PET Física UEL

APOSTILA DE MATEMÁTICA BÁSICA

- Potenciação
- Radiciação
- Fatoração
- Logaritmos
- Equações
- Polinômios
- Trigonometria

Potenciação

O que é preciso saber (passo a passo)
Seja:

$$a^{\mathbf{n}(\text{expoente})}_{(\text{base})}$$

O expoente nos diz quantas vezes à base será multiplicada, isto é:

Ex 1) $2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$
Traduzindo: base 2 elevado ao expoente 3 obtemos a potência 8.

Ex 2) $(-2)^3 = (-2) . (-2) . (-2) = -8$
Traduzindo: base (-2) elevado ao expoente 3 obtemos a potência –8

Veja:
-2^3 é o mesmo que $-1 . 2^3 = -1 . 8 = -8$
$(-2)^2$ é o mesmo que $(-1 . 2)^2 = [(-1)^2 . 2^2] = 1 . 4 = 4$

Então fica fácil explicar porque:

$$-2^2 \neq (-2)^2$$

$$-1 . 2^2 = -4$$

$$(-1 . 2)^2 = (-1) . (2)^2$$

$$1 . 4 = 4$$

$$-4 \neq 4$$

Exercício:
Será que a afirmação $(-2)^n = - 2^n$ é verdadeira para todo "**n**" natural?
É óbvio que o sinal da potência vai depender da análise, ou seja, se "n"é par ou ímpar.

1º Caso: Se "**n**" é par temos:

$$(-2)^n = -2^n$$

$$[(-1) . 2]^2 = -1 . 2^n$$

$$(-1)^n . 2^n$$

$$+2^n \qquad -2^n$$

Conclusão $2^n \neq -2^n$ se "n" for par

2º Caso: se “**n**” é ímpar temos:

$(-2)^n = -2^n$

$[(-1) . 2]^n = -1 . 2^n$

$(-1)^n . 2^n = -1 . 2^n$

$-2^n = -2^n$

Conclusão: $(-2)^n = -2^n$ somente se “n” for ímpar

Propriedades da potenciação

***Propriedade*:** em produtos de mesma base , conserva-se a base e somam-se os expoentes:

$$a^m . a^p = a^{m+p}$$

Veja:
$a^{m+p} = a^m . a^p$
$2^{n+3} = 2^n . 2^3 = 2^n . 8$
$2^{n+p+q} = 2^n . 2^p . 2^q$

Obs: caso existir uma série de termos, não se esqueça de colocar o termo comum em evidência.

Ex: $2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+1}$
$2^n . 2^2 + 2^n . 2^3 + 2^n . 2^1$
$2^n(2^2 + 2^3 + 2)$
$2^n(14)$

Facilita e muito a análise das propriedades se você escolher números que podem ser representados na mesma base. Na multiplicação, use:
8 . 4
9 . 27
5 . 25

Os quais serão convertidos em:
$8 . 4 = 2^3 . 2^2 = 2^5$
$9 . 27 = 3^2 . 3^3 = 3^5$
$5 . 25 = 5^1 . 5^2 = 5^3$

***Propriedade*:** em divisão de potência de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$$

Ex: $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$

***Interessantíssimo*:** você sabe o porquê de todo número elevado a zero ser igual a 1?

$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

Para você provar, basta representar uma fração onde o numerador e o denominador sejam iguais.

Ex: $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{8}} = 1$ aplicando a propriedade: $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$$\frac{\mathbf{8^1}}{\mathbf{8^1}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{8^{1-1}} = \mathbf{1}$$

$8^0 = 1$

Conclusão: $a^0 = 1$ é uma consequência da propriedade

***Propriedade*: $(a^m)^p = a^{mp}$**
O expoente nos diz quantas vezes à base será multiplicada.

Ex: $(a^3)^2 = a^6$
ou
$(a^3)^2 = a^3 . a^3 = a^{3+3} = a^6$

Ex: $(a^2)^4 = a^8$
ou
$(a^2)^4 = a^2 . a^2 . a^2 . a^2 = a^8$

***Propriedade*: $(a^m . b^p)^q = a^{mq} . b^{pq}$**

Ex: $(2^3 . 5^2)^4 = 2^{12} . 5^8$

***Interessantíssimo*:** em física e química é comum às operações básicas serem efetuadas através de potência de 10.

Obs: o coeficiente da potência de 10 sempre deverá ser um número no intervalo de 1 a 9. **$p . 10^n$,** isto é, **$1 < p < 9$**.

