartz foi condecorado com a medalha Fields<sup>2</sup> em 1950.

## 2 Alguns conceitos básicos de análise funcional

Considerando  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo de escalares  $\mathbb{R}$  a partir do momento que define-se uma norma neste espaço podemos falar de modo natural sobre muitos conceitos preliminares essenciais para tratarmos da teoria das distribuições, conceitos tais como convergência de seqüências, de fecho de um conjunto, conjuntos abertos, conjuntos fechados e funções contínuas. Uma **norma** em um espaço vetorial  $V$  é uma aplicação  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz, para quaisquer  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , as seguintes propriedades:

(i)  $\|\mathbf{x}\| = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{x} = 0$ .

(ii)  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ .

(iii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

Em um espaço vetorial  $V$  podemos definir diversas normas. Por exemplo, vamos considerar  $\mathbb{R}^2$  como sendo um  $\mathbb{R}$  espaço vetorial, podemos definir neste espaço três normas naturais, à saber, dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , podemos definir:

- A norma da euclidiana:

$$\|(x, y)\| = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}.$$

<sup>1</sup>A equação das ondas é amplamente estudada na física matemática. Sua importância se deve ao grande número de fenômenos físicos que esta modela, fenômenos tais como a propagação de ondas em um meio contínuo. Grande parte dos modelos matemáticos formulado no estudo acerca de ondas acústicas, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas esta baseado na equação da onda.

<sup>2</sup>A medalha Fields é, por muitos, considerada como a maior distinção no ramo da matemática. Tal premiação é realizada em períodos de quatro anos, deste 1936 e a um número máximo de quatro matemáticos. Uma das faces da medalha Fields traz uma effigie de Arquimedes, com a seguinte citação, em latim, "Superar os limites da inteligência e conquistar o universo". Na outra face da moeda aparece o desenho de uma esfera, inscrita em um cilindro com a citação, também em latim, "Matemáticos de todo o mundo reunidos prestam homenagem por obras notáveis".

- A norma da soma:

$$\|(x, y)\|_s = |x| + |y|.$$

- A norma do máximo:

$$\|(x, y)\|_m = \max\{|x|, |y|\}.$$

Assim como definimos na reta, uma **seqüência** em um espaço vetorial é uma aplicação cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Considerando assim uma seqüência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em um espaço vetorial  $V$  dizemos que esta seqüência converge para um ponto  $x \in V$  se, para todo  $\epsilon > 0$ , existir um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que,

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Neste caso escrevemos que,  $\lim x_n = x$ , ou,

$$x_n \rightarrow x.$$

Dado um espaço vetorial  $V$  e um subconjunto  $D \subset V$  temos que  $p$  é **ponto aderente** a  $D$  se, e somente se, existe uma seqüência  $(x_n)$  de pontos  $D$  convergindo para  $p$ . Definimos como o **fecho** de  $D$  o conjunto dos pontos aderentes a  $D$ , que é denotado por  $\overline{D}$ . Podemos definir também o **fecho relativo** de um conjunto a um outro. Considere assim  $C, D$  dois subconjuntos de um espaço vetorial normado  $V$ , tais que  $C \subset D$ , o fecho de  $C$  relativo a  $D$  é a interseção do fecho de  $C$  com  $D$ , isto é,

$$\overline{C}^D = \overline{C} \cap D.$$

Um conjunto  $D$  é dito **fechado** quando  $D = \overline{D}$ . Podemos ver assim que na reta real todo intervalo fechado é um conjunto fechado.

**Exemplo 2.1:** O fecho de um conjunto é sempre fechado, porém nem sempre o fecho relativo de um conjunto  $C$  a um conjunto  $D$  é fechado, por exemplo, vamos considerar o conjunto  $C = (0, 1)$  e o conjunto  $D = (0, 10)$ , onde  $C, D \subset \mathbb{R}$  temos que, em  $\mathbb{R}$ ,

$$\overline{C} = [0, 1]$$

entretanto, o fecho de  $C$  relativo a  $D$  é o conjunto:

$$\overline{C}^D = \overline{C} \cap D = [0, 1] \cap (0, 10) = (0, 1]$$

e como podemos ver este conjunto não é fechado, pois tomando a seqüência  $(x_n)$  tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n \in (0, 1]$$

esta seqüência converge para 0, mas  $0 \notin \overline{C}^D$ .  $\square$

Um conjunto  $K$  é dito **compacto** em um espaço vetorial normado  $V$  se para toda seqüência de pontos  $(x_n)$  de  $K$  tivermos que existe uma subseqüência  $(x_{n_i})$  convergindo para algum ponto do conjunto  $K$ . Em espaços euclidianos, isto é, quando consideramos os espaços  $\mathbb{R}^n$ , é válido que um conjunto é

compacto se é um conjunto fechado e limitado. É importante ressaltar que isto não é válido para espaços vetoriais de um modo geral, isto é, nem sempre em um espaço vetorial arbitrário um conjunto fechado e limitado é um conjunto compacto.

Dizemos que, em um espaço vetorial normado  $V$ , um conjunto  $A \subset V$  é **aberto** quando, para todo  $p \in A$  existir  $\epsilon > 0$  de modo que,

$$\|x - p\| < \epsilon \Rightarrow x \in A.$$

**Exemplo 2.2:** Considerando a reta real como espaço vetorial normado (onde consideramos a norma usual, isto é,  $\|x\| = |x|$ ) temos que  $A = (0, 1)$  é um conjunto aberto. De fato, dado  $p \in (0, 1)$  temos que tomando  $\epsilon = \min\{p, 1 - p\} > 0$ ,

$$\|x - p\| = |x - p| < \epsilon \Leftrightarrow 0 < p - \epsilon < x < p + \epsilon < 1.$$

Deste modo,  $x \in A$  e  $A$  é um conjunto aberto. De um modo geral, na reta, os conjuntos abertos, além do conjunto vazio e do próprio  $\mathbb{R}$ , são intervalos abertos ou reuniões de intervalos abertos.  $\square$

Uma aplicação  $f : V \rightarrow W$ , onde  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais normados, é dita **contínua em um ponto**  $p \in V$  se, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x - p\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(p)\| < \epsilon.$$

A aplicação  $f$  será **contínua** se for contínua em todo ponto de  $V$ .

Podemos caracterizar a continuidade de uma aplicação  $f$  pela seguinte propriedade:

**Proposição 1.** *Dado uma aplicação  $f : V \rightarrow W$ , onde  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais normados, é contínua em um ponto  $p \in V$  se, e somente se, o fato de uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $V$  convergir para  $p$  acarretar que  $(f(x_n))$  converge para  $f(p)$ .*

No caso de uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$ , provarmos a continuidade basta mostrarmos que  $T$  é contínua na origem. Deste modo, pela proposição acima basta mostrar que, dado  $(x_n)$  uma sequência de pontos em  $V$ ,

$$x_n \rightarrow 0 \Rightarrow T(x_n) \rightarrow 0.$$

Um operador linear  $T : V \rightarrow W$  é dito **limitado** se existe  $k > 0$  tal que, para todo  $x \in V$  tem-se,

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|.$$

Note que, apesar de não estar explícito acima, a norma a esquerda (norma de  $T(x)$ ) é tomada com respeito a norma definida em  $W$ , enquanto que a norma a direita é tomada com respeito a norma definida em  $V$ . É importante também ressaltar que o termo *operador limitado* não tem o mesmo sentido usual.

Para transformações lineares é equivalente ser limitada e ser contínua. No caso particular onde  $W = \mathbb{R}$  temos que o espaço vetorial  $V'$  dos funcionais lineares contínuos é conhecido como **espaço dual** de  $V$ . Quando definimos espaço dual em álgebra linear não exigimos esta condição de ser contínuo os funcionais lineares que constituem este espaço dual, aliais, nem ao menos estamos interessados na continuidade de funcionais lineares. Estes espaços em geral não coincidem, o espaço vetorial de todos os funcionais lineares definidos em  $V$  é conhecido como **dual algébrico** de  $V$ , enquanto que o espaço

vetorial dos funcionais lineares contínuos definidos em  $V$  é conhecido como **dual topológico** de  $V$ . A menos que exista o risco de confusões, ao longo deste texto, sempre que nos referirmos a espaço dual  $V'$  estaremos nos referindo ao dual topológico de  $V$ .

### 3 Espaço de funções teste

Dado uma função contínua  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um conjunto aberto na reta real, definimos como sendo o **suporte** de  $u$  o fecho, em  $I$ , dos pontos onde  $u$  não se anula, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{supp}(u) &= \overline{\{x \in I; u(x) \neq 0\}}^I \\ &= \overline{\{x \in I; u(x) \neq 0\}} \cap I. \end{aligned}$$

Se este for um conjunto compacto em  $\mathbb{R}$ , isto é, for um conjunto fechado e limitado, então dizemos que  $u$  tem **suporte compacto**. Definimos como  $C_0^\infty(I)$  o espaço das funções  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  infinitamente diferenciáveis em todo ponto de seu domínio e que possuem suporte compacto.

**Exemplo 3.1:** Vamos considerar  $I = (0, 1)$  e tomar a função  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = x$ . No intervalo  $(0, 1)$  esta função é contínua e  $g \in C^\infty(0, 1)$  porém,

$$\begin{aligned} \text{supp}(g) &= \overline{\{x \in (0, 1); g(x) \neq 0\}}^I \\ &= [0, 1] \cap (0, 1) \\ &= (0, 1) \end{aligned}$$

Uma vez que o intervalo  $(0, 1)$  não é compacto em  $\mathbb{R}$  temos que  $g \notin C_0^\infty(0, 1)$ . □

Antes de tratarmos de um exemplo de função teste provaremos que a função  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$u(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

é uma função de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ . O que devemos mostrar aqui, em resumo, é que as derivadas de qualquer ordem da função  $u$  estão bem definidas. Vamos inicialmente ver o caso da derivada de primeira ordem de  $u$ , por uma aplicação da regra da cadeia temos que:

$$u'(x) = \begin{cases} 2x^{-3}e^{-x^{-2}} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

O problema principal é quando  $x = 0$ , neste caso, temos que,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(h) - u(0)}{h} = 0$$

e também,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(h) - u(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h^{-2}}}{h} && [t = \frac{1}{h}] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0. \end{aligned}$$

Deste modo, a derivada de  $u$  está bem definida e

$$u'(0) = 0.$$

Temos também que, por uma aplicação da regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-3} e^{-x^{-2}} = 0.$$

Portanto a derivada de primeira ordem de  $u$  esta definida em todos os pontos da reta real e é ainda uma função contínua.

Para provarmos que a derivada  $u^{(n)}$  de ordem  $n$  existe em todos os pontos da reta procedemos de modo inteiramente análogo ao que procedemos acima, porém neste caso, as derivadas para  $x < 0$  serão nulas e para  $x > 0$  serão uma combinação de termos da forma:

$$x^{-m} e^{-x^{-2}}$$

com  $m$  um número inteiro e positivo. No caso em que  $x = 0$ , assim como fizemos acima, provamos a existência da derivada analisando os limites laterais, o que provamos serem nulos aplicando a regra de L'Hospital. Assim, temos que  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Exemplo 3.2:** Podemos aplicar o que foi discutido acima para provar que a função  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,

$$\theta(y) = \begin{cases} e^{1/y^2-1} & , \text{ se } |y| < 1. \\ 0 & , \text{ se } |y| \geq 1 \end{cases}$$

é uma função infinitamente diferenciável.

Além disso,

$$\begin{aligned} \text{supp}(\theta) &= \overline{\{x \in \mathbb{R}; \theta(x) \neq 0\}} \\ &= \overline{(-1, 1)} = [-1, 1] \end{aligned}$$

logo  $\text{supp}(\theta)$  é compacto em  $\mathbb{R}$  e  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . □

Uma das propriedades do suporte de uma função teste  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um conjunto aberto, é a de que

$$\text{supp} \frac{d^n \varphi}{dt^n} \subset \text{supp} \varphi.$$

De fato, considere  $x \in (\text{supp} \varphi)^c$ , deste modo, existe  $\epsilon > 0$  de modo que  $\varphi(p) = 0$  para todo  $p \in I$  tal que

$$|x - p| < \epsilon$$

deste modo, quando calculamos a derivada de primeira ordem da função  $\varphi$  obtemos que,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \lim_{p \rightarrow x} \frac{\varphi(x) - \varphi(p)}{x - p} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pois a função  $\varphi$  se anula em uma vizinhança de  $x$ . Como a função  $\varphi$  se anula em uma vizinhança aberta do ponto  $x$  temos que para todos os pontos desta vizinhança a derivada de  $\varphi$  também se anula, deste modo,  $x \in (\text{supp } \varphi)^c$ . Note que, provamos que a derivada de  $\varphi$  se anula em uma vizinhança de  $x$ , sendo assim, por um raciocínio análogo provamos que,

$$\text{supp } \frac{d^n \varphi}{dt^n} \subset \text{supp } \varphi.$$

Podemos introduzir uma noção de convergência em  $C_0^\infty(I)$ , isto é, podemos dotar tal espaço de uma topologia que nos forneça um critério para decidirmos quando uma sequência  $(\varphi_\nu)$  de funções do espaço  $C_0^\infty(I)$  é convergente ou não. Nesta topologia dizemos que:

$$\varphi_\nu \rightarrow \varphi.$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto  $K \subset I$  tal que:

- (i)  $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$  para todo  $\nu \in \mathbb{N}$  e  $\text{supp}(\varphi) \subset K$ .
- (ii) Para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\frac{d^k \varphi_\nu}{dt^k} \rightarrow \frac{d^k \varphi}{dt^k}$  uniformemente sobre  $K$ .

