NÚMERO DE OURO

Giuliano Miyaishi Belussi
Giu_mb@yahoo.com.br
Daniel Aparecido Geraldini
Danielgeraldini@gmail.com
Enéias de Almeida Prado
Neneias13@yahoo.com.br
Profª. Ms. Maria Bernadete Barison
barison@uel.br
Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina
Caixa Postal 6001, 86051-990, Londrina – PR – Brasil

RESUMO

Com o desenvolvido do site *Geométrica* foi possível desenvolver um hipertexto sobre a Proporção Áurea. Buscou-se descobrir as aplicações desta proporção nas diversas áreas do conhecimento. Com esse estudo foi possível fazer uma análise histórica contextual da Geometria no que tange a Proporção Áurea. Séculos antes de Cristo, os pitagóricos estudaram as relações entre os segmentos de um pentagrama e descobriram um número que tem muita importância na geometria estética arquitetura e biologia. Este número que foi, mais tarde, chamado de número de ouro e foi designado de numero phi, por ser a inicial do nome de Fídias, escultor e arquiteto grego que utilizou a proporção de ouro em muitos dos seus trabalhos, inclusive nas dimensões da fachada do Partenon . O número de ouro surgiu a partir da idéia de dividir um segmento AB em duas partes, e sabe–se que existem infinitas maneiras de o fazer. Entretanto, existe uma que parece ser mais agradável aos olhos e que transmite aos nossos sentidos uma operação harmoniosa. Essa proporção é útil entre outras coisas, para se traçar com perfeição o pentagrama, o quadrado oblongo (ou sol) e o Delta. Em arquitetura é útil para entender a escala de medidas utilizadas em ergonomia que foi idealizada pelo arquiteto Lê Corbusier em seus projetos. Todas essas aplicações, entre outras, serão abordadas neste trabalho.

Palavras chave: Número de Ouro, Desenho Geométrico, Matemática, História, Aprendizagem, Geometria.

1. INTRODUÇÃO

O número de ouro não é mais do que um valor numérico cujo valor aproximado é 1,618. Este número irracional é considerado por muitos o símbolo da harmonia. A escola grega de Pitágoras estudou e observou muitas relações e modelos numéricos que apareciam na natureza, beleza, estética, harmonia musical e outros, mas provavelmente a mais importante é a razão áurea, razão divina ou proporção divina. Se quiséssemos dividir um segmento *AB* em duas partes, teríamos uma infinidade de maneiras de o fazer. Existe uma, no entanto, que parece ser mais agradável à vista, como se traduzisse uma operação harmoniosa para os nossos sentidos. Relativamente a esta divisão, o matemático alemão Zeizing formulou, em 1855, o seguinte princípio:

"Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo."

2. A HISTÓRIA DO NÚMERO DE OURO

A história deste enigmático número perde-se na antiguidade. No Egito as pirâmides de Gizé foram construídas tendo em conta a razão áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro, conforme pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 – A pirâmide de Khéops, em Gisé.

Outro exemplo da proporção áurea na antiguidade é o Papiro de Rhind (Egípcio) ou Ahmes que mede 5,5 metros de comprimento por 0,32 metros de largura, datado aproximadamente no ano 1650 a.C. onde encontramos um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Refere-se a uma «razão sagrada» que se crê ser o número de ouro. Esta razão ou seção áurea também aparece em muitas estátuas da antiguidade. O Papiro de Rhind pode ser observado na Figura 2.

Figura 2 - Papiro de Rhind (Egípcio) ou Ahmes (Museu Britânico)

Construído há muitas centenas de anos depois, por volta de 447 e 433 a.C., o Partenon Grego, templo representativo do século de Péricles contém a razão de Ouro no retângulo que contem a fachada, o que revela a preocupação de realizar uma obra bela e harmoniosa, o qual pode ser observado na Figura 3. Fídias foi o escultor e o arquiteto encarregado da construção deste templo. A designação adaptada para o número de ouro é a inicial do nome deste arquiteto - a letra grega Φ (Phi maiúsculo).