Ex: (0,0001) introduzir 10^0

$(0{,}0001 . 10^0)$ diminui aumenta

$(1 . 10^{0-4})$

$(1 . 10^{-4})$

Exercícios:

I-Simplifique as expressões **a – b ≠ 0**

a- $(a^2 . b^3)^2 . (a^3 . b^2)^3$

b- $\dfrac{(a^4.b^2)^3}{(a.b^2)^2}$

c- $[(a^3 . b^2)^2]^3$

II-Calcule:

a- 3^{-1} b- $(-2)^{-1}$ c- -3^{-1} d- $-(-3)^{-1}$

e- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$ f- $\left(\dfrac{-3}{2}\right)^{-3}$ g- $(0{,}25)^{-3}$ h- $(- 0{,}5)^{-3}$

III-Calcular o valor das expressões:

a- $\dfrac{2^{-1}-(-2)^2+(-2)^{-1}}{2^2+2^{-2}}$

b- $\dfrac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 . \left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{\left[\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2\right]^3}$

V-Simplificar as expressões:

a- $a^{2n+1}.a^{1-n}.a^{3-n}$

b- $a^{2n+3}.a^{n-1}$

Radiciação

O que é preciso saber

Seja:

$\sqrt[n]{A}$

$\sqrt{\ }$ ⟶ raiz

A ⟶ radicando

n ⟶ índice

Se "n" é ímpar, então:

$\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n} = \forall x \in R$ (é verdadeiro para todo "x" pertencente aos reais)

Ex: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-1.8} = \sqrt{[(-1)(2)]^3} = \sqrt{[(-1)^3(2)^3]} = -1.3 = -3$

Se "n" e "p" tem representação par, então a raiz enésima de "x^p" sempre será positiva.

1º Caso: se "p" é par e "n" também é par, sendo p/n par, isto é, $\frac{p}{n} = 2k$, então $\sqrt[n]{x^p} = x^{2k}$, esta sentença é verdadeira para todo "x" pertencente aos reais.

Ex: $\sqrt{x^4} = x^2 \quad \forall x \in R$

Propriedades da radiciação

***Importantíssimo*: o primeiro passo a ser feito para aplicarmos as propriedades de radiciação é <u>fatorar</u>, isto é, decompor em fatores primos o radicando (A)**

Ex: $\sqrt[3]{64}$

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 4$

Propriedade: $\sqrt[n]{a^p . b^q} = a^{p/n} . b^{q/n}$

Ex: $\sqrt{36}$

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$\sqrt{36} = \sqrt{2^2 . 3^2}$

$2^{2/2} . 3^{2/2} = 2 . 3 = 6$

Propriedade: seja $\sqrt[n]{a^p}$ se p > n e "p" não é divisível por "n" , então procure um múltiplo de "n" abaixo do valor de "p"

Ex: $\sqrt[5]{2^{12}} = \sqrt[5]{2^{10}.2^2} = \sqrt[5]{2^{10}}.\sqrt[5]{2^2} = 2^2.\sqrt[5]{2^2}$

$$\sqrt[7]{a^{18}} = \sqrt[7]{a^{14}.a^4} = \sqrt[7]{a^{14}}.\sqrt[7]{a^4} = a^2.\sqrt[7]{a^4}$$

Propriedade: $\sqrt[n]{a^n.b^n} = \sqrt[n]{(a.b)^n} = a.b \qquad (a \geq ;b \geq 0)$

Comentário: se os expoentes das bases são iguais então coloque-o em evidência; isto nos facilita e muito.

Ex: $\sqrt{700} = \sqrt{7.2^2.5^2} = \sqrt{7(2.5)^2} = \sqrt{7.10^2} = 10\sqrt{7}$

$$\sqrt{\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{2^4}{3^4}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Propriedade: $p.\sqrt[n]{a} + q.\sqrt[n]{a}$

Coloque $\sqrt[n]{a}$ em evidência:

$$\sqrt[n]{a}(p+q)$$

Ex: $\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{72} - \sqrt{50}$

$$\sqrt{2^3} + \sqrt{2^5} + \sqrt{2^3.3^2} - \sqrt{5^2.2}$$

$$\sqrt{2^2.2} + \sqrt{2^4.2} + \sqrt{2.2^2.3^2} - \sqrt{5^2.2}$$

$$2\sqrt{2} + \sqrt{2^4.2} + \sqrt{2.2^2.3^2} - 5\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} + 2.3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}(2+4+6-5) = 7\sqrt{2}$$

***Importantíssimo*:** quando existir apenas produto e (ou) divisão de radicais é preferível transformar todas as raízes em forma de potência.