Definimos o espaço  $\mathcal{D}(I)$  de funções teste como sendo o espaço  $C_0^\infty(I)$  munido da noção de convergência dado acima.

## 4 Distribuições

O desenvolvimento da teoria das distribuições teve, como um de seus principais propósitos, resolver problemas de diferenciação. Tal teoria apresenta uma generalização do conceito de função, no sentido em que toda função pode ser encarada como uma distribuição, porém nem toda distribuição pode ser encarada como uma função no sentido usual do termo, assim como a função delta de Dirac. A principal vantagem de lidarmos com distribuições é que suas derivadas de todas as ordens estão bem definidas e são também distribuições, o que contorna o fato de que para muitas funções a derivada não está definida em um ponto, ou então em nenhum ponto de seu domínio. Assim se temos como problema uma equação diferencial encaramos as derivadas como derivadas de distribuições e resolvemos este problema determinando se existe ou não uma distribuição que satisfaz a equação dada, após realizado este processo verificamos se tal distribuição é ou não uma função no sentido usual do termo.

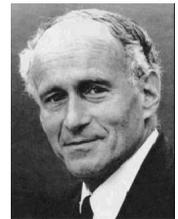


Figura 1: Schwartz

Assim como Schwartz (foto acima) descreve em sua autobiografia (Ver [7]), este problema de generalização da noção de função é semelhante ao de generalização do conceito de número, que surge

quando abordamos questões como encontrar a raiz quadrada de um número racional, pois alguns números inteiros, tais como 2 ou 3 não possuem raízes quadradas racionais, porém se estendermos o conceito de número racional ao de número real, estes números possuem raízes reais, que podem não ser números racionais. Como podemos ver o problema ainda não está completamente resolvido, uma vez que para obtermos a raiz quadrada de um número racional negativo precisamos estender nosso conceito de números reais ao conceito de números complexos. No corpo dos números complexos todo número real tem duas raízes com sinais opostos. A situação é análoga ao caso da relação entre uma função e uma distribuição, onde nem toda função tem derivada que é uma função, porém toda função tem uma derivada que é uma distribuição e toda distribuição tem uma derivada que é uma distribuição.

#### 4.1 Distribuições sobre um conjunto aberto $I$

Uma **distribuição** sobre um conjunto aberto  $I$  é um funcional linear contínuo definido sobre o espaço das funções teste  $\mathcal{D}(I)$ , ou seja,

$$T : \mathcal{D}(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma distribuição sobre  $I$  se, para toda sequência de funções teste  $(\phi_\nu)$  tivermos que,

$$\phi_\nu \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{D}(I) \quad \Rightarrow \quad T(\phi_\nu) \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Será comum, ao longo deste texto, denotarmos por  $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$ , onde  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ . O espaço vetorial de todas as distribuições será denotado por  $\mathcal{D}'(I)$ .

**Exemplo 4.1.1:** Dado  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua podemos definir  $T_f : \mathcal{D}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$T_f(\phi) = \int_a^b f(x)\phi(x)dx. \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b).$$

A primeira questão a ser discutida aqui é se esta aplicação esta, de fato, bem definida. Para provarmos isto basta observar que como  $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$  temos que existe um conjunto compacto  $K \subset (a, b)$  de modo que,  $\text{supp}(\phi) \subset K$ , deste modo,

$$\begin{aligned} T_f(\phi) &= \int_a^b f(x)\phi(x)dx \\ &= \int_K f(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

como  $f$  e  $\phi$  são funções contínuas temos que a integral acima converge, logo  $T_f$  esta bem definida. Além disso, pela linearidade da integral  $T_f$  é também linear.

Para que  $T_f$  seja uma distribuição sobre  $I$  nos resta provar apenas que esta é contínua. Consideremos então uma sequência  $(\phi_\nu)$  de funções  $\phi_\nu \in \mathcal{D}(a, b)$ . Por definição temos que existe um conjunto compacto  $K_1 \subset (a, b)$  tal que,

$$\text{supp}(\phi_\nu) \subset K_1, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

e, além disso,

$$\frac{d^n \phi_\nu}{dx^n} \rightarrow 0,$$

uniformemente sobre  $K$  para todo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , deste modo,

$$\begin{aligned} |T_f(\phi_\nu)| &= \left| \int_a^b f(x) \phi_\nu(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) \phi_\nu(x)| dx = \int_K |f(x) \phi_\nu(x)| dx \\ &\leq \max \{ |\phi_\nu(x)|; x \in K \} \int_K |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, pela convergência de  $(\phi_\nu)$  em  $\mathcal{D}(a, b)$  temos que,

$$|T_f(\phi_\nu)| \rightarrow 0.$$

Portanto  $T_f$  é uma distribuição sobre  $(a, b)$ . □

O interessante a se observar no exemplo acima é que precisamos somente a função  $f$  seja integrável sobre cada conjunto compacto  $K \subset (a, b)$  para que  $T_f$  esteja bem definida e seja uma distribuição. Isto é justificável pelo fato de que, dado  $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$  então existe um conjunto compacto  $K_2 \subset (a, b)$  tal que  $\text{supp}(\varphi) \subset K_2$ , assim,

$$T_f(\varphi) = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \int_{K_2} f(x) \varphi(x) dx.$$

já que  $\varphi(x) \neq 0$  para  $x \notin K_2$ . Podemos assim associar, por exemplo, a função de Heaviside  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \geq 0. \\ 0 & , \text{ se } x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

a distribuição

$$T_u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (2)$$

**Exemplo 4.1.2:** Seja  $x_0 \in \mathbb{R}$  definimos  $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0).$$

A verificação de que  $\delta_{x_0}$  é uma distribuição é praticamente imediata. Com efeito, dado uma sequência  $(\varphi_\nu)$  de funções teste tal que

$$\varphi_\nu \rightarrow 0$$

temos que existe um conjunto compacto  $K$  tal que, para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$  e

$$\frac{d^n \varphi_\nu}{dx^n} \rightarrow 0$$

uniformemente sobre  $K$  para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , assim:

$$\begin{aligned} |\delta_{x_0}(\varphi)| &= |\varphi_\nu(x_0)| \\ &\leq \max \{|\varphi_\nu(x)|; x \in K\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

portanto  $\delta_{x_0}$  é uma distribuição.  $\square$

Esta distribuição definida no exemplo acima é a conhecida distribuição delta de Dirac. Prova-se que esta distribuição não pode ser definida por uma função no sentido usual, nem tão pouco por uma função localmente integrável à Lebesgue, isto é, não existe  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

## 4.2 Derivada fraca

Considere uma distribuição  $T$  sobre um intervalo aberto  $I$ . A derivada de ordem  $n \in \mathbb{N}$  é definida por:

$$\langle \partial^n T, \varphi \rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Quando a distribuição  $T$  for definida por uma função  $u$  diremos que esta derivada distribucional é a **derivada fraca** de  $u$ . Esta derivada esta sempre bem definida, assim como mostraremos abaixo.

Temos que, a derivada de  $T \in \mathcal{D}(I)$  acima definida é uma distribuição. Com efeito, considere uma sequência  $(\varphi_\nu)$  de funções teste definidas em  $I$  e convergentes para 0. Então existe um conjunto compacto  $K$  de modo que  $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$ , para todo  $\nu \in \mathbb{N}$  e para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{d^n \varphi_\nu}{dt^n} \rightarrow 0$$

uniformemente sobre  $K$ . Deste modo temos que  $\frac{d^m \varphi_\nu}{dt^m} \rightarrow 0$  em  $\mathcal{D}(I)$ , pois

$$\text{supp} \left( \frac{d^m \varphi_\nu}{dt^m} \right) \subset \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$$

e  $d^m \varphi_\nu / dt^m \rightarrow 0$  uniformemente em  $K$ . Além disso, sendo  $T \in \mathcal{D}'(I)$  temos que,

$$\left\langle T, \frac{d^m \varphi_\nu}{dt^m} \right\rangle \rightarrow 0, \text{ em } \mathbb{R}.$$

Desta forma,

$$|\langle \partial^m T, \varphi_\nu \rangle| = \left| \left\langle T, \frac{d^m \varphi_\nu}{dt^m} \right\rangle \right| \rightarrow 0$$

o que prova que, de fato, a derivada de uma distribuição é ainda uma distribuição.

Em outras palavras, o que mostramos acima é que toda distribuição possui uma derivada e esta derivada é ainda uma distribuição.

**Exemplo 4.2.1:** Consideremos a função de Heaviside  $u$  definido em (1) que define a seguinte distribuição

$$T_u = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \langle \partial T_u, \varphi \rangle &= (-1) \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Em outras palavras,  $\partial T_u = \delta_0$ , é comum dizer que a distribuição delta de Dirac é a derivada fraca da função de Heaviside.  $\square$

**Exemplo 4.2.2:** Vamos agora calcular a derivada da distribuição  $\delta$  de Dirac. Lembre que, dado  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  temos que,

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0).$$

Sendo assim, a derivada de ordem  $p \in \mathbb{N}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \langle \partial^p \delta, \varphi \rangle &= (-1)^p \left\langle \delta, \frac{d^p \varphi}{dt^p} \right\rangle \\ &= (-1)^p \varphi^{(p)}(x_0). \end{aligned}$$

Em outras palavras,  $\partial^{(p)} \delta_{x_0}(\varphi) = (-1)^p \varphi^{(p)}(x_0)$ .  $\square$

**Exemplo 4.2.3:** Vamos definir agora a função  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$u(x) = \begin{cases} \cos(x) & , \text{ se } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{\pi} & , \text{ se } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & , \text{ se } x \notin [-\pi, \pi] \end{cases}.$$

Calcularemos a derivada fraca desta função, isto é, sabendo que esta função  $u$  define a seguinte distribuição sobre  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} T_u(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

calcularemos  $\partial T_u$ .

Temos que,

$$\begin{aligned} \langle \partial T_u, \varphi \rangle &= (-1) \langle T_u, \varphi' \rangle \\ &= (-1) \left[ \int_{-\pi}^0 \cos(x) \varphi'(x) dx + \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \varphi'(x) dx \right] \end{aligned}$$

integrando por partes a expressão acima obtemos que,

$$\langle \partial T_u, \varphi \rangle = -\varphi(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} v(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

onde,

$$v(x) = \begin{cases} -\text{sen}(x) & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{\pi} & , \quad 0 < x \leq \pi \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Temos assim que,

$$\partial T_u = -\delta_{-\pi} + T_v.$$

Um fato interessante a se observar no exemplo acima é que a função  $u$  que considerada é descontínua no ponto  $x = -\pi$ , mesmo assim a derivada fraca de  $u$  existe como distribuição, porém esta não é uma distribuição definida por uma função no sentido clássico, isso por conta do aparecimento do termo  $\delta_{-\pi}$ . De um modo geral, veremos abaixo que sempre que calcularmos a derivada fraca de uma função descontínua em um ponto e com derivada também seccionalmente contínua, sempre aparecerá esta distribuição delta de Dirac no ponto onde a função é descontínua.

## 5 Derivada Fraca X Derivada Clássica

Faremos agora algumas comparações entre as derivadas fracas e derivadas no sentido clássico de uma função. Veremos quando estas derivadas coincidem, algumas vantagens para o cálculo de derivada de distribuição sobre a derivada de funções, tais como, a validade, de um modo geral, do teorema de Schwarz, que para funções reais deveríamos impor hipóteses sobre a continuidade da função considerada bem como, das derivadas parciais desta função. Outro ponto interessante a ser observado é como se comportam as derivadas fracas de funções descontínuas.

Assim como já vimos anteriormente a cada função real  $f \in C^k(a, b)$  podemos associar uma distribuição  $T_f$ , provaremos agora que sua derivada fraca de ordem  $n \leq k$  coincide com sua derivada no sentido clássico. Temos que,

$$\begin{aligned} \langle \partial T_f, \varphi \rangle &= (-1) \langle T_f, \varphi' \rangle \\ &= (-1) \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx \end{aligned} \quad (3)$$

Integrando (3) por partes obtemos que,

$$\begin{aligned} \langle \partial T_f, \varphi \rangle &= (-1) \left( \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)\varphi(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)\varphi(x) \right) + \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \langle T_{f'}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b). \end{aligned}$$

Logo  $\partial T_f = T_{f'}$ , isto é, a derivada da distribuição associada a função  $f$  é a distribuição associada a

função  $f'$ , dizemos assim que a derivada fraca de  $f$  é a função  $f'$ .