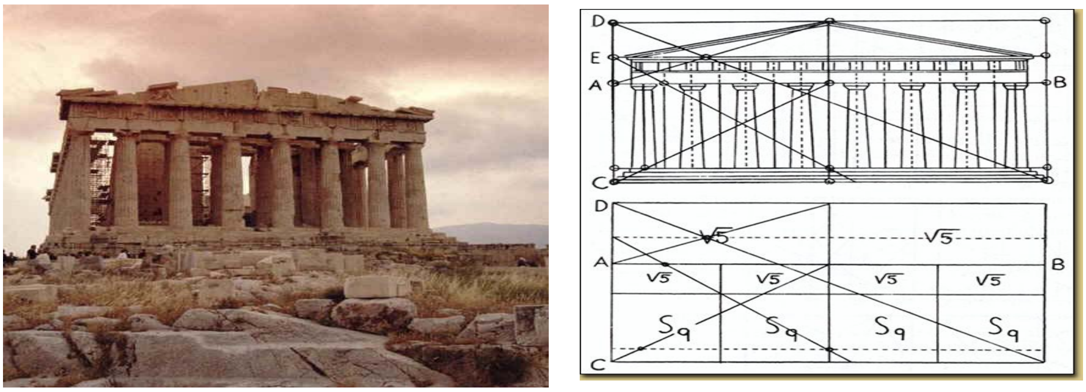


Figura 3 - Partenon Grego.

Os Pitagóricos usaram também a seção de ouro na construção da estrela pentagonal, a qual pode ser observada na Figura 4.

Figura 4 - Estrela pentagonal.

Os pitagóricos não conseguiram exprimir como quociente entre dois números inteiros, a razão existente entre o lado do pentágono estrelado e o lado do pentágono regular inscritos numa circunferência. Quando chegaram a esta conclusão ficaram muito espantados, pois tudo isto era muito contrário a toda a lógica que conheciam e defendiam que lhe chamaram irracional. Foi o primeiro número irracional de que se teve consciência que o era. Este número era o número ou seção de ouro apesar deste nome só lhe ser atribuído 2000 anos depois.

Posteriormente, os gregos consideraram que o retângulo cujos lados possuía esta relação apresentava uma especial harmonia estética e lhe chamaram retângulo áureo ou retângulo de ouro, considerando esta harmonia como uma virtude excepcional. Endoxus foi um matemático grego que se tornou conhecido devido à sua teoria das proporções e ao método da exaustão, criou uma série de teoremas gerais de geometria e aplicou o método de análise para estudar a seção que se acredita ser a seção de ouro.

3. LEONARDO DA VINCI (1452-1519)

A excelência dos desenhos de Leonardo da Vinci revela os seus conhecimentos matemáticos bem como a utilização da razão áurea como garante de uma perfeição, beleza e harmonia únicas. É lembrado como matemático apesar da sua mente irrequieta não se concentrar na aritmética, álgebra ou geometria o tempo suficiente para fazer uma contribuição significativa. Representa bem o homem tipo da renascença que fazia de tudo um pouco sem se fixar em nada. Leonardo era um gênio de pensamento original que usou exaustivamente os seus conhecimentos de matemática, nomeadamente o número de ouro, nas suas obras de arte. Um exemplo é a tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas de Leonardo, a qual foi inspirada no pentágono regular e estrelado inscrito na circunferência, conforme pode ser observado na Figura 5.

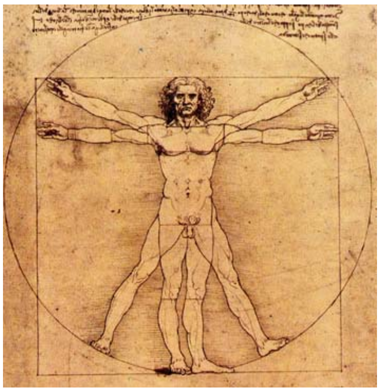


Figura 5 - Representação do homem por Leonardo da Vinci.