Veja:

$$\frac{\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2^{1/2}.2^{1/3}}{2^{1/4}} = 2^{1/2+1/3-1/4}$$

$$2^{\frac{6+4-3}{12}} = 2^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{2^7}$$

Propriedade: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$ a > 0

Vamos demonstrar:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^1}} = \sqrt[n]{\left(a^{1/p}\right)^1} = \left(a^{1/p}\right)^{1/n} = a^{\frac{1}{p.n}} = \sqrt[np]{a^1}$$

Ex$_1$: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[6]{5}$ ou $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5^1}} = \sqrt[3]{\left(5^{1/2}\right)^1} = \left(5^{1/2}\right)^{1/3} = 5^{1/6} = \sqrt[6]{5}$

Propriedade: seja $\sqrt[n]{a^p}$ se “n” e “p” possuem divisores em comum, então simplifique-os.

Ex: $\sqrt[12]{16} = \sqrt[12 \div 4]{2^{4 \div 4}} = \sqrt[3]{2^1}$

Comentário: quando o radicando é um número real positivo a simplificação é possível e imediata. Mas quando é uma variável então a simplificação somente será possível se a base de radicando é positiva.

Ex: $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{a}$ somente se $a \geq 0$

$\forall a \in$ R+

Agora se o índice é ímpar a simplificação é possível e imediata,e válida para todos os valores dos reais.

$\sqrt[15]{a^3} = \sqrt[5]{a^1}$ $a \in$ R

Fatoração

Fatorar é transformar equações algébricas em produtos de duas ou mais expressões, chamadas fatores.

Ex: ax + ay = a.(x+y)

Existem vários casos de fatoração como:

1) **Fator Comum em evidência**

Quando os termos apresentam fatores comuns
Observe o polinômio:
ax + ay » Ambos os termos apresentam o fator ***a*** em evidência.
Assim: ax + ay = a.(x+y)
Forma fatorada

Exercícios : Fatore:

a) bx + by - bz = b.(x+y-z)
b) (a+b)x + (a+b)y = (a+b).(x+y)

2) **Fatoração por agrupamento**

Consiste em aplicar duas vezes o caso do fator comum em alguns polinômios especiais.
Como por exemplo:

ax + ay + bx + by

Os dois primeiros termos possuem em comum o fator **a** , os dois últimos termos possuem em comum o fator **b**. Colocando esses termos em evidência:
a.(x+y) + b.(x+y)
Este novo polinômio possui o termo (x+y) em comum. Assim colocando-o em evidência:
(x+y).(a+b)

Ou seja: ax + ay + bx + by = (x+y).(a+b)

Exs: Fatore:

a) $x^2 - 3x + ax - 3a = x.(x-3) + a(x-3) = (x-3).(x+a)$

x é fator comum — **a** é fator comum — **(x-3)** é fator comum — Forma fatorada

3) **Fatoração por diferença de quadrados:**

Consiste em transformar as expressões em produtos da soma pela diferença, simplesmente extraindo a raiz quadrada de cada quadrado

Assim: $x^2 - 9 = (x+3).(x-3)$

Exercícios: Fatore:

a) $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$
b) $16a^2 - 1 = (4a+1).(4a-1)$
c) $1 - 16x^4 = (1+4x^2).(1-4x^2) = (1+4x^2).(1+2x).(1-2x)$

Note que é possível fatorar a expressão duas vezes

4) Fatoração do trinômio quadrado perfeito:

O trinômio que se obtém quando se eleva um binômio ao quadrado chama-se trinômio quadrado perfeito.
Por exemplo, os trinômios ($a^2 + 2ab + b^2$) e ($a^2 - 2ab + b^2$) são quadrados perfeitos porque são obtidos quando se eleva (a+b) e (a-b) ao quadrado, respectivamente.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Assim:

$$4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$\sqrt{4x^2}$ $\qquad$ $\sqrt{9y^2}$

2x $\qquad$ 3y

2.2x.3y = 12xy » note que é igual ao segundo termo de $4x^2 - 12xy + 9y^2$

Portanto trata-se de um trinômio quadrado perfeito.

$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$ » forma fatorada

Sinal

Logo: $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$ » forma fatorada

Sinal

Exs:

a) $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

b) $16x^2 + 24xy + 9y^2 = (4x+3y)^2$

*Convém lembrarmos que ao fatorarmos uma expressão algébrica, devemos fatorá-la por completo:

Exercícios:

a) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$

b) $25a^4 - 100b^2 = 25.(a^4 - 4b^2) = 25(a^2 + 2b).(a^2 - 2b)$