Vamos expandir um pouco o universo de funções em que estamos trabalhando e considerar funções que não são contínuas em um número finito de pontos. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, exceto em um número finito de pontos  $a_1 < a_2 < \dots < a_s$ . Vamos supor que, em cada ponto  $a_k$  ( $1 \leq k \leq s$ ) os limites laterais

$$f(a_k + 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(a_k + \epsilon) \quad \text{e} \quad f(a_k - 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} f(a_k + \epsilon)$$

existam e sejam finitos. Então  $f$  define uma distribuição  $T_f$  de modo que, dado  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{a_1} f(x)\varphi(x)dx + \sum_{k=1}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\varphi(x)dx + \int_{a_s}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Suponhamos também que, em cada intervalo aberto  $]a_k, a_{k+1}[$ , onde  $1 \leq k \leq s-1$ , em  $] -\infty, a_1[$  e em  $]a_s, \infty[$  a primeira derivada de  $f$  seja contínua e os limites laterais  $f'(a_k + 0)$  e  $f'(a_k - 0)$  existam e sejam finitos. Então a distribuição  $T_{f'}$  esta bem definida e denotando por

$$j_k = f(a_k + 0) - f(a_k - 0), \quad k = 1, \dots, s.$$

temos que,

$$\begin{aligned} \langle \partial T_f, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \partial \varphi \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{a_1} f(x)\varphi'(x)dx - \sum_{k=1}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{a_s}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \end{aligned}$$

integrando por partes, cada integral acima,

$$\langle \partial T_f, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^s j_k \varphi(a_k) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx.$$

e, portanto,

$$\partial T_f = T_{f'} + \sum_{k=1}^s j_k \delta_{a_k}.$$

Note que esta é uma extensão do caso em que a função  $f$  é contínua.

Quando desenvolvemos nossa teoria acerca de distribuições consideramos apenas o caso de conjuntos abertos contidos em  $\mathbb{R}$ , porém toda esta teoria pode ser desenvolvida de modo inteiramente análogo para subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Veremos abaixo como se comporta as derivadas distribucionais de funções de várias variáveis, em particular, estaremos interessados em estabelecer um teorema análogo ao de Schwarz para estas derivadas fracas.

Para funções de varias variáveis temos que nem sempre podemos comutar a ordem em que são

realizadas as derivações parciais, ou seja, nem sempre é válido que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Por exemplo, no caso da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$  se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(0, 0) = 0$  temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1.$$

Para ser válido esta igualdade devemos exigir algumas hipóteses acerca da função  $f$ , para que esta satisfaça o teorema de Schwarz:

**Teorema 2** (de Schwarz). *Seja  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  um conjunto aberto. Se  $f$  for de classe  $C^2$  em  $A$  então,*

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in A.$$

Veremos abaixo que no caso das derivadas distribucionais este teorema sempre é válido. De fato, seja  $T$  uma distribuição sobre  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A$  um conjunto aberto. Temos que, para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \\ &= \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\rangle \end{aligned}$$

porém como  $\varphi$  é uma função teste temos que  $\varphi \in C_0^\infty(A)$  sendo assim é válido o teorema de Schwarz e podemos escrever que,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$$

deste modo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \varphi \right\rangle &= \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}.$$

## 6 Considerações finais

A teoria das distribuições é um tema vasto, os resultados e exemplos expostos acima apenas apresenta uma breve introdução a esta teoria. A principal aplicação desta teoria é na construção dos espaços de Sobolev, que constitui uma linguagem básica para o estudo de equações diferenciais. Um espaço de

Sobolev, a grosso modo, é um espaço formado por funções integráveis a Lebesgue cujas derivadas fracas até determinada ordem são ainda distribuições definidas por funções integráveis a Lebesgue. A partir das propriedades que obtemos para tais espaços podemos decidir se uma dada equação diferencial possui ou não solução, esta solução satisfazendo a equação no sentido fraco, isto é, satisfazendo a equação quando consideramos as derivadas envolvidas como derivadas fracas.

Pelas considerações acima podemos ver que a construção dos espaços de Sobolev, em que pese esteja fundamentada na teoria das distribuições, depende fortemente de resultados estudados em teoria da medida, por isso tais espaços não foram abordados neste trabalho, entretanto não podemos encerrar nossa discussão sem mencioná-los.

Nosso principal objetivo aqui foi traçar um paralelo entre o conceito de derivada distribucional e a derivada no sentido clássico, salientando que algumas propriedades são preservadas, assim como há ganhos substanciais no tratamento de alguns problemas encarando as derivadas como derivadas distribucionais.

## Referências

- [1] CAVALCANTI, M.M. - Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev. Eduem, 2009.
- [2] DUISSTERMAAT, J. J., KOLK, J.A.C - Distributions - Theory and Applications, Birkhäuser, 2010.
- [3] HORVÁTH, J., - Topological vector spaces and distributions, Addison Wesley publishing company, 1966.
- [4] HOUNIE, J. G., - Teoria Elementar das Distribuições, IMPA, 1979.
- [5] KESAVAN, S. - Functional Analysis, Hindustan Book Agency, 2009.
- [6] MEDEIROS, L.A., MIRANDA, M.M. - Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais; Rio de Janeiro, 1993. Textos de Métodos Matemáticos N. 25. Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [7] SCHWARTZ, L. - A Mathematician Grappling With His Century, Birkhäuser, 2001.

## MC 6

# Construção dos Números Reais como Completamento dos Racionais

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Luci Harue Fatori - UEL  
Bruno A. Rodrigues - Graduando Matemática UEL

# Construção dos números reais como complemento dos racionais

**Bruno Alexandre Rodrigues**

**Prof<sup>a</sup> Dra. Luci Harue Fatori**

bruno\_rodriguess@hotmail.com, lucifatori@uel.br

Departamento de Matemática

Universidade Estadual de Londrina

Londrina-PR

## Resumo

A proposta deste trabalho é exibir a construção do conjunto dos números reais utilizando o teorema do Completamento, ou seja, construir cada número real como uma classe de sequências de Cauchy racionais. Para tanto, faremos inicialmente uma introdução histórica relacionando o surgimento dos números, desde os primórdios da humanidade até a concretização dos números reais como corpo ordenado completo. Após uma breve introdução dos fundamentos teóricos necessários, estaremos aptos a descrever formalmente a construção citada.

**Palavras-chave:** Reais, racionais, completamento, Cauchy.

## 1 Introdução

É comumente considerada como a forma de matemática mais antiga o primeiro esforço que o homem realizou na tentativa de sistematizar o conceito de grandeza, seja como número ou como forma. Estes conceitos desenvolveram-se antes mesmo dos primeiros registros históricos, o que faz com que a maneira como ocorreram seja mera conjectura. Também a capacidade e o processo de contar desenvolveram-se com o homem primitivo há aproximadamente 50.000 anos, e acredita-se que esta não seja uma capacidade exclusivamente humana, dadas evidências de que alguns pássaros conseguem distinguir quantidades pequenas. Iniciaremos estas notas com um breve estudo de como surgiu o conceito de número, para então podermos descrever a teoria matemática necessária para a construção do conjunto dos nú-

meros reais, o que faremos explorando a insuficiência, por assim dizer, dos números racionais, no que tange a representação de certas grandezas. Em seguida, passamos a uma breve exposição dos fundamentos teóricos utilizados, finalizando com a construção dos números reais como limites de seqüências de Cauchy.

## 2 Um pouco de história

### 2.1 Os primórdios dos números

Não é absurdo admitirmos que nossa espécie já possuía algum senso numérico em estágios primitivos de sua história, mesmo que simplesmente reconhecendo os conceitos *mais* e *menos*, observando a quantidade de objetos em determinada coleção, por exemplo o número de animais num rebanho ou o número de integrantes em seu grupo. Com a evolução da sociedade, tais conceitos tornaram-se indispensáveis, tome como exemplo uma tribo pré-histórica, que certamente tinha que saber a quantidade de membros e a quantidade de inimigos, ou saber se a quantidade de alimento disponível seria suficiente.

É muito provável que o primeiro método de contagem tenha se baseado na correspondência buinívoca dos dedos, gravetos, seixos ou ranhuras em tábuas de barro, com os objetos a serem contados. Podia-se, por exemplo, associar cada dedo da mão a um carneiro do rebanho. Com o surgimento e aprimoramento da escrita, surgiram símbolos para representar tais quantidades. Entretanto, quando se tornou necessário o uso de contagens



Figura 1: Osso de Ishango

mais extensas, o procedimento teve de ser sistematizado, o que foi feito arranjando os números em grupos básicos convenientes. Como os dedos são extremamente práticos para o processo de contagem, é de se esperar que agrupar objetos de dez em dez era frequente, mas, é claro, esta não foi a única base numérica utilizada ao longo da história. O *sistema sexagesimal*, por exemplo, foi amplamente utilizado pelos babilônios, e é até hoje utilizado na medição de ângulos e do tempo. Para as medidas, o uso de razões fez-se uma necessidade. As frações foram desenvolvidas no Egito (frações com numerador 1, como  $\frac{1}{3}$ ) e na Babilônia (frações com denominador 60). Surgiam aí os números racionais. A imensa quantidade de objetos a serem contados, e o espírito curioso e questionador do homem estabeleceram a noção de infinito, no sentido de existir uma infinidade de números naturais. Tal fato é expresso pelo conhecido Princípio de Arquimedes: Dada uma grandeza  $x > 0$ , sempre existe um número natural  $n$  de modo que  $n > x$ .

## 2.2 Os Pitagóricos

Existiu na Grécia antiga um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, conhecido como escola pitagórica, cujo fundador foi o ilustre matemático Pitágoras. Acredita-se que a sociedade perdurou por aproximadamente duzentos anos após a morte de Pitágoras, entretanto, em virtude dos pitagóricos não terem produzido registros escritos de seus feitos, pouco se pode afirmar com certeza sobre Pitágoras e seus seguidores. Sabe-se que os ensinamentos da escola eram transmitidos de maneira verbal e suas descobertas eram todas atribuídas ao seu ilustre fundador, de modo que é difícil precisar quantos foram realmente devidos à Pitágoras.



Figura 2: Pitágoras

A filosofia da escola baseava-se fortemente no pressuposto de que tudo o que é conhecido, tudo o que se relaciona ao homem e à matéria pode ser expresso em termos de números inteiros. E isso propiciava o estudo da aritmética, juntamente com a geometria, a música e a astronomia.

Contudo, seguidores da escola pitagórica conseguiram, por meio de construções simples, provar que determinados segmentos de reta possuem comprimento inexpressível por meio de números inteiros ou pela razão destes; em outras palavras, eles perceberam que existem segmentos que não podem ser comparados por uma unidade fixada. Estes ficaram conhecidos como segmentos incomensuráveis. Enfim, os números inteiros não eram mais capazes de exprimir tudo o que existe.



Figura 3: Hipaso

Conta-se que esta descoberta era mantida em segredo absoluto pelos pitagóricos e que Hipaso de Metaponto, quebrando a regra de silêncio da escola e revelando à sociedade a existência de tais grandezas, fora condenado à morte pelos outros membros e atirado ao mar, sendo erigida uma tumba com seu nome.

## 2.3 O zero e os números negativos

Pelo que se sabe, os gregos não conheciam o zero, e, sendo assim, não existia um sistema de numeração posicional. Os hindus foram o primeiro povo a utilizar um sistema numérico em que era atribuído um valor para cada posição, sendo que um espaço vazio não atribuía valor algum à tal posição. Fazia-se necessária a criação de um símbolo para representar este “vazio” e evitar confusões. Foi o matemático indiano *Varahamihica* quem primeiro utilizou um círculo para indicar o zero, em seu livro *Panca Siddhantika*. A matemática indiana começou a usar o zero por volta do ano 650 d.C.

Já os números negativos surgiram pela primeira vez com os antigos chineses. Eles costumavam calcular utilizando-se de barras coloridas, uma cor para quantidades positivas e outra cor para quantidades

negativas. Apesar disso, não aceitavam o fato de um número negativo poder ser solução de uma equação.

Diofanto (século III) também operou com números negativos, os quais apareciam com frequência em cálculos de vários problemas. Nas situações em que inteiros negativos apareciam como solução, Diofanto classificava o problema de “absurdo”. Mesmo durante a Idade Média, muitos matemáticos não encaravam com bons olhos os números negativos. Cardano, por exemplo, chamava-lhes de *numeri ficti*.

Só a partir do século XVIII tais números tiveram larga aceitação. Surgia a interpretação geométrica onde os números eram dispostos como pontos de uma reta, com os positivos seguindo para a direita e os negativos para a esquerda, tendo o zero como ponto inicial.