Na pintura do renascimento destaca-se um dos quadros mais célebres de Leonardo da Vinci : a Mona Lisa, que apresenta o retângulo de Ouro em múltiplos locais: (a) desenhando um retângulo à volta da face o retângulo resultante é um retângulo de Ouro; (b) dividindo este retângulo por uma linha que passe nos olhos, o novo retângulo obtido também é de Ouro e (c) as dimensões do quadro também representam a razão de Ouro. Isto pode ser verificado na Figura 6.

Figura 6 - Leonardo da Vinci : Mona Lisa.

4. FIBONACCI

O Matemático Italiano Leonardo de Pisa nasceu na Itália por volta de 1175 e ficou conhecido como Fibonacci (filho de Bonaccio). A partir da publicação do livro Liber Abacci , (livro do Ábaco) em 1202, Fibonacci tornou-se famoso, principalmente devido aos inúmeros temas desenvolvidos nesse trabalho. Nele aparecem estudos sobre o clássico problema envolvendo populações de coelhos, o qual foi a base para o estabelecimento da célebre seqüência (números) de Fibonacci.

Leonardo de Pisa (Fibonacci = filius Bonacci) matemático e comerciante da idade média, escreveu em 1202 um livro denominado Liber Abacci, que chegou a nós, graças à sua segunda edição de 1228. Este livro contém uma grande quantidade de assuntos relacionados com a Aritmética e Álgebra da época e realizou um papel importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes pois por este livro que os europeus vieram a conhecer os algarismos hindus, também denominados arábicos.

A teoria contida no livro Liber Abacci é ilustrada com muitos problemas que representam uma grande parte do livro. Um dos problemas que está nas páginas 123 e 124 deste livro é o Problema dos pares de coelhos (paria coniculorum): _Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano? Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida. Como o par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no início do segundo mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens, assim no início do mês 1 existirão 2 pares: 1 par adulto + 1 par recém nascido. Esse problema aparece esquematizado na Figura 7.

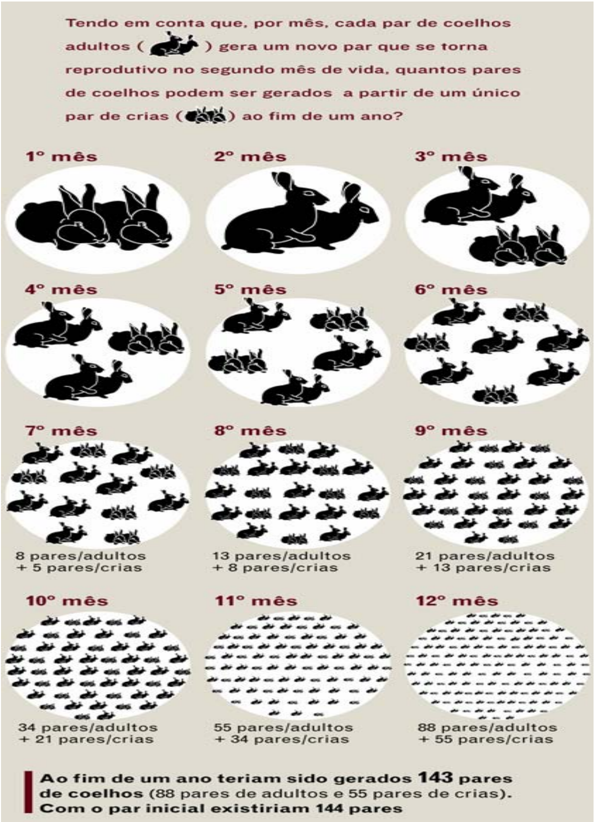


Figura 7 – Esquema do problema dos coelhos.