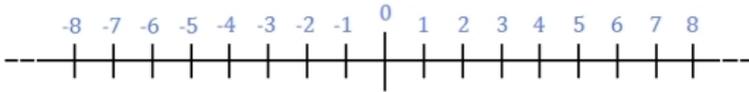


Figura 4: Reta real

### 3 Sequências de Cauchy

#### 3.1 A insuficiência de $\mathbb{Q}$

Queremos agora buscar uma maneira de construir o conjunto dos números reais. Para isso, vamos utilizar a notação usual para os naturais, inteiros e racionais, ou seja,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , e  $\mathbb{Q}$ . Note que como queremos determinar  $\mathbb{R}$  a partir de  $\mathbb{Q}$ , não podemos fazer menção aos números reais no decorrer do texto, de modo que vele ressaltar que quaisquer epsilons utilizados deverão ser racionais.

Como já dissemos anteriormente, os gregos descobriram a existência de segmentos que não podem ser expressos como razão de números inteiros, ou seja, números racionais. Podemos repetir a demonstração enunciando o seguinte resultado:

**Teorema 3.1.** *Não existe um número  $d \in \mathbb{Q}$  tal que  $d^2 = 2$ .*

Este fato é visualizado geometricamente de maneira fácil apenas aplicando o teorema de Pitágoras: considerando um quadrado de lado unitário, ao buscar o comprimento de sua diagonal  $d$ , temos

$$1^2 + 1^2 = d^2.$$

Vamos demonstrar o resultado.

**Demonstração:** Suponha que existam  $p, q \in \mathbb{Z}$  tais que  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$  e admita, sem perda de generalidade, que a fração  $\frac{p}{q}$  seja irredutível. Temos

$$p^2 = 2q^2,$$

ou seja,  $p^2$  é par, o que faz de  $p$  um número par. Podemos escrever  $p = 2m$ , com  $m \in \mathbb{Z}$ . Isto nos dá

$$4m^2 = 2q^2,$$

e disto segue que  $q$  também é par, um absurdo, pois supomos  $\frac{p}{q}$  irredutível. ■

Apesar de existirem essas grandezas que não são abrangidas por  $\mathbb{Q}$ , tal conjunto possui uma estrutura matemática muito rica, conhecida como *corpo*. Perceba que  $\mathbb{Q}$  é fechado para a soma e o produto usuais (soma e produto de racionais continua sendo racional), e ainda para essas operações valem a associatividade e a comutatividade, e o produto é distributivo com respeito à soma. Veja também que vale o fechamento para as operações inversas, subtração e divisão (por elemento não nulo). Por fim, unindo a isto o elemento nulo, 0, e o elemento neutro multiplicativo, 1, dizemos que o conjunto  $\mathbb{Q}$  satisfaz todas as propriedades necessárias para ser denominado um corpo.

O conjunto dos números racionais também é dotado de uma ordem total, ou seja, quaisquer dois elementos pertencentes a  $\mathbb{Q}$  podem ser comparados pela relação  $\leq$ . Esta ordem total nos permite definir o valor absoluto  $|x|$  de um número racional  $x$ . Definimos como sendo  $x$ , se  $x \geq 0$  e  $-x$ , se  $x < 0$ . Interpretamos isto como a distância de  $x$  à origem.

Sabendo que o corpo ordenado dos números racionais possui a noção de distância, estamos prontos para definir conceitos essenciais, como por exemplo sequências e convergência, o que faremos a seguir.

**Definição 3.1.** Chamamos de *sequência de números racionais* a toda função de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{Q}$ . Isto quer dizer que para cada número natural associamos um número racional. Escrevemos os termos da sequência como  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ , e denotamos a sequência por  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou simplesmente  $(x_n)$ .

Entre todas as infinitudes de tipos de sequência existentes, estamos especialmente interessados em uma cujo comportamento para índices  $n$  arbitrariamente grandes é peculiar. São as sequências convergentes.

**Definição 3.2.** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números racionais. Diremos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é  **$\mathbb{Q}$ -convergente** quando existir  $x \in \mathbb{Q}$  tal que para todo racional  $\epsilon > 0$  é possível determinar  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $n > n_0$  implica  $|x_n - x| < \epsilon$ . Denotamos  $\lim x_n = x$ .

Um exemplo clássico de sequência  $\mathbb{Q}$ -convergente é aquela que para cada natural  $n$  associa a fração  $\frac{1}{n}$ . Demonstra-se utilizando o Princípio de Arquimedes que esta sequência converge para 0.



Figura 5: Cauchy

Dada uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , é natural pensarmos que, além de se aproximarem de um certo termo limite  $x$ , seus termos também podem ficar cada vez mais próximos uns dos outros. Esta característica será, de um modo geral, a mais importante neste trabalho. Sequências com este tipo de comportamento são chamadas de sequências de Cauchy.

**Definição 3.3.** Uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é dita  $\mathbb{Q}$ -Cauchy, ou simplesmente sequência de Cauchy, quando para cada  $\epsilon > 0$  existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $m, n > n_0$  implique  $|x_m - x_n| < \epsilon$ .

Não é difícil a seguinte conclusão:

**Proposição 3.1.** Se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência  $\mathbb{Q}$ -convergente, então  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é  $\mathbb{Q}$ -Cauchy.

**Demonstração:** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim x_n = x$  e considere  $\epsilon > 0$  racional. Sendo assim, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $n > n_0$  implica  $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ . Com isso,

$$|x_m - x_n| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é  $\mathbb{Q}$ -Cauchy. ■

Um critério muito interessante para testar convergência de sequências é a **contrapositiva** do resultado acima, veja: *Se uma sequência não é de Cauchy, então esta não pode ser convergente.*

O que deve estar muito bem esclarecido é que a **recíproca** desta proposição não é verdadeira, ou seja, sequências  $\mathbb{Q}$ -Cauchy não são necessariamente  $\mathbb{Q}$ -convergentes.

Vamos olhar este fato mais de perto. Considere a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  onde

$$x_1 = 2$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

Esta fórmula já era conhecida pelos babilônios quatro mil anos atrás! E é usada para fazer aproximações sucessivas de  $\sqrt{2}$ . Note-se que todos os seus termos são números racionais. Prova-se que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy, entretanto, se supormos que existe  $p \in \mathbb{Q}$  tal que  $\lim x_n = p$ , teríamos

$$p = \frac{1}{2} \left( p + \frac{2}{p} \right),$$

pois  $\lim x_{n+1} = \lim x_n$ , e isto nos levaria a  $p^2 = 2$ , uma contradição.

É justamente este fato que faz com que o conjunto dos números racionais seja um espaço incompleto,

onde entendemos por completo todo espaço no qual as seqüências de Cauchy convergem para pontos pertencentes ao espaço.

Usaremos em breve as seqüências de Cauchy para definirmos os números reais. Esta construção baseia-se em um teorema conhecido como Teorema do Completamento, que afirma ser possível obter, para qualquer espaço vetorial normado, um espaço completo associado satisfazendo algumas propriedades, as quais enunciaremos adiante.

## 3.2 Propriedades elementares das seqüências

Vamos agora verificar alguns resultados muito úteis sobre seqüências, embora extremamente simples. Deixemos claro que de agora em diante tais resultados poderão ser utilizados sem muitos comentários.

**Proposição 3.2.** *Se uma seqüência é  $\mathbb{Q}$ -convergente, então seu limite é único.*

**Demonstração:** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência  $\mathbb{Q}$ -convergente e suponha que não seja válida a unicidade do limite, ou seja, suponha que existam  $a, b \in \mathbb{Q}$  de modo que

$$\lim x_n = a \quad \text{e} \quad \lim x_n = b.$$

Pela definição de convergência, para  $\epsilon > 0$  existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad n > n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considerando  $n_0$  o maior entre  $n_1$  e  $n_2$ , temos

$$n > n_0 \Rightarrow |a - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Disto concluímos que  $a = b$ . ■

**Proposição 3.3.** *Toda seqüência  $\mathbb{Q}$ -convergente é limitada, i.e., o conjunto de seus termos é limitado, o que ocorre quando existe um racional  $c$  tal que  $|x_m - x_n| < c$ , para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ .*

**Demonstração:** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente tal que  $\lim x_n = a$ . Considerando  $\epsilon = 1$ , podemos obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $n > n_0$  implica em  $|x_n - a| < 1$ . Sendo assim, o conjunto dos termos da seqüência está inteiramente contido em  $A = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup B_1(a)$ , onde  $B_1(a) = \{x \in \mathbb{Q}; |x - a| < 1\}$ . Como  $A$  é a união de conjuntos obviamente limitados, o resultado segue. ■

**Definição 3.4.** *Sejam  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seqüências de números racionais. Chamamos **soma** de  $x$  com  $y$  a seqüência  $x + y = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . **O produto** de  $x$  por  $y$  é definido por  $xy = (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .*

**Teorema 3.2.** Se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são tais que  $\lim x_n = a$  e  $\lim y_n = b$ , então  $\lim(x_n + y_n) = a + b$  e  $\lim x_n y_n = ab$ .

**Demonstração:** Vamos dividir a demonstração em duas etapas.

(i)  $\lim(x_n + y_n) = a + b$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considerando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , temos

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n + y_n - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto conclui a primeira etapa.

(ii)  $\lim x_n y_n = ab$ .

Tome novamente  $\epsilon > 0$ . Pelo fato de  $\lim x_n = a$ , temos que para qualquer  $k > |b|$  existe  $n_3 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_3 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2k}.$$

Note que existe, como consequência imediata da proposição anterior,  $c > 0$  tal que  $|x_n| < c$ , para todo natural  $n \geq 1$ . Por outro lado, como  $\lim y_n = b$ , existe  $n_4 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_4 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2c}.$$

Portanto, para todo  $n > \max\{n_3, n_4\}$ , temos

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n| |y_n - b| + |b| |x_n - a| < c \frac{\epsilon}{2c} + k \frac{\epsilon}{2k} = \epsilon.$$

Pelos itens (i) e (ii), concluímos a demonstração. ■

**Corolário 3.1.** Se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são seqüências tais que para algum  $n_0 \in \mathbb{N}$  vale  $x_n \leq y_n$ , para todo  $n > n_0$ , então  $\lim x_n \leq \lim y_n$ .

Realmente, se ocorresse  $\lim x_n > \lim y_n$ , teríamos  $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n > 0$ . E disto obtemos facilmente que  $x_n - y_n > 0$  a partir de algum índice  $n_1 \in \mathbb{N}$ . Veja o absurdo: para  $n > \max\{n_0, n_1\}$  temos  $x_n \leq y_n$  e  $y_n < x_n$ . ■

**Proposição 3.4.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

A demonstração deste resultado será omitida pois faz-se do mesmo modo como fizemos com a proposição 3.3.

## 4 A construção dos números reais

Estamos agora com uma base consistente para iniciarmos a construção do conjunto dos números reais. Queremos obter  $\mathbb{R}$  como completamento de  $\mathbb{Q}$ , onde entendemos por completamento de um espaço normado um espaço maior no qual todas as sequências de Cauchy convergem e tal que o espaço antigo possa ser identificado como um subespaço denso neste. Esta maneira de construção genial foi idealizada por Georg Cantor e publicada em 1872.

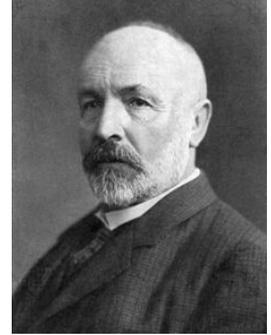


Figura 6: Cantor

### 4.1 Sequências equivalentes

Consideremos o conjunto de *todas* as sequências de Cauchy de números racionais. O propósito será definir cada número real como uma sequência de Cauchy. Não se assuste! Esta idéia não é tão absurda quanto parece, pois em um breve instante de reflexão podemos entender o número  $\sqrt{2}$  como a sequência de aproximações

$$(1; 1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; \dots).$$

Entretanto, para que a definição seja consistente, precisamos lidar com a ambiguidade gerada por sequências que possuem o mesmo limite. Tome por exemplo a sequência constante  $(1, 1, 1, \dots)$  e a sequência  $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  e veja que ambas tem limite 1. A solução para este problema será trabalharmos com *classes de equivalência*.

**Definição 4.1.** *Dado um conjunto  $A$ , uma relação  $\sim$  sobre  $A$  (ou seja, um subconjunto de  $A \times A$ ) será uma **relação de equivalência** quando se verificar:*

1. *Reflexividade: para todo  $x \in A$ ,  $x \sim x$ ;*
2. *Simetria: para todos  $x, y \in A$ ,  $x \sim y$  implica  $y \sim x$ ;*
3. *Transitividade: para todos  $x, y, z \in A$ ,  $x \sim y$  e  $y \sim z$  implica  $x \sim z$ .*

**Definição 4.2.** Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sequências  $\mathbb{Q}$ -Cauchy. Escrevemos  $(x_n) \sim (y_n)$  se para todo  $\epsilon > 0$  existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - y_n| < \epsilon.$$

Equivalentemente, dizemos que  $(x_n)$  está relacionada com  $(y_n)$  quando a sequência  $(x_n - y_n)$  convergir para 0. Isto significa dizer que os termos de ambas as sequências se aproximam e permanecem arbitrariamente próximos uns dos outros.