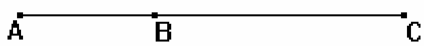
Tal processo continua através dos diversos meses até completar um ano. Observa-se esta formação no gráfico com círculos, mas também se pode perceber que a seqüência numérica, conhecida como a seqüência de Fibonacci, indica o número de pares ao final de cada mês:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}$$

Pode–se verificar que a razão entre os termos desta seqüência convergirá para o numero de ouro.

5. A RAZÃO ÁUREA E O NÚMERO DE OURO

De uma forma mais simplificada podemos chegar ao numero de ouro e para isso vamos utilizar o seguinte processo: Considere o segmento de reta, cujas duas extremidades se denominarão de A e C, e colocando um ponto B entre A e C (neste caso o ponto B estará mais perto de A) , de maneira que a razão do segmento de reta mais pequeno (AB) para o maior (BC) seja igual à razão do maior segmento (BC) para o segmento todo (AC):



A razão entre os comprimentos destes segmentos designa-se habitualmente por seção áurea. Então, tem-se que:

$$(AB) / (BC) = (BC) / (AC)$$

Pode-se então definir o número de ouro se fizer:

$$AB = y$$
$$BC = x$$
$$AC = x + y$$

O número de ouro vai ser a razão entre x e y:

$$y / x = x / (x + y)$$

Se ainda substituir y por 1 tem-se:

$$1 / x = x / (x + 1)$$

Multiplicando ambos os lados por x (x + 1), obtém-se:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Resolvendo esta equação quadrática, obtém-se as seguintes soluções:

$$x_1 = (1 + \sqrt{5}) / 2$$
$$x_2 = (1 - \sqrt{5}) / 2$$

Não se irá considerar o segundo valor (x_2), tendo em conta que o comprimento de um polígono, nunca poderá ser negativo. Chega-se então, ao que se pretende, isto é, encontrou-se o tão esperado número de ouro Φ (Phi):

$$\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$$

6. O NÚMERO DE OURO NA NATUREZA

Pode-se observar também algumas aplicações do numero de ouro na natureza, no corpo humano e na arquitetura.

Os números de Fibonacci podem ser usados para caracterizar diversas propriedades na Natureza. O modo como as sementes estão dispostas no centro de diversas flores é um desses exemplos. A Natureza "arrumou" as sementes do girassol sem intervalos, na forma mais eficiente possível, formando espirais logarítmicas que tanto curvam para a esquerda como para a direita. O curioso é que os números de espirais em cada direção são (quase sempre) números vizinhos na seqüência de Fibonacci. O raio destas espirais varia de espécie para espécie de flor, conforme indicado na Figura 8.

Figura 8 - Sementes do girassol

Existem espirais relacionadas com o número de ouro, como, por exemplo, os moluscos náuticos ou a simples couve-flor, conforme ilustrado na Figura 9.

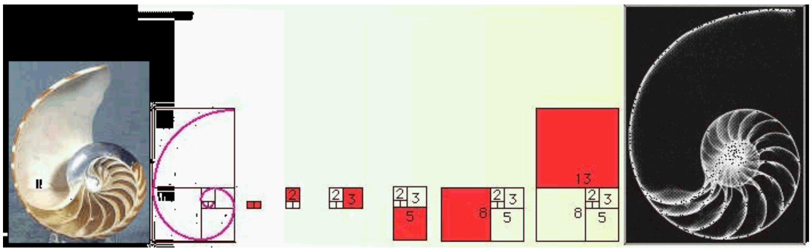


Figura 9 - Moluscos náuticos vistos em seção.

O número de ouro, tem também, através dos tempos, influenciado a arte através do retângulo áureo que é considerado perfeito pois é o retângulo mais agradável à visão. Nesse retângulo, a razão entre o lado maior e o lado menor é o número de ouro. Esta razão recebeu o nome Número de Ouro dos Gregos, mais especificamente do escultor grego Phidias.

7. A PROPORÇÃO ÁUREA NA ARQUITETURA

Pode-se encontrar retângulos de ouro associados a numerosas obras de arquitetura tal como o Parthenon, em Atenas, nas obras do arquiteto Lê Corbusier. Uma dessas obras de lê Corbusier aparece ilustrada na Figura 10 onde se pode notar claramente a utilização de retângulos áureos.

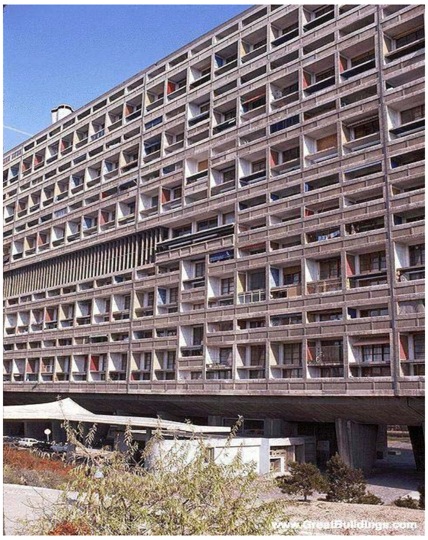


Figura 10 – Unidade de habitação, Marseilles, Fr. 1946, por Lê Corbusier.

Entre 1942 e 1948, Le Corbusier desenvolveu um sistema de medição que ficou conhecido por "Modulor". O Modulor está baseado na razão de ouro e nos números de Fibonacci e usa também as dimensões médias humanas (dentro das quais 183 cm é a altura standard). O Modulor é uma seqüência de medidas que Le Corbusier usou para encontrar harmonia nas suas composições arquiteturais. O Modulor foi publicado em 1950 e depois do grande sucesso, Le Corbusier veio a publicar, em 1955, o "Modulor 2" que pode ser observado na Figura 11.

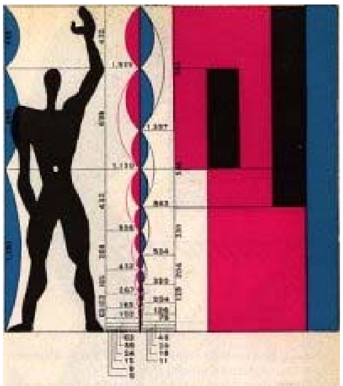


Figura 11 – "Lê Modulor"

Le Corbusier esforçou-se por usar a espiral de ouro inscrita no retângulo áureo em alguns dos seus trabalhos arquitetônicos mas não obteve um resultado muito brilhante, pelo menos quando comparados com os de outros arquitetos, como é o caso de Tatlin o que pode ser visto nas Figuras 12 e 13 respectivamente.

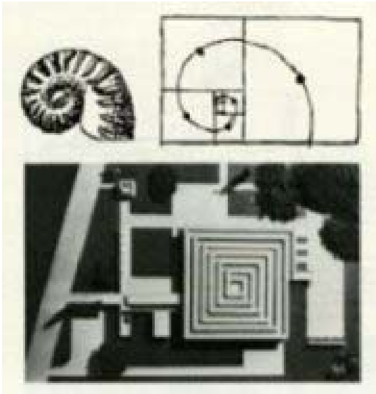


Figura 12 - Um exemplo de um edifício espiral, por Lê Corbusier

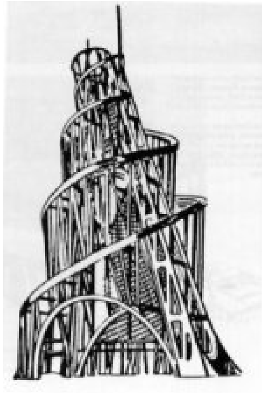


Figura 13 - Torre de Tatlin

7. A PROPORÇÃO ÁUREA NA MÚSICA

Pitágoras de Samos (582 a.C. - 497 a.C.) é considerado o fundador da geometria teórica. Em seus pensamentos sobre a estrutura do universo, razões e proporções, ele elaborou uma teoria que vinculava a música, o espaço e os números.