**Proposição 4.1.** A relação  $\sim$  é uma relação de equivalência sobre o conjunto de todas as sequências  $\mathbb{Q}$ -Cauchy, o qual denotaremos sugestivamente por  $\hat{\mathbb{R}}$

**Demonstração:** Devemos mostrar que a relação  $\sim$  satisfaz as propriedades exigidas pela definição. Vejamos:

- Reflexividade: Basta ver que para qualquer sequência  $(x_n)$  vale  $|x_n - x_n| = 0$ , ou seja,  $\lim(x_n - x_n) = 0$ .
- Simetria: Suponha  $(x_n) \sim (y_n)$ , então  $\lim(x_n - y_n) = 0$ . Observe apenas que  $y_n - x_n = -(x_n - y_n)$  e que  $|x_n - y_n| = |y_n - x_n|$ .
- Transitividade: Tome  $(x_n) \sim (y_n)$  e  $(y_n) \sim (z_n)$ . Vejamos:

$$|x_n - z_n| = |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \rightarrow 0.$$

Logo  $(x_n) \sim (z_n)$ .

Isto prova que a relação é de fato uma relação de equivalência. ■

**Definição 4.3.** Dada uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{Q}$ , defina  $[(x_n)]$  como sendo o conjunto de todas as sequências em  $\hat{\mathbb{R}}$  que estão relacionadas com  $(x_n)$ . Chamamos  $[(x_n)]$  de **classe de equivalência** de  $(x_n)$ , ou simplesmente **número real**.

Com isso, podemos expor a definição mais importante deste trabalho:

**Definição 4.4.** Ao conjunto de todas as classes de equivalência de  $\hat{\mathbb{R}}$  pela relação  $\sim$  damos o nome de conjunto dos números reais, denotando por  $\mathbb{R}$ . Temos:

$$\mathbb{R} := \{ [(x_n)] \mid (x_n) \text{ é uma sequência de Cauchy em } \mathbb{Q} \}.$$

A definição acima é equivalente a dizer que  $\mathbb{R}$  é o conjunto quociente  $\hat{\mathbb{R}}/\sim$ .

**Obs.:** Seria mais natural pensarmos que cada sequência de Cauchy de  $\mathbb{Q}$  gera um número real. Entretanto, o que fizemos foi definir cada número real como sendo ele mesmo uma sequência de Cauchy de  $\mathbb{Q}$ . Apesar do desconforto causado por esta definição, vale ressaltar que ela evita o uso de axiomas extras sobre a existência de novos tipos de objetos matemáticos.

Mas isto não é tudo, ainda há um bom caminho a percorrer. O que fizemos até agora foi exibir uma construção formal que deu origem a um certo conjunto de objetos. O conjunto dos números reais que conhecemos desde criança satisfaz uma porção de propriedades (as quais também conhecemos desde criança!) e, para que a construção em andamento seja consistente e aceitável, é necessário que sejamos capazes de mostrar que  $\mathbb{R}$ , da maneira como definimos, satisfaz a estas propriedades. É o que faremos a seguir.

## 5 Imersão e densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

### 5.1 A imersão canônica

Da maneira como estamos acostumados, o conjunto  $\mathbb{Q}$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Começaremos então buscando uma maneira de encontrar  $\mathbb{Q}$  dentro do conjunto  $\mathbb{R}$  que definimos. O que devemos fazer é construir uma aplicação injetiva de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$ .

**Proposição 5.1.** *Seja  $(x_n) \in \hat{\mathbb{R}}$  e  $a \in \mathbb{Q}$ . Sendo assim,  $(x_n)$  tem limite a se, e somente se,  $(x_n) \sim (a)$ , onde  $(a)$  é a sequência constante igual a  $a$ .*

**Demonstração:** Para facilitar, vamos definir a sequência  $(a_n)$ , onde  $a_n = a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Suponha inicialmente que  $(x_n) \sim (a_n)$  e vamos provar que  $\lim x_n = a$ . Como  $(x_n) \sim (a_n)$ , dado  $\epsilon > 0$  podemos obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| = |x_n - a_n| < \epsilon.$$

Isto prova que  $\lim x_n = a$ . Reciprocamente, suponha  $\lim x_n = a$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a_n| = |x_n - a| < \epsilon.$$

Logo,  $(x_n) \sim (a_n)$ . ■

**Lema 5.1.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Se  $a \neq b$ , então as sequências constantes  $(a)$  e  $(b)$  não são equivalentes.*

**Demonstração:** É óbvio que as sequências  $(a)$  e  $(b)$  possuem limites distintos. Sendo assim, pela proposição anterior, segue que  $(a)$  não está relacionada a  $(b)$ . ■

**Lema 5.2.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{Q}$  distintos. Então  $[(a)] \neq [(b)]$  em  $\mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Esta demonstração segue da seguinte propriedade elementar sobre classes de equivalência: elementos não equivalentes produzem classes de equivalência disjuntas (e portanto diferentes).

■

**Definição 5.1** (Imersão canônica). *Definimos a imersão canônica  $I : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $I(a) = [(a)_{n \in \mathbb{N}}]$ . Ou seja, a imersão canônica associa a cada elemento  $a \in \mathbb{Q}$  a sequência constante igual a  $a$ .*

**Teorema 5.1.** *A imersão canônica é injetora.*

**Demonstração:** A demonstração imediata do lema anterior. ■

Com esta imersão em mãos, associamos cada elemento de  $\mathbb{Q}$  a um elemento de  $\mathbb{R}$  e, assim, podemos pensar em  $\mathbb{Q}$  como um subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

## 5.2 O conjunto $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado

Agora que já conhecemos onde os racionais estão no conjunto  $\mathbb{R}$  que construímos, precisamos munir  $\mathbb{R}$  da estrutura algébrica que conhecemos, ou seja, devemos verificar os axiomas de corpo ordenado. Para verificar estes axiomas, precisamos definir as operações aditiva e multiplicativa, ou seja, devemos estabelecer como somar e multiplicar classes de equivalência de sequências de Cauchy. Para verificar os axiomas de ordem, devemos ser capazes de decidir quando uma classe de sequências de Cauchy é menor que outra. Deste momento em diante, para que haja simplicidade na notação, poderemos denotar os elementos de  $\mathbb{R}$  simplesmente por  $x, y, z$ , etc. Entretanto, não devemos nos esquecer que estes são classes de equivalência, as quais, ao final do trabalho, chamaremos de números reais.

**Definição 5.2** (Operações algébricas). *Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ , de modo que  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sejam sequências  $\mathbb{Q}$ -Cauchy representantes de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Em outras palavras,  $x = [(x_n)]$  e  $y = [(y_n)]$ . Definimos as operações  $+$  e  $\cdot$  sendo*

- $x + y$  a classe de equivalência da sequência  $(x_n + y_n)$ ;
- $x \cdot y$  a classe de equivalência da sequência  $(a_n \cdot b_n)$ .

Tudo o que devemos fazer agora é verificar as propriedades de corpo! Espere... será que as operações acima estão realmente bem definidas? Estamos lidando com classes de equivalência, e cada uma delas admite uma infinidade de representantes. Portanto, antes de prosseguir com segurança, devemos estar certos de que a escolha particular do representante de cada classe não afeta o resultado da operação. Devemos também ter plena certeza de que as sequências  $(x_n + y_n)$  e  $(x_n \cdot y_n)$  são  $\mathbb{Q}$ -Cauchy.

**Lema 5.3.** *Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sequências  $\mathbb{Q}$ -Cauchy. Então as sequências  $(x_n + y_n)$  e  $(x_n \cdot y_n)$  também são  $\mathbb{Q}$ -Cauchy.*

**Demonstração:** Dado  $\epsilon > 0$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$n, m > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$n, m > n_2 \Rightarrow |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

Tomando  $n_0$  o máximo entre  $n_1$  e  $n_2$ , temos

$$|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| = |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

E a primeira parte da demonstração esta terminada. Note agora que existem  $c, k \in \mathbb{Q}$  de modo que  $|x_n| \leq c$  e  $|y_n| \leq k$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, se  $n > n_3 = \max\{n_1, n_2\}$

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m| &= |x_n y_n - x_n y_m + x_n y_m - x_m y_m| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y_m| + |x_n y_m - x_m y_m| \\ &= |x_n| |y_n - y_m| + |y_m| |x_n - x_m| \\ &\leq c \frac{\epsilon}{2c} + k \frac{\epsilon}{2k} = \epsilon. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do lema. ■

**Lema 5.4.** As operações  $+$  e  $\cdot$  não dependem da escolha particular das seqüências representantes de cada classe, isto é, se  $(x_n) \sim (x'_n)$  e  $(y_n) \sim (y'_n)$ , então

$$(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n) \text{ e } (x_n y_n) \sim (x'_n y'_n).$$

**Demonstração:** Considere  $\epsilon > 0$ . Então, por hipótese, existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - x'_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$n > n_2 \Rightarrow |y_n - y'_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para  $n > \max\{n_1, n_2\}$ , temos

$$|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)| \leq |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Sabemos existirem  $c, k \in \mathbb{Q}$  de modo que  $|x_n| \leq c$  e  $|y'_n| \leq k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x'_n y'_n| &= |x_n y_n - x_n y'_n + x_n y'_n - x'_n y'_n| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y'_n| + |x_n y'_n - x'_n y'_n| \\ &= |x_n| |y_n - y'_n| + |y'_n| |x_n - x'_n| \\ &< c \frac{\epsilon}{2c} + k \frac{\epsilon}{2k} = \epsilon. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Tendo estes dois lemas demonstrados, temos condições de mostrar que  $\mathbb{R}$  satisfaz as propriedades de corpo. Vejamos isso.

**Proposição 5.2.** *As operações aditiva e multiplicativa que definimos são associativas e comutativas. Além disso, existem as respectivas identidades, sendo estas  $[(0)]$  e  $[(1)]$ .*

**Demonstração:** A associatividade e a comutatividade são triviais de serem verificadas, decorrem imediatamente das propriedades dos números racionais. O mesmo acontece para as identidades. Vale observar que estes últimos são únicos. ■

**Obs.:** Se  $(x_n)$  é  $\mathbb{Q}$ -Cauchy, então a sequência  $(-x_n)$  também é  $\mathbb{Q}$ -Cauchy. De fato,  $|(-x_n) - (-x_m)| = |-1||x_n - x_m|$ .

Com isto, vemos que todo elemento em  $\mathbb{R}$  possui um inverso aditivo. Podemos assim concluir que  $\mathbb{R}$  é um anel comutativo com unidade. Precisamos ainda determinar os inversos multiplicativos. Faremos isto com mais cuidado.

Nossa intuição pode induzir-nos a definir como positivo o elemento  $x = [(x_n)]$  se  $x_n > 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Veja que isto é incoerente, pois  $(\frac{1}{n}) \sim (0)$  e  $\frac{1}{n} > 0$  para cada natural  $n$ . Do mesmo modo, se houvessem numa determinada sequência finitos termo negativos, e o restante positivos, então tal sequência poderia determinar um número positivo.

**Definição 5.3.** *Dizemos que uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  é do tipo positiva quando existirem  $c \in \mathbb{Q}$ ,  $c > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que*

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \geq c.$$

*Um elemento de  $\mathbb{R}$  será dito positivo quando for escrito como  $[(x_n)]$ , sendo  $(x_n)$  do tipo positiva.*

**Lema 5.5.** *Se  $x \in \mathbb{R}$  é positivo, então  $x \neq 0$ .*

**Demonstração:** Para verificar este fato, basta supor  $x$  positivo e  $x = 0$  simultaneamente. Sendo assim,  $x = 0 = [(0)]$  e, por ser  $x$  positivo, existe uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  do tipo positiva tal que

$x = [(x_n)]$ . Disto temos que  $[(0)] = [(x_n)]$ , ou seja,  $(x_n) \sim (0)$ . Contudo, sabemos existir  $c > 0$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$  tais que

$$n > n_1 \Rightarrow x_n \geq c.$$

Tomando  $\epsilon = \frac{c}{2}$ , podemos determinar  $n_2 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$n > n_2 \Rightarrow |x_n - 0| < \epsilon.$$

Sendo assim, para todo  $n > \max\{n_1, n_2\}$ , ocorre

$$x_n \geq c \text{ e } x_n < \frac{c}{2},$$

um absurdo. ■

**Proposição 5.3.** *Se  $x, y \in \mathbb{R}$  são positivos, então  $x + y$  e  $xy$  também o são.*

**Demonstração:** Faremos a demonstração para a operação aditiva, ressaltando que o caso multiplicativo é análogo. Considere  $(x_n)$  e  $(y_n)$  seqüências do tipo positivas representando  $x$  e  $y$ , respectivamente. Isso garante-nos a existência de  $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$  positivos e  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que

$$n > n_1 \Rightarrow x_n \geq c_1$$

e

$$n > n_2 \Rightarrow y_n \geq c_2$$

Considere  $c = c_1 + c_2$  e  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Deste modo,

$$n > n_0 \Rightarrow x_n + y_n \geq c_1 + c_2 = c,$$

pois estamos trabalhando com grandezas racionais, ou seja, valem as propriedades de corpo ordenado.