Em duas cordas, de mesmo material, sob mesma tensão e sendo a primeira o dobro do comprimento da segunda, quando tocadas, a corda mais curta irá emitir um tom uma oitava acima da corda mais longa, devido a sua freqüência ter o dobro do valor. Ou seja, a relação de 1:2 compreende a relação sonora de uma oitava.

Se dividirmos a corda mais curta pela metade, obtendo a relação de 2:4, o tom será de duas oitavas acima da corda inicial. Por outro lado, a relação de 3:4 nos dá um tom uma quarta acima do tom inicial, e a relação de 2:3 apresenta um tom uma quinta acima.

Desta maneira, Pitágoras elaborou relações entre sons, o tamanho das cordas e as razões de 1:2:3:4. Ainda sobre os pensamentos pitagóricos, podemos obter três tipos de proporções: (a) a proporção geométrica se estabelece entre oitavas de um tom, ou seja, 1:2:4 o tom uma oitava acima e duas oitavas acima; (b) a proporção aritmética, ao se apropriar da relação de 2:3:4, se estabelece ao trabalhar o som de uma oitava em uma quinta e uma quarta e (c) a proporção harmônica envolve a diferença dos valores das frações medianas, isto é, na relação de 6:8:12, 8 excede 6 em um terço da mesma maneira que 12 excede 8 também em um terço.

A proporção harmônica pode ser considerada uma subversão da proporção aritmética, trabalhando o som de uma oitava em uma quarta e uma quinta. Na música, existem artigos que relacionam as composições de Mozart, Bethoveen (Quinta Sinfonia), Schubert e outros com a razão áurea. Pode-se verificar na figura 14 que até mesmo a construção de instrumentos, como exemplo o violino, está relacionado com a proporção áurea.

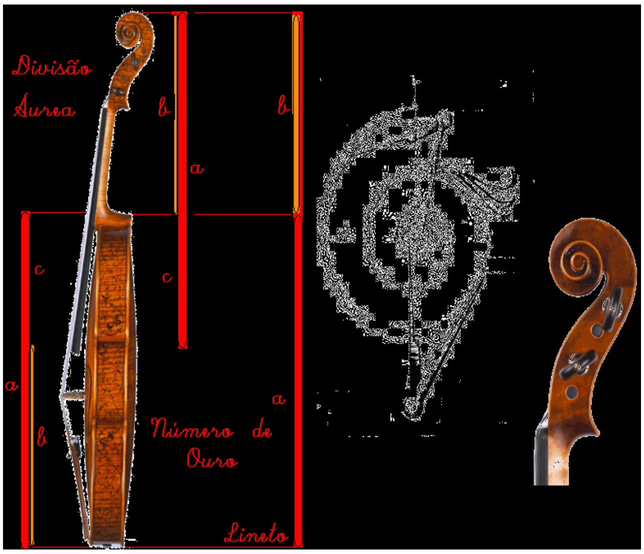


Figura 14 - Violino

8. CONCLUSÃO

O número de ouro é considerado por muitos estudiosos um símbolo da harmonia. Pode ser encontrado em nosso cotidiano, de forma real e em muitos monumentos históricos. Aparece na natureza, na arte, arquitetura, música e nos seres humanos. Surgiu da necessidade que os antigos tinham de utilizar a contagem como forma matemática para aplicá-las em seus negócios.

Fibonacci deu uma grande contribuição à Geometria com a sua descoberta, a qual está relacionada com a solução do problema dos coelhos. Grandes pintores como Leonardo Da Vinci usou a razão áurea em seus trabalhos. Todos esses exemplos nos levam a perceber quão grande é a importância deste número que por este motivo foi chamado "de ouro".

7. REFERÊNCIAS

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.htm
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/provaouro.htm
http://members.tripod.com/caraipora/proporouro.htm
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/num_ouro.htm
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib1.htm
http://pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/FiFibonacci_Expresso_20041009.htm
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/num_ouro.htm
http://www.perfeitauniao.org/pficial/2004/a_proporcao_aurea.htm