Isto conclui a demonstração. ■

**Obs.:** Definimos  $-x = [(-x_n)]$ , onde  $(x_n)$  é uma seqüência representante de  $x$ . Se  $x \in \mathbb{R}$  não for positivo nem nulo, dizemos que  $x$  é **negativo**.

**Proposição 5.4.** *Se  $x \in \mathbb{R}$  e  $x \neq 0$ , então  $x$  é positivo ou  $-x$  é positivo.*

**Demonstração:** Seja  $x = [(x_n)]$ . Note que  $[(x_n)] \neq [(0)]$ , ou seja,  $(x_n)$  e  $(0)$  não são equivalentes. Isto significa existir  $\epsilon > 0$  de modo que para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe um natural  $i \geq n$  de modo que  $|x_i - 0| \geq \epsilon$ .

Veja também que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Em particular, existe  $i_0 \geq n_0$  de modo que  $|x_{i_0}| \geq \epsilon$ , ou seja,  $x_{i_0} \geq \epsilon$  ou  $x_{i_0} \leq -\epsilon$ .

(i)  $x_{i_0} \geq \epsilon$ . Para todo  $j > n_0$ , temos  $|x_j - x_{i_0}| < \frac{\epsilon}{2}$ . Isto nos dá

$$-\frac{\epsilon}{2} < x_j - x_{i_0}$$

ou seja,  $-\frac{\epsilon}{2} + x_{i_0} < x_j$  e, sendo assim,

$$x_j > x_{i_0} - \frac{\epsilon}{2} \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Isto é, temos  $\frac{\epsilon}{2} > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $j \geq n_0$  implica  $x_j > \frac{\epsilon}{2}$ , donde concluímos que  $x$  é positivo.

(ii)  $x_{i_0} \leq -\epsilon$ . Para  $j > n_0$ , temos  $|x_j - x_{i_0}| < \frac{\epsilon}{2}$ . Consequentemente,

$$x_j - x_{i_0} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,  $x_j < \frac{\epsilon}{2} + x_{i_0}$ , e, assim,

$$x_j < \frac{\epsilon}{2} + x_{i_0} \leq \frac{\epsilon}{2} - \epsilon = -\frac{\epsilon}{2}.$$

Ou seja,  $-x_j > \frac{\epsilon}{2}$ . Isto é, obtemos  $\frac{\epsilon}{2} > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que para todo  $j \geq n_0$  implica  $-x_j > \frac{\epsilon}{2}$ . Concluímos assim que  $-x$  é positivo.

Finalmente, podemos dizer que  $x$  é positivo ou  $-x$  é positivo. ■

Observe que podemos demonstrar, utilizando os dois últimos resultados, que  $\mathbb{R}$  satisfaz uma propriedade muito conhecida: a **tricotomia**.

Vamos agora para a última etapa na demonstração de que  $\mathbb{R}$  é um corpo ordenado, que consiste em determinar, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , um inverso multiplicativo. Os próximos dois resultados são dedicados para a construção deste inverso.

**Lema 5.6.** *Seja  $(x_n)$  uma seqüência  $\mathbb{Q}$ -Cauchy do tipo positiva. Então existe  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $(\frac{1}{x_i})_{i \geq k}$  é  $\mathbb{Q}$ -Cauchy.*

**Demonstração:** Sabemos existir, para a sequência  $(x_n)$ , um  $c \in \mathbb{Q}$  positivo e um  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$i > n_0 \Rightarrow x_i \geq c.$$

Sendo assim, existe inverso multiplicativo para cada  $x_i$ , com  $i \geq n_0$ . Veja ainda que  $0 < \frac{1}{x_i} \leq \frac{1}{c}$ . Tome  $\epsilon > 0$  racional e arbitrário. Como  $(x_n)$  é  $\mathbb{Q}$ -Cauchy, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon c^2.$$

Se considerarmos  $k = \max\{n_0, n_1\}$ , então para  $m, n > k$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} \right| &= \left| \frac{x_n - x_m}{x_m x_n} \right| \\ &= |x_n - x_m| \left( \frac{1}{x_m} \cdot \frac{1}{x_n} \right) \\ &\leq |x_n - x_m| \left( \frac{1}{c^2} \right) \\ &< \frac{\epsilon c^2}{c^2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Isto prova que a sequência  $\left(\frac{1}{x_i}\right)_{i \geq k}$  é  $\mathbb{Q}$ -Cauchy. ■

Observe que no lema acima consideramos a sequência somente a partir de um determinado índice. Isto se deve ao fato de a sequência  $(x_n)$  admitir finitos termos nulos ou negativos.

**Teorema 5.2.** *Se  $x \in \mathbb{R}$  é tal que  $x \neq 0$ , então  $x$  possui inverso multiplicativo.*

**Demonstração:** Consideraremos apenas  $x$  positivo, pois, se este não for o caso, basta repetir a demonstração para  $-x$ . Seja então  $(x_n)$  uma representante para  $x$ . É claro que  $(x_n)$  é do tipo positiva. Sendo assim, existe  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $\left(\frac{1}{x_i}\right)_{i \geq k}$  é  $\mathbb{Q}$ -Cauchy. Isto significa que

$$x^{-1} := \left(\frac{1}{x_i}\right)_{i \geq k}$$

é um elemento de  $\mathbb{R}$ . Veja agora que

$$x \cdot x^{-1} = [(x_i)] \left[ \left(\frac{1}{x_i}\right)_{i \geq k} \right] = \left[ \left(\frac{x_i}{x_i}\right)_{i \geq k} \right] = [(1)].$$

Logo,  $xx^{-1} = 1$  e, pela comutatividade multiplicativa, temos  $x^{-1}x = 1$ , o que prova a existência do elemento desejado. ■

**Obs.:** Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , Dizemos que  $x < y$  quando  $x - y$  for positivo.

Com este teorema, chegamos ao objetivo principal deste tópico, que era demonstrar que  $\mathbb{R}$  é um corpo ordenado. O leitor pode, sem dificuldade nenhuma, reunir todos os ingredientes apresentados e verificar que, de fato, o conjunto que construímos satisfaz todas as propriedades necessárias para ser um corpo ordenado.

Veja que agora podemos definir o *valor absoluto* de um número real, exatamente como tínhamos para os racionais, ou seja, definimos o valor absoluto  $|x|$  de  $x$  como sendo  $x$ , se  $x$  é positivo e  $-x$ , se  $x$  for negativo. Não deixe de notar que  $|x|$  representa a distância de  $x$  até 0. Do mesmo modo, dizemos que  $|x - y|$  é a distância de  $x$  a  $y$ .

**Obs.:** Tendo dotado  $\mathbb{R}$  da noção de distância, o leitor pode verificar sem dificuldades que a imersão canônica é também isométrica, ou seja, se  $|x - y| = a$  em  $\mathbb{Q}$ , então  $|I(x) - I(y)| = [a]$  em  $\mathbb{R}$ .

### 5.3 Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

Devemos nos lembrar de que construímos o conjunto dos números reais com base no teorema do Completamento e, sendo assim, devemos garantir que a imagem de  $\mathbb{Q}$  pela imersão canônica é densa em  $\mathbb{R}$ . Esta densidade é exatamente aquela que já conhecemos: dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , com  $x < y$ , sempre podemos determinar  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < r < y$ . Observemos inicialmente que se  $(x_n)$  e  $(y_n)$  são duas seqüências  $\mathbb{Q}$ -Cauchy, e se existe um  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $x_n \leq y_n$  para  $n \geq k$ , então  $x \leq y$ . Entretanto, se ocorresse  $x_n < y_n$ , poderíamos concluir apenas  $x \leq y$ , e não  $x < y$ . Note com isto, que se  $x \in \mathbb{R}$ , se  $c$  é um racional, e se há um  $k \in \mathbb{N}$ , de modo que  $x_n \leq c$  para todo  $n \geq k$ , então  $x \leq c$ , onde vemos  $c$  como um elemento de  $\mathbb{R}$ , ou seja, como número real. De modo similar, se ocorresse  $x_n \geq c$  para todo  $n \geq k$ , teríamos  $x \geq c$ . Verifique estes fatos!

Vamos agora analisar um lema que será importante na verificação da densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$ .

**Lema 5.7** (Propriedade Arquimediana). *Se  $\epsilon > 0$  é um real positivo, então podemos encontrar  $r \in \mathbb{Q}$  de modo que  $0 < r < \epsilon$ .*

**Demonstração:** Vamos representar  $\epsilon$  pela seqüência de tipo positiva  $(\epsilon_n)$ . Sendo assim, existem  $n_0 \in \mathbb{N}$  e  $c \in \mathbb{Q}$  de modo que  $n > n_0$  implica  $\epsilon_n \geq c$ . Pelo que observamos, segue que  $\epsilon \geq c$  como números reais. Mas, pelas propriedades de corpo que  $\mathbb{Q}$  possui, sabemos existir um racional  $r$  entre 0 e  $c$ . Logo,  $0 < r < c \leq \epsilon$ . ■

A próxima proposição marca a transição do uso de epsilons racionais para epsilons reais.

**Proposição 5.5.** *Se  $(x_n)$  é uma seqüência  $\mathbb{Q}$ -Cauchy, então  $(x_n)$ , pensada como seqüência de números reais, converge para o número real  $x = [(x_n)]$ .*

**Demonstração:** Esta proposição não é tão trivial quanto parece à primeira vista. A sutileza está no fato de termos uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{Q}$ , e agora devemos considerar  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Vejamos o que deve ser

feito. Considere  $\epsilon \in \mathbb{R}$  positivo e veja que o lema anterior nos permite tomar  $\epsilon_1 \in \mathbb{Q}$  tal que  $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ . Temos assim que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon_1.$$

Tudo o que precisamos fazer agora é verificar se o índice  $n_0$  obtido será útil, ou seja, devemos mostrar que  $|x_n - x| < \epsilon$ , para  $n > n_0$ . Fixemos  $i > n_0$ . Então se  $n > n_0$ , temos

$$|x_i - x_n| < \epsilon_1,$$

ou seja,  $-\epsilon_1 < x_i - x_n < \epsilon_1$ , para todo  $n > n_0$ . Pelas observações feitas, segue que

$$-\epsilon_1 \leq [(x_i - x_n)] \leq \epsilon_1,$$

em  $\mathbb{R}$ . Note agora que  $[(x_i - x_n)] = [(x_i)] - [(x_n)]$ , ou seja,  $[(x_i - x_n)]$  representa o número  $x_i - x$ . Portanto,  $-\epsilon_1 \leq x_i - x \leq \epsilon_1$ , isto é,  $|x_i - x| \leq \epsilon_1 \leq \epsilon$ , como queríamos. ■

Este resultado tem consequências importantes! Com ele mostramos, por exemplo, que toda sequência de Cauchy de números racionais converge para algum número real e todo número real é limite de alguma sequência de Cauchy. Esta é uma primeira caracterização da densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$ .

**Obs.:** Note que agora podemos considerar tanto sequências de Cauchy em  $\mathbb{Q}$  como sequências de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Diremos que determinada sequência é de Cauchy em  $\mathbb{R}$  se para cada  $\epsilon$  **real** pudermos determinar  $n_0$  de modo que a condição de Cauchy seja satisfeita.

O teorema a seguir garante a densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$  do modo como prometemos no início do tópico.

**Teorema 5.3.** *Dados quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ , com  $x < y$ , sempre podemos encontrar  $r \in \mathbb{Q}$  de modo que  $x < r < y$ .*

**Demonstração:** Considere  $\epsilon = \frac{(y-x)}{2}$ . Como  $x$  e  $y$  são limites de sequências  $(x_n)$  e  $(y_n)$   $\mathbb{Q}$ -Cauchy, existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  de modo que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

e

$$n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \epsilon.$$

Considere agora  $a = x_{n_1}$  e  $b = y_{n_2}$ , ou seja,  $a$  e  $b$  são racionais tais que  $|x - a| < \epsilon$  e  $|y - b| < \epsilon$ . Tome  $r = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$  e veja que  $-\epsilon < a - x < \epsilon$ , donde  $x - \epsilon < a$  e, do mesmo modo, obtemos  $y - \epsilon < b$ .

Somando estas duas desigualdades, vem  $x + y - 2\epsilon < a + b$ . Portanto,

$$x + y - (y - x) < a + b.$$

Logo,  $x < \frac{a+b}{2} = r$ . De maneira análoga prova-se que  $r < y$ . ■

## 6 A completude de $\mathbb{R}$

Como vimos,  $\mathbb{R}$  foi construído como sendo o completamento de  $\mathbb{Q}$ , onde entendemos por completamento um espaço maior e tal que todas as seqüências de Cauchy convergem. Em virtude disto, a etapa final deste trabalho será demonstrar que, de fato,  $\mathbb{R}$  é completo. Antes, vamos definir formalmente o que isto significa.

**Definição 6.1.** *Um corpo ordenado será dito **completo** quando todas as seqüências de Cauchy no corpo convergirem para pontos pertencentes ao corpo.*

Perceba que já temos uma parte da demonstração feita, pois na seção anterior mostramos que toda seqüência de Cauchy em  $\mathbb{Q}$  converge para algum elemento de  $\mathbb{R}$ . Entretanto, ainda precisamos mostrar que todas as seqüências de Cauchy de *números reais* convergem em  $\mathbb{R}$ .

Para facilitar nosso trabalho, vamos verificar o seguinte lema.

**Lema 6.1.** *Se  $(x_n)$  é uma seqüência de números reais, então existe uma seqüência de racionais  $(y_n)$  tal que  $(x_n) \sim (y_n)$ , onde a equivalência é tomada no sentido real.*

**Demonstração:** Observe inicialmente que para cada  $x_n$  existe um racional  $y_n$  de modo que  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  (verifique o início da demonstração do teorema 5.3). Considere então a seqüência racional formada por todos estes elementos  $y_n$ . Seja agora  $\epsilon \in \mathbb{R}$  e positivo. Considere  $m, n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $0 < \frac{m}{n_0} < \epsilon$  (lema 5.7). Notando que  $\frac{1}{n_0} < \frac{m}{n_0}$ , temos então, para todo natural  $n > n_0$  que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Isto prova que  $(x_n) \sim (y_n)$ , como queríamos. ■

Concluiremos este trabalho com o seguinte teorema:

**Teorema 6.1.** *O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é um corpo ordenado completo.*

**Demonstração:** Considere  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy de números reais. Pelo lema anterior, existe uma seqüência  $(y_n)$  relacionada a ela e, como já demonstrado na seção anterior,  $(y_n)$  converge para algum número real. Como  $(x_n) \sim (y_n)$ , concluímos que a seqüência  $(x_n)$  converge para o mesmo número real. Isto encerra a demonstração. ■

## Referências

- [1] ÁVILA, G. *Análise matemática para licenciatura*. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.
- [2] DOERING, C. I. *Introdução à análise matemática*. 1º Colóquio de Matemática da Região Nordeste. Aracaju, 2011.
- [3] DOMINGUES, H. H. *Espaços métricos e introdução à topologia*. São Paulo: Atual, 1982.
- [4] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2007.
- [5] KREYSZIG, ERWIN. *Introductory Functional Analysis With Applications*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1978.
- [6] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

MC 7

**Ensinando Geometria com Origami:  
uma Abordagem para a Educação de  
Jovens e Adultos**

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Neuza Teramon - UEL

Graziele Coura - Graduanda Matemática UEL

Oswaldo Inarejos Filho - Graduando Matemática - UEL

# Ensinando Geometria com Origami: uma Abordagem para a Educação de Jovens e Adultos

Neuza Teramon<sup>1</sup> ([nteramon@uel.br](mailto:nteramon@uel.br))

Graziele Coura <sup>2</sup>([grazy.coura@hotmail.com](mailto:grazy.coura@hotmail.com))

Oswaldo Inarejos Filho<sup>3</sup> ([bicosvaldo@hotmail.com](mailto:bicosvaldo@hotmail.com))

Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná

## Resumo

Neste trabalho apresentamos uma proposta de ensino de geometria e conceitos matemáticos relacionados utilizando origamis como uma abordagem diferenciada para a educação de jovens e adultos. Esta modalidade de ensino representa uma promessa de efetivar um caminho de desenvolvimento de pessoas todas as idades, possibilitando melhor qualificação destes jovens e adultos.

Palavras-chave: inclusão educacional, EJA, origamis.

## 1 - O paradigma da inclusão

O professor, seja qual for o nível em que este atue, seja na educação superior ou na educação básica, desempenha papel fundamental na promoção de uma sociedade que acolhe e respeita a diferença.

Segundo SILVA o campo das reflexões sobre as relações de poder que entremeiam a educação abrangem os esforços para remover as barreiras que excluem, marginalizam e oprimem. Neste contexto, AQUINO destaca o papel do educador na compreensão das diferenças. Segundo esta autora, é preciso que o educador se volte para o desenvolvimento de um currículo e uma pedagogia multicultural que se preocupe com a especificidade da diferença e que leve em conta o reconhecimento da existência da diversidade cultural no seio das salas de aula. A mesma autora afirma que é preciso que os educadores reconheçam

---

1 Professora colaboradora do Prodocência/Matemática/UEL

2 Bolsista do PIBID/UEL

3 Bolsista do PIBID/UEL

todas as diferentes capacidades, ritmos de trabalhos, expectativas e etnias dos educandos que chegam à escola.

Somente através do envolvimento dos professores pode ser promovida a percepção e a compreensão das diferenças, e conseqüentemente, a educação inclusiva pode estabelecer-se nas práticas educacionais de modo mais abrangente.

Assim o projeto Prodocência, implementado pelas licenciaturas da Universidade Estadual de Londrina visa à integração entre a universidade e a educação básica em face dos desafios da educação inclusiva com a promoção do entendimento, reflexão e disseminação da cultura inclusiva, propondo inovações metodológicas e práticas inclusivas. Deste modo pretende-se que os profissionais da educação ampliem suas habilidades de lidar positivamente com a diferença e de refletir sobre os mecanismos que levam à exclusão.

Cabe salientar que sem a vivência de práticas inclusivas, nos cursos de formação inicial e continuada de professores, a questão da inclusão se torna, para os atuais e futuros professores, um tema tratado apenas do ponto de vista teórico, e não um conhecimento prático advindo da experiência. Com vistas a preencher esta lacuna, o projeto Prodocência tem realizado discussões sobre esta temática, com o objetivo de fortalecer reflexões conjuntas entre as licenciaturas da Universidade Estadual de Londrina sobre o processo de inclusão/exclusão social, e assuntos relacionados que subsidiam direta e indiretamente a consolidação de práticas docentes mais humanas e democráticas na escola.

Segundo a legislação vigente, a questão da inclusão regula-se por leis, diretrizes, decretos, portarias e políticas educacionais referentes às pessoas que apresentam necessidades educativas especiais (NEE) em nosso país. Podemos citar a nova LDB - Lei nº 9394/96 que dispõe um capítulo específico sobre Educação Especial (capítulo V), no qual apresenta, no artigo 58, que a Educação Especial deve ser oferecida preferencialmente no ensino regular, e complementa que quando necessário serão disponibilizados serviços e apoios necessários para atender às peculiaridades dos alunos que apresentam NEE. Além disso, no artigo 59 assegura que os sistemas de ensino oferecerão currículo, métodos, técnicas, recursos educativos e organização específica,

para atender as necessidades educacionais dos alunos especiais, bem como professores especialistas para atendimento especializado, e professores do ensino regular capacitados para inclusão destes alunos. Estes compromissos assumidos, na forma da lei, apontam avanços na direção de uma perspectiva mais inclusiva que venha a atender os alunos que apresentam NEE.

Estes compromissos estão determinados em lei desde 1996, no entanto, o que se verifica na prática é que tais compromissos não são cumpridos efetivamente em nossa realidade escolar como mostram os resultados de várias pesquisas já realizadas em nosso país (JANIAL E MANZINI, SOUZA FILHO E DURANDEGUI, VITALIANO E MANZINI). Estas pesquisas mostram que as dificuldades residem na falta das condições necessárias, quais sejam: adequações na estrutura física das escolas, materiais apropriados, professores especializados, mas, principalmente, a formação dos professores para atender e acolher estes "novos" alunos. Porém, estas investigações também apontam que os professores pesquisados identificam que a inclusão é a forma adequada de educação para maioria dos alunos com NEE, além disso, reconhecem que o modelo educacional vigente favorece a manutenção da segregação social destes alunos.

As pesquisas têm mostrado que a prática do contato social, desde que cuidadosamente planejado com crianças que apresentam NEE, combinados com treinamentos que propiciem a obtenção de conhecimentos e habilidades específicas de instrução e interação de classe têm forte influência na formação de atitudes positivas por parte dos professores em relação à inclusão, veja AVRAMIDIS & NORWICH. Estes pesquisadores concluem que as tentativas de incluir alunos que apresentam NEE podem ser tornar complicadas se não existir um plano racional de formação dos professores em relação às necessidades educativas especiais.

A constatação de que as políticas de inclusão são recentes e muitos cursos de licenciatura ainda não oferecerem formação a respeito desta matéria, os professores se encontram despreparados para promover o processo de inclusão dos alunos com NEE. Assim, o projeto Prodocência tem por finalidade estabelecer um diálogo reflexivo entre docentes do ensino superior, professores da educação básica e discentes dos cursos de

licenciatura da UEL para a construção de procedimentos que estimulem a inclusão dos alunos com NEE no ensino regular, de modo a propiciar a todos que estão envolvidos neste processo desenvolvimento e enriquecimento em sua formação relacionada à inclusão dos alunos com NEE e aos mecanismos de exclusão que ocorrem no cotidiano escolar.

O projeto Prodocência constitui-se de duas frentes: das ações comuns, que envolvem as licenciaturas da Universidade Estadual de Londrina, e das ações diferenciadas, onde cada licenciatura atua em temas que contemplam suas especificidades e interesses, porém todos estes assuntos são norteados pela proposta geral que é a inclusão educacional.

## **2 - A educação de jovens e adultos**

No contexto das ações diferenciadas, os participantes do curso de Matemática decidiram que seu objeto de estudo seria: “Inclusão e a questão da EJA – Educação de Jovens e Adultos”.

Segundo a LDB (Lei 9.394/96,) em seu artigo 37, a EJA constitui-se em uma modalidade de ensino nas etapas dos ensinos fundamental e médio destinado a jovens e adultos que não completaram os anos da Educação Básica em idade apropriada por qualquer motivo. Este segmento da educação tem como objetivo de permitir que as pessoas com idade superior a considerada adequada, possam se matricular no ensino regular. Por ser constituída como modalidade de ensino, usufrui de uma especificidade própria que, como tal, deveria receber um tratamento coerente. Desta forma as diretrizes da EJA compõem o parecer CNE/CEB 11/2000. Este documento destaca “a concepção ampliada de educação de jovens e adultos no sentido de não se limitar apenas à escolarização, mas também reconhecer a educação como direito humano fundamental para a constituição de jovens e adultos autônomos, críticos e ativos frente à realidade em que vivem”.

O acesso ao conhecimento sempre teve um papel importante na estratificação social, porém este aspecto ganha maior relevância nos dias atuais quando novas exigências intelectuais, básicas e aplicadas, vão se tornando necessidades até mesmo para a vida cotidiana.

Um fato importante a ser destacado é a função reparadora da EJA, isto é, uma educação que propõe-se a corrigir uma dívida social com aqueles que não tiveram acesso e nem domínio da

escrita e da leitura na idade escolar adequada. Visto que a educação é um direito de todos e dever do Estado, sendo assim, a EJA pode reparar este direito a quem foi negado ou impossibilitado, por quais forem os motivos, no tempo adequado. A EJA também tem por objetivo a preparação para o mercado de trabalho, considerando que muitos jovens ainda não empregados, desempregados, empregados em ocupações críticas e incertas, podem encontrar na EJA, um lugar de habilitação para o mundo do trabalho e para atribuição de significados às experiências sócio culturais trazidas por eles.

Desta forma, a educação de jovens e adultos deve ser pensada como um modelo pedagógico próprio, com o objetivo de criar situações de ensino-aprendizagem adequadas às necessidades educacionais de jovens e adultos.

A educação, como um elemento essencial para o exercício da cidadania na sociedade atual, impõe-se cada vez mais nestes tempos de grandes mudanças e inovações nos processos produtivos. Ela possibilita ao jovem e ao adulto retomar seu potencial, desenvolver suas habilidades, confirmar competências adquiridas na educação extra-escolar e na própria vida, possibilitar um nível técnico e profissional mais qualificado. Nesta linha, a educação de jovens e adultos representa uma promessa de efetivar um caminho de desenvolvimento de todas as pessoas, de todas as idades. Portanto a EJA é uma promessa de qualificação de vida para todos, inclusive para os idosos, que muito têm a ensinar para as novas gerações.

Julgamos que fazendo uso dos origamis como instrumento pedagógico para trabalhar alguns conceitos de geometria na EJA possamos colaborar de formação de docentes que atuam com a Matemática.

### **3 - Origamis: origens e finalidades**

Segundo o PCN “sem saber medir, calcular, raciocinar, argumentar ou lidar com informações estatisticamente, não dá para ser cidadão. A Matemática não trata de “verdades eternas”. Ela é dinâmica, sempre pronta para incorporar novos saberes. Os conceitos geométricos são parte importante no ensino fundamental. Por meio deles, o aluno desenvolve um tipo de pensamento que permite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo que vive. Atividades geométricas contribuem para o avanço de procedimentos de desenho ou medida. Isto pode ser feito com origami, recortes, modelagem, etc.”.

A palavra “origami”, de origem japonesa significa dobrar papel, é a junção das palavras japonesas ori=dobrar e kami=papel. O termo dobradura também é utilizado, porém a palavra origami é mundialmente reconhecida. A origem do origami é provavelmente chinesa, porém os japoneses popularizaram o uso do origami e elevaram sua prática a um *status* de arte. Segundo IMENES, a origem do origami é tão distante quanto a história do próprio papel. Em épocas anteriores ao século VI, as dobraduras já eram utilizadas em rituais religiosos. A partir do século XIX, a técnica do origami desenvolveu-se segundo os padrões que conhecemos hoje. Ao leitor interessado em aspectos históricos, o livro de ROBLES e o trabalho de PEDROSA relatam sobre o desenvolvimento do origami desde seus primórdios até os dias atuais.

Os puristas defendem que o origami clássico deve seguir algumas condições fundamentais como utilizar uma folha quadrada, não cortar, não colar.

Um simples relaxamento nas normas tradicionais permite dobrar retângulos, triângulos e outros polígonos, incluindo o papel no formato circular. Embora se considere que as operações de utilizar outros formatos de papel, cortar e colar empobrecem esta arte, elas podem ser praticadas.

O simples ato de dobrar papéis possibilita valorizar o movimento das mãos, exercitar articulações e desenvolver o cérebro. Por meio do origami inúmeras ideias e habilidades podem ser trabalhadas como: criatividade, imaginação, concentração, memória, desenvolvimento cognitivo, coordenação motora fina, paciência, socialização, organização, precisão. Especificamente, no contexto da Matemática pode-se explorar simetrias, congruências, ângulos, formas geométricas, classificação segundo medidas dos lados ou medidas dos ângulos, conceitos matemáticos e vocabulário específico da geometria, fração, proporção, observação de objetos tridimensionais, relações espaciais, volume e até mesmo o estudo do método axiomático pois, analogamente à Geometria Euclidiana, a geometria das dobraduras são regidas pelos axiomas de Huzita. Outros aspectos que podem ser explorados por meio dos origamis são os três problemas clássicos da Geometria Euclidiana que não são solúveis utilizando-se régua e compasso. No entanto, a geometria dos origamis permite a

resolução de dois deles: a trisseção do ângulo e a duplicação do cubo. Em CAVACAMI&FURUYA pode-se encontrar mais detalhes sobre os axiomas de Huzita e os problemas clássicos.

Neste trabalho apresentamos o origami como uma metodologia de ensino para EJA. Ainda no contexto da inclusão, o origami também pode ser empregado na educação de pessoas com problemas visuais, pois através da manipulação das dobraduras, conceitos matemáticos podem ser melhor compreendidos.

Em síntese, o origami é um instrumento eficaz para o ensino da Matemática. É uma das oportunidades no ensino da matemática onde se pode pôr a “mão” no objeto de estudo. Como afirma Tomoko Fuse, origamista japonesa: “Todo origami começa quando pomos as mãos em movimento. Há uma grande diferença entre conhecer alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato”.

Os conceitos geométricos a serem abordados e empregados durante as oficinas serão: divisão de segmentos e ângulos em partes congruentes, frações, triângulos equiláteros e isósceles, prismas regulares e seus elementos, relação trigonométrica no triângulo retângulo, sistemas lineares. As dobraduras que serão executadas podem ser encontradas em GENOVA.

## **Agradecimentos**

Neuza Teramon agradece a CAPES pelo auxílio financeiro concedido através do PRODOCÊNCIA.

Graziele Coura e Osvaldo Inarejos Filho agradecem a CAPES pela bolsa de estudos concedida através do PIBID.

## **Bibliografia**

AQUINO, M. A. *Educação e Cultura: aprender a viver juntos para reconhecer a diferença*, <http://www.ldmi.ufpb.br/mirian/ARTIGOEDUCA%C7%C3O%20E%20DIVERSIDADE.pdf>  
(acesso em 02/09/2012)

AVRAMIDIS, E., NORWICH, B., Teachers' attitudes towards integration / inclusion: a review of the literature :European Journal of Special Needs Education, Volume 17, Número 2, 2002 , pp. 129-147(19)

BRASIL, Parâmetros curriculares nacionais, 1997  
<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/>,(acesso em 03/09/2012)

BRASIL, Lei de diretrizes e bases da educação nacional, 1996  
[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/L9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm), (acesso em 03/09/2012)  
BRASIL, Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos, 2000  
[http://portal.mec.gov.br/setec/arquivos/pdf1/proeja\\_parecer11\\_2000.pdf](http://portal.mec.gov.br/setec/arquivos/pdf1/proeja_parecer11_2000.pdf), (acesso em 03/09/2012)

CAVACAMI, E., FURUYA, Y.,*Explorando geometria com origami*, PIC/OBMEP, 2011.

GENOVA, C., *Origami, dobras, contas e encantos*, São Paulo, Escrituras Editora, 2009.

JANIAL, M. I.; MANZINI, E. J., Integração de alunos deficientes sob o ponto de vista do diretor de escola. In: MANZINI, E. J. (Org).*Integração do aluno com deficiência: perspectiva e prática pedagógica*. Marília: UNESP-Marília-Publicações, 1999. p. 1-25.

IMENES, L., *Geometria das dobraduras*, São Paulo. Editora Scipione,1997.

PEDROSA, F., *Origami e Matemática*,  
<http://pt.scribd.com/doc/44838276/origami-e-matematica-trab-seminario>, (acesso em 02/09/2012)

ROBLES, M., *Origami, a divertida arte das dobraduras de papel*, São Paulo, Marco Zero, 2010.

SILVA, T. *A produção social da diferença e da identidade*. In: Identidade e diferença: a perspectiva dos estudos culturais. Petrópolis: Vozes, 2000.

SOUZA FILHO, E. A., DURANDEGUI, A. B., Representações sociais de grupos minoritários -Histórias de múltiplos caminhos e expressões. *Anais. I Jornada Internacional sobre Representações Sociais-Teoria e Campos de Aplicação* (p.6). Natal: UFRN/UFRJ/EHESS/MSH, 1999.

SUZUKI, S., MARQUES, R., PARRA, D., *A geometria do origami*,

<http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/origami.pdf> (acesso em 02/09/2012)

VITALIANO, C. R.; MANZINI, E. J.; Relato de professores que têm alunos especiais integrados: suas dificuldades, procedimentos que utilizam e sugestão para futuros professores. In: MARQUEZINE, M. C.; ALMEIDA, M. A.; TANAKA, E. D. O. (Orgs) *Perspectivas multidisciplinares em educação especial II*. Londrina: UEL, 2001. p. 119-125.

## MC 8

# Matemática e América Latina

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Angela Marta P. das Dores Savioli - UEL  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Márcia F. Tucci de Carvalho - UEL  
Tiago Yamamoto - Graduando Matemática UEL

MC 9

# Estudando Cálculo I com o *GeoGebra*

Prof<sup>a</sup>. Ms. Márcia C. D'Amico P. Machado - UEL

# Oficinas

Of 1

# Sistemas de Equações Lineares: uma Abordagem com a Utilização de Calculadoras Gráficas

Prof. Ms. Bruno Rodrigo Teixeira - UEL

Prof<sup>a</sup>. Ms. Loreni Aparecida Ferreira Baldini - FAP

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Márcia Cristina de Costa T. Cyrino - UEL

# Sistemas de equações lineares: uma abordagem com a utilização de Calculadoras Gráficas<sup>1</sup>

Bruno Rodrigo Teixeira<sup>2</sup>  
Loreni Aparecida Ferreira Baldini<sup>3</sup>  
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino<sup>4</sup>

## Tarefas:

1) Utilizando a calculadora gráfica e recorrendo a representação matricial, obtenha a(s) solução(ões) dos sistemas de equações lineares a seguir. Quantas soluções reais cada um deles possui? a)

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = -1 \\ -3x + 3y = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 12x + 20y = -50 \end{cases}$$

Como são classificados estes sistemas de equações quanto à sua solução?

---

2) Represente graficamente cada um dos sistemas de equações da questão anterior na calculadora gráfica. (Obs.: as equações que compõem cada sistema devem ser representadas em um mesmo plano cartesiano). Em seguida classifique cada par de retas representado, quanto à posição relativa entre elas.

---

3) Utilizando a calculadora gráfica, resolva os sistemas de equações a seguir, represente-os graficamente e responda as questões:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 5y = 2 \\ 3x + 15y = 6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 8x - 12y = -28 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -12x + 26y = -6 \\ -6x + 13y = -3 \end{cases}$$

Quantas soluções cada um dos sistemas possui? Qual a posição relativa entre as retas que representam cada um dos sistemas? É possível estabelecer alguma relação entre os coeficientes das equações que compõem cada sistema, a quantidade de soluções que o mesmo possui e a posição relativa entre as retas que os representa? Em caso afirmativo, qual (is)? Justifique sua resposta.

---

<sup>1</sup> Apoio: CNPq, CAPES e Fundação Araucária.

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Matemática da UEL – Universidade Estadual de Londrina. [bruno@uel.br](mailto:bruno@uel.br).

<sup>3</sup> Professora da Educação Básica da Rede Pública Estadual do Paraná e da FAP – Faculdade de Apucarana – PR. [loreni@ibest.com.br](mailto:loreni@ibest.com.br)

<sup>4</sup> Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL – Universidade Estadual de Londrina – PR/Brasil. [marciacyrino@uel.br](mailto:marciacyrino@uel.br)

4) Utilizando a calculadora gráfica, resolva os sistemas de equações a seguir, represente-os graficamente e responda as questões:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 7x - 5y = -3 \\ 14x - 10y = 18 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ -5x + 10y = 45 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 27x + 18y = 90 \end{cases} \end{array}$$

Quantas soluções cada um dos sistemas possui? Qual a posição relativa entre as retas que representam cada sistema? É possível estabelecer alguma relação entre os coeficientes das equações que compõem cada sistema, a quantidade de soluções que o mesmo possui e a posição relativa entre as retas que os representa? Em caso afirmativo, qual (is)? Justifique sua resposta.

---

5) Considere um sistema de equações em que uma delas corresponde à  $5x+8y=3$ . Acrescente outra equação a esse sistema de modo que:

- a) possua uma única solução
- b) possua infinitas soluções
- c) não possua solução

Você utilizou algum critério para obter a equação que satisfizesse a representação gráfica em cada item? Justifique.

---

6) Considere um sistema de equações em que uma delas é  $4x+3y=9$ . Acrescente outra equação a esse sistema de modo que sua representação gráfica corresponda a:

- a) duas retas concorrentes
- b) duas retas coincidentes
- c) duas retas paralelas

Você utilizou algum critério para obter a equação que satisfizesse a representação gráfica em cada item? Justifique

---

7) *Uma investigação com sistemas de equações do 1.º grau*<sup>5</sup>.

Considere o sistema de equações do 1.º grau:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 3x + 7y = -15 \end{cases}$$

- a) Utilizando a calculadora gráfica, represente graficamente este sistema.
- b) Multiplique a primeira equação do sistema indicado por diversos valores, positivos e negativos, por exemplo: 2, 3, -1... e represente graficamente, no mesmo referencial que as duas equações iniciais do sistema, as várias equações que for obtendo. O que acontece com a representação gráfica desta equação?
- c) Adicione agora a primeira equação do sistema apresentado no enunciado, termo a termo, com a segunda equação do sistema e represente graficamente a equação obtida. O que acontece?

<sup>5</sup> Adaptado de: **ÁLGEBRA NO ENSINO BÁSICO. Ponte, J. P.; Branco, N.; Matos, A. 2009. p.164.**

d) Para resolver o sistema pelo método da adição termo a termo, poderíamos ter multiplicado a primeira equação por  $-3$  e a segunda equação por  $5$ . Efetue estas multiplicações, adicione, termo a termo, as equações obtidas, e faça a representação gráfica da equação resultante. Escreva a sua compreensão a respeito da representação gráfica da equação resultante.

Of 2

**Construindo Atividades Interativas  
com o *GeoGebra*: Recursos Básicos e  
Intermediários**

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi - UFF

**Of 3**

# **Trabalhando com o Teorema de Pick**

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Alexandra Oliveira Abdala Cousin - UEM

**Of 4**

## **Mostra de Trabalhos de Prática**

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ana Márcia F. Tucci de Carvalho - UEL  
Alunos do 4<sup>o</sup> ano da Licenciatura em Matemática - UEL

Of 5

## Círculos de Problemas Matemáticos

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ana Lucia da Silva

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Regina Célia Guapo Pasquini

## Realização:

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS - CCE  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
LONDRINA - PR

## Comissão Organizadora:

SILVIA GRANDI DOS SANTOS - COORDENADORA  
ANGELA SACAMOTO  
MICHELE DE OLIVEIRA ALVES  
REGINA CÉLIA G. PASQUINI

## Alunos do curso de Matemática - UEL

## Apoio:

PAULO ROGÉRIO CORSO (APOIO TÉCNICO)  
EDUARDO PEREIRA CAMPOS (TÉCNICO EM INFORMÁTICA)

## Patrocínio:



Universidade  
Estadual de Londrina



SECRETARIA DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E ENSINO SUPERIOR

FUNDAÇÃO  
ARAUCÁRIA  
Apoio ao Desenvolvimento Científico  
e Tecnológico do Paraná



## Apoio:

